Niño De Llano Luis Manuel 14/Nov/12
Grupo: 4054
Geometría Analítica

Trabajo 27

Problema Se tiene el triángulo ΔABC formado por $A(-1,6)$, $B(0,2)$ y $C(4,3)$. Se pide determinar la transformación

$$T(p) = Ap + b$$

a) Se rote $\varphi = \pi/3$ respecto al eje x.

Para la rotación del triángulo original o (1), ocupemos la siguiente matriz para transformar a A, B, C y generar los puntos A', B', C' del triángulo (2).

$$\beta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{donde } \underline{\theta = 60^\circ}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- Para el punto $A' = \beta A$

$$A' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$x_1' = -1\left(\tfrac{1}{2}\right) + 6\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\tfrac{1}{2} - 3\sqrt{3} = -5.69$$

$$y_1' = -1\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + 6\left(\tfrac{1}{2}\right) = -\tfrac{\sqrt{3}}{2} + 3 = 2.13$$

$$\therefore A'(-5.69, 2.13)$$

- Para el punto $B' = \beta B$

$$B' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x_2' = \tfrac{1}{2}(0) - \tfrac{\sqrt{3}}{2}(2) = -\sqrt{3}$$

$$y_2' = \tfrac{\sqrt{3}}{2}(0) + 2\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1$$

$$\therefore B'(-\sqrt{3}, 1)$$

- Para el punto $C' = \beta C$

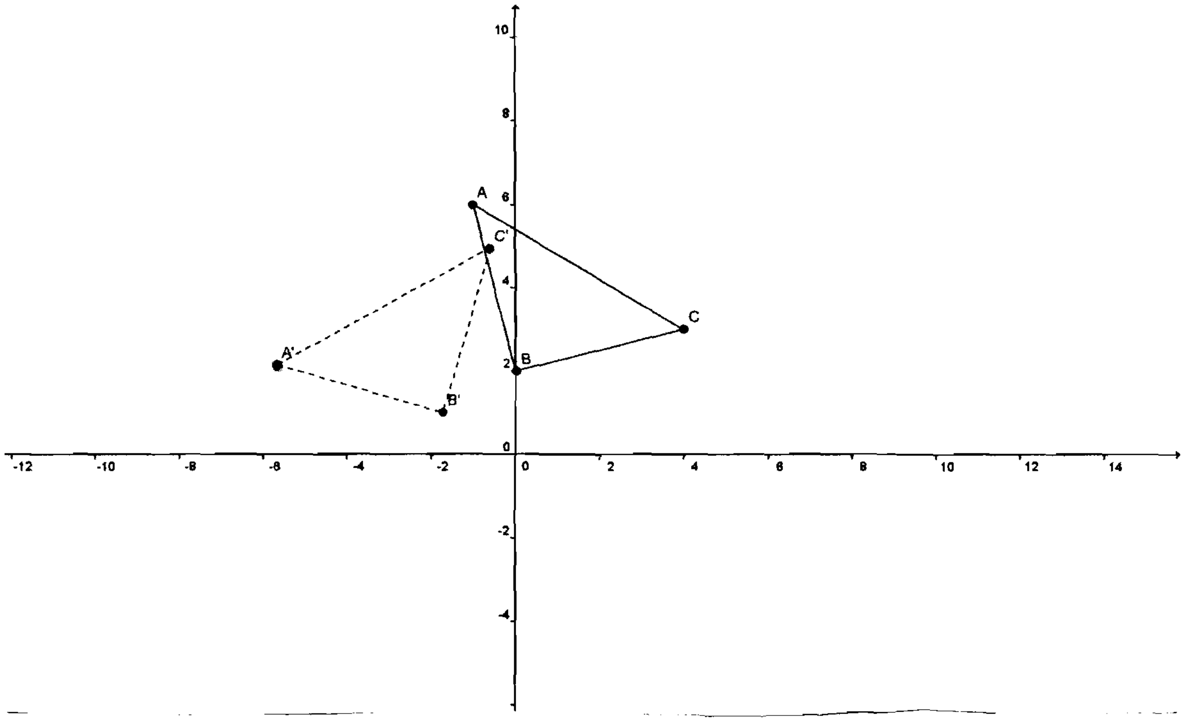
$$C' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x_3' = 4\left(\tfrac{1}{2}\right) + 3\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 - 2.598 = -0.598$$

