Geometría Analítica II

Lectura 8

Ayudante: Guilmer González Día 7 de mayo, 2013

El día de hoy veremos:

0. Comentarios sobre los trabajos últimos.
1. Cortando un elipsoide por una familia de planos

1 Cortando un elipsoide por una familia de planos

Se tiene el elipsoide

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$$

El problema que nos compete es determinar los planos con los cuales podemos cortar el elipsoide por circunferencias. Una observación inmediata es que esos no son planos paralelos a los usuales, pues para z o y o x constantes tendremos elipses. Ese plano debe ser inclinado con repecto a los ejes e incluso tener una traslación. Pero debe tener t́termino en z. Por qué?

El plano lo escribimos en la forma

$$ax + by + z = d$$

Lo que haremos es describir el plano por un sistema coordenada y ahí veremos cómo describir las circunferencias.

Describamos el plano en forma paramétrica e identifiquemos a aquellos que están sobre la esfera. Consideremos 3 puntos sobre el plano: $P_0(0,0,d)$, $P_1(b,-a,d)$ y $P_2(1,0,d-a)$. Se observa que no están alineados y podemos formar el plano, para ello construyamos dos vectores ortonormales a partir de esta información

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \overrightarrow{P_0P_1} = P_1 - P_0 = (b, -a, d) - (0, 0, d) \\
&= (b, -a, 0) \\
u_2 &= \overrightarrow{P_0P_2} = P_2 - P_0 = (1, 0, d - a) - (0, 0, d) \\
&= (1, 0, -a)
\end{aligned}
$$

Claramente, estos vectores no son ortogonales. Construyamos uno a partir de ellos que sea a ortogonal digamos a u_1. Para ello necesitamos calcular proyecciones, la proyección de u_2 en u_1 se escribe como

$$\text{Proy}_{u_1} u_2 = \alpha u_1$$

donde $\alpha = u_1 \cdot u_2 / u_1 \cdot u_1$. Haciendo las cuentas tenemos que

$$\alpha = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

Así, tomemos a los vectores

$$
\begin{aligned}
u &= u_1 = (b, -a, 0) \\
v &= u_2 - \alpha u_1 = (1 - \frac{b^2}{a^2 + b^2}, \frac{ab}{a^2 + b^2}, -a) \\
&= \frac{a}{a^2 + b^2}(a, b, -(a^2 + b^2))
\end{aligned}
$$

Usemos estos vectores y normalicemos por vector v tomaremos a

$$(a, b, -(a^2 + b^2)$$

$$\mu_1 = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(b, -a, 0) \mu_2 = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + (a^2 + b^2)^2}}(a, b, -(a^2 + b^2))$$

Cualquier punto P sobre el plano, lo podemos escribir como

$$P(\xi_1, \xi_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} + \xi_1 \mu_1 + \xi_2 \mu_2$$

en coordenadas temos

$$\begin{aligned} x &= \xi_1 \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} + \xi_2 \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+(a^2+b^2)^2}} \\ y &= -\xi_1 \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \xi_2 \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+(a^2+b^2)^2}} \\ z &= d - \xi_2 \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2+(a^2+b^2)^2}} \end{aligned}$$

Si nombramos $\Delta_1 = \sqrt{a^2+b^2}$, y $\Delta_2 = \sqrt{a^2+b^2+(a^2+b^2)^2}$, tenemos

$$\begin{aligned} x &= \xi_1 \frac{b}{\Delta_1} + \xi_2 \frac{a}{\Delta_2} \\ y &= -\xi_1 \frac{a}{\Delta_1} + \xi_2 \frac{b}{\Delta_2} \\ z &= d - \xi_2 \frac{a^2+b^2}{\Delta_2} \end{aligned}$$

