Geometría Analítica I
TAREA–EXAMEN 4

Profesor: Pablo Barrera Jueves 18 de octubre, 2012

NOMBRE: Velázquez Ceciliano Tonatiuh

Problema 1 En el triángulo formado por $A(-2,1)$, $B(1,2)$ y $C(0,0)$ resulta que el punto D parte el segmento BC por la mitad, E parte el segmento AB en razón $3:1$ como se muestra en la figura de abajo, Los segmentos AD y CE se cortan en P, la ceviana que atraviesa por

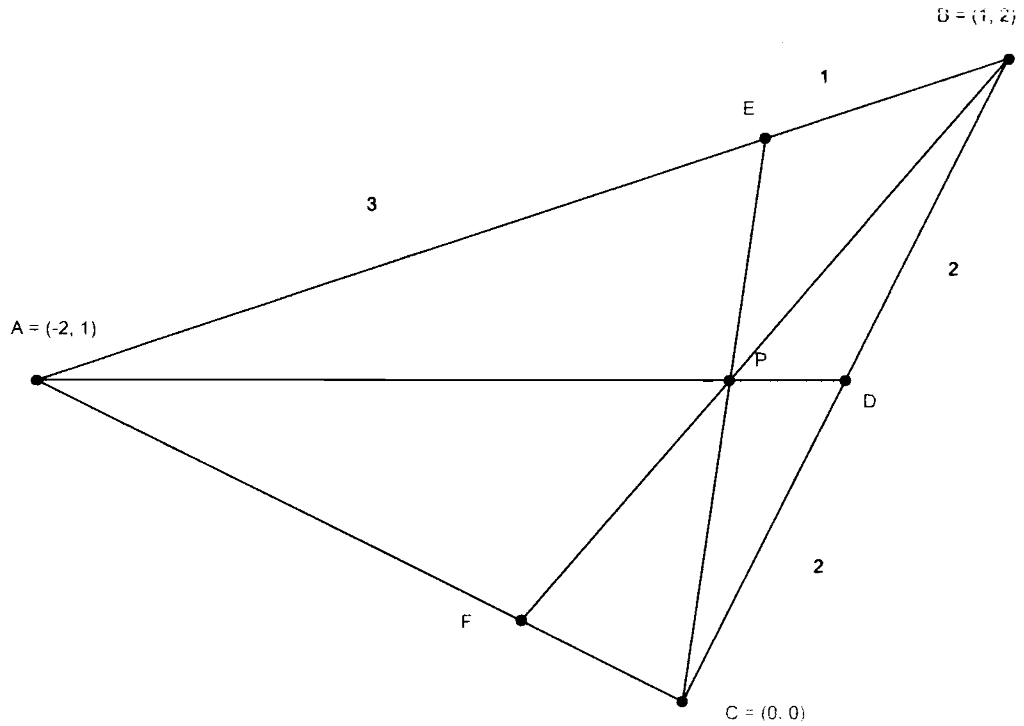


Figura 1: Un punto en equilibrio.

P desde B corta a AC en F. Determine las coordenadas baricéntricas y cartesianas de F, así como la razón en que P parte al segmento AD.

Problema 2 Tienen un paraleogramo formado por los puntos $ABCD$, desde A se tira un segmento al punto medio de CD y al punto medio de AC. Muestre que la diagonal BD es trisectada por los anteriores segmentos.

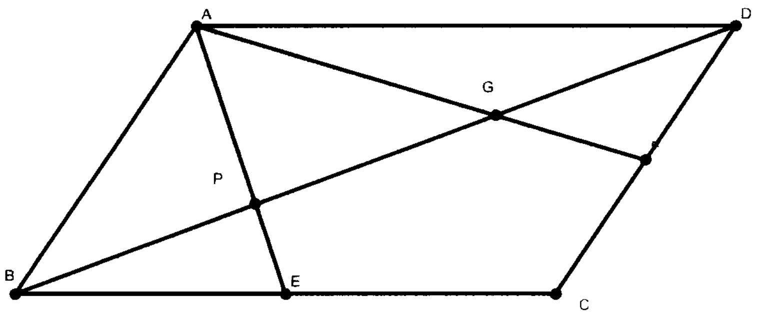


Figura 2: Diagonal trisectada.

