Geometría Analítica I

Lectura 14

Ayudante: Guilmer González — Día 16 de noviembre, 2012

El día de hoy veremos:

1. Calcular el Centro de una cónica en forma escalar
2. Calcular el centro de una cónica en forma matricial.

1 El centro de una cónica

Ejemplo escalar

Considere la cónica representada por

$$-3x^2 - 8xy + 3y^2 + 10x - 5 = 0$$

encontremos el centro, si lo tiene.

Escribamos la cónica en su representación matricial:

$$c(p) = p^t Ap + 2b^t p + \gamma = 0$$

La matriz A simétrica, el vector b asociados y γ a esta forma se escribe como

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma = -5$$

Si p_0 es centro de la cónica, entonces la transformación

$$\tilde{p} = p - p_0$$

centra la gráfica, Encontremos el centro haciendo todos los pasos vistos en clase. Por una parte $p = \tilde{p} + p_0$, en componentes

$$p = \begin{pmatrix} \tilde{x} + x_0 \\ \tilde{y} + y_0 \end{pmatrix}$$

sustituyendo en la ecuación de segundo grado tenemos

$$-3(\tilde{x} + x_0)^2 - 8(\tilde{x} + x_0)(\tilde{y} + y_0) + 3(\tilde{y} + y_0)^2 + 10(\tilde{x} + x_0) + 5 = 0$$

desarrollando y agrupando los términos cuadráticos y lineas para las dos variables, tenemos:

$$-3\tilde{x}^2 - 8\tilde{x}\tilde{y} + 3\tilde{y}^2 + (-6x_0 - 8y_0 + 10)\tilde{x} + (-8x_0 + 6y_0)\tilde{y} + (-3x_0^2 + 8x_0y_0 + 3y_0^2 + 10x_0 + 5) = 0$$

si deseamos que (x_0, y_0) sea el centro de la cónica, al transformar la cónica deben desaparecer los términos lineales, es decir que

$$\begin{aligned} -6x_0 - 8y_0 + 10 &= 0 \\ -8x_0 + 6y_0 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo éste sistema, tenemos que la solución es $p_0 = (-0.6, 0.8)^t$. Al usar esta translación, la cónica se escribe como

$$c(\tilde{p}) = \tilde{p}^t A \tilde{p} + \tilde{\gamma}$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} &= -3x_0^2 + 8x_0y_0 + 3y_0^2 + 10x_0 + 5 \\ &= \frac{5}{6} + 5 = \frac{35}{6} \end{aligned}$$

Hagamos ahora un ejercicio completo, pero en su forma matricial.

Ejemplo matricial

Consideremos el problema de describir la forma de la cónica

$$3x^2 + 4xy + 6y^2 - 2\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y + \frac{2}{7} = 0$$

Obs. La parte lineal nos proporciona información de la posición del centro, la parte cuadrática de su forma.

2 Forma matricial

De manera matricial, la cónica la escribimos

$$\mathbf{x}^t A \mathbf{x} + 2\mathbf{b}^t \mathbf{x} + \gamma = 0$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} \end{pmatrix}; \qquad \gamma = \frac{2}{7}$$

La pregunta es: se trata de una cónica, pero cuál? una hipérbola, una elipse, una parábola, un punto, dos rectas? acaso existen puntos que la representen?
Primero encontremos su centro, si lo tiene. Lo que haremos será eliminar el término lineal.

La idea es sencilla e involucra determinar una traslación de los ejes coordenados al centro de la cónica, y es que si esta tiene centro, entonces no cuenta con términos lineales. Esto es una observación no lo hemos justificado.

