Introducción al Análisis Real

Mónica Clapp
Instituto de Matemáticas
Universidad Nacional Autónoma de México

Agosto 2010

Índice general

Parte I

Continuidad, compacidad y completitud

Capítulo 1

Motivación

El siguiente problema guiará el desarrollo de la primera parte de estas notas.

Problema 1.1 *Dados un subconjunto* X *de* $\mathbb{R}^n$ *y dos puntos* $p, q \in X$, *¿existe una trayectoria de* p *a* q *en* X *de longitud mínima?*

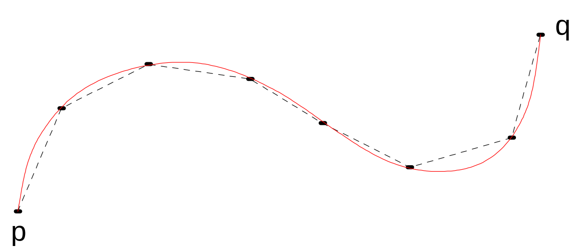
Precisemos esta pregunta. Una *trayectoria* de p a q en X es una función continua $\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$\sigma(0) = p, \quad \sigma(1) = q, \quad \text{y} \quad \sigma(t) \in X \quad \forall t \in [0,1].$$

Su *longitud* se define como

$$\mathfrak{L}(\sigma) := \sup \left\{ \sum_{k=1}^{m} \|\sigma(t_{k-1}) - \sigma(t_k)\| : 0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_m = 1, \ m \in \mathbb{N} \right\},$$

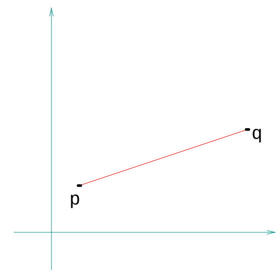
donde $\|x - y\| := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$ denota la distancia de x a y.



Observa que $\mathfrak{L}(\sigma) \geq \|p - q\|$.

Una trayectoria de p a q en X es *de longitud mínima* si su longitud es menor o igual a la de todas las demás. Por ejemplo, si $X := \mathbb{R}^n$, la trayectoria $\sigma(t) := (1-t)p + tq$

cumple que $\mathfrak{L}(\sigma) = \|p - q\|$. De modo que σ es una trayectoria de longitud mínima de p a q en $\mathbb{R}^n$.



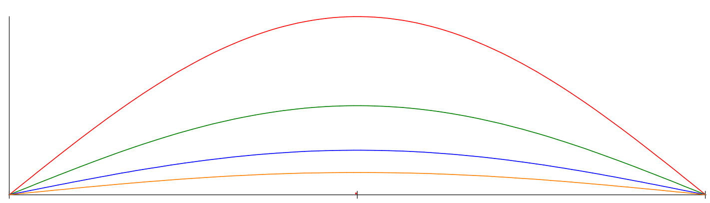
Sin embargo, si $X \neq \mathbb{R}^n$ no siempre existe una trayectoria de longitud mínima, como lo muestra el siguiente ejemplo. Recuerda que, si σ es continuamente diferenciable, entonces la longitud de σ está dada por la integral [1]

$$\mathfrak{L}(\sigma) = \int_0^1 \|\sigma'(t)\| \, dt.$$

Ejemplo 1.2 *No existe una trayectoria de longitud mínima de* $p = (0,0)$ *a* $q = (1,0)$ *en* $X := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (\frac{1}{2}, 0)\}$.

Demostración: Considera las trayectorias $\sigma_k(t) := (t, \frac{1}{k}\text{sen}\pi t)$, $k \in \mathbb{N}$. Su longitud satisface

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(\sigma_k) &= \int_0^1 \|\sigma_k'\| = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{k}\right)^2 \cos^2 \pi t} \; dt \\ &< \int_0^1 \left(1 + \frac{\pi}{k} |\cos \pi t|\right) dt = 1 + \frac{2}{k}. \end{aligned}$$



Por tanto, $\lim_{k\to\infty} \mathfrak{L}(\sigma_k) = 1$. De modo que, si existiera una trayectoria de longitud mínima de p a q en X, ésta debería tener longitud 1. Pero cualquier trayectoria de p a q en $\mathbb{R}^2$ de longitud 1 pasa por el punto $(\frac{1}{2}, 0)$, que no pertenece a X. ■

[1] Consulta por ejemplo el libro de J.E. Marsden y A.J. Tromba, *Cálculo Vectorial*, México: Addison-Wesley, Pearson Educación, 1998.

Este ejemplo muestra que el Problema 1.1 no es un problema trivial. Para intentar resolverlo, empezaremos expresándolo como un problema de minimización.

Denotemos por $\mathcal{T}_{p,q}(X)$ al conjunto de todas las trayectorias de p a q en X. Podemos entonces considerar a la longitud como una función definida en dicho conjunto, es decir,

$$\mathfrak{L} : \mathcal{T}_{p,q}(X) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \qquad \mathfrak{L}(\sigma) := \text{longitud de } \sigma.$$

Diremos que la función $\mathfrak{L}$ *alcanza su mínimo en* $\mathcal{T}_{p,q}(X)$ si existe una trayectoria $\sigma_0 \in \mathcal{T}_{p,q}(X)$ tal que

$$\mathfrak{L}(\sigma_0) \leq \mathfrak{L}(\sigma) \quad \forall \sigma \in \mathcal{T}_{p,q}(X).$$

En estos términos el Problema 1.1 se expresa como sigue.

Problema 1.3 *¿Alcanza $\mathfrak{L}$ su mínimo en $\mathcal{T}_{p,q}(X)$?*

En nuestros cursos de Cálculo Diferencial e Integral enfrentamos un problema parecido y vimos el siguiente resultado.

Teorema 1.4 *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función continua y K es un subconjunto compacto no vacío de $\mathbb{R}^n$, entonces f alcanza su mínimo en K, es decir, existe $x_0 \in K$ tal que*

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in K.$$

Ahora bien, como $\mathcal{T}_{p,q}(X)$ es un conjunto de funciones y no de puntos en $\mathbb{R}^n$, no tiene sentido aplicar este teorema al problema que nos interesa. Pero podemos inspirarnos en él. El gran matemático francés Henri Poincaré (1854-1912)

afirmó lo siguiente:

"La matemática es el arte de nombrar de la misma manera cosas distintas".

Entonces, ¿será posible pensar a las trayectorias como si fuesen puntos? El Teorema 1.4, ¿valdrá también para la función longitud? ¿Qué quiere decir que la función $\mathfrak{L} : \mathcal{T}_{p,q}(X) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ sea continua? ¿Y que un subconjunto de $\mathcal{T}_{p,q}(X)$ sea compacto?

El Análisis Matemático da respuesta a este tipo de preguntas. Profundiza en los conceptos y los resultados que aprendimos en Cálculo, captura su esencia, y los extiende a otros espacios distintos del euclidiano. Muy especialmente, a espacios de funciones, como el conjunto de trayectorias $\mathcal{T}_{p,q}(X)$. Y a funciones como $\mathfrak{L}$, cuyo dominio no es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ sino un conjunto de funciones.

Los espacios de funciones aparecen de manera natural en muchos problemas de las Matemáticas y de sus aplicaciones. Por ejemplo, las soluciones de una ecuación diferencial son funciones. Veremos que el Análisis Matemático nos permite demostrar la existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales.

En la primera parte de estas notas introduciremos y estudiaremos los conceptos de *continuidad*, *compacidad* y *completitud* en espacios muy generales. Estas nociones se definen a partir de un concepto muy sencillo: el concepto de distancia. Los conjuntos provistos de una distancia se llaman *espacios métricos* y son el objeto del siguiente capítulo. Veremos aplicaciones interesantes de esos conceptos y daremos una respuesta al Problema 1.1.

Capítulo 2

Espacios métricos

Algunos conceptos fundamentales, como el paso al límite o la continuidad de funciones en espacios euclidianos, están definidos exclusivamente en términos de la distancia. Otras propiedades de los espacios euclidianos, como su estructura de espacio vectorial, no intervienen en dichos conceptos.

Empezaremos considerando conjuntos dotados exclusivamente de una *distancia*, a los que se denomina *espacios métricos*. El matemático francés Maurice Fréchet[1] introdujo esta noción, que juega un papel fundamental en las matemáticas modernas.

Daremos en este capítulo ejemplos interesantes de espacios métricos que aparecen de manera natural en muchas aplicaciones, algunas de las cuales se verán más adelante.

2.1. Definición y ejemplos

Definición 2.1 *Sea X un conjunto. Una* ***métrica*** *(o* ***distancia****) en X es una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que tiene las siguientes tres propiedades:*
(M1) $d(x, y) = 0$ *si y sólo si* $x = y$.
(M2) $d(x, y) = d(y, x)$ *para todos* $x, y \in X$.
(M3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *para todos* $x, y, z \in X$.
A esta última desigualdad se le llama la ***desigualdad del triángulo****.*
Un ***espacio métrico*** *es un conjunto X con una métrica dada d. Lo denotaremos por (X, d), o simplemente por X cuando no haga falta especificar su métrica.*

Veamos que la distancia entre dos puntos nunca es negativa.

[1] Maurice René Fréchet (1878-1973) nació en Maligni, Francia. En la escuela secundaria fue alumno de Jacques Hadamard, quien reconoció su potencial y decidió asesorarlo de manera personal. Estudió matemáticas en la École Normale Supérieure de París donde obtuvo su doctorado bajo la dirección de Hadamard. Introdujo la noción de espacio métrico en 1906 en su tesis de doctorado, en la que, a través de su estudio de funcionales en espacios métricos, inicia un área totalmente nueva en Matemáticas.

Proposición 2.2 *$d(x, y) \geq 0$ para todos $x, y \in X$.*

Demostración: De las propiedades (M1), (M3) y (M2) respectivamente se sigue que

$$0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y).$$

En consecuencia, $d(x, y) \geq 0$ para todos $x, y \in X$. ■

Ejemplos de espacios métricos que conocemos bien son los siguientes dos.

Ejemplo 2.3 *El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales con la distancia usual*

$$d(x, y) := |x - y| = \begin{cases} x - y & \text{si } x \geq y, \\ y - x & \text{si } x \leq y, \end{cases}$$

es un espacio métrico.

Ejemplo 2.4 *El espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ con la distancia usual*

$$d_2(x, y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2},$$

donde $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, es un espacio métrico.

La demostración se vió ya en cursos anteriores. La dejamos aquí como ejercicio [Ejercicio 2.32].

Podemos darle a $\mathbb{R}^n$ otras métricas interesantes, por ejemplo las siguientes dos.

Ejemplo 2.5 *La función*

$$d_1(x, y) := |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|,$$

donde $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, es una métrica para el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$.

Demostración: Las propiedades (M1) y (M2) son inmediatas y la propiedad (M3) se sigue de la desigualdad del triángulo en $\mathbb{R}$ que afirma que, para toda $i = 1, ..., n$,

$$|x_i - z_i| \leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i|.$$

Sumando ambos lados de estas desigualdades para $i = 1, ..., n$ obtenemos

$$d_1(x, z) \leq d_1(x, y) + d_1(y, z).$$

En consecuencia, d_1 es una métrica. ■

Ejemplo 2.6 *La función*

$$d_\infty(x,y) := \max\left\{|x_1 - y_1|, \cdots, |x_n - y_n|\right\},$$

donde $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, *es una métrica para el espacio euclidiano* $\mathbb{R}^n$*.*

La demostración es sencilla y se deja como ejercicio [Ejercicio 2.33].

Introduciremos ahora métricas análogas en espacios de sucesiones (x_k) de números reales.

Ejemplo 2.7 *Sea* ℓ_∞ *el conjunto de todas las sucesiones acotadas de números reales, es decir, de las sucesiones* $x = (x_k)$ *para las cuales existe* $c \in \mathbb{R}$ *(que depende de* x*) tal que* $|x_k| < c$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$*. Definimos*

$$d_\infty(x,y) := \sup_{k \geq 1} |x_k - y_k|, \qquad x = (x_k),\ y = (y_k) \in \ell_\infty.$$

Entonces d_∞ *toma valores en* $\mathbb{R}$ *y es una métrica en* ℓ_∞*.*

Demostración: Sean $x = (x_k)$, $y = (y_k)$ sucesiones acotadas, y sean $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tales que $|x_k| < c_1$ y $|y_k| < c_2$ para todo $k \in \mathbb{N}$. De la desigualdad del triángulo para números reales se sigue que

$$|x_k - y_k| \leq |x_k| + |y_k| \leq c_1 + c_2 \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

es decir, la sucesión $(x_k - y_k)$ está acotada y, por tanto,

$$d_\infty(x,y) := \sup_{k \geq 1} |x_k - y_k| \in \mathbb{R}.$$

Es inmediato comprobar que d_∞ satisface las propiedades (M1) y (M2). Aplicando nuevamente desigualdad del triángulo para números reales obtenemos que, si $x, y, z \in \ell_\infty$, entonces

$$|x_k - y_k| \leq |x_k - z_k| + |z_k - y_k| \leq d_\infty(x,z) + d_\infty(z,y) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

En consecuencia,

$$d_\infty(x,y) \leq d_\infty(x,z) + d_\infty(z,y) \quad \forall x, y, z \in \ell_\infty,$$

es decir, d_∞ satisface (M3). ∎

En los siguientes ejemplos requeriremos la noción de convergencia de una serie. Recordemos que una serie de números reales

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

converge, si la sucesión (s_n) de sumas finitas

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} x_k$$

converge. En tal caso, se denota

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k := \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Si $x_k \geq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión (s_n) es creciente. En ese caso, la serie converge si y sólo si la sucesión (s_n) está acotada y, si eso ocurre, se tiene que

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k := \lim_{n\to\infty} s_n = \sup_{n\geq 1} s_n.$$

Ejemplo 2.8 *Sea ℓ_1 el conjunto de las sucesiones $x = (x_k)$ de números reales tales que la serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$$

converge, y sea

$$d_1(x,y) := \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|, \qquad x = (x_k),\ y = (y_k) \in \ell_1.$$

Entonces d_1 toma valores en $\mathbb{R}$ y es una métrica en ℓ_1.

