Diseño Asistido por Computador

Cuerpos Geométricos: Clasificación y propiedades

Fernando Guillem Ortiz
(ferguior@fiv.upv.es)
Ramón Claramunt Viana
(josclavi@fiv.upv.es)

Índice

1. Introducción

2. Poliedros

Los poliedros son cuerpos geométricos formados únicamente por figuras geométricas planas.

2.1. Regulares

Los poliedros regulares son aquellos cuyas caras son todas polígonos regulares de igual medida y con ángulos poliedros iguales. Asímismo, cumplen que haya esfera interior tangente a todas las caras, una esfera media o intersfera tangente a todas las aristas, y una circunsfera tangente a todos los vértices. Así es como los descubrió Platón, pero estos no son más que la familia de los poliedros convexos.

En 1972, el mateático Euler demostró que, la suma del número de caras y de vértices de un poliedro convexo, menos el número de aristas es siempre 2.

$$Caras + Vertices = Aristas + 2$$

De esto que se deduce que sólo hay cinco poliedros regulares convexos que cumplan esta regla [3]:

- Tetraedro
- Hexaedro
- Octaedro
- Dodecaedro
- Icosaedro

Existen otro tipo de poliedros regulares, los llamados cóncavos, en los que el algún plano contenido en alguna de sus caras parte el poliedro en dos trozos. Son cuatro los poliedros que siguen esta descripción, también denominados sólidos "Kepler-Poinsot"[8]:

- Pequeño dodecaedro estrellado
- Gran dodecaedro estrellado
- Gran dodecaedro
- Gran icosaedro

En este caso, la característica de Euler sólo en cumple para el gran dodecaedro y estrellado y el gran icosaedro, por lo que no son equivalentes topológicos de la esfera como los mencionados sólidos platónicos. Y esto es debido a que estos cuerpos cubren su esfera circunscrita más de una vez con los centros de las caras como puntos direccionales en los sólidos con caras en forma de pentagrama, mientras que en los otros son los vértices los que cumplen esa función [7].

Existe una modificación de la fórmula de Euler realizada por Arthur Cayley, que usa la densidad de los poliedros(D), y la densidad de los polígonos en los vértices(d_v) y las caras(d_f), que vale tanto para poliedros cóncavos como para convexos:

$$d_v V - E + d_f F = 2D$$

2.1.1. Tetraedro

El tetraedro es un poliedro regular de 4 caras, siendo cada una de ellas un triángulo equilátero [20]. Aparte de ser un poliedro regular, es uno de los 8 poliedros convexos denominados deltaedros, que son poliedros cuyas caras son triángulos equiláteros iguales[23]. Reciben este nombre por la letra griega delta ($\triangle$), cuya forma es la de un triángulo equilátero.

Características Características matemáticas de los tetraedros regulares [21] [22]:

- Vértices: 4
- Aristas: 6
- Aristas por vértice: 3
- Seno del ángulo entre caras: $\frac{2}{3} \cdot \sqrt{2}$.
- Ángulos diédricos: 1.23 rad / 70°
- Ángulos planos: $\frac{\pi}{3}$ rad / 60°
- Área de la superficie exterior: $\sqrt{3} \cdot a^2$
- Volúmen: $\frac{\sqrt{3}}{12} \cdot a^3$
- Radio de la esfera circunscripta: $\frac{\sqrt{6}}{4} \cdot a$
- Radio de la esfera inscripta: $\frac{\sqrt{6}}{12} \cdot a$

Curiosidades Para la escuela pitagórica el tetraedro representaba el elemento fuego, puesto que pensaban que las partículas (átomos) del fuego tenían esta forma [22].

(tetraedro.u3d)

2.1.2. Hexaedro

El hexaedro es un polígono convexo de 6 caras [24]. Al ser convexo, sus caras deben tener forzosamente 5 lados como máximo. En esta sección nos centraremos en el hexaedro regular (más conocido como cubo), en el que sus lados tienen 4 caras y son cuadrados perfectos.

Características A continuación, se exponen las características de los hexaedros regulares [21]

- Vértices: 8
- Aristas: 12
- Aristas por vértice: 3
- Seno del ángulo entre caras: 1
- Ángulos diédricos : $\frac{\pi}{2}$ / 90º
- Ángulos planos: $\frac{\pi}{2}$ / 90º

- Área de la superficie exterior: $6 \cdot a^3$
- Volúmen: a^3
- Radio de la esfera circunscripta: $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$
- Radio de la esfera inscripta: $\frac{1}{2} \cdot a$

Curiosidades En la escuela pitagórica, el hexaedro representa al elemento tierra [25].

