Problemas de Hilbert

De Wikipedia, la enciclopedia libre

Los **problemas de Hilbert** conforman una lista de 23 problemas matemáticos compilados por el matemático alemán David Hilbert para la conferencia en París del Congreso Internacional de Matemáticos de 1900. Los problemas estaban todos por resolver en aquel momento, y varios resultaron ser muy influyentes en la matemática del siglo XX. Hilbert presentó diez de los problemas (1, 2, 6, 7, 8, 13, 16, 19, 21 y 22) en la conferencia, en un acto el 8 de agosto en La Sorbona. La lista completa se publicó más adelante.

Índice

- 1 Naturaleza e influencia de los problemas
- 2 Los problemas como manifiesto de Hilbert
- 3 Dos docenas redondas
- 4 Resumen
- 5 Información tabulada
- 6 Véase también
- 7 Notas al pie
- 8 Referencias
- 9 Enlaces externos

Naturaleza e influencia de los problemas

Aunque se han producido intentos de repetir el éxito de la lista de Hilbert, ningún otro conjunto tan variado de problemas o conjeturas ha tenido un efecto comparable en el desarrollo del tema y obtenido una fracción importante de su celebridad. Por ejemplo, las conjeturas de André Weil son famosas pero fueron poco publicitadas. Quizá su propio temperamento evitó que él intentase ponerse en posición de competir con Hilbert. John von Neumann produjo una lista, pero no obtuvo reconocimiento universal.

A primera vista, este éxito podría atribuirse a la eminencia del autor de los problemas. Hilbert estaba en la cúspide de su poder y reputación en aquel momento y continuó dirigiendo la sobresaliente escuela de matemática en la Universidad de Göttingen. Un examen más cuidadoso revela que el asunto no es tan simple.

La matemática de aquel tiempo era aún discursiva: la tendencia a sustituir palabras por símbolos y apelaciones a la intuición y conceptos mediante axiomática pura seguía subyugada, aunque se volvería fuerte durante la siguiente generación. En 1900, Hilbert no pudo acudir a la teoría axiomática de conjuntos, la integral de Lebesgue, los espacios topológicos o la tesis de Church, que cambiarían sus respectivos campos de forma permanente. El análisis funcional, fundado en cierto modo por el propio Hilbert como noción central de los testigos del espacio de Hilbert, no se había diferenciado aún del cálculo de variaciones; hay en la lista dos problemas de matemática variacional, pero nada, como podría asumirse inocentemente, sobre teoría espectral (el problema 19 tiene una conexión con la hipoelipticidad).

La lista no fue predictiva en ese sentido: no consiguió plasmar o anticipar el fulgurante ascenso que experimentarían la topología, la teoría de grupos y la teoría de la medida en el siglo XX, así como no previó la manera en que iba a avanzar la lógica matemática. Por tanto, su valor documental es el de *ensayo*: una visión parcial, personal. Sugiere algunos programas de investigación y algunas direcciones por seguir sin fin concreto.

De hecho, muchas de las preguntas daban una falsa idea del matemático profesional del siglo XXI, o incluso de 1950, en que la forma de una solución a una buena pregunta tomaría la forma de un artículo publicado en una publicación matemática. Si este fuera el caso de todos los veintitrés problemas, se habría simplificado el comentario hasta el punto de poder dar una referencia a una revista, o considera la pregunta como abierta todavía. En algunos casos el lenguaje usado por Hilbert se sigue considerando un tanto "negociable", en cuanto al significado real de la formulación del problema (en ausencia, repetimos, de fundamentos axiomáticos, basados en matemática pura, empezando con el propio trabajo de Hilbert sobre geometría euclidiana, pasando por el *Principia Mathematica*, y terminando con el grupo Bourbaki y el "terrorismo intelectual" para terminar el trabajo). Los problemas Primero y Quinto se encuentran, quizá sorprendentemente, en un estado de formulación de una claridad menos que total (véanse las notas). En casos como el Vigésimo, el problema se podría leer de forma razonable en una versión "interna", relativamente accesible, en la que el lector puede saber a qué estaba apuntando Hilbert; o como una penumbra "externa" y especulativa.

Dicho todo esto, por tanto, la razón más importante es la gran rapidez con la que aceptó la lista de Hilbert la comunidad matemática de aquel momento (lo cual es una fórmula menos convencional que ahora, ya que por entonces habían pocos líderes investigadores, que generalmente se encontraban en unos pocos países europeos y se conocían todos entre ellos). Los problemas se estudiaron con gran atención; resolver uno labró reputaciones.