Demostración: De la desigualdad del triángulo para números reales,

$$|x_k - y_k| \leq |x_k| + |y_k|,$$

se sigue que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k| &\leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| + \sum_{k=1}^{n} |y_k| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| + \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|. \end{aligned}$$

Por consiguiente, si $x = (x_k)$, $y = (y_k) \in \ell_1$, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|$ converge y se cumple que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| + \sum_{k=1}^{\infty} |y_k| . \tag{2.1}$$

Es fácil comprobar que d_1 satisface (M1) y (M2). La propiedad (M3) se sigue de la desigualdad (2.1) reemplazando x_k por $x_k - z_k$ y y_k por $y_k - z_k$, es decir,

$$d_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - z_k| + \sum_{k=1}^{\infty} |z_k - y_k| = d_1(x, z) + d_1(z, y),$$

para todas $x, y, z \in \ell_1$. ■

2.2. Espacios normados

Nota que todos los ejemplos anteriores, además de la estructura geométrica dada por la distancia, poseen una estructura algebraica: la de espacio vectorial. Las métricas más interesantes en un espacio vectorial son las inducidas por una norma.

Definición 2.9 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Una* ***norma*** *en V es una función $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ que tiene las siguientes propiedades:*
(N1) $\|v\| = 0$ *si y sólo si* $v = 0$,
(N2) $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$ *para todos* $v \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$,
(N3) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ *para todos* $v, w \in V$
Un ***espacio normado*** *es un espacio vectorial V con una norma dada $\|\cdot\|$. Lo denotaremos por $(V, \|\cdot\|)$, o simplemente por V cuando no haga falta especificar su norma.*

Proposición 2.10 *Todo espacio normado $(V, \|\cdot\|)$ es un espacio métrico con la métrica dada por*

$$d(v, w) = \|v - w\| .$$

Esta métrica se llama la ***métrica inducida*** *por la norma $\|\cdot\|$.*

La demostración es sencilla y se deja como ejercicio [Ejercicio 2.35].

Todas las métricas consideradas en los ejemplos anteriores están inducidas por una norma. Veamos otros ejemplos.

Dado $x \in \mathbb{R}^n$ definimos

$$\begin{aligned} \|x\|_p &:= \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{si } p \in [1, \infty), \\ \|x\|_\infty &:= \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| . \end{aligned} \tag{2.2}$$

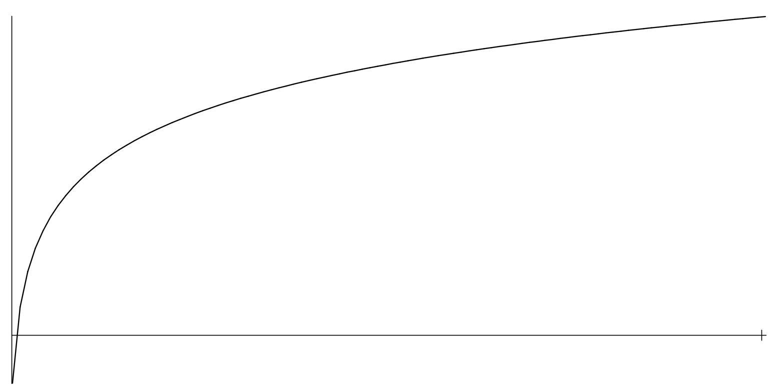
Es sencillo comprobar que $\|\cdot\|_p$ cumple las propiedades (N1) y (N2). Para probar que cumple la propiedad (N3) requerimos unas desigualdades que demostraremos a continuación.

Lema 2.11 (Desigualdad de Young) *Sean $p, q \in (1, \infty)$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces, para todo par de números reales $a, b \geq 0$ se tiene que*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

Demostración: Si $a = 0$ o $b = 0$ la desigualdad es obvia, de modo que podemos suponer que $ab > 0$. La función logaritmo natural $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ es una función cóncava, es decir, si $x_0, x_1 > 0$ entonces

$$\ln[(1-t)x_0 + tx_1] \geq (1-t)\ln x_0 + t\ln x_1 \qquad \forall t \in [0,1].$$



$y = \ln x$

Tomando $x_0 := a^p$, $x_1 := b^q$ y $t := \frac{1}{q}$ obtenemos

$$\ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \geq \frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q = \ln a + \ln b = \ln(ab)$$

y, como el logaritmo natural es una función creciente, concluímos que

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

Esta es la desigualdad deseada. ■

Aplicaremos la desigualdad de Young[2] para demostrar la desiguladad de Hölder[3].

Proposición 2.12 (Desigualdad de Hölder en $\mathbb{R}^n$) *Sean $p,q \in (1,\infty)$ tales que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Entonces, para cualesquiera $x=(x_1,...,x_n)$, $y=(y_1,...,y_n)\in\mathbb{R}^n$ se cumple que*

$$\sum_{k=1}^{n}|x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

es decir,

$$\|xy\|_1 \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

donde $xy := (x_1y_1,...,x_ny_n)$.

Demostración: La afirmación es trivial si $x=0$ o si $y=0$. Supongamos pues que ambos son distintos de cero. Aplicando la desigualdad de Young a

$$a_k := \frac{|x_k|}{\|x\|_p} \quad \text{y} \quad b_k := \frac{|y_k|}{\|y\|_q}$$

obtenemos

$$\frac{|x_k y_k|}{\|x\|_p\|y\|_q} = |a_k b_k| \leq \frac{1}{p}a_k^p + \frac{1}{q}b_k^q = \frac{|x_k|^p}{p\|x\|_p^p} + \frac{|y_k|^q}{q\|y\|_q^q}.$$

Sumando todas estas desigualdades para $k=1,...,n$, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{\|x\|_p\|y\|_q}\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k y_k|\right) &\leq \frac{1}{p\|x\|_p^p}\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right) + \frac{1}{q\|y\|_q^q}\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q\right)\\ &= \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.\end{aligned}$$

Multiplicando ambos lados por $\|x\|_p\|y\|_q$ obtenemos la desigualdad deseada. ■

Estamos listos para demostrar el siguiente resultado.

Proposición 2.13 *Para cada $p\in[1,\infty]$, la función $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida en* (2.2) *es una norma en $\mathbb{R}^n$.*

[2] William Henry Young (1863-1942) nació en Londres, Inglaterra. Estudió Matemáticas en la Universidad de Cambridge. Decidió dedicarse a la investigación por influencia de su mujer, Grace Chisholm, quien había sido discípula de Felix Klein en Göttingen. Juntos formaron una pareja matemática destacada. Young fue profesor en diversas universidades incluyendo la de Lausanne, ciudad en la que murió.

[3] Otto Ludwig Hölder (1859-1937) nació en Stuttgart, Alemania. Estudió en las universidades de Stuttgart y Berlín, donde fue estudiante de Kronecker, Weierstrass y Kummer. Obtuvo el doctorado en la Universidad de Tübingen en 1882 bajo la dirección de Paul du Bois-Reymond. Descubrió la desigualdad que lleva su nombre en 1884, cuando trabajaba en la convergencia de series de Fourier.

Demostración: Es sencillo ver que $\|\cdot\|_p$ cumple las propiedades (N1) y (N2). Demostremos la propiedad (N3), es decir, que para todo $p \in [1, \infty]$ se cumple que

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{2.3}$$

Para $p = \infty$ esta desigualdad es consequencia inmediata de la desigualdad del triángulo para números reales [Ejercicio 2.33]. El caso $p = 1$ se probó en el Ejemplo 2.5. Consideremos el caso $p \in (1, \infty)$. La afirmación es trivial si $x = 0$. Supongamos pues que $x \neq 0$ y apliquemos la desigualdad de Hölder a x y $((|x_1|+|y_1|)^{p-1}, \ldots, (|x_n|+|y_n|)^{p-1})$. Observando que $q = \frac{p}{p-1}$ obtenemos

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k| \left(|x_k| + |y_k|\right)^{p-1} \leq \|x\|_p \left(\sum_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|)^p \right)^{\frac{1}{q}},$$

Análogamente,

$$\sum_{k=1}^{n} |y_k| \left(|x_k| + |y_k|\right)^{p-1} \leq \|y\|_p \left(\sum_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|)^p \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Sumando las dos desigualdades anteriores obtenemos

$$\sum_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|)^p \leq \left(\|x\|_p + \|y\|_p \right) \left(\sum_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|)^p \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Dividiendo ambos lados de esta desigualdad entre

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|)^p \right)^{\frac{1}{q}}$$

y usando la desigualdad del triángulo para números reales $|x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k|$, obtenemos

$$\|x+y\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|x\|_p + \|y\|_p,$$

que es la desigualdad deseada. ■

Notación 2.14 *Con el fin de distinguir cuál de todas estas normas estamos considerando, usaremos la notación*

$$\mathbb{R}^n_p := (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p), \qquad p \in [1, \infty],$$

para designar al espacio $\mathbb{R}^n$ con la norma $\|\cdot\|_p$. Escribiremos simplemente $\mathbb{R}^n$ en vez de $\mathbb{R}^n_2$ para designar a $\mathbb{R}^n$ con la norma usual, a la que denotaremos simplemente por

$$\|x\| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Nota que las métricas d_1, d_2 y d_∞ consideradas en los Ejemplos 2.4 al 2.6 son las inducidas por las normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_\infty$, respectivamente.

Consideremos ahora espacios de sucesiones. Las sucesiones de números reales se pueden sumar y multiplicar por escalares término a término, es decir, si $x = (x_k)$ y $y = (y_k)$ son sucesiones de números reales y $\lambda \in \mathbb{R}$, se definen

$$x + y := (x_k + y_k) \qquad \text{y} \qquad \lambda x := (\lambda x_k).$$

Con estas operaciones el conjunto de todas las sucesiones de números reales es un espacio vectorial. Para espacios de sucesiones adecuados podemos definir normas análogas a las definidas para $\mathbb{R}^n$.

Proposición 2.15 *(a) Dada $p \in [1, \infty)$, consideremos el conjunto ℓ_p de todas las sucesiones (x_k) de números reales tales que la serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$$

converge. Entonces ℓ_p es un espacio vectorial y la función

$$\|(x_k)\|_p := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

es una norma en ℓ_p.
(b) El conjunto ℓ_∞ de todas las sucesiones acotadas de números reales (x_k) es un espacio vectorial y la función

$$\|(x_k)\|_\infty := \sup_{k \geq 1} |x_k|$$

es una norma en ℓ_∞.

Demostración: Es sencillo ver que $\lambda x \in \ell_p$ para toda $x \in \ell_p$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y que $\|\cdot\|_p$ cumple las propiedades (N1) y (N2) [Ejercicio 2.39]. Probaremos a continuación que $x + y \in \ell_p$ si $x, y \in \ell_p$ y que $\|\cdot\|_p$ cumple la propiedad (N3). Sean $p \in [1, \infty)$ y $(x_k), (y_k) \in \ell_p$. Como la norma $\|\cdot\|_p$ en $\mathbb{R}^n$ satisface la propiedad (N3), se tiene que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|(x_k)\|_p + \|(y_k)\|_p$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p$ converge y se cumple que

$$\|(x_k + y_k)\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|(x_k)\|_p + \|(y_k)\|_p .$$

El caso $p = \infty$ se probó en el Ejemplo 2.7. ∎

Si $p \in [1, \infty)$ la propiedad (N3) en ℓ_p se llama la **desigualdad de Minkowski para series**. Nota que las métricas d_1 y d_∞ consideradas en los Ejemplos 2.8 y 2.7 son las inducidas por las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ que acabamos de definir.

No cualquier métrica en un espacio vectorial está inducida por una norma. De hecho, a cualquier conjunto le podemos dar la métrica siguiente.

Ejemplo 2.16 *Sea X un conjunto arbitrario. La función*

$$d_{disc}(x, y) = \begin{cases} 0 & si\ x = y, \\ 1 & si\ x \neq y, \end{cases}$$

*es una métrica en X, llamada la **métrica discreta**. El espacio $X_{disc} := (X, d_{disc})$ se llama un **espacio discreto**.*

Es sencillo comprobar que en un espacio vectorial no trivial ninguna norma induce la métrica discreta [Ejercicio 2.38].

2.3. Espacios de funciones

Denotemos por $\mathcal{C}^0[a, b]$ al conjunto de todas las funciones continuas $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. La suma de funciones y el producto de una función por un escalar, definidos como

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) := \lambda f(x), \quad \text{para } f, g \in \mathcal{C}^0[a, b],\ \lambda \in \mathbb{R},$$

le dan a $\mathcal{C}^0[a, b]$ la estructura de espacio vectorial. Dada una función continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definimos

$$\begin{aligned} \|f\|_p &:= \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{si } p \in [1, \infty), \\ \|f\|_\infty &:= \text{máx}\{|f(x)| : a \leq x \leq b\}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Proposición 2.17 *Para cada $p \in [1, \infty]$ la función $\|\cdot\|_p : \mathcal{C}^0[a, b] \to \mathbb{R}$ es una norma.*

Demostración: Si $p = \infty$ la demostración es sencilla. Consideremos el caso $p \in [1, \infty)$. Como $|f(x)|^p$ es una función continua y no negativa, se tiene que

$$\|f\|_p^p = \int_a^b |f(x)|^p \, dx = 0 \Longleftrightarrow |f(x)|^p = 0 \quad \forall x \in [a, b].$$

En consecuencia, $\|f\|_p = 0$ si y sólo si $f = 0$. Esto demuestra (N1). La propiedad (N2) es consecuencia inmediata de la linealidad de la integral. La propiedad (N3) se conoce como la desigualdad de Minkowski para integrales y la demostraremos a continuación (Proposición 2.19). ■

Empezaremos probando la desigualdad de Hölder para integrales. Su demostración es análoga a la correspondiente para $\mathbb{R}^n$.