(modelo.u3d)

2.1.3. Octaedro

El octaedro es un poliedro de 8 caras que puede ser cóncavo o convexo y cuyas caras han de tener como máximo 7 lados. En el octaedro regular, que es el que vamos a estudiar, las caras están formadas por triángulos equiláteros [26]. Este poliedro también forma parte del grupo de poliedros deltaedros [23].

Características A continuación se exponen las características de los octaedros regulares [21].

- Vértices: 6

- Aristas: 12
- Aristas por vértice: 4
- Seno del ángulo entre caras: $\frac{2}{3} \cdot \sqrt{2}$
- Ángulos diédricos: 1.23 rad / 70.5º
- Ángulos planos: $\frac{\pi}{3}$ / 60º
- Área de la superficie exterior: $2 \cdot \sqrt{3} \cdot a^2$
- Volúmen: $\frac{\sqrt{2}}{3} \cdot a^3$
- Radio de la esfera circunscripta: $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a$
- Radio de la esfera inscripta: $\frac{\sqrt{6}}{6} \cdot a$

Curiosidades En la escuela pitagórica, el octaedro representaba al elemento aire [25].

(octaedro.u3d)

2.1.4. Dodecaedro

El dodecaedro es un poliedro de 12 caras, teniendo dichas caras que tener obligatoriamente 11 lados como máximo. En los dodecaedros regulares, el polígono que conforma las caras es un pentágono regular [27].

Características Características que posee el dodecaedro regular [21].

- Vértices: 20
- Aristas: 30
- Aristas por vértice: 3
- Seno del ángulo entre caras: $\frac{2}{5} \cdot \sqrt{5}$
- Ángulos diédricos: 1.107 rad / 63,43º aprox.
- Ángulos planos: 108º
- Área de la superficie exterior: $3 \cdot \sqrt{25 + 10 \cdot \sqrt{5}} \cdot a^2$
- Volúmen: $\frac{\sqrt{15+7\cdot\sqrt{5}}}{4} \cdot a^3$
- Radio de la esfera circunscripta: $\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4} \cdot a$
- Radio de la esfera inscripta: $\frac{\sqrt{250+110\cdot\sqrt{5}}}{20} \cdot a^3$

Curiosidades En la escuela pitagórica, el dodecaedro representaba al Universo [25].

(dodecaedro.u3d)

2.1.5. Icosaedro

El icosaedro [28] es un poliedro formado por 20 caras, cuyo máximo número de lados es de 19. El icosaedro regular es el último de los poliedros llamados platónicos y sus caras son triángulos equiláteros, por lo que también es un deltaedro [23].

Características Características de los icosaedros regulares [21]:

- Vértices: 12
- Aristas: 30
- Aristas por vértice: 5
- Seno del ángulo entre caras: $\frac{2}{3}$
- Ángulos diédricos:
- Ángulos planos: $\frac{\pi}{3}$ / 60º

- Área de la superficie exterior: $5 \cdot \sqrt{3} \cdot a^2$
- Volúmen: $\frac{5 \cdot \sqrt{3+\sqrt{5}}}{12} \cdot a^3$
- Radio de la esfera circunscripta: $\frac{\sqrt{10+2 \cdot \sqrt{5}}}{4} \cdot a$
- Radio de la esfera inscripta: $\frac{\sqrt{42+18 \cdot \sqrt{5}}}{12} \cdot a$

Curiosidades En la escuela pitagórica, el icosaedro representaba al elemento agua [25].

(modelo.u3d)

2.2. Sólidos de Kepler-Poinsot

Los poliedros de Kepler nacen de la eliminación de la condición de convexidad de los poliedros regulares platónicos[?].

Los dos primeros poliedros descubiertos datan de los siglos XV y XVI y son el gran dodecaedro estrellado y el pequeño dodecaedro estrellado. Estos poliedros fueron definidos (que no descubiertos) por Johannes Kepler (de ahí su nombre) en 1619, puesto quien fue el que se dio cuenta de que cumplían con la definición de sólidos regulares [29].

Posteriormente, Louis Poinsot descubrió los dos poliedros restantes que completan el grupo de los sólidos de Kepler-Poinsot: el gran icosaedro y el gran dodecaedro[?].

2.2.1. Gran dodecaedro estrellado

El gran dodecaedro estrellado esta compuesto por 12 caras pentagrámicas intersecatadas, coniciendo 3 en cada vértice [31].