$$y_3' = 4\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + 3\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3} + \tfrac{3}{2} = 4.964$$

$$\therefore C'(-0.598, 4.964)$$

- Graficación en Geogebra



$\Delta A'B'C'$ es la rotación φ de ΔABC

b) El triángulo sea reflejado con respecto a la recta $5x - 3y = 0$

→ Como la recta pasa por el origen

$$y = \frac{5}{3}x \quad , \quad \text{donde} \quad m = \frac{5}{3}$$

Sabemos que la pendiente de una recta se define como

$$m = \tan \theta$$

"Despejando θ"

$$\theta = \tan^{-1}(m)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{5}{3}\right)$$

$$\boxed{\theta = 59°}$$

→ Encontraremos los puntos D, E y F correspondientes al triángulo reflejado respecto a (1). Ocupemos la siguiente matriz

$$\gamma = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \operatorname{sen} 2\alpha \\ \operatorname{sen} 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \quad , \quad \text{donde } \alpha = 59°$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} \cos 118° & \operatorname{sen} 118° \\ \operatorname{sen} 118° & -\cos 118° \end{pmatrix}$$

• Para el punto $D = \gamma A$

$$D = \begin{pmatrix} -0.469 & 0.882 \\ 0.882 & 0.469 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}_1 = 0.469 + 6(0.882) = 0.469 + 5.292 = \underline{5.761}$$
$$\bar{y}_1 = -0.882 + 6(0.469) = -0.882 + 2.814 = \underline{1.932}$$

$$\therefore D(5.76, 1.93)$$

• Para el punto $E = \gamma B$

$$E = \begin{pmatrix} -0.469 & 0.882 \\ 0.882 & 0.469 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}_2 = 0 + 2(0.882) = \underline{1.764}$$
$$\bar{y}_2 = 0 + 2(0.469) = \underline{0.938}$$