Proposición 2.18 (Desigualdad de Hölder para integrales) *Sean $p, q \in (1, \infty)$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces, para cualquier par de funciones continuas $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ se cumple que*

$$\int_a^b |f(x)g(x)| \, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}},$$

es decir,

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \, .$$

Demostración: La afirmación es trivial si $f = 0$ o si $g = 0$. Supongamos pues que ambas funciones son distintas de cero. Para cada $x \in [a, b]$, definimos números reales positivos

$$a_x := \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \quad \text{y} \quad b_x := \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}.$$

Aplicando la desigualdad de Young (Lema 2.11) obtenemos

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_q} = |a_x b_x| \leq \frac{1}{p} a_x^p + \frac{1}{q} b_x^q = \frac{|f(x)|^p}{p \|f\|_p^p} + \frac{|g(x)|^q}{q \|g\|_q^q},$$

e integrando ambos lados de esta desigualdad obtenemos

$$\frac{\int_a^b |f(x)g(x)| \, dx}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{\int_a^b |f(x)|^p \, dx}{p \|f\|_p^p} + \frac{\int_a^b |g(x)|^q \, dx}{q \|g\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Finalmente, multiplicando ambos lados por $\|f\|_p \|g\|_q$ obtenemos la desigualdad deseada. ■

Es fácil ver que también vale la desigualdad de Hölder

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$$

[Ejercicio 2.45]. A partir de la desigualdad de Hölder se obtiene la desigualdad de Minkowski[4].

Proposición 2.19 (Desigualdad de Minkowski para integrales) *Sea* $p \in [1, \infty]$. *Entonces,*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \qquad \forall f, g \in \mathcal{C}^0[a,b].$$

Demostración: Los casos $p = 1, \infty$ se dejan como ejercicio [Ejercicio 2.44]. Sea $p \in (1, \infty)$. Si $f = 0$ la afirmación es inmediata. Supongamos pues que $f \neq 0$. Sea $h(x) := (|f(x)| + |g(x)|)^{p-1}$. Aplicando la desigualdad de Hölder para integrales (Proposición 2.18) a las funciones f, h, y g, h respectivamente, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)|\,(|f(x)| + |g(x)|)^{p-1} dx &\leq \|f\|_p \left(\int_a^b (|f(x)| + |g(x)|)^p\right)^{\frac{1}{q}}, \\ \int_a^b |g(x)|\,(|f(x)| + |g(x)|)^{p-1} dx &\leq \|g\|_p \left(\int_a^b (|f(x)| + |g(x)|)^p\right)^{\frac{1}{q}},\end{aligned}$$

y sumando estas desigualdades concluímos que

$$\int_a^b (|f(x)| + |g(x)|)^p dx \leq \left(\|f\|_p + \|g\|_p\right) \left(\int_a^b (|f(x)| + |g(x)|)^p\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Dividiendo ambos lados de esta desigualdad entre

$$\left(\int_a^b (|f(x)| + |g(x)|)^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

y usando la desigualdad del triángulo para números reales $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ y la monotonía de la integral obtenemos

$$\|f+g\|_p = \left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b (|f(x)| + |g(x)|)^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_p + \|g\|_p\,,$$

como afirma el enunciado. ∎

[4]Hermann Minkowski (1864-1909) nació en Lituania, entonces parte del Imperio Ruso. Realizó el doctorado en 1885 en la Universidad Albertina de Königsberg bajo la dirección de Ferdinand von Lindemann. Fue profesor en la ETH de Zürich y en la Universidad de Göttingen, ciudad en la que murió.

Notación 2.20 *Con el fin de distinguir cuál de todas estas normas estamos considerando, usaremos la notación*

$$\mathcal{C}_p^0[a,b] := (\mathcal{C}^0[a,b], \|\cdot\|_p), \qquad p \in [1,\infty],$$

para designar al espacio de las funciones continuas $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *con la norma* $\|\cdot\|_p$*. Como veremos más adelante, la norma más adecuada en el espacio de funciones continuas* $\mathcal{C}^0[a,b]$ *es la norma* $\|\cdot\|_\infty$*. Por ello, escribiremos simplemente*

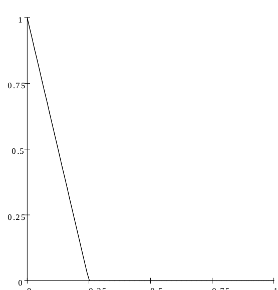
$$\mathcal{C}^0[a,b] := (\mathcal{C}^0[a,b], \|\cdot\|_\infty).$$

Observemos que la distancia $\|f-g\|_\infty$ entre dos funciones continuas f y g es pequeña si sus gráficas están cerca la una de la otra, mientras que la distancia $\|f-g\|_1$ es pequeña si el área de la región delimitada por sus gráficas es pequeña. Así, dos funciones continuas pueden estar muy cerca según la norma $\|\cdot\|_1$ y muy lejos según la norma $\|\cdot\|_\infty$, como lo muestra el siguiente ejemplo.

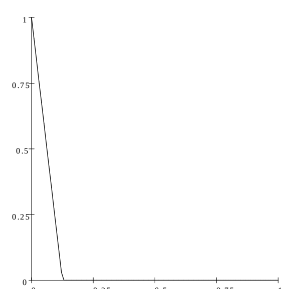
Ejemplo 2.21 *Consideremos las funciones* $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ *dadas por*

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 - kx & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{k}, \\ 0 & \text{si } \frac{1}{k} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Entonces $\|f_k\|_\infty = 1$ *para toda* $k \in \mathbb{N}$, *mientras que* $\|f_k\|_1 = \frac{1}{2k}$.



$y = f_4(x)$



$y = f_8(x)$

Es decir, según la norma $\|\cdot\|_\infty$ *todas las funciones* f_k *distan exactamente* 1 *de la función constante igual a* 0, *mientras que, según la norma* $\|\cdot\|_1$, *dichas funciones se acercan cada vez más a la función* 0 *conforme* k *crece.*

Las normas definidas en esta sección satisfacen las siguientes relaciones.

Proposición 2.22 *Para toda $f \in \mathcal{C}^0[a,b]$ se cumple que*

$$\begin{aligned}\|f\|_s &\leq (b-a)^{\frac{r-s}{rs}}\|f\|_r \quad \forall 1 \leq s < r < \infty,\\ \|f\|_s &\leq (b-a)^{\frac{1}{s}}\|f\|_\infty \quad \forall 1 \leq s < \infty.\end{aligned}$$

Demostración: Si $1 \leq s < r < \infty$, aplicando la desigualdad de Hölder (Proposición 2.18) con $p = \frac{r}{r-s}$ y $q = \frac{r}{s}$ a la función constante con valor 1 y a la función $|f|^s$ obtenemos que

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)|^s\,dx &\leq \left(\int_a^b dx\right)^{\frac{r-s}{r}}\left(\int_a^b |f(x)|^r\,dx\right)^{\frac{s}{r}}\\ &= (b-a)^{\frac{r-s}{r}}\left(\int_a^b |f(x)|^r\,dx\right)^{\frac{s}{r}}.\end{aligned}$$

Elevando ambos lados a la potencia $\frac{1}{s}$ obtenemos la primera desigualdad. La segunda desigualdad es sencilla y se deja como ejercicio. ■

2.4. El espacio de funciones acotadas

El siguiente ejemplo juega un papel importante en muchas aplicaciones, algunas de las cuales se verán más adelante.

Sea S un conjunto y sea $X = (X,d)$ un espacio métrico.

Definición 2.23 *Una función $f : S \to X$ es **acotada** si existen $c \in \mathbb{R}$ y $x_0 \in X$ tales que*

$$d(f(z), x_0) \leq c \qquad \forall z \in S.$$

Denotamos por

$$\mathcal{B}(S,X) := \{f : S \to X : f \text{ es acotada}\}$$

y definimos

$$d_\infty(f,g) := \sup_{z\in S} d(f(z), g(z)).$$

Proposición 2.24 *d_∞ es una métrica en $\mathcal{B}(S,X)$. Esta métrica se llama la **métrica uniforme**.*

Demostración: Veamos primero que, si $f, g \in \mathcal{B}(S, X)$, entonces $d_\infty(f, g) \in \mathbb{R}$. Sean $x_0, x_1 \in X$ y $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ tales que

$$d(f(z), x_0) \leq c_0 \quad \text{y} \quad d(g(z), x_1) \leq c_1 \qquad \forall z \in S.$$

Como d satisface (M3) se tiene que

$$d(f(z), g(z)) \leq d(f(z), x_0) + d(x_0, x_1) + d(x_1, g(z)) \leq c_0 + d(x_0, x_1) + c_1 \quad \forall z \in S.$$

En consecuencia, $d_\infty(f, g) \in \mathbb{R}$. Probemos ahora que d_∞ es una métrica para $\mathcal{B}(S, X)$. Como d satisface (M1) se tiene que

$$d_\infty(f, g) = 0 \Leftrightarrow d(f(z), g(z)) = 0 \ \ \forall z \in S \Leftrightarrow f(z) = g(z) \ \ \forall z \in S,$$

es decir, d_∞ satisface (M1). La propiedad (M2) para d_∞ se sigue inmediatamente de la misma propiedad para d. Sean $f, g, h \in \mathcal{B}(S, X)$. La propiedad (M3) de d implica que

$$d(f(z), g(z)) \leq d(f(z), h(z)) + d(h(z), g(z)) \leq d_\infty(f, h) + d_\infty(h, g) \qquad \forall z \in S.$$

En consecuencia,

$$d_\infty(f, g) \leq d_\infty(f, h) + d_\infty(h, g),$$

es decir, d_∞ satisface (M3). ■

Si V es un espacio vectorial, entonces el conjunto de todas las funciones de S a V es un espacio vectorial con las operaciones dadas por

$$(f + g)(z) := f(z) + g(z), \qquad (\lambda f)(z) := \lambda f(z).$$

Si V es un espacio normado con norma $\|\cdot\|$. entonces

$$\|f\|_\infty := \sup_{z \in S} \|f(z)\|$$

es una norma en $\mathcal{B}(S, V)$. La demostración de estas afirmaciones es un ejercicio sencillo [Ejercicio 2.50]. Esta norma se llama la **norma uniforme**.

2.5. Subespacios métricos e isometrías

Los subconjuntos de un espacios métrico heredan su métrica.

Definición 2.25 *Si $X = (X, d)$ es un espacio métrico y A es un subconjunto de X definimos*

$$d_A(x, y) := d(x, y) \qquad \forall x, y \in A.$$

Esta es claramente una métrica en A, que se llama la ***métrica inducida*** *por d. Al conjunto A con esta métrica se le llama un* ***subespacio métrico*** *de X.*

Nota que toda función continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es acotada. En particular, $\mathcal{C}^0[a, b] \subset \mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$. La norma definida en (2.4) coincide con la norma inducida en $\mathcal{C}^0[a, b]$ por la norma uniforme de $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$.

Veamos otros ejemplos.

Ejemplo 2.26 *Si X es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y $p, q \in X$, el conjunto $\mathcal{T}_{p,q}(X)$ de todas las trayectorias de p a q en X, definido en la sección anterior, es un subconjunto de $\mathcal{B}([0, 1], \mathbb{R}^n)$. Así que $\mathcal{T}_{p,q}(X)$ resulta ser un espacio métrico con la métrica inducida por la métrica uniforme de $\mathcal{B}([0, 1], \mathbb{R}^n)$.*

A un subconjunto de un espacio métrico se le pueden por supuesto dar otras métricas, distintas de la inducida. Una métrica muy natural sobre la esfera es la siguiente.

Ejemplo 2.27 *Sean $\mathbb{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ la esfera unitaria en $\mathbb{R}^n$ y $x, y \in \mathbb{S}^{n-1}$. Consideremos el conjunto $\mathcal{T}_{x,y}(\mathbb{S}^{n-1})$ de todas las trayectorias de x a y en $\mathbb{S}^{n-1}$. Definimos*

$$d(x, y) := \inf\{\mathfrak{L}(\sigma) : \sigma \in \mathcal{T}_{x,y}(\mathbb{S}^{n-1})\},$$

donde $\mathfrak{L}(\sigma)$ es la longitud de la trayectoria σ. Ésta es una métrica en $\mathbb{S}^{n-1}$, distinta de la métrica inducida por la métrica usual de $\mathbb{R}^n$.

La demostración de estas afirmaciones se deja como ejercicio [Ejercicio 2.55].

Desde el punto de vista geométrico dos espacios métricos se consideran iguales si existe una biyección entre ellos que preserva distancias.

