Universidad Nacional Autónoma de México

Profesor: Pablo Barrera Sánchez

Asignatura: Geometría Analítica I

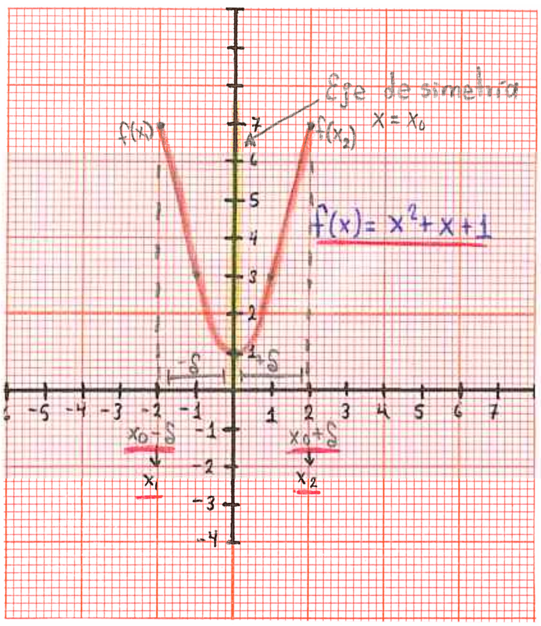
Alumna: Yadira del Carmen Sántiz López

Grupo: 4052

Tarea: 04

Justificación de la idea de "propiedad de eje de simetría"

$$f(x_0-\delta)=f(x_0+\delta)$$



PROPIEDAD DE SIMETRÍA Ó EJE DE SIMETRÍA.

1. Consideramos al eje de simetría como $x=x_0$ de $f(x)=ax^2+bx+c$
2. Sabemos que en la función de segundo grado $a\neq 0$, $x_1\neq x_2$ y $f(x_1)=f(x_2)$
3. Entonces para saber cuánto vale x_1 y x_2, tenemos que de $x=x_0$ (eje de simetría) hay una distancia hacía ambos puntos que podemos denotar como "δ". Por tanto, $x_1=x_0-\delta$ y $x_2=x_0+\delta$. (el signo de δ depende de la orientación a la que se encuentre x_1 ó x_2 en la recta).
4. Ahora, debemos recordar que independientemente de x_1 y x_2, $f(x_1)$ siempre será igual $f(x_2)$. Esto es:

$$f(x_1)=f(x_2) \quad \text{y como } x_1=x_0-\delta,\ x_2=x_0+\delta$$

Sustituyendo x_1 y x_2 (sus valores) en $f(x_1)=f(x_2)$ tenemos:

$$f(x_0-\delta)=f(x_0+\delta)$$

Por tanto, para $f(x)=ax^2+bx+c$; sin importar si a,b,c $(a\neq 0)$ se tiene que el eje de simetría de la función se determina por:

$$\boxed{f(x_0-\delta)=f(x_0+\delta)}$$

Pero también en la parábola podemos hallar el vértice o punto mínimo de $f(x)=ax^2+bx+c$.

Si observamos la gráfica anterior tenemos que: el punto medio del segmento x_1x_2 es el vértice de la parábola. Esto es:

$$\boxed{V \text{ ó } x^* = \frac{x_1+x_2}{2}} \text{ (punto mínimo de } f(x))$$

Y esto podemos comprobarlo. Si sabemos que $f(x_1)=f(x_2)$, entonces tenemos que:

$$f(x_1)=f(x_2)$$
$$ax_1^2+bx_1+\cancel{c}=ax_2^2+bx_2+\cancel{c}$$
$$a(x_1^2-x_2^2)=b(x_2-x_1)$$
$$a(x_1-x_2)(x_1+x_2)=b(x_2-x_1)$$
$$a(x_1+x_2)=\frac{b(x_2-x_1)}{(x_1-x_2)}$$
$$a(x_1+x_2)=\frac{b\cancel{(x_2-x_1)}}{-\cancel{(x_2-x_1)}}$$
$$a(x_1+x_2)=-b$$
$$(x_1+x_2)=-\frac{b}{a}$$

$$\boxed{x^* \Rightarrow \frac{(x_1+x_2)}{2}=\frac{-b}{2a}}$$

∴ Para determinar el vértice de $f(x)=ax^2+bx+c$; donde a,b,c tienen distintos valores y $a\neq 0$, se procede a calcularlo usando la expresión:

$$\text{Vértice } (x^*)=\frac{-b}{2a}=\frac{(x_1+x_2)}{2}$$

Descripción del procedimiento para determinar el eje de simetría de la parábola $f(x)=ax^2+bx+c$ usando la propiedad de simetría:

$$f(x_0-\delta)=f(x_0+\delta)$$

Pasos:

- 1. Establecemos que debemos hallar el eje de simetría de $f(x)=ax^2+bx+c$
- 2. Determinamos que sólo podemos hacerlo usando la expresión:

$$f(x_0-\delta)=f(x_0+\delta)$$

- 3. Ahora, evaluamos $f(x)$ considerando que x tendrá dos valores $(x_0-\delta)$ y $(x_0+\delta)$ según la propiedad de simetría. Entonces, esto sería:

$$a(x_0-\delta)^2+b(x_0-\delta)+c=a(x_0+\delta)^2+b(x_0+\delta)+c$$

- 4. Después de esto, desarrollamos la igualdad:

$$a[x_0^2-2x_0\delta+\delta^2]+bx_0-b\delta+c=a[x_0^2+2x_0\delta+\delta^2]+bx_0+b\delta+c$$
$$ax_0^2-2x_0\delta a+a\delta^2+bx_0-b\delta+c=ax_0^2+2x_0\delta a+a\delta^2+bx_0+b\delta+c$$

- 5. Luego, simplificamos la expresión por términos semejantes:

$$\cancel{ax_0^2}-\cancel{ax_0^2}-2x_0\delta a-2x_0\delta a+\cancel{a\delta^2}-\cancel{a\delta^2}+\cancel{bx_0}-\cancel{bx_0}-b\delta-b\delta+\cancel{c}-\cancel{c}=0$$
$$-4x_0\delta a-2b\delta=0$$

- 6. De la simplificación se obtiene $-4x_0\delta a-2b\delta=0$. Partiendo de esta expresión despejamos $\underline{x_0}$.

$$-4x_0\delta a-2b\delta=0$$
$$-4x_0\delta a=2b\delta$$
$$x_0=\frac{2b\cancel{\delta}}{-4\cancel{\delta}a}=-\frac{1b}{2a}$$
$$x_0=\frac{-b}{2a}$$

▸ ∴ el eje de simetría de $f(x)=ax^2+bx+c$ es $x_0=\frac{-b}{2a}$

Determinar el eje de simetría de la parábola $f(x)=ax^2+bx+c$ usando la propiedad de simetría:

$$\boxed{f(x_0-\delta)=f(x_0+\delta)}$$

- Se resuelve evaluando la función $f(x)=ax^2+bx+c$ considerando, según la propiedad de simetría, que $x_1=(x_0-\delta)$ y $x_2=(x_0+\delta)$. Entonces:

$$a(x_0-\delta)^2+b(x_0-\delta)+c=a(x_0+\delta)^2+b(x_0+\delta)+c$$
$$a[x_0^2-2x_0\delta+\delta^2]+b(x_0-\delta)+c=a[x_0^2+2x_0\delta+\delta^2]+b(x_0+\delta)+c$$
$$ax_0^2-2x_0\delta a+a\delta^2+bx_0-b\delta+c=ax_0^2+2x_0\delta a+a\delta^2+bx_0+b\delta+c$$
$$\cancel{ax_0^2}-\cancel{ax_0^2}-2x_0\delta a-2x_0\delta a+\cancel{a\delta^2}-\cancel{a\delta^2}+\cancel{bx_0}-\cancel{bx_0}-b\delta-b\delta+\cancel{c}-\cancel{c}=0$$
$$-4x_0\delta a-2b\delta=0$$
$$-4x_0\delta a=2b\delta$$
$$x_0=\frac{2b\delta}{-4\delta a}$$
$$x_0=\frac{2b}{-4a}$$
$$x_0=-\frac{1b}{2a}$$
$$x_0=\frac{-b}{2a}$$

∴ el eje de simetría, de $f(x)=ax^2+bx+c$ donde $a\neq 0$ y a,b,c con distintos valores, estará determinado por:

$$\boxed{-\frac{b}{2a}}$$