# Geometría Analítica II

LECTURA 3

Ayudante: Guilmer González 7 febrero, 2013

El día de hoy veremos:

1. Cálculo del área de un paralelogramo.
2. Cálculo del área de un polígono.

## 1 Sobre el cálculo del área de un paralelogramo

**Problema 1** *Considere los vectores* $\vec{v}_1 = (2,2)$ *y* $\vec{v}_2 = (3,1)$, *cuál es el área del paralelogramo que se forma con esos vectores?*

Consideremos los vectores $\vec{v}_1 = (x_1, y_1)$ y $\vec{v}_2 = (x_2, y_2)$, observando el paralelogramos como una suma de área entre triángulos y rectángulos como se muestra en la Fgura 1

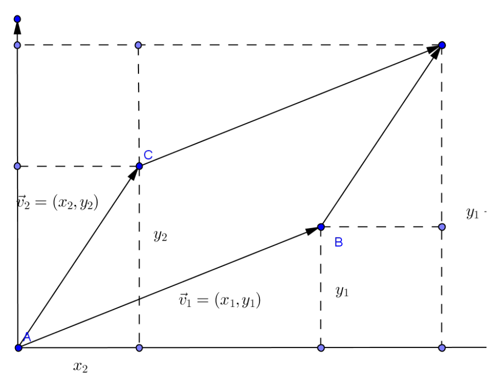


Figura 1: Área de un paralelogramo en cachitos.

llegamos a la siguiente relación

$$\text{Área}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = (x_1+x_2)(y_1+y_1) - \frac{1}{2}x_1y_1 - x_2y_1 - \frac{1}{2}x_2y_2 - \frac{1}{2}x_2y_1 - x_2y_1 - \frac{1}{2}x_1y_1$$

y con esto

$$\text{Área}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = x_1y_2 - x_2y_1$$

Otra forma elegante de escribir lo anterior es

$$\text{Área}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \vec{v}_1^t J_2 \vec{v}_2$$

donde

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Problema 2** *Cómo calcular el área de un polígono? Cómo saber si tiene orientación positiva o negativa un polígono?*

**Observación 1** *La orientación es importante. Hacerlo notar.*

$$\acute{A}rea(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = |x_1y_2 - x_2y_1|$$

Otra forma de obtener el área del paralelogramo es la siguiente

$$\text{Área}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \|\vec{v}_1\| h$$

ahora bien, como sen $\theta = h/\|\vec{v}_2\|$, tendremos que $h = \|\vec{v}_2\|\text{sen } \theta$, y de ahí concluimos que

$$\text{Área}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \|\vec{v}_1\|\|\vec{v}_2\|\text{sen } \theta$$

Ahora pensemos que los vectores anteriores se encuentran en $\mathbf{R}^3$,

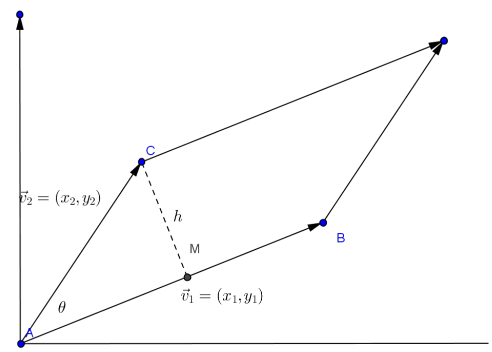


Figura 2: Área de un paralelogramo = base × altura.

$\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$

por otra parte tenemos que

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \|\vec{v}_1\| \|\vec{v}_2\| \cos\theta$$

y con esto

$$\cos\theta = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$\begin{aligned}
\text{sen}\,^2\theta &= 1 - \cos^2\theta \\
&= 1 - \frac{(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)^2}{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)} \\
&= \frac{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)^2}{\|\vec{v}_1\|^2 \|\vec{v}_2\|^2} \\
&= \frac{\|\vec{v}_1\|^2 \|\vec{v}_2\|^2 - |\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|^2}{\|\vec{v}_1\|^2 \|\vec{v}_2\|^2} \\
&= \frac{(x_1y_2 - x_2y_1)^2 + (x_1z_2 - x_2z_1)^2 + (y_1z_2 - y_2z_1)^2}{\|\vec{v}_1\|^2 \|\vec{v}_2\|^2}
\end{aligned}$$

obteniendo de esta relación, que

$$\text{Área}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \sqrt{(x_1y_2 - x_2y_1)^2 + (x_1z_2 - x_2z_1)^2 + (y_1z_2 - y_2z_1)^2}$$

como se ha dicho ya en clase, esto representa la magnitud de un vector particular en $\mathbb{R}^3$, un vector muy particular

$$\text{Área}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\|$$

siendo

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_4 \end{vmatrix}$$