Características

- Vértices: 20
- Aristas: 30
- Caras: 12

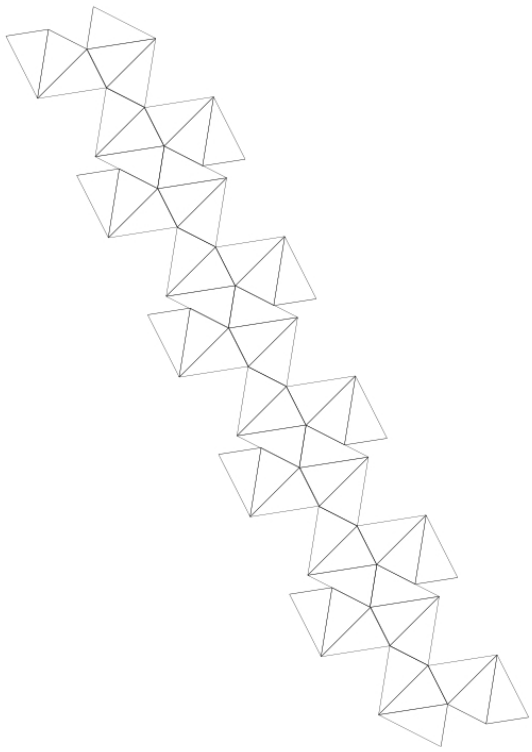

Figura 1: El entorno de programación Visual Prolog

(Gran Dodecaedro Estrellado)

Desarrollo

2.2.2. Pequeño dodecaedro estrellado

El pequeño dodecaedro estrellado es bastante similar al gran dodecaedro estrellado. También esta formado por 12 caras pentagrámicas, pero en lugar de intersectar 3 por vértice, intersecta 5 [32].

Características

- Vértices: 12
- Aristas: 30
- Caras: 12

Peq. Dodecaedro

2.2.3. Gran dodecaedro

El gran dodecaedro también se compone de 12 caras pentagrámicas, con 5 pentágonos coincidiendo en cada vértice intersectados entre ellos [33].

Características

- Vértices: 12
- Aristas: 30
- Caras: 12

(Gran Dodecaedro)

2.2.4. Gran icosaedro

El gran icosaedro esta compuesto por 20 caras triangulares intersectadas, coincidiendo 5 triángulos en cada vértice en una secuencia pentagrámica [34].

- Vértices: 20
- Aristas: 30
- Caras: 20

(Gran Icosaedro)

2.3. Irregulares

Al contrario que los poliedros regulares, los irregulares no tienen porqué tener todas las caras iguales, ni ser formados por polígonos regulares.

3. Cuerpos redondos

Los cuerpos redondos tienen la peculiaridad de estar formados parcial o totalmente por figuras geométricas curvas. Son representables en tres dimensiones, ya que poseen altura, anchura y largaria. Y también son conocidos como cuerpos de revolución ya que pueden obtenerse a partir de una figura que gira alrededor de un eje. Podríamos clasificarlos en tres grupos diferentes de cuerpos redondos [9]:

- Cilindros
- Conos
- Sólidos de revolución

3.1. Cilindros

Los cilindros son cuerpos redondos formados por una superficie curva cerrada que une dos bases idénticas. La superficie de éstas se calcula como la superficie de un círculo, es decir: $\pi * r^2$

Y la superficie del cuerpo cilíndrico se calcula como la de un rectángulo, siendo la altura igual a la altura del cilindro, y la base igual a la longitud de la circunferencia que tiene por base, es decir: $2\pi r$

Por tanto, la superficie total del cilindro es la suma de las superficies de las bases mas la de la superficie de del cuerpo cilíndrico.

(modelo.u3d)

A parte del cilindro que podemos apreciar en la figura, podemos encontrar variaciones, como el cilindro oblicuo, en el que el central del cilindro no es perpendicular las bases; o el cilindro elíptico, en que las bases son elipses.

(cilindroEliptico.u3d)

3.2. Conos

Un cono es sólido de revolución prodcido por el giro de un triángulo rectángulo sobre uno de sus catetos. El otro cateto conforma un círculo que resulta ser la base del cono. Desde ésta surgen los segmentos llamados generatrices hacie el vértice , que es el punto de altura máxima del cono. Estas generatrices son las hipotenusas de los triángulos que conforman el cono.

(cono.u3d)

Atendiendo a la forma, podemos diferenciar varios tipos de conos [11]:

- **Cono recto**, donde el vértice equidista de la base circular.
- **Cono oblicuo**, donde el vértice no equidista de la base.
- **Cono elíptico**, donde la base no es una circunferencia sino una elipse.