Definición 2.28 *Sean $X = (X, d_X)$ y $Y = (Y, d_Y)$ dos espacios métricos. Una función $\phi : X \to Y$ es una* ***isometría*** *si*

$$d_Y(\phi(x_1), \phi(x_2)) = d_X(x_1, x_2) \qquad \forall x_1, x_2 \in X.$$

Por ejemplo, si a un subconjunto A de un espacio métrico de X le damos la métrica inducida, entonces la inclusión $\iota : A \hookrightarrow X$ es una isometría. Por otra parte, observemos que toda isometría es inyectiva. En efecto, si $\phi(x_1) = \phi(x_2)$ entonces $d_X(x_1, x_2) = d_Y(\phi(x_1), \phi(x_2)) = 0$ y, en consecuencia, $x_1 = x_2$. Así pues, una isometría $\phi : X \to Y$ nos permite identificar a X con el subespacio métrico $\phi(X) := \{\phi(x) : x \in X\}$ de Y. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.29 *Para cada* $p \in [1, \infty]$, *la función*

$$\iota : \mathbb{R}^n_p \to \ell_p, \qquad \iota(x_1, ...x_n) = (x_1, ...x_n, 0, 0, ...),$$

es una isometría. Es decir, podemos identificar a $\mathbb{R}^n_p$ *con el subespacio de* ℓ_p *que consiste de las sucesiones* $x = (x_k)$ *tales que* $x_k = 0$ *para* $k > n$.

Ejemplo 2.30 *La identidad*

$$id : \mathcal{C}^0_\infty[0, 1] \to \mathcal{C}^0_1[0, 1], \qquad id(f) = f,$$

no es una isometría. En efecto, la función f_k *del* Ejemplo 2.21 *satisface*

$$\frac{1}{2k} = \|f_k\|_1 \neq \|f_k\|_\infty = 1,$$

es decir, la distancia de f_k *a la función constante* 0 *según la métrica inducida por la norma* $\|\cdot\|_1$ *es* $\frac{1}{2k}$, *mientras que su distancia según la métrica inducida por* $\|\cdot\|_\infty$ *es* 1.

2.6. Ejercicios

Ejercicio 2.31 *Sea* $X = (X, d)$ *un espacio métrico. Prueba que, para cualesquiera* $w, x, y, z \in X$, *se cumple que*

$$|d(w, x) - d(y, z)| \leq d(w, y) + d(x, z).$$

Ejercicio 2.32 *(a) Demuestra que la distancia usual en* $\mathbb{R}$, *definida en el* Ejemplo 2.3, *es una métrica.*
(b) Demuestra que la distancia usual en $\mathbb{R}^n$, *definida en el* Ejemplo 2.4, *es una métrica.*

Ejercicio 2.33 *Prueba que* $\|x\|_\infty := \text{máx}\{|x_1|, ..., |x_n|\}$ *donde* $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, *es una norma en* $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 2.34 *¿Es la función* $\mu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *dada por* $\mu(x) := \text{mín}\{|x_1|, ..., |x_n|\}$, *una norma en* $\mathbb{R}^n$*? Justifica tu afirmación.*

Ejercicio 2.35 *Sea* $(V, \|\cdot\|)$ *un espacio normado. Prueba que la función* $d(v, w) := \|v - w\|$ *es una métrica en* V.

Ejercicio 2.36 *Describe los conjuntos* $\bar{B}_p(0, 1) := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_p \leq 1\}$ *para* $p = 1, 2, \infty$. *Haz un dibujo de cada uno de ellos.*

Ejercicio 2.37 *Describe los conjuntos*

$$\begin{aligned}\bar{B}_{disc}(0,1) &: = \{x \in \mathbb{R}^2 : d_{disc}(x,0) \le 1\},\\ B_{disc}(0,1) &: = \{x \in \mathbb{R}^2 : d_{disc}(x,0) < 1\},\end{aligned}$$

donde d_{disc} *es la métrica discreta en* $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 2.38 *Sea* V *un espacio vectorial distinto de* $\{0\}$. *Prueba que no existe ninguna norma en* V *que induzca la métrica discreta, es decir, no existe ninguna norma en* V *tal que*

$$\|v-w\| = \begin{cases} 0 & si\ v = w, \\ 1 & si\ v \neq w. \end{cases}$$

Ejercicio 2.39 *Prueba que, para cada* $p \in [1,\infty]$, *la función* $\|\cdot\|_p$ *definida en la* Proposición 2.15 *satisface:*
(N1) $\|x\|_p = 0$ *si y sólo si* $x = 0$ *en* ℓ_p.
(N2) *Si* $x = (x_k) \in \ell_p$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$, *entonces* $\lambda x = (\lambda x_k) \in \ell_p$ *y* $\|\lambda x\|_p = |\lambda| \, \|x\|_p$.

Ejercicio 2.40 *Prueba que, para toda* $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{array}{lll} (a) & \|x\|_r \le \|x\|_s & si \ \ 1 \le s \le r \le \infty, \\ (b) & \|x\|_s \le n^{\frac{r-s}{sr}} \|x\|_r & si \ \ 1 \le s \le r < \infty, \\ (c) & \|x\|_s \le n^{\frac{1}{s}} \|x\|_\infty & si \ \ 1 \le s < \infty. \end{array}$$

(Sugerencia: Para probar la segunda desigualdad aplica la desigualdad de Hölder a los vectores $(1,...,1)$ y $(|x_1|^s,...,|x_n|^s)$ con $p = \frac{r}{r-s}$ y $q = \frac{r}{s}$).

Ejercicio 2.41 (Desigualdad de Hölder para series) *Prueba que, si* $p,q \in (1,\infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $(x_k) \in \ell_p$ *y* $(y_k) \in \ell_q$, *entonces* $xy := (x_k y_k) \in \ell_1$ *y*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

es decir,

$$\|xy\|_1 \le \|x\|_p \|y\|_q .$$

Ejercicio 2.42 *(a) Prueba que, si* $1 \le s < r \le \infty$, *entonces*

$$\ell_s \subset \ell_r, \quad \ell_s \neq \ell_r \quad y \quad \|x\|_r \le \|x\|_s \qquad \forall x \in \ell_s.$$

(b) Prueba además que, si $x \in \ell_p$ *para alguna* $1 \le p < \infty$, *entonces*

$$\|x\|_\infty = \lim_{r\to\infty} \|x\|_r .$$

Ejercicio 2.43 *Muestra que la desigualdad de Minkowski en $\mathbb{R}^n$ no se cumple si $p = \frac{1}{2}$.*

Ejercicio 2.44 *Prueba que todo par de funciones continuas $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ satisfacen las siguientes desigualdades:*

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x) + g(x)|\, dx &\leq \int_a^b |f(x)|\, dx + \int_a^b |g(x)|\, dx, \\ \max_{x \in [a,b]} |f(x) + g(x)| &\leq \max_{x \in [a,b]} |f(x)| + \max_{x \in [a,b]} |g(x)|. \end{aligned}$$

Ejercicio 2.45 *Prueba que las desigualdades de Hölder para sumas, para series y para integrales siguen siendo válidas si $p = 1$ y $q = \infty$, es decir,*
(a) Si $(x_1, ..., x_n)$, $(y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ entonces

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k| \right) \left(\max_{1 \leq k \leq n} |y_k| \right).$$

(b) Si $(x_k) \in \ell_1$, $(y_k) \in \ell_\infty$ entonces $(x_k y_k) \in \ell_1$ y

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \right) \left(\sup_{k \in \mathbb{N}} |y_k| \right).$$

(c) Si $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ son funciones continuas, entonces

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|\, dx \right) \left(\max_{a \leq x \leq b} |g(x)| \right).$$

Ejercicio 2.46 *Da un ejemplo de una sucesión de funciones continuas $f_k : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tales que $\|f_k\|_1 = 1$ para toda $k \in \mathbb{N}$, y $\|f_k\|_\infty \to \infty$. Concluye que no existe ninguna constante $c \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\|f\|_\infty \leq c \|f\|_1 \qquad \forall f \in \mathcal{C}^0[0, 1].$$

¿Es posible construir una sucesión de funciones continuas $g_k : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tales que $\|g_k\|_\infty = 1$ para toda $k \in \mathbb{N}$, y $\|g_k\|_1 \to \infty$? Justifica tu respuesta.

Ejercicio 2.47 *Sea $f_k : [0, 1] \to \mathbb{R}$, la función*

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 - kx & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{k}, \\ 0 & \text{si } \frac{1}{k} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Para cada $p \in [1, \infty)$ y $k \in \mathbb{N}$ calcula

$$\|f_k\|_p := \left(\int_0^1 |f(t)|^p\, dt \right)^{1/p}.$$

Ejercicio 2.48 *Demuestra si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:*
(a) Si $p, r \in [1, \infty]$ *y* $p < r$*, entonces existe una constante* $c > 0$ *tal que*

$$\|f\|_p \leq c\,\|f\|_r \quad \textit{para toda } f \in \mathcal{C}^0[0,1].$$

(b) Si $p, r \in [1, \infty]$ *y* $p > r$*, entonces existe una constante* $c > 0$ *tal que*

$$\|f\|_p \leq c\,\|f\|_r \quad \textit{para toda } f \in \mathcal{C}^0[0,1].$$

(Sugerencia: Usa el Ejercicio 2.47.)

Ejercicio 2.49 *Sea* $\mathcal{C}^r[a,b]$ *el conjunto de las funciones* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *que son* r*-veces continuamente diferenciables en* $[a,b]$*, es decir, tales que todas sus derivadas* $f', f'', ..., f^{(r)}$ *hasta la de orden* r *existen en* (a,b) *y son continuas en* $[a,b]$*. Para cada* $p \in [1, \infty]$ *definimos*

$$\|f\|_{r,p} := \|f\|_p + \|f'\|_p + \cdots + \left\|f^{(r)}\right\|_p.$$

Prueba que $\mathcal{C}^r_p[a,b] = (\mathcal{C}^r[a,b], \|\cdot\|_{r,p})$ *es un espacio normado.*

Ejercicio 2.50 *Sean* S *un conjunto y* $V = (V, \|\cdot\|)$ *un espacio normado. Prueba que* $\mathcal{B}(S,V)$ *es un espacio vectorial con las operaciones dadas por*

$$(f+g)(z) := f(z) + g(z), \qquad (\lambda f)(z) := \lambda f(z),$$

$f, g \in \mathcal{B}(S,V)$*,* $\lambda \in \mathbb{R}$*, y que*

$$\|f\|_\infty := \sup_{z \in S} \|f(z)\|$$

es una norma en $\mathcal{B}(S,V)$*.*

Ejercicio 2.51 *Sean* $X = (X, d_X)$ *y* $Y = (Y, d_Y)$ *espacios métricos. Consideremos el producto cartesiano*

$$X \times Y := \{(x,y) : x \in X,\ y \in Y\}.$$

Dados $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$*, definimos*

$$\begin{aligned} d_p((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \ &: \ = (d_X(x_1,x_2)^p + d_Y(y_1,y_2)^p)^{1/p} \qquad \textit{si } p \in [1,\infty), \\ d_\infty((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \ &: \ = \max\{d_X(x_1,x_2), d_Y(y_1,y_2)\}. \end{aligned}$$

(a) Prueba d_p *es una métrica en* $X \times Y$ *para todo* $p \in [1, \infty]$*.*
(b) Prueba que, para cualquiera de estas métricas y para cualquier $y_0 \in Y$*, la inclusión*

$$\iota : X \to X \times Y, \qquad \iota(x) := (x, y_0)$$

es una isometría.
(c) ¿Es la proyección

$$\pi : X \times Y \to X, \qquad \pi(x,y) := x$$

una isometría?

Ejercicio 2.52 *Prueba que, si $\phi : X \to Y$ es una isometría y es biyectiva, entonces su inversa $\phi^{-1} : Y \to X$ es una isometría.*

Ejercicio 2.53 *¿Cuáles de las siguientes funciones son isometrías y cuáles no? Justifica tu afirmación.*
(a) La identidad $id : \mathbb{R}^2_p \to \mathbb{R}^2_r, \; id(x) = x, \; \text{con } p \neq r.$
(b) La identidad $id : \mathcal{C}^0_p[0,1] \to \mathcal{C}^0_r[0,1], \; id(f) = f, \; \text{con } p \neq r.$
(c) La inclusión $\iota : \mathcal{C}^1_2[0,1] \hookrightarrow \mathcal{C}^0_2[0,1], \; \iota(f) = f.$
(d) La inclusión $\iota : \mathcal{C}^0_\infty[0,1] \hookrightarrow \mathcal{B}([0,1],\mathbb{R}), \; \iota(f) = f.$
(e) La función $\phi : \mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{R}) \to \ell_\infty, \; \phi(f) = (f(k)).$

Ejercicio 2.54 *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea $\{e_1, ..., e_n\}$ una base de V. Dado $v \in V$ lo expresamos como $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ con $x_i \in \mathbb{R}$, y definimos*

$$\|v\|_* := \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}.$$

Demuestra las siguientes afirmaciones:
(a) $\|\cdot\|_*$ es una norma en V.
(b) Si le damos a V la norma $\|\cdot\|_*$, la función $\phi : \mathbb{R}^n \to V$,

$$\phi(x_1, ..., x_n) := \sum_{i=1}^n x_i e_i,$$

es una isometría lineal y biyectiva.

Ejercicio 2.55 *Sean $X \subset \mathbb{R}^n$, $x, y \in X$ y $\mathcal{T}_{x,y}(X)$ el conjunto de todas las trayectorias de x a y en X. Definimos*

$$d(x,y) := \inf\{\mathfrak{L}(\sigma) : \sigma \in \mathcal{T}_{x,y}(X)\},$$

donde $\mathfrak{L}(\sigma)$ es la longitud de la trayectoria σ, definida en el Capítulo 1.
(a) Prueba que, si para cada $x, y \in X$ existe $\sigma_{x,y} \in \mathcal{T}_{x,y}(X)$ con $\mathfrak{L}(\sigma_{x,y}) < \infty$, entonces d es una métrica en X.
(b) ¿En cuáles de los siguientes ejemplos coincide esta métrica con la inducida por la métrica usual de $\mathbb{R}^n$? Justifica tu afirmación.
(b.1) $X = \mathbb{R}^n$,
(b.2) $X = \mathbb{B}^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$,
(b.3) $X = \{x \in \mathbb{B}^n : x \neq 0\}$,
(b.4) $X = \{x \in \mathbb{B}^n : x \notin D\}$, *donde* $D := \{(x_1, ..., x_{n-1}, 0) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \leq \frac{1}{2}\}$,
(b.5) $X = \mathbb{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$.