$$\therefore E(1.76, 0.93)$$

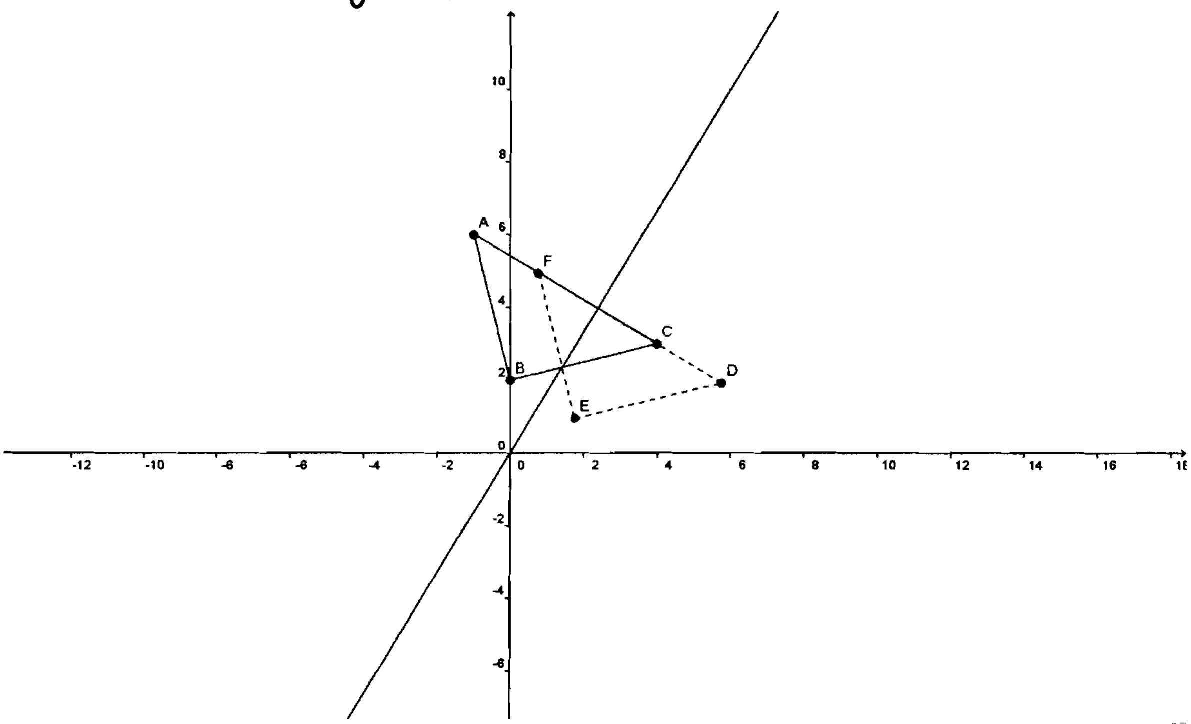
• Para el punto $F = \gamma C$

$$F = \begin{pmatrix} -0.469 & 0.882 \\ 0.882 & 0.469 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}_3 = 4(-0.469) + 3(0.882) = -1.876 + 2.646 = \underline{0.77}$$
$$\bar{y}_3 = 4(0.882) + 3(0.469) = 3.528 + 1.407 = \underline{4.93}$$

$$\therefore F(0.77, 4.93)$$

• Graficación en Geogebra.



ΔDEF es el reflejo de ΔABC respecto a la recta $5x - 3y = 0$

c) El triángulo se transforme en

$A \to P(4,2) \quad B \to (Q(4,-2) \quad C \to R(6,0)$

Definamos

→ $T(\bar{o}) = A = b$

→ $T_1(p) = [\vec{AB} \mid \vec{AC}]\, p + b$ → transformación para el triángulo (1)

$T_1(p) = [B-A \mid C-A]\, p + A$

$= \left[\begin{matrix} 1 \\ -4 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 5 \\ -3 \end{matrix}\right] p + \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} p + \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ · det = 17

→ Ahora $T_1^{-1}(x) = A_1^{-1}p - A_1^{-1}b_1$

$= \begin{pmatrix} -\frac{3}{17} & \frac{5}{17} \\ \frac{4}{17} & \frac{1}{17} \end{pmatrix} p - \begin{pmatrix} -\frac{3}{17} & \frac{5}{17} \\ \frac{4}{17} & \frac{1}{17} \end{pmatrix} b_1$

→ Obtengamos $T_2(p)$. transformación del triángulo (2)

$T_2(p) = [\vec{PQ} \mid \vec{PR}]\, p + b_2$ donde. $T_2(\bar{o}) = P = b_2$

$= [Q-P \mid R-P]\, p + (4,2)$

$= \left(\begin{matrix} 0 \\ -4 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 2 \\ -2 \end{matrix}\right) p + (4,2)$

$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} p + (4,2)$

→ Encontremos $T_2 \circ T_1^{-1} = T$

$T(p) = A_2 A_1^{-1} p - A_2 A_1^{-1} b_1 + b_2$

$= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{17} & \frac{5}{17} \\ \frac{1}{17} & \frac{1}{17} \end{pmatrix} p - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{17} & \frac{5}{17} \\ \frac{4}{17} & \frac{1}{17} \end{pmatrix} b_1 + b_2$

$T(p) = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 18 \end{pmatrix} p - \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 18 \end{pmatrix} b_1 + b_2$

Para $A = P(4,2)$
Para $B = Q(4,-2)$
Para $C = R(6,0)$ //