(conoOblicuo.u3d)

(conoEliptico.u3d)

El área de la superficie cónica es se calcula como la suma del área de la base más el área de la superficie lateral [13], esto es:

$$A_{TOTAL} = A_{LATERAL} + A_{BASE} = \pi r g + \pi r^2$$

donde g es la genaratriz, calculada como:

$$g = \sqrt{h^2 + r^2}$$

siendo h la altura del cono y r el radio de la base.

El volumen de un cono se puede calcular como un tercio del volumen de un cilindro de iguales dimensiones. Por tanto:

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Por último, cabe mencionar un último tipo de cono que no se ciñe a las reglas especificadas con anterioridad. Éste sería el cono truncado [2], que siendo similar a un cono, no posee vértoce y sí una base superior de diferente medida que la inferior. Este cuerpo se consigue mediante la revolución de un trapecio rectángulo sobre su eje de simetría [14].

(conoTruncado.u3d)

Así pues, el cálcula de su área y volumen es diferente al de los otros conos. En este caso, el área total será la suma de las áreas de las dos bases y del área de la superficie lateral [16]:

$$A_T = A_{BASES} + A_{LATERAL} = \pi(R^2 + r^2) + \pi(R + r)\sqrt{h^2 + (R - r)^2} = \pi[(R^2 + r^2) + (R + r)g]$$

siendo R el radio de la base más grande y r el de pequeño. Y el volumen:

$$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$$

3.3. Sólidos de revolución

Son cuerpos redondos limitados por una generatriz curva que rota alrededor de un eje. Se pueden clasificar en varios tipos, los limitados por superficies cuádricas y los toros [9]:

- **Limitados por superficies cuádricas**:
  - Esfera: La generatriz es una circunferencia.
  - Semiesfera: La generatriz es una semicircunferencia.
  - Elipsoide: La generatriz es una elipse.

- Paraboloide:
- Hiperboloide

- **Toro**: Se obtiene cuando una circunferencia o una elipse coplanares a un eje central y situadas fuera de éste, giran alrededor de él.

3.3.1. Esfera

Como comentado anteriormete, la esfera se produce al revolucionar una circunferencia sobre sí misma. Esto causa que todos los puntos de la esfera estén a la misma distancia del centro de ésta. Por tanto el radio de la esfera es la distancia entre cualquier punto de la superficie esférica y el centro de la misma [17].

(esfera.u3d)

Otra de las curiosidades de las esferas es que las secciones producidas por la intersección con un plano o con otras esferas son siempre circulares [18]. Y es la única superficie del espacio que cumple esta propiedad. En la intersección con el plano, como la distancia del plano al centro(d) será menor que el radio de la esfera(r), podemos calcular el radio se la sección resultante por medio del teorema de Pitágoras de la siguiente forma:

$$r' = \sqrt{r^2 - d^2}$$

En cuanto a la superficie y el volumen de la esfera, podemos hallarlos fácilmente de la siguiente forma:

$$S = 4\pi r^2$$

$$V = 4\pi \frac{r^2}{3}$$

3.3.2. Semiesfera

(semiesfera.u3d)

3.3.3. Elipsoide

Un elpsoide de revolución o esferoide es una superficie generada por una elipse al girar sobre uno de sus dos ejes de simetría [19]. En este caso, al contrario que con la esfera, todos los puntos no están a la misma distancia del centro. Según sobre que eje de simetría se produzca el giro, el elipsoide adquiere dos formas diferentes:

- de **pelota de rugby**, cuando el eje de revolución escogido es el más largo de los dos.
- de **canto rodado**, cuando se revoluciona sobre el eje corto de la elipse.

(elipsoide.u3d)

(elipsoideRugby.u3d)

Podemos calcular el volumen de este cuerpo a partir del de una esfera, asumiendo que el elipsoide se obtiene estirando esta esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ en los ejes x, y, z con unos factores a,b y c respectivamente. Es decir, transformando la coordenada x en $x * a$ y así con el resto. Por tanto, conociendo el volumen de la esfera unitaria $V = \frac{4\pi}{3}$; podemos obtener el de el elipsoide:

$$V = \frac{4\pi abc}{3}$$

3.3.4. Paraboloide

(paraboloide.u3d)

3.3.5. Hiperboloide

(hiperboloide.u3d)

3.3.6. Toro

(toro.u3d)

Referencias

[1] Memo: Geometría, http://www.memo.com.co/fenonino/aprenda/geometria/geomet7.html, 02-04-2010

