Geometría Analítica II

LECTURA 1

Ayudante: Guilmer González 31 de enero, 2013

El día de hoy veremos:

1. Parametrización del plano.
2. Cambio de coordenadas.

1 Parametrización del plano

Vamos a definir un sistema coordenado local para el plano. Para ello, necesitamos un punto de referencia, al que hemos llamado el favorito en clase F. Para construir un plano requerimos de dos vectores no paralelos, o bien 3 puntos no alineados. Consideremos los puntos $P_0(0,-1)$, $P_1(2,0)$, $P_2(-1,1)$, y el favorito como $F_p(2,2)$.

Los vectores son:

$$\begin{aligned}
\vec{v}_1 &= \vec{P_0P_1} \\
&= \vec{OP_1} - \vec{OP_0} \\
&= (2,0) - (0,-1) = (2,1) \\
\vec{v}_2 &= \vec{P_0P_2} \\
&= \vec{OP_2} - \vec{OP_0} \\
&= (-1,1) - (0,-1) = (-1,2)
\end{aligned}$$

Desde el punto favorito F_p y con esos vectores, podemos construir un sistema de referencia local para cualquier punto $P(x,y)$ en el plano de la forma

$$
\begin{aligned}
\vec{OP} &= \vec{OF}_p + [\vec{v}_1, \vec{v}_2] \\
&= \vec{OF}_p + \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 \\
&= (2,2) + \alpha(2,1) + \beta(-1,2) \\
(x,y) &= (2 + 2\alpha - \beta, 2 + \alpha + 2\beta
\end{aligned}
$$

con esto logramos el sistema

$$
\begin{aligned}
x &= 2 + 2\alpha - \beta \\
y &= 2 + \alpha + 2\beta
\end{aligned}
$$

2 Cambio de coordenadas

Lo que debemos enfatizar, es que las coordenadas α y β, representan la posición en el sistema $\{F_p, \vec{P_0P_1}, \vec{P_0P_2}\}$, del punto P (dado un valor de α y β, obtenemos un P), observe la figura de abajo.

Ahora bien, si dado el punto $P(x, y)$ deseamos encontrar su represención bajo el sistema coordenado local, debemos resolver el anterior sistema de ecuaciones para α y β:

$$
\begin{aligned}
\alpha &= 2/5x + 1/5y - 6/5 \\
\beta &= -1/5x + 2/5y + 2/5
\end{aligned}
$$

esto nos permite pasar de un sistema de coordenadas a otro de manera adecuada. Es decir, si tenemos la posición de $P(x, y)$, tenemos los valores correspondientes en el sistema $\{F_p, \vec{P_0P_1}, \vec{P_0P_2}\}$.

Ahora, observemos una representación para P, en $\{F_q, Q_0, Q_1, Q_2\}$, donde $Q_0(2,2)$, $Q_1(-1,4)$ y $Q_2(0,-3)$, aquí el punto fijo lo consideraremos como $F_q(2,-1)$. Con los puntos construimos dos vectores:

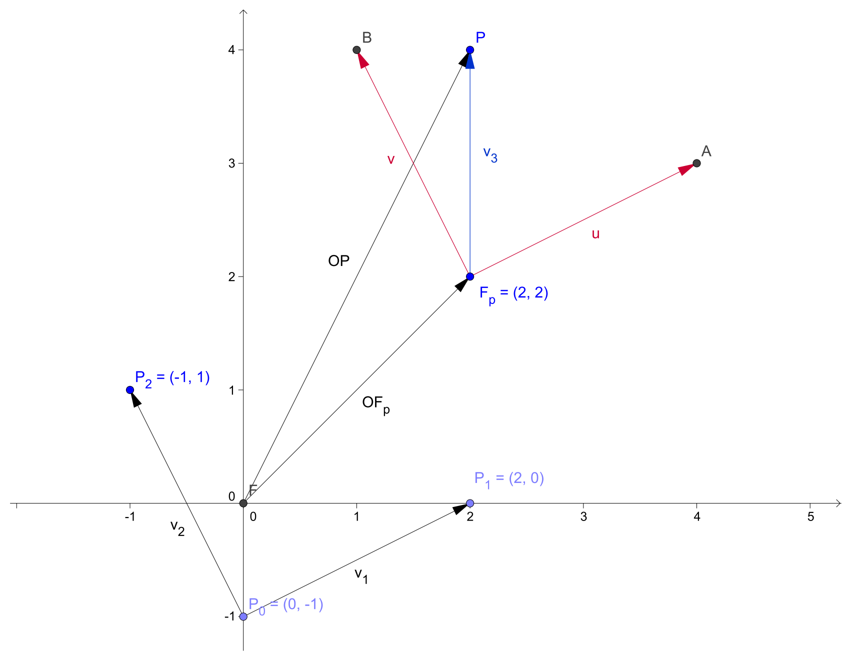

Figura 1: Un sistema coordenado local para P.

$$
\begin{aligned}
\vec{w}_1 &= Q_0\vec{Q}_1 \\
&= O\vec{Q}_1 - O\vec{Q}_0 \\
&= (-1, 4) - (2, 2) = (-3, 2) \\
\vec{w}_2 &= Q_0\vec{Q}_2 \\
&= O\vec{Q}_2 - O\vec{Q}_0 \\
&= (0, -3) - (2, 2) = (-2, -5)
\end{aligned}
$$

Desde el punto favorito $F_q(2, -1)$ y con esos vectores, podemos construir un sistema de referencia local para cualquier punto $P(x, y)$ en el plano de la forma

$$
\begin{aligned}
\vec{OP} &= \vec{OF_q} + [\vec{w}_1, \vec{w}_2] \\
&= \vec{OF_q} + \hat{\alpha}\vec{w}_1 + \hat{\beta}\vec{w}_2 \\
&= (2,-1) + \hat{\alpha}(-3,2) + \hat{\beta}(-2,-5) \\
(x,y) &= (2 - 3\hat{\alpha} - 2\hat{\beta}, -1 + 2\hat{\alpha} - 5\hat{\beta}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x &= 2 - 3\hat{\alpha} - 2\hat{\beta} \\
y &= -1 + 2\hat{\alpha} - 5\hat{\beta}
\end{aligned}
$$

Nuevamente, las coordenadas $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$, representan la posición en el sistema $\{F_q,\ \vec{Q_0Q_1}, \vec{Q_0Q_2}\}$, del punto Q, observe la figura.

Ahora bien, tenemos 2 sistemas coordenados:$\{F_p,\ \vec{P_0P_1}, \vec{P_0P_2}\}$, y $\{F_q,\ \vec{Q_0Q_1}, \vec{Q_0Q_2}\}$. Nuestro interés es identificar una relación entre ellos para pasar de un sistema a otro, es decir, si contamos con las coordenadas locales del segundo sistema, podemos tener las coordenadas locales en el primer sistema.

Para ésto observemos que

$$
\begin{aligned}
x &= 2 - 3\hat{\alpha} - 2\hat{\beta} \\
y &= -1 + 2\hat{\alpha} - 5\hat{\beta}
\end{aligned}
$$

describe a un punto globalmente en el segundo sistema, y que

$$
\begin{aligned}
\alpha &= 2/5x + 1/5y - 6/5 \\
\beta &= -1/5x + 2/5y + 2/5
\end{aligned}
$$

nos determina las coordenadas locales en el primer sistema, sustituyendo:

$$
\begin{aligned}
\alpha &= 2/5(2 - 3\hat{\alpha} - 2\hat{\beta}) + 1/5(-1 + 2\hat{\alpha} - 5\hat{\beta}) - 6/5 \\
\beta &= -1/5(2 - 3\hat{\alpha} - 2\hat{\beta}) + 2/5(-1 + 2\hat{\alpha} - 5\hat{\beta}) + 2/5
\end{aligned}
$$