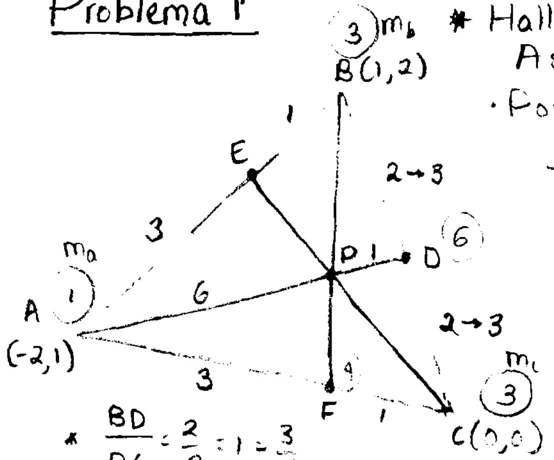
Problema 3 Para el triángulo formado por los puntos $A(1,5)$, $B(-3,1)$ y $C(5,-2)$, determine el radio de los excírculos y la posición de los excentros. Use proyecciones y distancias para calcular los radios.

Problema 4 Muestre que el triángulo formado por $P(8,0)$, $Q(0,0)$ y $R(8,-6)$ y aquel que se forma por sus excentros están en perspectiva con $O(6,-2)$ y determine el eje de perspectiva.

Problema 5 Usando coordenadas baricéntricas, demuestre que el ortocentro, el circuncentro y el baricentro están alineados y la razón que guardan esos puntos entre sí.

Fecha de entrega: Lunes 22 de octubre, 2012

Problema 1



$*\ \frac{BD}{DC}=\frac{2}{2}=1=\frac{3}{3}$

$m_a=1 \quad m_b=3 \quad m_c=3$

* Hallar las coordenadas baricentricas y cartesianas de F. Así como la razón en que P parte AD.

· Por el teorema de Menelao:

$$\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BC}{CD}\cdot\frac{DP}{PA}=-1 \Rightarrow \frac{3}{1}\cdot\frac{4}{-2}\cdot\frac{DP}{PA}=-1 \Rightarrow -6\cdot\frac{DP}{PA}=-1 \Rightarrow \boxed{\frac{DP}{PA}=\frac{1}{6}}$$

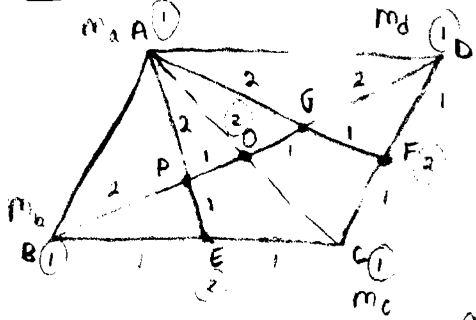
$D = m_b+m_c = 3+3=6$; podemos decir que es correcto, ya que P se encuentra en equilibrio entre A y D con masas 1 y 6 respectivamente.

$P=m_a+m_b+m_c=7$, $F=m_a+m_c=1+3=4$, Ya que el punto F se encuentra sobre AC.

$\frac{AF}{FC}=\frac{3}{1} \rightarrow$ Coordenadas Baricentricas de $F(1,0,3)$

$$F=\frac{m_a\vec{A}+m_b\vec{B}+m_c\vec{C}}{m_a+m_b+m_c}=\frac{1(-2,1)+0(1,2)+3(0,0)}{4}=\boxed{\left(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4}\right)}$$ Coordenadas Cartesianas de F.

Problema 2



Sea ABCD un paralelogramo. P.d La diagonal es trisectada.

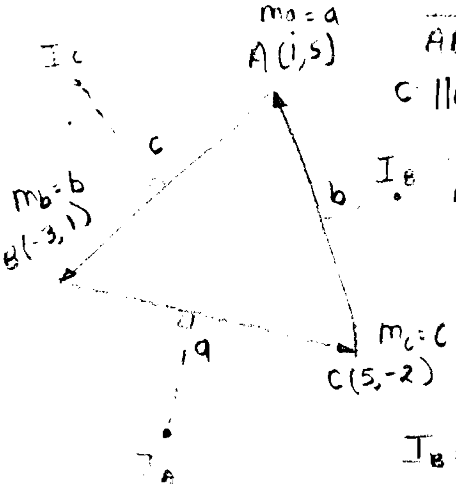
* $DF=FC$ y $BE=EC$ Asignamos masa a A, B, C y D. Dado que $\Delta ABD \cong \Delta DBC$, $m_a=m_c \Rightarrow m_a=1$. Se colocaron masas de 1 en B, C y D partiendo de que F y E son puntos medios de BC y CD. Trazamos AC, siendo O el punto de intersección con BD. Sabemos que las diagonales se bisecan, así que para que O esté en equilibrio le asignamos la masa de 2, además $BO=OD$. Ahora, tenemos que $\frac{BP}{PO}=\frac{2}{1}$ y $\frac{OG}{GD}=\frac{1}{2}$ pero $PO+OG=1+1=2=PG \Rightarrow$

$BP=PG=GD=2$

$\therefore$ La diagonal BD es trisectada por P y G.

