Geometría Analítica II

Lectura 6

Ayudante: Guilmer González 18 abril de 2013

El día de hoy veremos:

1. Recta tangente a una cónica (caso circunferencia, sencillo).
2. Recta tangente a una cónica (caso matricial, en general).

1 Recta tangente a una cónica

En clase hemos visto que una cuadrática de la forma

$$c(x, y) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3$$

la podemos representar de manera única en forma matricial como

donde A es una matriz simétrica $A = A^t$.

Problema: El problema que nos compete es encontrar una representación simpática para la recta tangente a la cónica.

Caso numérico

Muestre que la recta tangente a

$$x^2 + y^2 = 1$$

en $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0)$ se puede escribir como

$$x \cdot x_0 + y \cdot y_0 - 1 = 0$$

Si Consideremos la recta en su forma $y = mx + b$ (en realidad debemos usar una forma general de representar la recta, pues ésta puede ser vertical, o estar en el plano). Para determinar la recta, debemos encontrar m y b de manera que pasen por el punto y sea tangente al círculo. Otra forma de escribir la recta, es

$$(y - y_0) = m(x - x_0)$$

esa recta pasa por el punto $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0)$. Debemos ver que es tangente. Una forma de hacer esto es imponer que solamente sea un sólo punto de corte (es decir, tangencia),y al hacerlo, esto nos conduce a un valor específico de m.

Despejemos para y,

$$y = m(x - x_0) + y_0$$

y sustituyamos en la circunferencia

$$x^2 + [m(x - x_0) + y_0]^2 - r^2 = 0$$

hagamos las operaciones

$$\begin{aligned} x^2 + m^2(x - x_0)^2 + 2m(x - x_0)y_0 + y_0^2 - 1 &= 0 \\ (1 + m^2)x^2 + (2m - 2m^2x_0)x + m^2x_0^2 - 2mx_0y_0 + y_0^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

La cual es una cuadrática para x. Para que solo haya una solución, debe satisfacerse que el discriminate de la ecuación $\Delta = 0$, esto es:

$$(2m - 2m^2x_0)^2 - 4(1 + m^2)(m^2x_0^2 - 2mx_0y_0 + y_0^2 - 1) = 0$$

es decir

$$
\begin{aligned}
4m^2 - 8m^3x_0 + 4m^4x_0^2 - 4m^4x_0^2 + 8m^3x_0y_0 - 4m^2y_0^2 + 4m^2 - 4m^2x_0^2 + 8mx_0y_0 - 4y_0^2 + 4 &= 0 \\
4m^2 - 8m^3x_0 + 8m^3x_0y_0 - 4m^2y_0^2 + 4m^2 - 4m^2x_0^2 + 8mx_0y_0 - 4y_0^2 + 4 &= 0 \\
4m^2 - 8m^3x_0 + 8m^3x_0y_0 - 4m^2(y_0^2 - 1 + x_0^2) + 8mx_0y_0 - 4y_0^2 + 4 &= 0 \\
4m^2 - 8m^3x_0 + 8m^3x_0y_0 + 8mx_0y_0 - 4y_0^2 + 4 &= 0 \\
m^2 - 2m^3x_0 + 2m^3x_0y_0 + 2mx_0y_0 - y_0^2 + 1 &= 0 \\
m^2 - 2m^3x_0 + 2m^3x_0y_0 + 2mx_0y_0 - x_0^2 &= 0 \\
(2x_0y_0 - 2x_0)m^3 + m^2 + 2mx_0y_0 - x_0^2 &= 0
\end{aligned}
$$

`pero bueno... si siguen y juegan un poco... llegarán al resultado (siempre y cuando no se equivoquen en las cuentas).`

Caso matricial

Consideremos una cónica (centrada) en su forma matricial

$$\mathbf{p}^tA\mathbf{p} + \gamma = 0 \tag{1}$$

si $p_0 = (x_0, y_0)$ es un punto de la cónica, se satisface que

$$\mathbf{p}_0^tA\mathbf{p}_0 + \gamma = 0$$

Ahora bien, cualquier recta que pase por el punto $p_0 = (x_0, y_0)$ lo podemos expresar en su forma parametrizada por

$$\mathcal{L} = \{p = (x, y)| \;\; p = p_0 + td\} \tag{2}$$

donde d es un vector dirección de la recta.

Con esto, el problema es determinar el vector dirección d para el cual la recta $\mathcal{L}$ es tangente a la cónica.

Consideremos los puntos p de la recta $\mathcal{L}$ sobre la cónica, esto es

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^t A \mathbf{p} + \gamma &= 0 \\ (p_0 + td)^t A (p_0 + td) + \gamma &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

haciendo las cuentas, esta ecuación es cuadrática en t, tenemos

$$\begin{aligned} (p_0 + td)^t A (p_0 + td) + \gamma &= 0 \\ p_0^t A p_0 + 2tp_0^t Ad + t^2 d^t Ad + \gamma &= 0 \end{aligned}$$

agrupando términos

$$t^2 d^t Ad + t2p_0^t Ad + p_0^t A p_0 + \gamma = 0$$

pero p_0 está sobre la cuadrática, luego el término independiente que aquí aparece es cero:

$$p_0^t A p_0 + \gamma = 0$$

por lo que lo anterior se reduce a resolver un sistema lineal de una sola variable:

$$td^t Ad + 2p_0^t Ad = 0$$

pero como nos interesa buscar la linea tangente, esta recta solo corta al eje x en $t = 0$, por consiguiente,

$$p_0^t Ad = 0 \tag{4}$$

que representa la condición que debe satisfacer el vector dirección d. Ahora bien, tenemos que

$$td = (p - p_0)$$

sustituyendo esto en la encuación anterior, tenemos

$$\begin{aligned} p_0^t A d &= 0 \\ p_0^t A(p - p_0) &= 0 \\ p_0^t A p - p_0^t A p_0 &= 0 \\ p_0^t A p + \gamma &= 0 \end{aligned}$$

es decir, la ecuación de la recta tangente a la cónica en p_0 en su forma matricial

$$p_0^t A p + \gamma = 0$$

Ahora, para el caso en que la cónica no cuente con centro o bien, este escriba en su forma general (con términos lineales):

$$p^t A p + 2b^t p + \gamma = 0$$

la ecuación de la recta tangente a ella en p_0 se puede escribir como

$$p^t A p_0 + b^t p_0 + b^t p + \gamma = 0$$

Para concluir, observe que la forma matricial, es independiente de la dimensión del problema, podemos usarlo para cónicas, o para cuádricas (superficies particulares en $\mathbf{R}^3$); en cualquier caso, el hecho de que A sea simétrica nos permite encontrar propiedades simpáticas de las cónicas a partir de su representación.