Capítulo 3

Continuidad

A principios del siglo XIX Augustin Louis Cauchy y Bernard Bolzano dieron, de manera independiente, una definición de continuidad. Llamaron *continua* a una función que tomaba valores arbitrariamente cercanos para valores suficientemente cercanos de la variable. Esta definición es exacta pero imprecisa. La definición usual hoy en día, en términos de ε's y δ's, fue introducida por Karl Weierstrass[1] a finales del siglo XIX.

Karl Weierstrass

La noción de continuidad de una función entre espacios métricos es formalmente

[1] Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897) nació en Ostenfelde, Westfalia (actualmente Alemania) y murió en Berlín. Estudió matemáticas en la Universidad de Münster. Además de sus prolíficas investigaciones, fue profesor en la Universidad de Berlín y tuvo entre sus discípulos a Georg Cantor, Ferdinand Georg Frobenius, Wilhelm Killing, Leo Königsberger, Carl Runge y Sofia Kovalévskaya. Llamado el *padre del análisis moderno*, Weierstrass dio las definiciones de continuidad, límite y derivada de una función, que continúan vigentes hoy en día.

idéntica a la de continuidad de una función entre espacios euclidianos que ya conocemos. En este capítulo estudiaremos este concepto y daremos varias caracterizaciones de la continuidad.

3.1. Definiciones y ejemplos

Sean $X = (X, d_X)$ y $Y = (Y, d_Y)$ espacios métricos.

Definición 3.1 *Una función $\phi : X \to Y$ es* ***continua en el punto*** *$x_0 \in X$ si, dada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ (que depende de x_0 y de ε) tal que*

$$d_Y(\phi(x), \phi(x_0)) < \varepsilon \quad \text{si } d_X(x, x_0) < \delta.$$

Decimos que ϕ es ***continua*** *si lo es en todo punto de X.*

La continuidad de ϕ depende de las métricas que estamos considerando en X y Y. Para hacer énfasis en ello usaremos en ocasiones la notación

$$\phi : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$$

en vez de $\phi : X \to Y$. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 3.2 *La identidad $id : \mathbb{R}^n_p \to \mathbb{R}^n_r$ es una función continua para cualesquiera $p, r \in [1, \infty]$.*

Demostración: Observa que $(\max\{a_1^r, \ldots, a_n^r\})^{1/r} = \max\{a_1, \ldots, a_n\}$ para todos $r \in [1, \infty]$ y $a_1, \ldots, a_n \geq 0$. En consecuencia, para cualesquiera $p, r \in [1, \infty)$ y $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|x\|_r &= \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^r\right)^{1/r} \leq \left(n \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|^r\right)^{1/r} = n^{1/r} \max_{i=1,\ldots,n} |x_i| = n^{1/r} \|x\|_\infty, \\ \|x\|_\infty &= \max_{i=1,\ldots,n} |x_i| = \left(\max_{i=1,\ldots,n} |x_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} = \|x\|_p. \end{aligned} \tag{3.1}$$

De ambas desigualdades concluímos que

$$\|x\|_r \leq n^{1/r} \|x\|_p \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad p \in [1, \infty], \quad r \in [1, \infty). \tag{3.2}$$

Dados $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $\varepsilon > 0$ definimos $\delta := n^{-1/r}\varepsilon$ si $r \in [1, \infty)$ o $\delta := \varepsilon$ si $r = \infty$. De las desigualdades anteriores se sigue que

$$\|x - x_0\|_r < \varepsilon \quad \text{si } \|x - x_0\|_p < \delta.$$

Esto prueba que $id : \mathbb{R}^n_p \to \mathbb{R}^n_r$ es continua. ■

Ejemplo 3.3 *La identidad* $id : \mathcal{C}^0_\infty[0,1] \to \mathcal{C}^0_1[0,1]$ *es continua, mientras que la identidad* $id : \mathcal{C}^0_1[0,1] \to \mathcal{C}^0_\infty[0,1]$ *no lo es.*

Demostración: Por la Proposición 2.22,

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty \qquad \forall f \in \mathcal{C}^0[0,1].$$

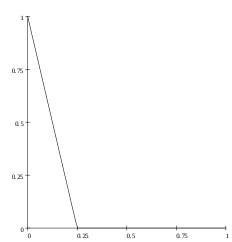
En consecuencia, dadas $f_0 \in \mathcal{C}^0[0,1]$ y $\varepsilon > 0$, para $\delta := \varepsilon$ se cumple que

$$\|f - f_0\|_1 < \varepsilon \quad \text{ si } \|f - f_0\|_\infty < \delta.$$

Esto prueba que $id : \mathcal{C}^0_\infty[0,1] \to \mathcal{C}^0_1[0,1]$ es continua.
Denotemos por 0 a la función constante con valor 0 en $[0,1]$. Probaremos que $id : \mathcal{C}^0_1[0,1] \to \mathcal{C}^0_\infty[0,1]$ no es continua en 0 (de hecho no lo es en ningún punto de $\mathcal{C}^0[0,1]$). Sea $\varepsilon := \frac{1}{2}$. Afirmamos que para cualquier $\delta > 0$ existe $g_\delta \in \mathcal{C}^0[0,1]$ tal que $\|g_\delta\|_1 < \delta$ y $\|g_\delta\|_\infty = 1 > \varepsilon$. En efecto, la función

$$g_\delta(x) := \begin{cases} 1 - \frac{1}{\delta}x & \text{si } 0 \leq x \leq \delta, \\ 0 & \text{si } \delta \leq x \leq 1, \end{cases}$$

tiene estas propiedades.



$y = g_{1/4}(x)$

Por tanto, la identidad $id : \mathcal{C}^0_1[0,1] \to \mathcal{C}^0_\infty[0,1]$ no es continua en 0. ■

Definición 3.4 *Una función* $\phi : X \to Y$ *es un* ***homeomorfismo*** *si* ϕ *es continua y biyectiva y su inversa* $\phi^{-1} : Y \to X$ *es continua. Se dice que* X *y* Y *son* ***homeomorfos*** *si existe un homeomorfismo entre ellos.*

Los ejemplos anteriores afirman que $id : \mathbb{R}^n_p \to \mathbb{R}^n_r$ es un homeomorfismo para cualesquiera $p, r \in [1, \infty]$, mientras que $id : \mathcal{C}^0_\infty[a,b] \to \mathcal{C}^0_1[a,b]$ no lo es.

Proposición 3.5 *Sean $\phi : X \to Y$ y $\psi : Y \to Z$ funciones entre espacios métricos.*
(a) Si ϕ y ψ son continuas entonces la composición $\psi \circ \phi : X \to Z$ es continua.
(b) Si ϕ es un homeomorfismo, entonces ψ es continua si y sólo si $\psi \circ \phi$ es continua.
(c) Si ψ es un homeomorfismo, entonces ϕ es continua si y sólo si $\psi \circ \phi$ es continua.

Demostración: *(a)* Sean $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$. Como ψ es continua en $y_0 := \phi(x_0)$, existe $\gamma > 0$ tal que

$$d_Z(\psi(y), \psi(y_0)) < \varepsilon \quad \text{si} \;\; d_Y(y, y_0) < \gamma.$$

Y, como ϕ es continua en x_0, existe $\delta > 0$ tal que

$$d_Y(\phi(x), \phi(x_0)) < \gamma \quad \text{si} \;\; d_X(x, x_0) < \delta.$$

En consecuencia,

$$d_Z(\psi(\phi(x)), \psi(\phi(x_0))) < \varepsilon \quad \text{si} \; d_X(x, x_0) < \delta.$$

Es decir, $\psi \circ \phi : X \to Z$ es continua.
(b) Si ϕ es un homeomorfismo, de la afirmación *(a)* se sigue que $\psi \circ \phi$ es continua si y sólo si $(\psi \circ \phi) \circ \phi^{-1} = \psi$ lo es.
(c) Análogamente, si ψ es un homeomorfismo, entonces $\psi \circ \phi$ es continua si y sólo si $\psi^{-1} \circ (\psi \circ \phi) = \phi$ lo es. ■

La proposición anterior nos permite concluir que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua si y sólo si $f : \mathbb{R}^n_p \to \mathbb{R}^m_r$ es continua para cualesquiera $p, r \in [1, \infty]$ [Ejercicio 3.37].

Algunas propiedades importantes de los espacios métricos, como la completitud (que estudiaremos más adelante), no se preservan bajo homeomorfismos. Por ello conviene introducir los siguientes conceptos.

Definición 3.6 *Una función $\phi : X \to Y$ es* ***Lipschitz continua****, si existe $c > 0$ tal que*

$$d_Y(\phi(x), \phi(y)) \leq c\, d_X(x, y) \qquad \forall x, y \in X.$$

A c se le llama una ***constante de Lipschitz*** *para ϕ.*
Diremos que ϕ es una ***equivalencia*** *si ϕ es Lipschitz continua y biyectiva y su inversa $\phi^{-1} : Y \to X$ es Lipschitz continua.*

Esta noción es más fuerte que la de continuidad.

Proposición 3.7 *Si ϕ es Lipschitz continua entonces ϕ es continua.*

Demostración: Sea $c > 0$ una constante de Lipschitz para ϕ. Entonces, dada $\varepsilon > 0$, para $\delta := \frac{\varepsilon}{c} > 0$ se cumple que

$$d_Y(\phi(x), \phi(x_0)) < \varepsilon \quad \text{ si } d_X(x, x_0) < \delta.$$

Por tanto, ϕ es continua. ■

Nota que en este caso δ no depende del punto $x_0 \in X$. El inverso no es cierto en general, es decir, no toda función continua es Lipschitz continua [Ejercicio 3.44].

Definición 3.8 *Dos métricas d_1 y d_2 en un conjunto X son* ***equivalentes*** *si la identidad $id : (X, d_1) \to (X, d_2)$ es una equivalencia, es decir, si existen constantes $c_1, c_2 > 0$ tales que*

$$c_1\, d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq c_2\, d_2(x, y) \qquad \forall x, y \in X.$$

Análogamente, dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ en un espacio vectorial V son ***equivalentes*** *si las métricas inducidas son equivalentes, es decir, si existen constantes $c_1, c_2 > 0$ tales que*

$$c_1\, \|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq c_2\, \|v\|_2 \qquad \forall v \in V.$$

Las desigualdades (3.2) y (3.1) muestran que $\|\cdot\|_p$ y $\|\cdot\|_r$ son normas equivalentes en $\mathbb{R}^n$ para cualesquiera $p, r \in [1, \infty]$, mientras que el Ejemplo 3.3 muestra que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ no son normas equivalentes en $\mathcal{C}^0[0, 1]$. De hecho, $\|\cdot\|_p$ y $\|\cdot\|_r$ no son normas equivalentes en $\mathcal{C}^0[a, b]$ para ningún par $1 \leq p < r \leq \infty$ [Ejercicio 3.46].

La siguiente noción nos permite visualizar el concepto de continuidad.

Definición 3.9 *Sean $X = (X, d_X)$ un espacio métrico, $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$. La* ***bola abierta*** *en X con centro en x_0 y radio ε es el conjunto*

$$B_X(x_0, \varepsilon) := \{x \in X : d_X(x, x_0) < \varepsilon\}.$$

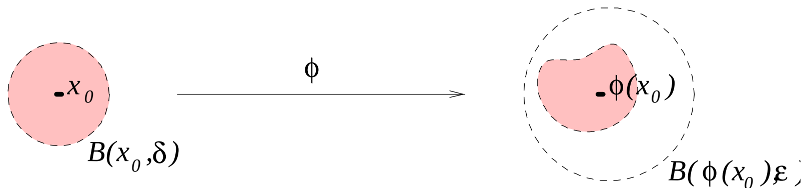
Dados un subconjunto A de X y una función $\phi : X \to Y$, denotamos por

$$\phi(A) := \{\phi(x) \in Y : x \in A\}$$

a la **imagen de A bajo ϕ**. Con estos conceptos podemos reformular la definición de continuidad como sigue:

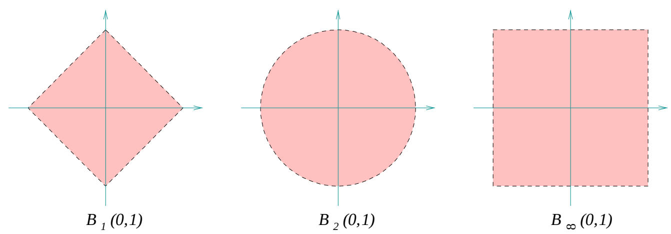
$\phi : X \to Y$ *es* **continua en el punto** x_0 *de* X *si, dada* $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$\phi(B_X(x_0, \delta)) \subset B_Y(\phi(x_0), \varepsilon). \tag{3.3}$$



Revisemos algunos de los ejemplos anteriores bajo esta nueva óptica.

Ejemplo 3.10 *Denotemos por* $B_p(x_0, \varepsilon)$ *a la bola abierta en* $\mathbb{R}^n_p$ *con centro en* x_0 *y radio* ε.