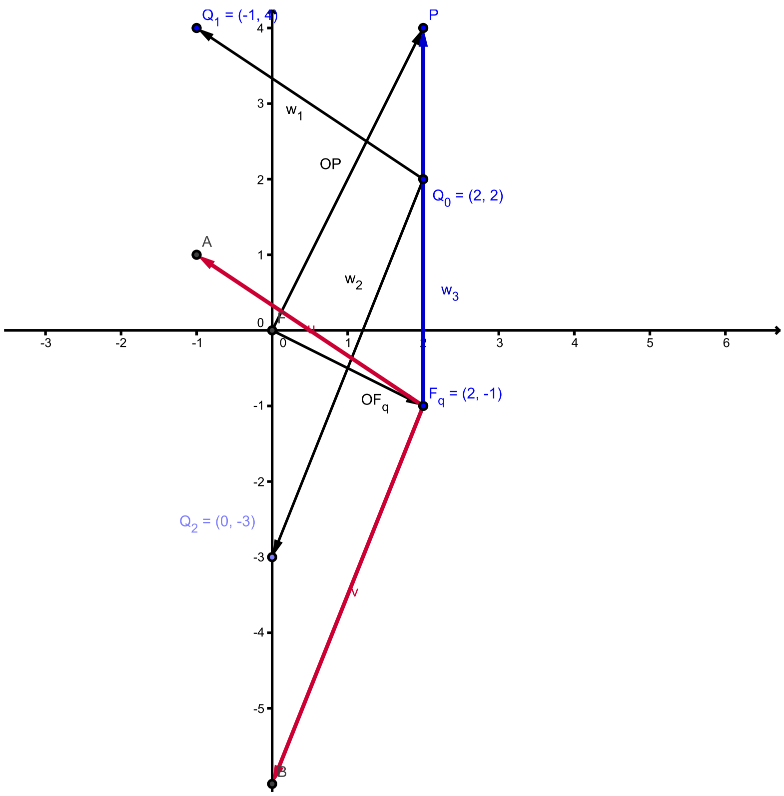

Figura 2: Otro sistema coordenado local para P.

haciendo las cuentas tenemos

$$\begin{aligned} \alpha &= -4/5\hat{\alpha} - 9/5\hat{\beta} - 3/5 \\ \beta &= 7/5\hat{\alpha} - 8/5\hat{\beta} - 2/5 \end{aligned}$$

ésto nos permite pasar del segundo al primer sistema coordenado lineal, ahora si resolvemos para $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ podremos pasar del primero al segundo.

`Hacer algunos comentarios`

3 Representación matricial

Las matrices juegan un rol muy importante en el manejo compacto de la información y nos permite definir propiedades de las transformaciones a partir de su estructura; esto es, podemos caracterizar el tipo de trasnformación si sabemos que tipo de matriz es la que representa.

Aquí, nos interesa el concepto algebraico de vector como un arreglo o colección de número de la forma

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

o bien

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

donde las entradas a_1, a_2 son los elementos correspondientes del vector $\vec{a}$. Una matriz la vamos a considerar como una colección de vectores, horizontales o verticales

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & | & \vec{a}_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \vec{r}_1^t \\ \vec{r}_2^t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Definimos el producto interior (o punto) $\cdot$ entre dos vectores de la forma:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Lo interesante de manejar la información de esta manera es que podemos simplicar operaciones. Por ejemplo, el sistema lineal que hemos estado manejando, lo podemos escribir en su forma matricial como:

$$\vec{P} = \mathbf{A}\vec{P'} + b \tag{1}$$

con

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Observe que la matriz A lo podemos escribir por medio de los vectores columna $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ que hemos calculado previamente de la forma

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \end{array} \right)$$

y

$$\vec{P'} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

`Comentar esto en clase`. Ahora, si deseamos resolver el sistema para $\vec{P'}$ podemos hacer uso de la inversa de una matriz. Veamos ésto.