Problema 3

Determinar: Radio de los excírculos y la posición de los excentros.



$\vec{AB}=(-4,-4) \quad \vec{BC}=(8,-3) \quad \vec{CA}=(-4,7)$

$c=\|\vec{AB}\|=4\sqrt{2} \quad a=\|\vec{BC}\|=\sqrt{73} \quad b=\|\vec{CA}\|=\sqrt{65}$

EXCENTROS

1) $I_A(-\sqrt{73},\sqrt{65},4\sqrt{2}) \Rightarrow I_A=\frac{-\sqrt{73}(1,5)+\sqrt{65}(-3,1)+4\sqrt{2}(5,-2)}{5.175}=$

$I_A=(-1.651,-8.255)+(-4.673,1.557)+(5.465,-2.186)=(-0.859,-8.884)$

2) $I_B(\sqrt{73},-\sqrt{65},4\sqrt{2}) \Rightarrow I_B=\frac{\sqrt{73}(1,5)-\sqrt{65}(-3,1)+4\sqrt{2}(5,-2)}{6.138}=$

$I_B=(1.391,6.959)+(3.940,-1.313)+(4.608,-1.843)=(9.939,3.803)$

3) $I_C=(\sqrt{73},\sqrt{65},-4\sqrt{2}) \Rightarrow I_C=\frac{\sqrt{73}(1,5)+\sqrt{65}(-3,1)-4\sqrt{2}(5,-2)}{10.999}=$

$I_C=(0.780,3.901)+(-2.209,0.736)+(-2.583,1.033)=(-4.012,5.67)$

$I_A=(-0.859,-8.884)$
$I_B(9.939,3.803)$
$I_C=(-4.012,5.67)$

EXCENTROS

$\vec{U}\perp\vec{AB} \Rightarrow \vec{U}=(-4,4)$
$\vec{V}\perp\vec{BC} \Rightarrow \vec{V}=(-3,-8)$
$\vec{W}\perp\vec{CA} \Rightarrow \vec{W}=(7,4)$

Radio del Círculo con centro I_A

$P(s)=A+s(\vec{AB}) \Rightarrow P(s)=(1,5)+s(-4,-4)$
$P(s)=(-4s+1,-4s+5)$

$P(t) = I_A + t\vec{U} \Rightarrow P(t) = (-0.859, -8.884) + t(-4,4) \Rightarrow P(t) = (-4t - 0.859, 4t - 8.884)$

$P(s) = P(t) \Rightarrow (-4s+1, -4s+5) = (-4t-0.859, 4t-8.884) \Rightarrow (-4s+4t+1.859, -4s-4t+13.884) = (0,0)$

$\begin{matrix} -4s+4t = -1.859 \\ -4s-4t = -13.884 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} s = 1.967 \\ t = 1.503 \end{matrix}$ $\quad P(s) = (-6.868, -2.868) \quad \overrightarrow{I_A P} = (-6.009, 6.016)$

$\|\overrightarrow{I_A P}\| = 8.502$ | Radio del circulo con centro I_A: 8.502

Radio del Circulo con centro I_B (Excírculo)

$P(s) = B + s(\overrightarrow{BC}) \Rightarrow P(s) = (-3,1) + s(8,-3) \Rightarrow P(s) = (8s-3, -3s+1)$

$P(t) = I_B + t(\vec{V}) \Rightarrow P(t) = (9.939, 3.803) + t(-3,-8) \Rightarrow P(t) = (-3t+9.939, -8t+3.803)$

$P(s) = P(t) \Rightarrow (8s-3, -3s+1) = (-3t+9.939, -8t+3.803) \Rightarrow (8s+3t-12.939, -3s+8t-2.803) = (0,0)$

$\begin{matrix} 8s+3t = 12.939 \\ -3s+8t = 2.803 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} s = 1.302 \\ t = 0.838 \end{matrix}$ $\quad P(s) = (7.416, -2.906) \quad \overrightarrow{I_B P} = (-2.523, -6.709)$