[2] La Escuela Digital: Geometría, http://www.escueladigital.com.uy/geometria/5_cuerpos.htm, 02-04-2010

[3] Profesor en Línea, http://www.profesorenlinea.cl/geometria/cuerposgeometricos.htm, 02-04-2010

[4] JReality, http://www3.math.tu-berlin.de/jreality/index.php, 12-04-2010

[5] Tente 3D en formato PDF, http://es.tente3d.wikia.com/wiki/Tente_3D_en_formato_PDF, 12-04-2010

[6] Poliedros regulares, http://perso.wanadoo.es/jpm/poliedros%20regulares/poliedros.html, 22-04-2010

[7] Sólidos de Kepler-Poinsot, http://es.wikipedia.org/wiki/S\penalty\@M\hskip\z@skip\unhbox\voidb@x\bgroup\let\unhbox\voidb@x\setbox\@tempboxa\hbox{o\global\mathchardef\accent@spacefactor\spacefactor}\accent19o\egroup\spacefactor\accent@spacefactor\penalty\@M\hskip\z@skip\setbox\@tempboxa\hbox{o\global\mathchardef\accent@spacefactor\spacefactor}\spacefactor\accent@spacefactorlidos_de_Kepler-Poinsot, 22-04-2010

[8] Kepler-Poinsot Solids, http://mathworld.wolfram.com/Kepler-PoinsotSolid.html, 22-04-2010

[9] Cuerpo redondo, http://webdelprofesor.ula.ve/nucleotrujillo/alperez/teoria/cap_01a-conceptos_geometricos/06b-solido-cu_red.htm, 23-04-2010

[10] Poliedros y cuerpos redondos, http://www.aplicaciones.info/decimales/geoes01.htm, 23-04-2010

[11] Wikipedia: Cono, http://es.wikipedia.org/wiki/Cono_(geometr%C3%ADa), 23-04-2010

[12] Thales: Cono, http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0263-02/geometria/cono.html, 23-04-2010

[13] Vitutor: Cono, http://www.vitutor.net/2/2/31.html, 23-04-2010

[14] Wikipedia: Tronco de cono, http://es.wikipedia.org/wiki/Tronco_de_cono, 23-04-2010

[15] Geoka, http://www.geoka.net/poliedros/cono_truncado.html, 23-04-2010

[16] Geometría de percálculo, http://publicacion.geometriadeprecalculo.com/capitulo-3/36-cono-truncado.html, 23-04-2010

[17] Wikipedia: Esfera, http://es.wikipedia.org/wiki/Esfera, 23-04-2010

[18] Enciclopedia Libre Universal: Esfera, http://enciclopedia.us.es/index.php/Esfera, 23-04-2010

[19] Enciclopedia Libre Universal: Elipsoide,http://enciclopedia.us.es/index.php/Elipsoide, 23-04-2010

[20] Ángel Taibo Fernández, *Geometría descriptiva y sus aplicaciones, Volumen 2*, Tebar Flores.

[21] Los sólidos platónicos ,http://www.luventicus.org/articulos/03Tr001/index.html

[22] Wikipedia: Tetraedro, http://es.wikipedia.org/wiki/Tetraedro

[23] Wikipedia: Deltaedro, http://es.wikipedia.org/wiki/Deltaedro

[24] Wikipedia: Hexaedro, http://es.wikipedia.org/wiki/Hexaedro

[25] Pitágoras y la ciencia moderna, http://www.freemasons-freemasonry.com/pitagoras.html

[26] Wikipedia: Octaedro, http://es.wikipedia.org/wiki/Octaedro

[27] Wikipedia: Dodecaedro, http://es.wikipedia.org/wiki/Dodecaedro

[28] Wikipedia: Icosaedro, http://es.wikipedia.org/wiki/Icosaedro

[29] Wikipedia: Solidos de Kepler-Poinsot http://es.wikipedia.org/wiki/Solidos_de_Kepler-Poinsot

[30] Edith Padrón Fernández *De cómo la geometría entrelaza ciencia y arte: Historia de un poliedro* Universidad de La Laguna

[31] Wikipedia: Great stellated dodecahedron, http://en.wikipedia.org/wiki/Great_stellated_dodecahedron

[32] Wikipedia: Small stellated dodecahedron, http://en.wikipedia.org/wiki/Small_stellated_dodecahedron

[33] Wikipedia: Great dodecahedron, http://en.wikipedia.org/wiki/Great_dodecahedron

[34] WIkipedia:Great icosahedron, http://en.wikipedia.org/wiki/Great_icosahedron