4 La inversa de una matriz

Si se tiene una matriz A de orden $n \times n$, si existe una matriz B tal que

$$AB = I_n = BA$$

diremos que B es la inversa de la matriz A (desde luego, A es la inversa de B).

La inversa de una matriz A es denotada como A^{-1}.

La utilidad de la inversa radica en poder resolver sistemas lineales (en realidad se calcula de otra forma, pero eso se aprende luego, en lineal y numérico). Considere una matriz A de $n \times n$, y su inversa A^{-1}, se desea resolver el sistema

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

Multiplicamos la inversa por ambas partes, y aplicamos la propiedad de ser inversa para A:

$$\begin{aligned} A^{-1}A\vec{x} &= A^{-1}\vec{b} \\ \vec{x} &= A^{-1}\vec{b} \end{aligned}$$

ya se ve, que si se cuenta con la inversa se tiene de inmediato la solución al sistema.

La inversa de una matriz tiene propiedades interesantes, por ejemplo:

1) $(A^{-1})^{-1} = A$

2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

La primera es inmediata y la segunda se verá en clase, es un juego de comprobación.

5 Cómo calcular la inversa de una matriz $A_{2\times 2}$

Veamos cómo calcular la inversa de esta matriz $A_{2\times 2}$

Si la matriz $A_{2\times 2}$ se representa como

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

la inversa de A denotada por A^{-1}, tiene por entradas:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

para lo cual debe ocurrir que $AA^{-1} = I_2$ (la matriz identidad), es decir

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

multiplicando la matriz, temos que

$$\begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

lo cual representa un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas:

$$\begin{aligned} ax+bz &= 1 \qquad (2) \\ cx+dz &= 0 \qquad (3) \\ ay+bw &= 0 \qquad (4) \\ cy+dw &= 1 \qquad (5) \end{aligned}$$

Este sistema, no es difícil. Si observamos, representa la solución a dos sistemas de ecuaciones, un sistema por cada columna de I_2:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hacer énfasis en esta idea en clase.

Resolvamos simultáneamente este sistema en las dos primeras ecuaciones y luego para las otras dos. A la primera ecuación la multimplicamos por d y a la segunda por b, restamos la segunda de la primera y obtenemos

$$x(ad-bc) = d$$

es decir:

$$x = \frac{d}{ad-bc}$$

Ahora sustituimos este valor en la segunda ecuación, y obtenemos que

$$z = \frac{-c}{ad-bc}$$

Para encontrar z y w, multiplequemos la ecuación (3) por d y la ecuación (4) por b, restemos a la cuarta la tercera obteniendo:

$$y(ad - bc) = -b$$

es decir

$$y = \frac{-b}{ad - bc}$$

lo que nos conduce a

$$w = \frac{a}{ad - bc}$$

Con todo, la inversa de A tiene la forma

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

6 Sobre el cálculo de la transformación inversa

El sistema lineal que hemos estado manejando, lo podemos escribir en su forma matricial como:

$$\vec{P} = \mathbf{A}\vec{P'} + b \tag{6}$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Como se ha visto en sistemas de ecuaciones, el sistema (6) tiene solución, si para $\vec{P'}$, si existe una matriz $\mathbf{A}^{-1}$ tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1}\vec{P} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\vec{P'} + \mathbf{A}^{-1}b \\ &= \vec{P'} + \mathbf{A}^{-1}b \end{aligned}$$

esto es

$$\vec{P'} = \mathbf{A}^{-1}\vec{P} - \mathbf{A}^{-1}b \tag{7}$$

y esta es la idea de pasar un sistema de referencia a otro, podemos observar al punto P en términos de P' o bien, P' en términos de P, y con ello interpretar los sistemas de referencia.