De las desigualdades (3.1) *y* (3.2) *se sigue que existe* $c > 0$ *(que depende de* n *y* r*) tal que*

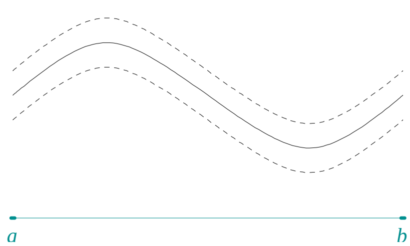
$$B_p(x_0, c\varepsilon) \subset B_r(x_0, \varepsilon) \qquad \forall p, r \in [1, \infty].$$

De la caracterización (3.3) *de la continuidad se sigue entonces que* $id : \mathbb{R}^n_p \to \mathbb{R}^n_r$ *es un homeomorfismo.*

Ejemplo 3.11 *Denotemos por* $B_p(f_0, \varepsilon)$ *a la bola abierta en* $\mathcal{C}^0_p[0,1]$ *con centro en la función continua* $f_0 : [0,1] \to \mathbb{R}$ *y radio* ε. *Si* $p = \infty$,

$$B_\infty(f_0, \varepsilon) := \{f \in \mathcal{C}^0[0,1] : |f(x) - f_0(x)| < \varepsilon \ \ \forall x \in [0,1]\},$$

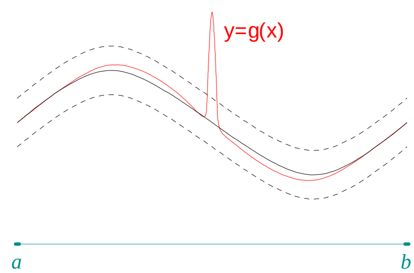
es decir, $B_\infty(f_0, \varepsilon)$ *es el conjunto de las funciones continuas cuya gráfica está contenida en la franja* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], \ \ |y - f_0(x)| < \varepsilon\}$.



Por otra parte, si $p = 1$,

$$B_1(f_0, \varepsilon) := \{g \in \mathcal{C}^0[0,1] : \int_0^1 |g(x) - f_0(x)|\, dx < \varepsilon\}$$

es el conjunto de las funciones continuas g tales que el área de la región comprendida entre las gráficas de g y f_0 es menor que ε.
Resulta claro entonces que $B_\infty(f_0,\varepsilon) \subset B_1(f_0,\varepsilon)$. Y también que, para toda $\varepsilon > 0$ y toda $\delta > 0$, podemos encontrar una función continua g tal que $g \in B_1(f_0,\delta)$ pero $g \notin B_\infty(f_0,\varepsilon)$:



De la caracterización (3.3) *de la continuidad se sigue que* $id : B_\infty(f_0,\varepsilon) \to B_1(f_0,\varepsilon)$ *es continua y que* $id : B_1(f_0,\varepsilon) \to B_\infty(f_0,\varepsilon)$ *no lo es.*

3.2. Conjuntos abiertos y conjuntos cerrados

Sea $X = (X,d)$ un espacio métrico y sea A un subconjunto de X.

Definición 3.12 *Un punto $x \in X$ se llama un **punto interior** de A si existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_X(x,\varepsilon) \subset A$. El conjunto de todos los puntos interiores de A se llama el **interior** de A en X y se denota* $\mathrm{int}_X(A)$, *o simplemente* $\mathrm{int}(A)$. *Decimos que A es **abierto** en X si* $A = \mathrm{int}(A)$.

Observa que $int_X(A) \subset A$. Veamos que la bola abierta es un abierto en este sentido.

Proposición 3.13 *En cualquier espacio métrico $X = (X,d)$, la bola abierta*

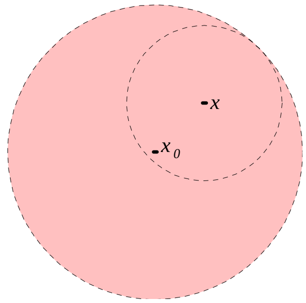
$$B_X(x_0,\varepsilon) := \{x \in X : d(x,x_0) < \varepsilon\}$$

con centro en x_0 y radio ε es un subconjunto abierto de X.

Demostración: Sea $x \in B_X(x_0,\varepsilon)$. Tomemos $\delta := \varepsilon - d(x,x_0) > 0$. Para todo $z \in B_X(x,\delta)$, se cumple que

$$d(z,x_0) \leq d(z,x) + d(x,x_0) < \delta + d(x,x_0) = \varepsilon,$$

es decir, $z \in B_X(x_0, \varepsilon)$. Por tanto, $B_X(x, \delta) \subset B_X(x_0, \varepsilon)$ para todo $x \in B_X(x_0, \varepsilon)$.



Esto muestra que $B_X(x_0, \varepsilon) = \text{int}(B_X(x_0, \varepsilon))$. $\blacksquare$

Corolario 3.14 *El interior* $\text{int}(A)$ *de cualquier subconjunto* A *de* X *es abierto.*

Demostración: Sea $x \in \text{int}(A)$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_X(x, \varepsilon) \subset A$. Probaremos ahora que $B_X(x, \varepsilon) \subset \text{int}A$. En efecto, por la Proposición 3.13, para todo $z \in B_X(x, \varepsilon)$ existe $\delta > 0$ tal que $B_X(z, \delta) \subset B_X(x, \varepsilon) \subset A$. Por tanto, $z \in \text{int}A$. $\blacksquare$

Es fácil ver que $\text{int}(A)$ es el mayor subconjunto abierto de X contenido en A [Ejercicio 3.62].

El que un subconjunto A de X sea abierto en X o no lo sea depende desde luego de la métrica que le demos a X. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 3.15 *El conjunto*

$$A := \{f \in \mathcal{C}^0[0,1] : |f(x)| < 1/2 \quad \forall x \in [0,1]\}$$

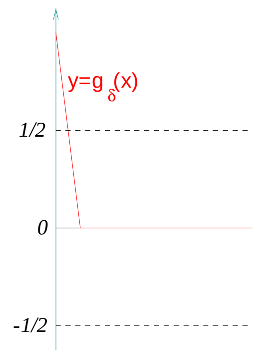
es abierto en $\mathcal{C}^0_\infty[0,1]$, *pero no es abierto en* $\mathcal{C}^0_1[0,1]$.

Demostración: Observa que $A = B_{\mathcal{C}^0_\infty[0,1]}(0, 1/2)$. La Proposición 3.13 asegura que A es abierto en $\mathcal{C}^0_\infty[0,1]$.

Probaremos ahora que A no es abierto en $\mathcal{C}^0_1[0,1]$. Para cada $0 < \delta < 1$ consideremos la función

$$g_\delta(x) := \begin{cases} 1 - \frac{1}{\delta}x & \text{si } 0 \leq x \leq \delta, \\ 0 & \text{si } \delta \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Entonces $\|g_\delta\|_1 = \frac{\delta}{2}$ y $\|g_\delta\|_\infty = 1$. Por tanto, $g_\delta \in B_{\mathcal{C}_1^0[0,1]}(0,\delta)$, pero $g_\delta \notin A$.



Es decir, $B_{\mathcal{C}_1^0[0,1]}(0,\delta)$ no está contenida en A para ningún $\delta > 0$. En consecuencia, la función 0 no es un punto interior de A en $\mathcal{C}_1^0[0,1]$. $\blacksquare$

De hecho, el conjunto A del ejemplo anterior tiene interior vacío en $\mathcal{C}_1^0[0,1]$ [Ejercicio 3.57].

Definición 3.16 *Un punto $x \in X$ se llama un **punto de contacto** de A si $B_X(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ para toda $\varepsilon > 0$. El conjunto de todos los puntos de contacto de A se llama la **cerradura** de A en X y se denota $\overline{A}^X$, o simplemente $\overline{A}$. Decimos que A es **cerrado** en X si $A = \overline{A}$.*

Nota que todo punto de A es punto de contacto de A, es decir, $A \subset \overline{A}$.

Definición 3.17 *La **bola cerrada** en X con centro en x_0 y radio ε es el conjunto*

$$\bar{B}_X(x_0,\varepsilon) := \{x \in X : d(x,x_0) \leq \varepsilon\}.$$

Proposición 3.18 *$\bar{B}_X(x_0,\varepsilon)$ es un subconjunto cerrado de X.*

Demostración: Sea $x \in \overline{\bar{B}_X(x_0,\varepsilon)}$. Entonces, para todo $\delta > 0$, existe $x_\delta \in B_X(x,\delta) \cap \bar{B}_X(x_0,\varepsilon)$. De la desigualdad del triángulo se sigue que

$$d(x,x_0) \leq d(x,x_\delta) + d(x_\delta,x_0) < \delta + \varepsilon \qquad \forall \delta > 0.$$

En consecuencia $d(x,x_0) \leq \varepsilon$, es decir, $x \in \bar{B}_X(x_0,\varepsilon)$. $\blacksquare$

Denotaremos por $X \smallsetminus A$ al **complemento** de A en X, es decir,

$$X \smallsetminus A := \{x \in X : x \notin A\}.$$

Los abiertos y los cerrados son duales en el siguiente sentido.

Proposición 3.19 *Para cualquier subconjunto A de un espacio métrico X se cumple que*

$$X \smallsetminus \overline{A} = \operatorname{int}(X \smallsetminus A).$$

En consecuencia, A es cerrado en X si y sólo si $X \smallsetminus A$ es abierto en X.

Demostración: La primera afirmación es inmediata. En efecto, $x \in \operatorname{int}(X \smallsetminus A)$ si y sólo si existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_X(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$, es decir, si y sólo si $x \in X \smallsetminus \overline{A}$.
En consecuencia, si A es cerrado, entonces $X \smallsetminus A = X \smallsetminus \overline{A} = \operatorname{int}(X \smallsetminus A)$, es decir, $X \smallsetminus A$ es abierto. E inversamente, si $X \smallsetminus A$ es abierto, entonces $X \smallsetminus A = \operatorname{int}(X \smallsetminus A) = X \smallsetminus \overline{A}$ y, en consecuencia, $A = \overline{A}$, es decir, A es cerrado. ■

Corolario 3.20 *La cerradura $\overline{A}$ de cualquier subconjunto A de X es cerrado en X.*

Demostración: Por el Corolario 3.14, sabemos que $\operatorname{int}(X \smallsetminus A)$ es abierto en X. En consecuencia, por la Proposición 3.19, se tiene que $\overline{A} = X \smallsetminus \operatorname{int}(X \smallsetminus A)$ es cerrado en X. ■

Es sencillo comprobar que $\overline{A}$ es el menor subconjunto cerrado de X que contiene a A [Ejercicio 3.63].

Existen subconjuntos que no son ni abiertos ni cerrados. Por ejemplo, el intervalo $[a, b)$ no es ni abierto ni cerrado en $\mathbb{R}$. Más aún, un subconjunto puede ser simultáneamente abierto y cerrado como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.21 *Todo subconjunto de un espacio métrico discreto X_{disc} es abierto en X_{disc}. En consecuencia, todo subconjunto de X_{disc} es cerrado en X_{disc}.*

Demostración: Observemos que, para cada punto $x \in X$,

$$B_{disc}(x, 1) := \{y \in X : d_{disc}(y, x) < 1\} = \{x\}.$$

Para cualquier subconjunto A de X se tiene entonces que $B_{disc}(x, 1) \subset A$ para todo $x \in A$. Por tanto, A es abierto. De la Proposición 3.19 se sigue que A también es cerrado. ■

En general no es cierto que la cerradura de una bola abierta sea la correspondiente bola cerrada. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 3.22 *Si X_{disc} es un espacio métrico discreto con al menos dos puntos entonces, puesto que todos los subconjuntos de X_{disc} son cerrados, se tiene que*

$$\overline{B_{disc}(x,1)} = B_{disc}(x,1) = \{x\} \qquad \forall x \in X.$$

Por otra parte,

$$\bar{B}_{disc}(x,1) := \{y \in X : d_{disc}(y,x) \leq 1\} = X.$$

Esto no ocurre en un espacio normado.

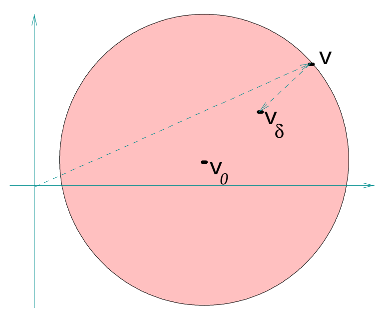
Proposición 3.23 *Si $V = (V, \|\cdot\|)$ es un espacio normado, entonces la cerradura de la bola abierta $B(v_0,\varepsilon) := \{v \in V : \|v - v_0\| < \varepsilon\}$ es la bola cerrada $\bar{B}(v_0,\varepsilon) := \{v \in V : \|v - v_0\| \leq \varepsilon\}$.*

Demostración: Como $\bar{B}(v_0,\varepsilon)$ es cerrado y contiene a $B(v_0,\varepsilon)$ se tiene que $\overline{B(v_0,\varepsilon)} \subset \bar{B}(v_0,\varepsilon)$ [Ejercicio 3.63].
Probaremos ahora que $\bar{B}(v_0,\varepsilon) \subset \overline{B(v_0,\varepsilon)}$. Es decir, probaremos que, para todo $v \in \bar{B}(v_0,\varepsilon)$ y $\delta > 0$, se cumple que $B(v,\delta) \cap B(v_0,\varepsilon) \neq \emptyset$. Sin perder generalidad podemos tomar $\delta < 2\varepsilon$. El punto

$$v_\delta := v + \frac{\delta}{2\varepsilon}(v_0 - v) \in V$$

satisface

$$\begin{aligned} \|v_\delta - v\| &= \frac{\delta}{2\varepsilon}\|v_0 - v\| \leq \frac{\delta}{2} < \delta, \quad \text{y} \\ \|v_\delta - v_0\| &= (1 - \frac{\delta}{2\varepsilon})\|v - v_0\| \leq (1 - \frac{\delta}{2\varepsilon})\varepsilon < \varepsilon. \end{aligned}$$



Por tanto, $v_\delta \in B(v,\delta) \cap B(v_0,\varepsilon)$. ■

Daremos ahora una caracterización de la continuidad en términos de conjuntos abiertos y conjuntos cerrados. La **imagen inversa** de un subconjunto B de Y bajo la función $\phi : X \to Y$ es el conjunto

$$\phi^{-1}(B) := \{x \in X : \phi(x) \in B\}.$$

Proposición 3.24 *Sean X y Y espacios métricos, y sea $\phi : X \to Y$ una función. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
(a) $\phi : X \to Y$ es continua.
(b) $\phi^{-1}(U)$ es abierto en X para todo subconjunto abierto U de Y.
(c) $\phi^{-1}(C)$ es cerrada en X para todo subconjunto cerrado C de Y.