El estilo fue al menos tan influyente como el contenido de los problemas. Hilbert solicitaba clarificaciones. Pidió soluciones en principio a preguntas algorítmicas, no a algoritmos prácticos. Pidió un fortalecimiento de los cimientos de partes de la matemática que a los no practicantes aún se antojaban guiadas por intuiciones opacas (el cálculo de Schubert y la geometría enumerativa).

Estas actitudes fueron adoptadas por muchos seguidores, aunque también fueron discutidas, y continúan siéndolo. Treinta años después, Hilbert había endurecido su postura: véase *ignorabimus*.

Los problemas como manifiesto de Hilbert

Está bastante claro que la lista de problemas, y su forma de discusión, estaban pensadas para ser influyentes. Hilbert no falló a las expectativas de la academia Alemana en cuanto a construcción de imperios, verbo programático, y establecimiento explícito de una dirección y reclamo de territorio para una escuela. Nadie habla ya de la 'escuela de Hilbert' en esos términos; ni gozaron los problemas de Hilbert de su momento como si hizo el *programa de Erlangen* de Felix Klein. Klein fue colega de Hilbert, y en comparación la lista de este último era mucho menos prescriptiva. Michael Atiyah ha caracterizado el programa de Erlangen como prematuro. Los problemas de Hilbert, por el contrario, mostraron la capacidad del experto de buscar el momento adecuado.

Si la 'escuela de Hilbert' tiene un significado, posiblemente se refiera a la teoría de operadores y al estilo de la física teórica que tomó los volúmenes *Hilbert-Courant* como canónicos. Como se señaló antes, la lista no establece directamente problemas sobre teoría espectral. Tampoco le dio relevancia al álgebra conmutativa (entonces se la conocía como teoría de ideales), su contribución algebraica más importante y mayor preocupación en sus días de la teoría de invariantes; lo cual, podría decirse, habría estado más en la línea de Klein. Ni, al menos superficialmente, predicó contra Leopold Kronecker, el oponente de Georg Cantor, del que había aprendido mucho pero cuyas actitudes casi detestaba (como queda documentado en la biografía de Constance Reid). El lector podría extraer amplias conclusiones de la presencia de la teoría de conjuntos en cabeza en la lista.

La teoría de funciones de variable compleja, la rama del análisis clásico que todo matemático puro debería conocer, está bastante olvidada: ni la conjetura de Bieberbach ni otra cuestión interesante, aparte de la hipótesis de Riemann. Uno de los objetivos estratégicos de Hilbert fue poner el álgebra conmutativa y la teoría de funciones complejas al mismo nivel; esto, sin embargo, llevaría 50 años (y aún no ha resultado en un cambio de lugares).

Hilbert tenía un pequeño grupo de pares: Adolf Hurwitz y Hermann Minkowski eran ambos amigos cercanos e iguales intelectuales. Hay un guiño a la geometría de números de Minkowski en el problema 18, y a su trabajo en las formas cuadráticas en el problema 11. Hurwitz fue el gran desarrollador de la teoría de la superficie de Riemann. Hilbert usó la analogía del cuerpo de funciones, una guía a la teoría algebraica de números mediante el uso de análogos geométricos, para desarrollar la teoría del cuerpo de clases dentro de su propia investigación, y esto queda reflejado en el problema 9, hasta cierto punto en el problema 12, y en los problemas 21 y 22. Por otro lado, el único rival de Hilbert en 1900 era Henri Poincaré, y la segunda parte del problema 16 es una cuestión de sistemas dinámicos al estilo de Poincaré.

Dos docenas redondas

Originalmente Hilbert incluyó 24 problemas en su lista, pero decidió excluir uno de ellos de la publicada. El "problema vigésimo cuarto" (en la teoría de la demostración, sobre un criterio de simplicidad y métodos generales) lo redescubrió en el año 2000 el historiador alemán Rüdiger Thiele, dentro de las notas manuscritas originales de Hilbert.

Resumen

De los problemas de Hilbert claramente formulados, los problemas 3, 7, 10, 11, 13, 14, 17, 19 y 20 tienen una solución aceptada por consenso. Por otro lado, los problemas 1, 2, 5, 9, 15, 18*, 21 y 22 tienen soluciones de aceptación parcial, pero existe cierta controversia al respecto de si la solución resuelve realmente el problema.