Identifiquemos aquellos puntos que estan sobre el plano y sobre el elipsoide:

$$\frac{1}{4}\left(\xi_1 \frac{b}{\Delta_1} + \xi_2 \frac{a}{\Delta_2}\right)^2 + \frac{1}{9}\left(-\xi_1 \frac{a}{\Delta_1} + \xi_2 \frac{b}{\Delta_2}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(d - \xi_2 \frac{a^2+b^2}{\Delta_2}\right)^2 = 1$$

desarrollemos las expresiones y calculemos los términos cuadráticos y cruzados que apareceran

$$\begin{aligned} &\xi_1^2 \left(\frac{b^2}{4\Delta_1^2} + \frac{a^2}{9\Delta_1^2}\right) + \xi_2^2 \left(\frac{a^2}{4\Delta_2^2} + \frac{b^2}{9\Delta^2} + \frac{\Delta_1^4}{16\Delta_2^2}\right) \\ &+\xi_1\xi_2 \left(\frac{2ab}{4\Delta_1\Delta_2} - \frac{2ab}{9\Delta_1\Delta_2}\right) + \xi_2 \frac{-2\Delta_1^2 d}{16\Delta_2} + \frac{d^2}{16} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Para que sea una circunferencia, debemos observar que los términos cuadráticos sean iguales y el término cruzado sea cero.

Para lograr ésto último debe ser

$$\frac{ab}{\Delta_1\Delta_2}(\frac{1}{4}-\frac{1}{9})=0$$

lo cual solamente ocurre cuando $a=0$ o $b=0$. Si $b=0$, estamos en el caso que hemos ya discutido. Comprobemos.

Para $b=0$, $\Delta_1^2=a^2$ y $\Delta_2^2=a^4+a^2$, luego para que los términos cuadráticos sean iguales, debemos ver que

$$\frac{1}{9}=\frac{1}{4(1+a^2)}+\frac{a^2}{16(1+a^2)}$$

simplicando tenemos

$$16(1+a^2)=36+9a^2$$

es decir $7a^2=20$.

Ahora, si $a=0$, debemos tener cuidado, pues los vectores u_1 y u_2 son paralelos.

Debemos tomar otros.

Proponemos los puntos $P_0(0,0,d)$, $P_1(0,1,d-b)$ y $P_2(1,d,d-bd)$, haciendo las cuentas, tenemos 2 vectores

$$\begin{aligned} u_1 &= \overrightarrow{P_0P_1}=P_1-P_0=(0,1,d-b)-(0,0,d) \\ &= (0,1,-b) \\ u_2 &= \overrightarrow{P_0P_2}=P_2-P_0=(1,d,d-bd)-(0,0,d) \\ &= (1,d,-bd) \end{aligned}$$

los cuales no son ortogonales. Por comodidad encontremos uno que sea ortogonal a u_1 usando proyecciones, éste tiene la forma

$$\mu_2=u_2-\alpha u_1, \text{con} \quad \alpha=u_1\cdot u_2/u_1\cdot u_1$$

haciendo los cálculos

$$\alpha = \frac{d + b^2 d}{1 + b^2}$$

con lo cual

$$\begin{aligned}
\mu_2 &= (1, d, -bd) - \frac{d + b^2 d}{1 + b^2}(0, 1, -b) \\
&= (1, d - \frac{d + b^2 d}{1 + b^2}, -bd + \frac{db + b^3 d}{1 + b^2}) \\
&= \frac{1}{1 + b^2}(1 + b^2, 0, 0)
\end{aligned}$$

con esto, proponemos los vectores ya normalizados

$$\mu_1 = \frac{1}{1 + b^2}(0, 1, b) \quad \mu_2 = (1, 0, 0)$$

Cualquier punto sobre el plano se escribe como

$$P(\xi_1, \xi_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} + \xi_1 \frac{1}{1 + b^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} + \xi_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

las coordenadas de esos puntos son

$$\begin{aligned}
x &= \xi_2 \\
y &= \frac{\xi_1}{1 + b^2} \\
z &= d - \frac{b\xi_1}{1 + b^2}
\end{aligned}$$

sustituimos en el elipsoide

$$\frac{\xi_2^2}{4} + \frac{\xi_1^2}{16(1 + b^2)^2} + \frac{1}{16}(d - \frac{b\xi_1}{1 + b^2})^2 = 1$$

agrupando términos tenemos

$$\xi_1^2\left(\frac{1}{9(1+b^2)^2}+\frac{b^2}{16(1+b^2)}\right)+\xi_2^2\frac{1}{4}-\xi_1\frac{2bd}{16(1+b^2)}+\frac{d^2}{16}=1$$

desarrollando tenemos

$$36(1+b^2)=16+9b^2$$

es decir, que $27b^2=-30$, lo cual no es posible, por consiguiente, no existe plano de la forma $by+z=d$ que corte al elipsoide en un círculo.