$\|\overrightarrow{I_B P}\| = 7.167$ | Radio del circulo con centro I_B: 7.167

Radio del circulo con centro I_C (Excirculo)

$P(s) = C + s(\overrightarrow{CA}) \Rightarrow P(s) = (5,-2) + s(-4,7) \Rightarrow P(s) = (-4s+5, 7s-2)$

$P(t) = I_C + t(\vec{W}) \Rightarrow P(t) = (-4.012, 5.67) + t(7,4) \Rightarrow P(t) = (7t-4.012, 4t+5.67)$

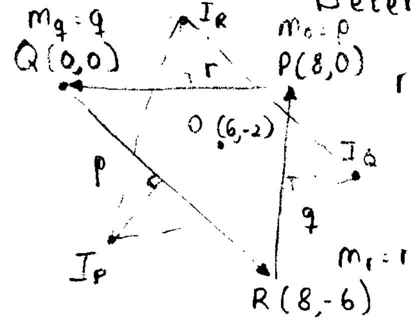
$P(s) = P(t) \Rightarrow (-4s+5, 7s-2) = (7t-4.012, 4t+5.67) \Rightarrow (-4s-7t+9.012, 7s-4t-7.67) = (0,0)$

$\begin{matrix} -4s-7t = -9.012 \\ 7s-4t = 7.67 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} s = 1.380 \\ t = 0.498 \end{matrix}$ $\quad P(s) = (-0.52, 7.66) \quad \overrightarrow{I_C P} = (3.492, 1.99)$

$\|\overrightarrow{I_C P}\| = 4.019$ | Radio del circulo con centro I_C: 4.019

Problema 4

Muestre que el ΔPQR y $\Delta I_P I_Q I_R$ están en perspectiva con $O(6,-2)$.
Determine el eje de perspectiva



$\overrightarrow{PQ} = (-8,0) \quad \overrightarrow{QR} = (8,-6) \quad \overrightarrow{RP} = (0,6)$

$r = \|\overrightarrow{PQ}\| = 8 \quad p = \|\overrightarrow{QR}\| = 10 \quad q = \|\overrightarrow{RP}\| = 6$

$I_P = (-10, 6, 8) \quad I_P = \dfrac{-10(8,0) + 6(0,0) + 8(8,-6)}{4} = (-20, 0) + (16, -12)$

$I_P = (-4, -12)$

$I_Q = (10, -6, 8) \quad I_Q = \dfrac{10(8,0) - 6(0,0) + 8(8,-6)}{12} = (20/3, 0) + (16/3, -4)$

$I_Q = (12, -4)$

$I_R = (10, 6, -8) \quad I_R = \dfrac{10(8,0) + 6(0,0) - 8(8,-6)}{8} = (10, 0) + (-8, 6)$

$I_R = (2, 6)$

* Para mostrar que el ΔPQR y el $\Delta I_P I_Q I_R$ estan en perspectiva, demostraremos que O se encuentra en las rectas $I_R R$, $I_P P$ y $I_Q Q$, es decir son concurrentes en O.

* $O = R + s(\overrightarrow{I_R R}) \Rightarrow (6,-2) = (8,-6) + s(6,-12) \Rightarrow (6s+8, -12s-6) = (6,-2) \Rightarrow$

$\begin{matrix} 6s+8 = 6 \\ -12s-6 = -2 \end{matrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} s = -1/3 \\ s = -1/3 \end{matrix}\right\}$ $\therefore$ O está en $I_R R$

* $O = Q + s(\overrightarrow{I_Q Q}) \Rightarrow (6,-2) = (0,0) + s(-12,4) \Rightarrow (-12s, 4s) = (6,-2) \Rightarrow \begin{matrix} -12s = 6 \\ 4s = -2 \end{matrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} s = -\frac{1}{2} \\ s = -\frac{1}{2} \end{matrix}\right\}$

$\therefore$ O está en $I_Q Q$

* $O = P + s(\overrightarrow{I_P P}) \Rightarrow (6,-2) = (8,0) + s(12,12) \Rightarrow (12s+8, 12s) = (6,-2) \Rightarrow \begin{matrix} 12s+8 = 6 \\ 12s = -2 \end{matrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} s = -\frac{1}{6} \\ s = -\frac{1}{6} \end{matrix}\right\}$

$\therefore$ O esto en $I_P P$ $\quad \therefore$ Los 3 rectas son concurrentes

$\therefore \Delta PQR$ y $\Delta I_P I_Q I_R$ estan en perspectiva.