El * en el 18 indica que la solución a la ecuación de Kepler es una demostración asistida por computadora, una noción anacrónica para un problema de Hilbert y controvertida hasta cierto punto debido a que un lector humano no puede verificarla en tiempo razonable.

Esto deja sin resolver el 8 (la hipótesis de Riemann) y el 12, ambos dentro de la teoría de números. En esta clasificación los 4, 6, 16 y 23 son demasiado vagos como para que algún día se les pueda declarar resueltos. El problema 24 retirado también caería en esta clase.

Información tabulada

Los veintitrés problemas de Hilbert son los siguientes:

Problema	Explicación concisa	Estado del problema
1er	La hipótesis del continuo (esto es, no existe conjunto cuyo tamaño esté estrictamente entre el de los racionales y el de los números reales).	Se ha probado la imposibilidad de probarlo como cierto o falso mediante los axiomas de Zermelo-Fraenkel. No hay consenso al respecto de considerar esto como solución al problema.[1]

2º	Probar que los axiomas de la aritmética son consistentes (esto es, que la aritmética es un sistema formal que no supone una contradicción).	Parcialmente resuelto: hay quienes sostienen que se ha demostrado imposible de establecer en un sistema consistente, finitista y axiomático;[2] sin embargo, Gentzen probó en 1936 que la consistencia de la aritmética se deriva del buen fundamento del ordinal ϵ_0, un hecho sujeto a la intuición combinatoria.
3er	Dados dos poliedros de igual volumen, ¿es siempre posible cortar el primero en una cantidad finita de piezas poliédricas que puedan ser ensambladas de modo que quede armado el segundo?	Resuelto. Resultado: no, probado usando invariantes de Dehn.
4º	Construir todas las métricas cuyas rectas sean geodésicas.	Demasiado vago para decidir si se ha resuelto o no.[3]
5º	¿Son los grupos continuos grupos diferenciales de forma automática?	Resuelto por Andrew Gleason (1952).
6º	Axiomatizar toda la física.	▪ La mecánica clásica: Hamel (1903). ▪ La termodinámica: Carathéodory (1909). ▪ La relatividad especial: Robb (1914) y Caratheodory (1924) independientemente. ▪ La teoría de probabilidades: Kolmogórov (1930). ▪ La teoría cuántica de campos: Wightman a finales de los años 1950.
7º	¿Es a^b trascendental, siendo $a \neq 0,1$ algebraico y b irracional algebraico?	Resuelto. Resultado: sí, ilustrado por el teorema de Gelfond o el teorema de Gelfond-Schneider.
8º	La hipótesis de Riemann (la parte real de cualquier cero no trivial de la función zeta de Riemann es ½) y la conjetura de Goldbach (cada número par mayor que 2 se puede escribir como la suma de dos números primos).	Sin resolver.[4]
9º	Encontrar la ley más general del teorema de reciprocidad en cualquier cuerpo numérico algebraico.	Parcialmente resuelto.[5]
10º	Encontrar un algoritmo que determine si una ecuación diofántica polinómica dada con coeficientes enteros tiene solución entera.	Resuelto. Resultado: no, el teorema de Matiyasevich (1970) implica que no existe tal algoritmo.
11º	Resolver las formas cuadráticas con coeficientes numéricos algebraicos.	Parcialmente resuelto: ▪ Sobre los números racionales: Hasse (1923-1924). ▪ Sobre los números enteros: Siegel en los años 1930.
12º	Extender el teorema de Kronecker sobre extensiones abelianas de los números racionales a cualquier cuerpo numérico de base.	Sin resolver.
13º	Resolver todas las ecuaciones de 7º grado usando funciones de dos parámetros.	Resuelto negativamente por Vladímir Arnold y Andréi Kolmogórov en 1957.
14º	Probar la finitud de ciertos sistemas completos de funciones.	Resuelto. Resultado: no, en general, debido a un contraejemplo, Nagata (1962).
15º	Fundamento riguroso del cálculo enumerativo de Schubert.	Parcialmente resuelto, Van der Waerden a finales de los años 1930.
16º	Topología de las curvas y superficies algebraicas.	Sin resolver.
17º	Expresión de una función definida racional como cociente de sumas de cuadrados.	Resuelto. Resultado: se estableció un límite superior para el número de términos cuadrados necesarios, Pfister (1967). La solución negativa en general se debe a Du Bois (1967).
18º	¿Existe un poliedro irregular y que construya otros poliedros? ¿Cual es el apilamiento compacto más denso?	Resuelto.[6]
19º	¿Son siempre analíticas las soluciones de los Lagrangianos?	Resuelto por Bernstein (1904). Resultado: sí.
20º	¿Tienen solución todos los problemas variacionales con ciertas condiciones de	Resuelto. Ha supuesto un área importante de investigación durante el

