Geometría Analítica I

LECTURA 11

Ayudante: Guilmer González　　　　Día 31 de octubre, 2012

El día de hoy veremos:

0. Comentarios sobre los trabajos últimos.

1. Trazo una parábola.

1 Trazo de parábolas

Existe un algoritmo muy sencillo para trazar arcos de parábolas que se basa el el teorema de las tres tangentes.

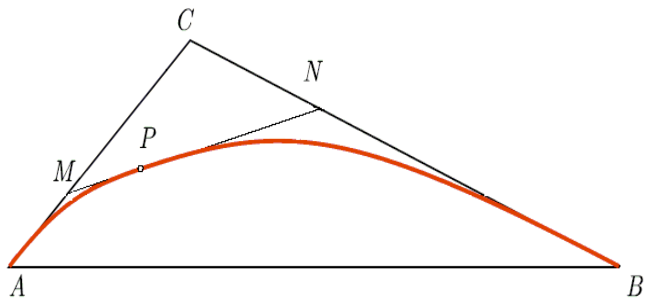
Tengamos como referencia un triángulo ABC, ahora considere el punto M que divide al segmento $\overline{AC}$ en la razón t. Esto esto, le hemos asignado una masa $1-t$ a A y t a C (si de sea verlo usando argumentos baricéntricos).

Por el momento, observe que el valor de t se encuentra entre cero y uno, ya que el punto M nos interesa dentro del segmento $\overline{AC}$.

De la misma forma, construyamos el punto N que divide a $\overline{BC}$ en la misma razón t. Ahora, localicemos el punto P sobre el segmento comprendido entre $\overline{MN}$ de manera que lo divida en la misma razón t.

Para cada valor de t entre 0 y 1, obtendremos un punto $P(t)$. El lugar geométrico de los puntos P es una parábola!!! Veamos que esto ocurre.

Hagamos las cuentas de manera formal, consideremos el triángulo que forman esos puntos, desde luego pedimos que los vértices sean no colineales.



Consideremos un punto de origen, o en en alguna otra parte del plano, usemos vectores. Segun esto M divide a $\overline{AC}$ en t. Esto significa que el punto M se encuentra a una distancia t veces proporcional de A, y $1-t$ veces proporcional a C, esto es

$$\vec{OM} = (1-t)\vec{OA} + t\vec{OC}$$

Ahora bien, N divide a $\overline{CB}$ en t. Esto significa que el punto N se encuentra a una distancia t veces proporcional de C, y $1-t$ veces proporcional a B, esto es

$$\vec{ON} = (1-t)\vec{OC} + t\vec{OB}$$

Siguiendo este argumento, el vector $\vec{OP}$ lo escribimos como

$$\vec{OP} = (1-t)\vec{OM} + t\vec{ON}$$

Ahora bien, identifiquemos $\vec{OP}$ en términos de los vértices del triángulo

$$\begin{aligned}
\vec{OP} &= (1-t)\vec{OM} + t\vec{ON} \\
&= (1-t)[(1-t)\vec{OA} + t\vec{OC}] + t[(1-t)\vec{OC} + t\vec{OB}] \\
&= (1-t)^2\vec{OA} + 2t(1-t)\vec{OC} + t^2\vec{OB}
\end{aligned}$$

Una representación compacta para esa colección de puntos P, en términos de el parámetro t, lo que hemos contruido es una curva y para reconstruirla solamente requerimos de A, B y C.

Veamos un ejemplo sencillo. Consideremos los puntos de control $A(0,0)$, $B(1,0)$ y $C(0,1)$. Tomando $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
\vec{OM} &= (1-t)\vec{OA} + t\vec{OC} \\
&= t(0,1)
\end{aligned}$$

es decir, el punto M tiene coordenadas $M(0,t)$. Ahora bien

$$\begin{aligned}\vec{ON} &= (1-t)\vec{OC} + t\vec{OB} \\ &= (1-t)(0,1) + t(1,0) = (t, 1-t)\end{aligned}$$

es decir, el punto N tiene coordenadas $N(t, 1-t)$, con esto

$$\begin{aligned}\vec{OP} &= (1-t)\vec{OM} + t\vec{ON} \\ &= (1-t)(0,t) + t(t, 1-t) \\ &= (t^2, 2t(1-t))\end{aligned}$$

Es decir, la ecuación paramétrica del lugar geométrico $P(x,y)$ es

$$\begin{aligned}x &= t^2 \\ y &= 2t - 2t^2\end{aligned}$$

Si se observa, la tangente a esa curva en un punto genérico, tiene la dirección $(t, 1-2t)$, el cual coincide con el vector $\vec{MN}$. Observemos que para $t=0$, se tiene el punto A, y la tangente aquí es $(0,1)$. Si $t=1$, se obtiene el punto B, y la tiene la dirección $(1,-1)$ que representa la dirección de $\vec{CB}$.

Si eliminamos el parámetro t, tendremos

$$4x^2 + y^2 + 4xy - 4x = 0$$

la ecuación implícita de una parábola, rotada bajo un cierto eje, claro.

Ejercicio: Dado el polígono de control $A(0,2)$, $B(1,3)$ y $C(1/2,2)$. Encuentre la cónica que describe.