* $PQ \cap I_P I_Q$:

$P(s) = Q + s(\vec{PQ}) \Rightarrow P(s) = (0,0) + s(-8,0) \Rightarrow P(s) = (-8s, 0)$ $\quad \Rightarrow P(s) = P(t)$

$P(t) = I_P + t(\vec{I_P I_Q}) \Rightarrow P(t) = (-4,-12) + t(16,8) \Rightarrow P(t) = (16t-4, 8t-12)$

$(-8s, 0) = (16t-4, 8t-12) \Rightarrow -8s-16t+4=0$ y $-8t+12=0 \Rightarrow s = -5/2$ y $t = 3/2$

$P(s) = (20,0)$

* $QR \cap I_Q I_R$:

$P(s) = Q + s(\vec{QR}) \Rightarrow P(s) = (0,0) + s(8,-6) \Rightarrow P(s) = (8s, -6s)$ $\quad \Rightarrow P(s) = P(t)$

$P(t) = I_R + t(\vec{I_Q I_R}) \Rightarrow P(t) = (2,6) + t(-10,10) \Rightarrow P(t) = (-10t+2, 10t+6)$

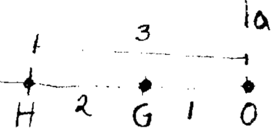
$(8s, -6s) = (-10t+2, 10t+6) \Rightarrow 8s+10t-2=0$ y $-6s-10t-6=0 \Rightarrow s = 4$ y $t = -3$

$P(s) = (32,-24)$

Eje de Perspectiva

* $y - 0 = \frac{-24-0}{32-20}(x-20) \Rightarrow y = -2(x-20) \Rightarrow y = -2x+40 \Rightarrow \boxed{2x+y-40=0}$

<u>Problema 5</u> P.d. El ortocentro, circuncentro y el baricentro están alineados y la razón entre estos puntos (con coordenadas baricéntricas).



Tenemos que el ortocentro tiene las siguientes coordenadas baricentricas.

$O = (a^2(b^2+c^2-a^2),\ b^2(c^2+a^2-b^2),\ c^2(a^2+b^2-c^2))$

y el baricentro $G = (1,1,1)$, cuyas masas totales son $O = 4S^2$ y $G = 3$. Para hacer que las masas totales sean iguales, multiplicamos O por 3 y G por $4S^2$.

$O = (3a^2(b^2+c^2-a^2),\ 3b^2(c^2+a^2-b^2),\ 3c^2(a^2+b^2-c^2))$ y $G = (4S^2, 4S^2, 4S^2)$

* Supongamos que $\frac{OH}{HG} = \frac{3}{-2}$, es decir O con masa -2 y G con masa $3 \Rightarrow$ Para obtener las coordenadas, multiplicaremos O por -2 y G por 3.

La primera coordenada de H será:

$(-2)3a^2(b^2+c^2-a^2) + 3 \cdot 4S^2 \Rightarrow -6(a^2b^2+a^2c^2-a^4) + 3(2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4) =$

$= 3a^4-3b^4+6b^2c^2-3c^4 = 3(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)$

Para la 2da coordenada obtendremos $3(-a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)$ y de la 3ra $3(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)$. Dividimos las 3 coordenadas por $(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)$ obteniendo:

$$\left(\frac{1}{b^2+c^2-a^2}, \frac{1}{c^2+a^2-b^2}, \frac{1}{a^2+b^2-c^2}\right) = \left(\frac{\frac{1}{2bc}}{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}, \frac{\frac{1}{2ca}}{\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}}, \frac{\frac{1}{2ab}}{\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}\right) =$$

$$\left(\frac{\frac{\operatorname{sen}A}{S}}{\cos A}, \frac{\frac{\operatorname{sen}B}{S}}{\cos B}, \frac{\frac{\operatorname{sen}C}{S}}{\cos C}\right) = \left(\frac{\tan A}{S}, \frac{\tan B}{S}, \frac{\tan C}{S}\right) = (\tan A, \tan B, \tan C)$$ Coordenadas Baricentricas del Ortocentro.

$\therefore$ El Circuncentro, baricentro y ortocentro están en la misma recta, llamada recta de Euler, es decir están alineados.

Además $\frac{OH}{HG} = \frac{3}{-2}$ ó $\frac{HG}{GO} = \frac{2}{1}$, es decir, el baricentro se encuentra dentro del segmento formado por el ortocentro y circuncentro y lo divide en la razón 2:1. ■