Con base a esto, si $\mathbf{x}_0$ un punto de la cónica puede ser observado desde ese centro como $\tilde{\mathbf{x}}$ o bien como $\mathbf{x}$. Observe la figura

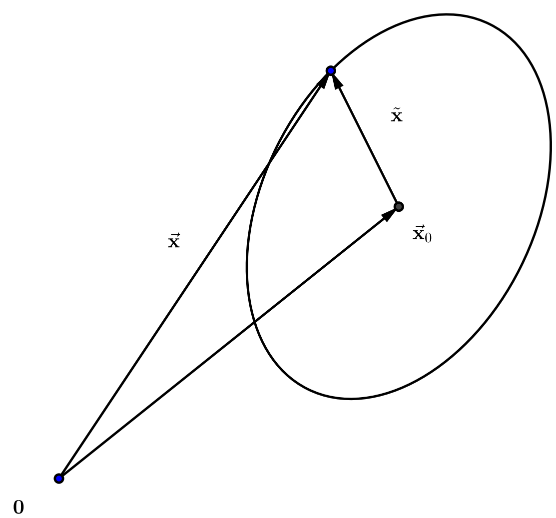

Figura 1: Observando a la cónica desde su centro y desde otro punto.

de lo cual se desprende la relación

$$\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{x}_0$$

lo cual nos invita a transformar la ecuación original en otra bajo una traslación.

Al aplicar una traslación a la cónica de un punto $\mathbf{x}$ a $\tilde{\mathbf{x}}$ vamos a lograr con esto que la cónica pueda ser escrita en la forma

$$\tilde{\mathbf{x}}^t B \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\gamma} = 0$$

ya sin términos lineales. Necesitamos identificar a la matrix B y el nuevo escalar $\tilde{\gamma}$

Consideremos la transformación

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$$

si $\mathbf{x}_0$ es el centro de la cónica, esta transformación nos es útil. Veamos lo que debe ser satisfecho para que esto se cumpla.

Bajo esa transformación observemos la cónica

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(\mathbf{x}) = \mathcal{C}(\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{x}}_0) &= \mathbf{x}^t A \mathbf{x} + 2\mathbf{b}^t \mathbf{x} + \gamma = 0 \\
&= (\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{x}_0)^t A (\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{x}_0) + 2\mathbf{b}^t (\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{x}_0) + \frac{2}{7} \\
&= \tilde{\mathbf{x}}^t A \tilde{\mathbf{x}} + 2(\mathbf{x}_0^t A + \mathbf{b}^t)\mathbf{x} + 2\mathbf{b}^t \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_0^t A \mathbf{x}_0 + \frac{2}{7} = 0
\end{aligned}$$

Si $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ es una transformación hacia el centro de la cónica, esta representación no debe contener términos lineales, para conseguirlo,

$$(\mathbf{x}_0^t A + \mathbf{b}^t)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

independiente de $\mathbf{x}$ (para todo elemento $\mathbf{x}$ debe ser satisfecha esa relación), por consiguiente el vector $\mathbf{x}_0^t A + \mathbf{b}^t$ debe ser el vector cero, esto se escribe en forma elegante como

$$A\mathbf{x}_0 + \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

lo cual es un sistema lineal de ecuaciones

$$A\mathbf{x}_0 = -\mathbf{b}$$

Hemos llegado a que si $\mathbf{x}_0$ es el centro de la cónica, $\mathbf{x}_0$ es solución del sistema anterior.

Para el ejemplo que nos compete, el sistema es:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ -2\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

La solución del sistema es

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} \frac{5}{7}\sqrt{5} \\ \\ -\frac{4}{7}\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Realizando las operaciones en la ecuación transformada, tenemos

$$\mathcal{C}(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{x}}^t A \tilde{\mathbf{x}} - 9 = 0$$

`Hacer algunos comentarios sobre cómo obtener el escalar` $\tilde{\gamma}$ `sin aplicar operaciones matriciales.`

Hasta aquí, hemos obtenido una representación centrada en $\mathbf{x}_0$ de nuestra cónica, pero aun no sabemos la forma que tiene; es decir, si se trata de una elipse, de una parábola o de una hipérbola, u otra forma.