Demostración: (a) $\Rightarrow$ (b): Sea U un subconjunto abierto de Y. Para cada $x \in \phi^{-1}(U)$ tomemos $\varepsilon > 0$ tal que $B_Y(\phi(x), \varepsilon) \subset U$. Como ϕ es continua, existe $\delta > 0$ tal que $\phi(B_X(x, \delta)) \subset B_Y(\phi(x), \varepsilon)$. Entonces $B_X(x, \delta) \subset \phi^{-1}(U)$. Esto prueba que $\phi^{-1}(U)$ es abierto en X.
(b) $\Rightarrow$ (a): Sean $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Como $B_Y(\phi(x), \varepsilon)$ es abierta en Y, se tiene que $\phi^{-1}(B_Y(\phi(x), \varepsilon))$ es abierto en X. En particular, existe $\delta > 0$ tal que $B_X(x, \delta) \subset \phi^{-1}(B_Y(\phi(x), \varepsilon))$, es decir, $\phi(B_X(x, \delta)) \subset B_Y(\phi(x), \varepsilon)$. Esto prueba que ϕ es continua en x.
Observa que $X \smallsetminus \phi^{-1}(B) = \phi^{-1}(Y \smallsetminus B)$ para todo subconjunto B de Y. La equivalencia entre *(b)* y *(c)* es consecuencia inmediata de la Proposición 3.19. En efecto, si ϕ satisface *(b)* y C es cerrado en Y, entonces $Y \smallsetminus C$ es abierto en Y. En consecuencia, $\phi^{-1}(Y \smallsetminus C) = X \smallsetminus \phi^{-1}(C)$ es abierto en X y, por tanto $\phi^{-1}(C)$ es cerrado en X. Esto prueba que *(b) $\Rightarrow$ (c)*. La otra implicación se demuestra de manera análoga. ■

Ejemplo 3.25 *Cualquier función $\phi : X_{disc} \to Y$ de un espacio métrico discreto a un espacio métrico cualquiera Y es continua, ya que todo subconjunto de X_{disc} es abierto (ver* Ejemplo 3.22*).*

Para finalizar esta sección veamos algunas propiedades importantes de los abiertos.

Proposición 3.26 *En cualquier espacio métrico $X = (X, d)$ se cumple lo siguiente.*
(i) El conjunto vacío $\emptyset$ es abierto en X.
(ii) X es abierto en X.
(iii) La unión $\bigcup_{i \in I} U_i$ de cualquier familia $\{U_i : i \in I\}$ de subconjuntos abiertos de X es abierta en X.
(iv) La intersección $U \cap V$ de dos subconjuntos abiertos U y V de X es abierta en X.

Demostración: (i) se cumple por vacuidad: Todo punto de $\emptyset$ es punto interior de $\emptyset$.
(ii) $B_X(x, \varepsilon) \subset X$ para cualquier $x \in X$ y cualquier $\varepsilon > 0$, es decir, cualquier $x \in X$ es punto interior de X.
(iii) Si $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$ entonces $x \in U_{i_0}$ para algún $i_0 \in I$ y, como U_{i_0} es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_X(x, \varepsilon) \subset U_{i_0}$. Pero entonces $B_X(x, \varepsilon) \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Esto prueba que $x \in \operatorname{int}\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right)$.

(iv) Si $x \in U \cap V$, como U y V son abiertos, existen $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tales que $B_X(x, \varepsilon_1) \subset U$ y $B_X(x, \varepsilon_2) \subset V$. Tomando $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ se tiene que $B_X(x, \varepsilon) \subset (U \cap V)$. Esto prueba que $x \in \operatorname{int}(U \cap V)$. ■

Dado que los subconjuntos cerrados de X son los complementos de los abiertos, las afirmaciones duales son ciertas para dichos subconjuntos [Ejercicio 3.61].

Las propiedades *(i)* a *(iv)* se usan como definición de los "abiertos" de un espacio topológico. Como la continuidad se puede caracterizar en términos de abiertos (ver Proposición 3.24), los espacios topológicos son el ámbito natural para estudiar la continuidad. Sin embargo, como mencionamos antes, otras propiedades importantes de los espacios métricos, como la completitud, no son propiedades topológicas, es decir, no se preservan bajo homeomorfismos.

3.3. Convergencia de sucesiones

Como ocurre en $\mathbb{R}^n$, es posible dar una caracterización de la continuidad en términos de sucesiones en un espacio métrico.

Definición 3.27 *Una* ***sucesión*** *en un espacio métrico $X = (X, d)$ es una función $x : \mathbb{N} \to X$. El valor de tal función en k se llama el* ***k-ésimo término*** *de la sucesión y se denota por $x_k := x(k)$. La sucesión se denota por $x = (x_k)$.*
Decimos que (x_k) ***converge a*** *un punto $x \in X$ si, dada $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_k, x) < \varepsilon$ para todo $k \geq k_0$. El punto x se llama el* ***límite*** *de la sucesión (x_k).*

Usaremos la notación

$$x_k \to x \text{ en } X, \qquad \text{o bien} \qquad \lim_{k\to\infty} x_k = x,$$

para decir que (x_k) converge a x en X. Observa que

$$x_k \to x \text{ en } X \quad \Longleftrightarrow \quad d(x_k, x) \to 0 \text{ en } \mathbb{R}.$$

Definición 3.28 *Una* ***subsucesión*** *de $x = (x_k)$ es la composición de x con una función estrictamente creciente $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Su j-ésimo término se denota por $x_{k_j} := x(k(j))$.*

Proposición 3.29 *(i) El límite de una sucesión convergente es único.*
(ii) Si (x_k) converge a x en X entonces cualquier subsucesión (x_{k_j}) converge a x en X.

Demostración: *(i)* Si $x_k \to x$ y $x_k \to y$ en X entonces

$$0 \leq d(x,y) \leq d(x_k,x) + d(x_k,y) \ \to 0 \text{ en } \mathbb{R}.$$

Por tanto, $d(x,y) = 0$, es decir, $x = y$.
(ii) Sean (x_{k_j}) una subsucesión de (x_{k_j}) y $\varepsilon > 0$. Como $x_k \to x$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_k,x) < \varepsilon$ para todo $k \geq k_0$. Y, como $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es creciente, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k_j \geq k_0$ para todo $j \geq j_0$. Por tanto, $d(x_{k_j},x) < \varepsilon$ para todo $j \geq j_0$. ■

Definición 3.30 *Una sucesión (x_k) en X está* ***acotada*** *si existen $x \in X$ y $c \in \mathbb{R}$ tales que $d(x_k,x) \leq c$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Proposición 3.31 *Toda sucesión convergente está acotada.*

Demostración: Si $x_k \to x$ en X entonces existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_k,x) < 1$ para todo $k \geq k_{0.}$ Tomando $c := \text{máx}\{d(x_1,x),...,d(x_{k_0-1},x),1\}$ obtenemos que $d(x_k,x) \leq c$ para todo $k \in \mathbb{N}$. ■

Daremos ahora una caracterización de la cerradura de un conjunto en términos de sucesiones en dicho conjunto.

Proposición 3.32 *Sea A un subconjunto de X y sea $x \in X$. Entonces $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe una sucesión (x_k) tal que $x_k \in A$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $x_k \to x$ en X.*

Demostración: Si $x \in \overline{A}$ entonces existe $x_k \in B(x,\frac{1}{k}) \cap A$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Es decir, $x_k \in A$ y $0 \leq d(x_k,x) \leq \frac{1}{k}$ para toda $k \in \mathbb{N}$. En consecuencia, $x_k \to x$ en X.
Sea ahora (x_k) una sucesión de puntos en A tal que $x_k \to x$ en X. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_k,x) < \varepsilon$ para todo $k \geq k_0$. En particular, $x_{k_0} \in B_X(x,\varepsilon) \cap A$. Por tanto, $x \in \overline{A}$. ■

Podemos caracterizar la continuidad de una función en términos de sucesiones como sigue.

Proposición 3.33 *$\phi : X \to Y$ es continua en el punto $x \in X$ si y sólo si para toda sucesión (x_k) en X tal que $x_k \to x$ en X se cumple que $\phi(x_k) \to \phi(x)$ en Y.*

Demostración: Supongamos que ϕ es continua en x y que $x_k \to x$ en X. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces, como ϕ es continua, existe $\delta > 0$ tal que $\phi(B_X(x,\delta)) \subset B_Y(\phi(x),\varepsilon)$ y, como $x_k \to x$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_k \in B_X(x,\delta)$ para todo $k \geq k_0$. Por lo tanto

$\phi(x_k) \in B_Y(\phi(x), \varepsilon)$ para todo $k \geq k_0$, es decir, $\phi(x_k) \to \phi(x)$.
Inversamente: Supongamos que ϕ no es continua en x. Entonces, para alguna $\varepsilon_0 > 0$ y para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $x_k \in B_X(x, \frac{1}{k})$ tal que $\phi(x_k) \notin B_Y(\phi(x), \varepsilon_0)$. Es decir, (x_k) converge a x en X pero $(\phi(x_k))$ no converge a $\phi(x)$ en Y. ■

Ejemplo 3.34 *Consideremos las funciones continuas* $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ *dadas por*

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 - kx & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{k}, \\ 0 & \text{si } \frac{1}{k} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Entonces $f_k \to 0$ *en* $\mathcal{C}_1^0[0,1]$, *pero* (f_k) *no converge en* $\mathcal{C}_\infty^0[0,1]$.

Demostración: Se tiene que

$$\|f_k\|_1 = \int_0^1 |f_k(x)|\, dx = \frac{1}{2k} \to 0.$$

Por tanto, $f_k \to 0$ en $\mathcal{C}_1^0[0,1]$.
Supongamos que $f_k \to f$ en $\mathcal{C}_\infty^0[0,1]$. Entonces, como

$$|f_k(x) - f(x)| \leq \|f_k - f\|_\infty \qquad \text{para cada } x \in [0,1],$$

se cumple que la sucesión de números reales $(f_k(x))$ converge a $f(x)$ en $\mathbb{R}$ para cada $x \in [0,1]$. En consecuencia

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Esta función no es continua en $[0,1]$, lo que contradice nuestra suposición. ■

3.4. Ejercicios

Ejercicio 3.35 *Sean* $V = (V, \|\cdot\|_V)$ *y* $W = (W, \|\cdot\|_W)$ *espacios normados, y sea* $L : V \to W$ *una transformación lineal. Prueba que las siguientes afirmaciones son equivalentes.*
(i) L *es continua.*
(ii) L *es continua en* 0.
(iii) Existe $c > 0$ *tal que* $\|Lv\|_W \leq c\|v\|_V$ *para todo* $v \in V$.
(iv) L *es Lipschitz continua.*

Ejercicio 3.36 *Sea X un espacio métrico. Prueba que, si $f,g : X \to \mathbb{R}$ son continuas, entonces las funciones* $\max\{f,g\} : X \to \mathbb{R}$ *y* $\min\{f,g\} : X \to \mathbb{R}$ *dadas por*

$$\begin{aligned}(\max\{f,g\})(x) &:= \max\{f(x),g(x)\},\\ (\min\{f,g\})(x) &:= \min\{f(x),g(x)\}),\end{aligned}$$

son continuas.
¿Es cierto que, si $f,g : X \to \mathbb{R}$ son Lipschitz continuas, $\max\{f,g\}$ *y* $\min\{f,g\}$ *son Lipschitz continuas?*

Ejercicio 3.37 *Prueba que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua si y sólo si $f : \mathbb{R}^n_p \to \mathbb{R}^m_r$ es continua para cualesquiera $p,r \in [1,\infty]$.*

Ejercicio 3.38 *Sea $g_0 \in \mathcal{C}^0[a,b]$. Prueba que, para toda $p \in [1,\infty]$, la función $\phi : \mathcal{C}^0_p[a,b] \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\phi(f) := \int_a^b f g_0$$

es Lipschitz continua. (Sugerencia: Usa la desigualdad de Hölder para integrales.)

Ejercicio 3.39 *Prueba que, si $1 \leq p \leq r \leq \infty$, entonces la inclusión $\iota : \ell_p \subset \ell_r$ es Lipschitz continua.*

Ejercicio 3.40 *Prueba que, para toda $p \in [1,\infty]$, la k-**ésima proyección***

$$\pi_k : \ell_p \to \mathbb{R}, \qquad \pi_k(x) = x_k,$$

con $x = (x_k) \in \ell_p$, es Lipschitz continua.