	contorno?	siglo XX, culminando con las soluciones al caso no lineal.
21er	Probar la existencia de ecuaciones lineales diferenciales que tengan un grupo monodrómico prescrito.	Resuelto. Resultado: sí o no, dependiendo de una formulación más exacta del problema. Según Gray resuelto de forma negativa por Anosov y Bolibruch (1994).
22º	Uniformización de las relaciones analíticas por medio de funciones automórficas.	Resuelto por Koebe (1907) y Poincaré independientemente (1907).
23er	Extensión de los métodos del cálculo de variaciones.	Resuelto.

Véase también

- Problemas de Smale
- Problemas del milenio

Notas al pie

1. ↑ Se suele citar el resultado de independencia de Cohen, mostrando que la hipótesis del continuo es independiente de ZFC (los axiomas de Zermelo-Fraenkel, extendidos para incluir el axioma de elección) se cita a menudo para justificar que el primer problema ha sido resuelto. Un punto de vista contemporáneo es que podría ser el caso de que la teoría de conjuntos debería tener axiomas adicionales, capaces de resolver la situación.
2. ↑ Asunto de opinión, no compartida por todos. El resultado de Gentzen muestra de forma bastante precisa cuánto hace falta asumir para probar que los axiomas de Peano son consistentes. Se sostiene de forma general que el teorema de la incompletitud de Gödel muestra que no hay demostración finitista de que los AP sean consistentes (aunque el propio Gödel rechazó haber hecho esta inferencia [se necesita mejor referencia para esto, pero cf Dawson p.71ff "... Gödel creía también [como Hilbert] que ningún problema matemático quedaba más allá del alcance de la razón humana. Aun así sus resultados mostraron que el programa propuesto por Hilbert para validar esa creencia — su teoría de la demostración — no podría llevarse a cabo tal como quería Hilbert" (p.71) Véase también p.98ff para leer más sobre el 'procedimiento finito').
3. ↑ De acuerdo a Rowe y Gray (véase la referencia más adelante), la mayoría de los problemas han sido resueltos. Algunos no fueron definidos completamente, pero se ha progresado lo suficiente en ellos como para considerarlos «resueltos»; Rowe y Gray listan el cuarto problema como demasiado vago para decidir si se ha resuelto.
4. ↑ El problema 8 contiene dos problemas famosos, ambos aún sin resolver. El primero de ellos, la hipótesis de Riemann es uno de los siete problemas premiados del milenio, que pretendían ser los "Problemas de Hilbert" del siglo XXI.
5. ↑ El problema 9 ha sido resuelto en el caso abeliano, mediante el desarrollo de la teoría de cuerpos de clases; el caso no abeliano sigue sin resolver, si se interpreta eso como *teoría de cuerpos de clases no abelianas*.
6. ↑ Rowe y Gray también listan el problema 18º como "abierto" en su libro de 2000, porque el problema de apilamiento compacto (también conocido como conjetura de Kepler) estaba sin resolver, pero se ha propuesto una solución desde entonces (ver en referencias).

problema 2:

> Lo que sigue viene de Nagel y Newman, pp. 96 y 97: "Este impresionante resultado del análisis de Godel no debería malinterpretarse: no excluye una demostración metamatemática de la consistencia de la aritmética. Lo que excluye es una demostración de consistencia que se pueda reflejar en las deducciones formales de la aritmética- Nota al pie 29.[Esta nota da un ejemplo de la trisección de un ángulo (es posible, pero no con regla y compás)]. De hecho, se han construido demostraciones metamatemáticas de la consistencia de la aritmética, siendo notable la de 1936 de Gerhard Gentzen, miembro de la escuela de Hilbert, y por otros desde entonces Nota al pie 30" [Nota 30: Describe la demostración de Gentzen, que usa inducción transfinita; "30: la demostración de Gentzen depende de la disposición de todas las demostraciones de la aritmética en orden lineal de acuerdo a su grado de 'simplicidad'... pero el argumento de Gentzen no se puede mapear sobre el formalismo de la aritmética. Más aún, aunque la mayoría de los estudiosos no cuestionan la cogencia de la demostración, no es finitista en el sentido de las estipulaciones originales de Hilbert de una *demostración absoluta de consistencia*."[cursiva añadida]..."Pero estas demostraciones [metamatemáticas] no pueden representarse dentro del cálculo aritmético; y, dado que no son finitistas, no alcanzan los objetivos proclamados por el programa original de Hilbert."

