Geometría Analítica II

LECTURA 2

Ayudante: Guilmer González 5 febrero, 2013

1 Reflejando sobre una recta

Consideremos el problema de reflejar un punto $P(x_p, y_p)$ sobre la recta $3x - 2y + 6 = 0$, calculemos la Transformación afin involucrada.

Para resolverlo, usaremos proyecciones. La transformación que obtendremos es de la forma:

$$\vec{q} = A\vec{p} + \vec{b}$$

Para lo siguiente hagamos el plan

1) Fijemos un punto P_0 sobre la recta,
2) desde ahí observemos la trasnformación usando proyección entre vectores
3) y regresemos al sistema coordenado usual e interpretemos resultados

En la figura de abajo se aprecian éstas ideas.

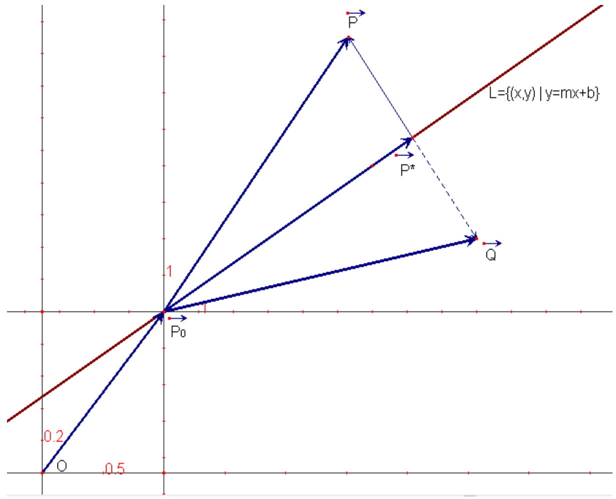

Figura 1: Reflejando un punto sobre una recta.

Vamos a fijar dos puntos de la recta para construir un vector $\vec{a}$ sobre el cual se van a realizar la proyecciones. Por ejemplo, el punto $P_0(0,3)$ está sobre la recta, lo mismo que $P_1(2,6)$, con estos puntos formamos el vector

$$\vec{a} = \vec{P_0P_1} = \vec{OP_1} - \vec{OP_0} = (2,6) - (0,3) = (2,3)$$

este vector puede ser usado como vector dirección de la recta.

Ahora vamos a construir un vector que reflejaremos sobre la recta. Observe que desde P_0 hacia $P(x,y)$ se forma un vector

$$\vec{b} = \vec{P_0P} = \vec{OP} - \vec{OP_0} = (x,y) - (0,3) = (x, y-3)$$

Lo que vamos a hacer es proyectar $\vec{OP}$ sobre la recta, obteniendo el vector $\vec{OP^*}$. Ese es un vector paralelo a la recta, un vector sobre la recta. Usaremos ese vector para construir el reflejado como una suma de vectores.

Vamos a proyectar $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$, al hacerlo, obtendremos el pie de la proyección P^*, de tal manera que identifiquemos el el vector de la reflexión de la forma

$$\vec{P_0Q} = \vec{P_0P^*} - (\vec{P_0P} - \vec{P_0P^*})$$

Por una parte, recordemos que

$$\text{Proy}_{\vec{a}}\vec{b} = \alpha\vec{a}$$

donde

$$\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}$$

es fácil ver al pedir que ese vector sea ortogonal a $\text{Proy}_{\vec{a}}\vec{b} - \vec{b}$, haga las cuentas o revise el tema, si tiene preguntas revisamos el miércoles.

$$\begin{aligned}
\text{Proy}_{\vec{a}}\vec{b} &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}\vec{a} \\
&= \vec{P_0P^*} = \alpha\vec{P_0P_1} \\
&= \frac{\vec{P_0P_1}\cdot\vec{P_0P}}{\vec{P_0P_1}\cdot\vec{P_0P_1}}\vec{P_0P_1} \\
&= \frac{2x+3y-9}{13}(2,3)
\end{aligned}$$

$$\vec{P_0P^*} = \frac{2x+3y-9}{13}(2,3)$$

Ahora, veamos bajo este sistema local, cual es el vector de reflexión:

$$\begin{aligned}
\vec{P_0Q} &= 2\vec{P_0P^*} - \vec{P_0P} \\
&= 2\frac{2x+3y-9}{13}(2,3) - (x, y-3) \\
&= \left(\frac{8x+12y-36}{13} - x, \frac{12x+18y-54}{13} - y + 3\right) \\
&= \frac{1}{13}(-5x+12y-36, 12x+5y-15)
\end{aligned}$$

Ahora bien, retornemos al sistema de referencia usual. En nuestro sistema de referencia, el vector $\vec{OQ}$ lo observamos como

$$\vec{OQ} = \vec{OP_0} + \vec{P_0Q}$$

y con esto en mente, escribimos

$$\begin{aligned}
\vec{OQ} &= (0,3) + \frac{1}{13}(-5x + 14y - 36, 12x + 5y - 15) \\
&= \frac{1}{13}(-5x + 12y - 36, 12x + 5y + 24)
\end{aligned}$$

En este sistema, el vector $\vec{OQ}$ coincide con el punto $Q(x_q, y_q)$ por lo que la trasnformación se escribe como:

$$\begin{aligned}
x_q &= \frac{1}{13}(-5x + 12y - 36) \\
y_q &= \frac{1}{13}(12x + 5y + 24)
\end{aligned}$$

en notación matricial tenemos:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_q \\ y_q \end{pmatrix} &= \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -5 & 12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -36 \\ 24 \end{pmatrix} \\
&= A\vec{p} + \vec{b}
\end{aligned}$$

Verifique que $A^2 = I$.