Goldstein da una definición de un "sistema formal finitista":

> "...sistemas formales *finitistas*... sistemas formales con un alfabeto finito o numerable (o contable) de símbolos, fbds [fórmulas bien definidas] de tamaño finito, y reglas de inferencia que sólo impliquen un número finito de premisas. (Los lógicos también trabajan con sistemas formales de alfabetos no numerables, con fbds de tamaño infinito, y con demostraciones de infinitas premisas."(p. 144, nota al pie 7)

Referencias

- Gray, Jeremy J. (2000). *El reto de Hilbert*. Crítica. ISBN 84-8432-465-6
- Yandell, Benjamin H. (2002). *The Honors Class. Hilbert's Problems and Their Solvers*. A K Peters. ISBN 1-56881-141-1
- *On Hilbert and his 24 Problems.* En: Proceedings of the Joint Meeting of the CSHPM 13(2002)1-22 (26th Meeting; ed. M. Kinyon)
- Nagel, Ernest and Newman, James R., *Godel's Proof*, New York University Press, 1958. Una presentación maravillosa (legible,

extensiva) sobre la Demostración de Gödel, con comentarios.
- John Dawson, Jr *Logical Dilemmas, The Life and Work of Kurt Gödel*, AK Peters, Wellesley, Mass., 1997. Gran cantidad de información relevante al "programa" de Hilbert y al impacto de Gödel en la Segunda Pregunta, el impacto del Intuicionismo de Arend Heyting y Brouwer en la filosofía de Hilbert. Dawson es Profesor de Matemáticas en la U. Penn State, catalogador de los artículos de Gödel para el Institute for Advanced Study de Princeton, y co-editor de los *Trabajos Reunidos* de Gödel (*Collected Works*)
- Rebecca Goldstein, *Incompleteness: The Proof and Paradox of Kurt Gödel*, Atlas Books, W. W. Norton & Co., New York, 2005. Formalismo y Hilbert: su definición de "demostración finitista" está en la nota 2 de su artículo. Los lectores deberían quedar avisados de que ella no es siempre correcta.
- Felix E. Browder (editor), *Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics XXVIII (1976), American Mathematical Society. Colección de ensayos de estudios de expertos dedicados a cada uno de los 23 problemas dando énfasis a los desarrollos actuales.
- Yuri Matiyasévich, *Hilbert's Tenth Problem*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1993. Informe de nivel universitario escrito por el matemático que completó la solución al problema.
- Torkel Franzén, *Gödel's Theorem: An Incomplete Guide to Its Use and Abuse*, AK Peters, Wellesley, Mass., 2005. Informe de un filósofo que ha dominado la matemática y es capaz de explicarlo de una manera clara y a un nivel básico. El autor trata con los diferentes puntos de vista sobre los teoremas de incompletitud.

Enlaces externos

- Listado de los 23 problemas, con descripción de los que han sido resueltos (http://www.mathacademy.com/pr/prime/articles/hilbert_prob/index.asp?PRE=hilber&TAL=Y&TAN=Y&TBI=Y&TCA=Y&TCS=Y&TEC=Y&TFO=Y&TGE=Y&TNT=Y&TPH=Y&TST=Y&TTO=Y&T
- Texto original de la charla de Hilbert, en alemán (http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/~kersten/hilbert/rede.html)
- Traducción al inglés de la charla de Hilbert de 1900 (http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/hilbert/toc.html)
- Detalles sobre la solución al problema 18 (http://www.math88.pitt.edu/articles/hilbert.html)
- The Mathematical Gazette, Marzo de 2000 (páginas 2-8) "100 Years On" (http://www.mathsyear2000.org/resources/mathassoc/Maths_Gazette.pdf)
- "On Hilbert's 24th Problem: Report on a New Source and Some Remarks." (http://www.ams.org/amsmtgs/2025_abstracts/962-01-285.pdf)
- Los problemas de París (http://www.math.umn.edu/~wittman/problems2.html)
- Página del décimo problema de Hilbert (http://logic.pdmi.ras.ru/Hilbert10)
- [1] (http://www.sinewton.org/numeros/numeros/43-44/Articulo03.pdf) Información sobre los 23 Problemas de Hilbert.