Ejercicio 3.41 *Dados dos conjuntos S y S', una función $\phi : S' \to S$ y un espacio métrico X, consideremos la función $\phi^* : \mathcal{B}(S,X) \to \mathcal{B}(S',X)$ dada por la composición*

$$\phi^*(f) := f \circ \phi.$$

(a) Prueba que ϕ^* está bien definida (es decir, que $f \circ \phi$ es acotada si f lo es) y que es Lipschitz continua.
(b) Prueba que, si ϕ es suprayectiva, entonces ϕ^* es una isometría.

Ejercicio 3.42 *Demuestra las siguientes afirmaciones.*
(a) Toda isometría es Lipschitz continua.
(b) Si $\phi : X \to Y$ y $\psi : Y \to Z$ son Lipschitz continuas entonces la composición $\psi \circ \phi : X \to Z$ es Lipschitz continua.
(c) Si $\phi : X \to Y$ es una equivalencia, entonces $\psi : Y \to Z$ es Lipschitz continua si y sólo si $\psi \circ \phi : X \to Z$ lo es.
(d) Si $\psi : Y \to Z$ es una equivalencia, entonces $\phi : X \to Y$ es Lipschitz continua si y sólo si $\psi \circ \phi : X \to Z$ lo es.

Ejercicio 3.43 *Sea I un intervalo en $\mathbb{R}$ (abierto, cerrado, finito o infinito). Prueba que, si $f : I \to \mathbb{R}$ es continuamente diferenciable en I y existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $|f'(t)| \leq C$ para todo $t \in I$, entonces f es Lipschitz continua.*

Ejercicio 3.44 *¿Cuáles de las siguientes funciones son Lipschitz continuas y cuáles son equivalencias?*
(a) $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \ \phi(x) = x^2$.
(b) $\phi : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \ \ \phi(x) = \sqrt{x}$.
(c) $\phi : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \ \ \phi(x) = \arctan x$.

Ejercicio 3.45 *Dada $f \in \mathcal{C}^1[0,1]$ definimos*

$$\begin{aligned} |||f|||_1 \ &: = \|f'\|_\infty \,, \\ |||f|||_2 \ &: = |f(0)| + \|f'\|_\infty \,, \\ |||f|||_3 \ &: = \text{máx}\left\{ \left| \int_0^1 f(x)dx \right|, \|f'\|_\infty \right\}, \\ |||f|||_4 \ &: = \left(\|f\|_2 + \|f'\|_2\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

(a) ¿Es $|||f|||_i$ una norma en $\mathcal{C}^1[0,1]$? Responde esta pregunta para cada $i = 1, ..., 4$.
(b) Si $|||f|||_i$ es una norma, ¿es $|||f|||_i$ equivalente a la norma

$$\|f\|_{1,\infty} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

del Ejercicio 2.49*?*
(c) Considera la función $D : \mathcal{C}^1[0,1] \to \mathcal{C}^0[0,1]$ que a cada $f \in \mathcal{C}^1[0,1]$ le asocia su derivada $f' \in \mathcal{C}^0[0,1]$. Prueba que

$$D : (\mathcal{C}^1[0,1], \|\cdot\|_{1,\infty}) \to \mathcal{C}^0_\infty[0,1]$$

es continua.
(d) Para aquellas $||| \cdot |||_i$ que sí son normas investiga si

$$D : (\mathcal{C}^1[0,1], ||| \cdot |||_i) \to \mathcal{C}^0_\infty[0,1]$$

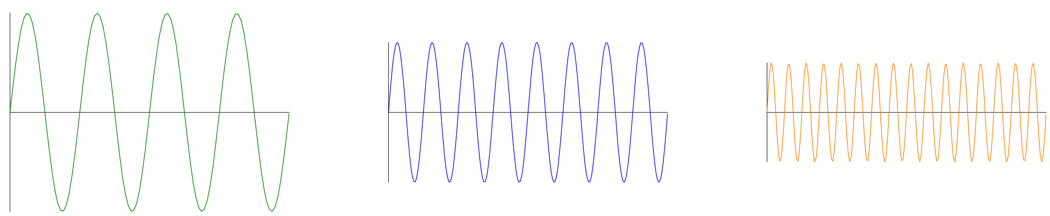
es o no una función continua.

Ejercicio 3.46 *Sean $p, r \in [1, \infty]$.*
(a) Investiga en qué casos $id : C^0_p[0,1] \to C^0_r[0,1]$ es Lipschitz continua y en qué casos no lo es.
(b) Investiga en qué casos $id : C^0_p[0,1] \to C^0_r[0,1]$ es continua y en qué casos no lo es.
(c) ¿En qué casos es $id : C^0_p[0,1] \to C^0_r[0,1]$ una equivalencia?
(d) ¿En qué casos es $id : C^0_p[0,1] \to C^0_r[0,1]$ un homeomorfismo?

Ejercicio 3.47 *(a) Prueba que la sucesión de trayectorias* $\sigma_k : [0,1] \to \mathbb{R}^2$,

$$\sigma_k(x) = (x, \frac{1}{\sqrt{k}}\mathrm{sen}(\pi k x)),$$

converge a la trayectoria $\sigma(x) = (x, 0)$ *en* $\mathcal{B}([0,1], \mathbb{R}^2)$.



σ_8 σ_{16} σ_{32}

(b) Sea $\mathcal{T}^*_{(0,0),(1,0)}(\mathbb{R}^2)$ *el conjunto de todas las trayectorias de longitud finita de* $(0,0)$ *a* $(1,0)$ *en* $\mathbb{R}^2$ *con la métrica uniforme*

$$d_\infty(\sigma, \tau) := \max_{t\in[0,1]} \|\sigma(t) - \tau(t)\|, \qquad \sigma, \tau \in \mathcal{T}^*_{(0,0),(1,0)}(\mathbb{R}^2)$$

(ver Ejemplo 2.26*). Prueba que la función longitud*

$$\mathfrak{L} : \mathcal{T}^*_{(0,0),(1,0)}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R},$$

definida en el Capítulo 1*, no es continua.* (Sugerencia: Usa el inciso anterior.)

Ejercicio 3.48 *Sean* $X = (X, d_X)$*,* $Y = (Y, d_Y)$ *y* $Z = (Z, d_Z)$*espacios métricos.*
(a) Prueba que todas las métricas del Ejercicio 2.51 *en el producto cartesiano* $X \times Y := \{(x, y) : x \in X,\ y \in Y\}$ *son equivalentes. En adelante* $X \times Y$ *denotará al producto cartesiano con cualquiera de estas métricas.*
(b) Prueba que las proyecciones

$$\begin{aligned} \pi_X &: X \times Y \to X, & \pi_X(x, y) = x, \\ \pi_Y &: X \times Y \to Y, & \pi_Y(x, y) = y, \end{aligned}$$

son Lipschitz continuas.
(c) Prueba que, $\phi : Z \to X \times Y$ *es continua si y sólo si* $\pi_X \circ \phi : Z \to X$ *y* $\pi_y \circ \phi : Z \to Y$ *son continuas.*
(d) Prueba que la distancia $d_X : X \times X \to \mathbb{R}$ *es continua.*

Ejercicio 3.49 *Sea* $(V, \|\cdot\|)$ *un espacio normado.*
(a) Demuestra que las siguientes funciones son continuas.

$$\begin{array}{rcll} V \times V & \to & V, & (v,w) \mapsto v+w, \\ \mathbb{R} \times V & \to & V, & (\lambda, v) \mapsto \lambda v, \\ V & \to & \mathbb{R}, & v \mapsto \|v\|. \end{array}$$

(b) ¿Cuáles de ellas son son Lipschitz continuas?

Ejercicio 3.50 *Sean* V *un espacio vectorial y* d *una métrica en* V. *Demuestra las siguientes afirmaciones.*
(i) Si d *satisface*

$$d(v+z, w+z) = d(v,w) \qquad \forall v, w, z \in V, \tag{3.4}$$

entonces la suma $V \times V \to V$, $(v,w) \mapsto v+w$, *es continua.*
(ii) Si d *satisface* (3.4) *y*

$$d(\lambda v, \lambda w) = |\lambda|\, d(v,w) \qquad \forall v, w \in V, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \tag{3.5}$$

entonces el producto por un escalar $\mathbb{R} \times V \to V$, $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$, *es continuo.*
(iii) Si d *satisface* (3.4) *y* (3.5), *entonces existe una norma* $\|\cdot\|$ *en* V *que induce a la métrica* d.

Ejercicio 3.51 *Sean* $X = (X,d)$ *un espacio métrico,* A *un subconjunto no vacío de* X *y* $x \in X$. *Definimos la distancia de* x *a* A *como*

$$\operatorname{dist}(x, A) := \inf_{y \in A} d(x,y).$$

(a) Prueba que la función $f : X \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) := \operatorname{dist}(x, A)$ *es Lipschitz continua.* (Sugerencia: Usa el Ejercicio 2.31).
(b) Prueba que, si A *es un subconjunto cerrado de* X, *entonces* $\operatorname{dist}(x, A) = 0$ *si y sólo si* $x \in A$.

Ejercicio 3.52 *Sean* A *y* B *subconjuntos cerrados de un espacio métrico* X *tales que* $A \cap B = \emptyset$.
(a) Prueba que existe una función continua $\eta : X \to [0,1]$ *tal que* $\eta^{-1}(0) = A$ *y* $\eta^{-1}(1) = B$, *donde* $\eta^{-1}(a) := \{x \in X : \eta(x) = a\}$. (Sugerencia: Considera la función

$$\eta(x) := \frac{\operatorname{dist}(x, A)}{\operatorname{dist}(x, A) + \operatorname{dist}(x, B)}.$$

Prueba que está bien definida y que tiene las propiedades deseadas.)
(b) Prueba que existen subconjuntos abiertos V *y* W *de* X *tales que* $A \subset V$, $B \subset W$ *y* $V \cap W = \emptyset$.

Ejercicio 3.53 *Sean $X = (X, d)$ un espacio métrico, $x_0 \in X$ y $r > 0$. Prueba que la esfera*

$$S_X(x_0, r) := \{x \in X : d(x_0, x) = r\}$$

es un subconjunto cerrado de X. (Sugerencia: Usa el Ejercicio 3.51 y la Proposición 3.24)

Ejercicio 3.54 *Sea $p \in [1, \infty]$. Demuestra las siguientes afirmaciones.*
(a) U es abierto en $\mathbb{R}^n$ si y sólo si U es abierto en $\mathbb{R}^n_p$.
(b) C es cerrado en $\mathbb{R}^n$ si y sólo si C es cerrado en $\mathbb{R}^n_p$.

Ejercicio 3.55 *Sea $X = [-1, 1]$ con la métrica inducida por la de $\mathbb{R}$.*
(a) Describe las bolas abiertas $B_X(1, \varepsilon)$ y $B_X(-1, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.
(b) ¿Cuál es el interior en X de los siguientes conjuntos?

$$(0, 1], \quad [0, 1], \quad (0, \frac{1}{2}), \quad [0, \frac{1}{2}), \quad [-1, 1].$$

Observa que el interior de estos conjuntos en X a veces no coincide con su interior en $\mathbb{R}$.
(c) ¿Cuáles de estos conjuntos son abiertos en X?
(d) ¿Cuáles de ellos son cerrados en X?

Ejercicio 3.56 *(a) Investiga para cuáles $p \in [1, \infty]$ el conjunto*

$$A_1 := \{g \in \mathcal{C}^0\,[0, 1] : \int_0^1 |g(x)|\, dx < 1\}$$

es un subconjunto abierto de $\mathcal{C}^0_p\,[0, 1]$?
(b) Investiga para cuáles $p \in [1, \infty]$ el conjunto

$$A_2 := \{g \in \mathcal{C}^0\,[0, 1] : \int_0^1 |g(x)|\, dx \leq 1\}$$

es un subconjunto cerrado de $\mathcal{C}^0_p\,[0, 1]$?
(Sugerencia: Usa la Proposición 3.24.)

Ejercicio 3.57 *(a) Sea*

$$A_3 := \{f \in \mathcal{C}^0[0, 1] : |f(x)| \leq 1 \ \forall x \in [0, 1]\}.$$

Calcula el interior y la cerradura de A_3 en $\mathcal{C}^0_p[0, 1]$ para cada $p \in [1, \infty]$.
(b) Sea $f_k \in \mathcal{C}^0[0, 1]$ la función

$$f_k(x) := \begin{cases} 1 - kx & \text{si } x \in [0, \frac{1}{k}], \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{1}{k}, 1]. \end{cases}$$

Calcula el interior y la cerradura de $A_4 := \{f_k : k \in \mathbb{N}\}$ en $\mathcal{C}^0_p[0, 1]$ para cada $p \in [1, \infty]$.

Ejercicio 3.58 *Prueba que una sucesión* (x_k) *en un espacio métrico discreto* X_{disc} *converge a* x *en* X_{disc} *si y sólo si existe* $k_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $x_k = x$ *para todo* $k \geq k_0$.

Ejercicio 3.59 *Prueba que en cualquier espacio métrico* X *la intersección de un número finito de subconjuntos abiertos* $U_1 \cap \cdots \cap U_m$ *es abierta en* X.

Ejercicio 3.60 *Da un ejemplo de una familia numerable de abiertos* $\{U_k : k \in \mathbb{N}\}$ *en* $\mathbb{R}$ *cuya intersección* $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} U_k$ *no es abierta en* $\mathbb{R}$.

Ejercicio 3.61 *Demuestra que en cualquier espacio métrico* $X = (X, d)$ *se cumple lo siguiente.*
(a) X *es cerrado en* X.
(b) El conjunto vacío $\emptyset$ *es cerrado en* X.
(c) La intersección $\bigcap_{i \in I} C_i$ *de cualquier familia* $\{C_i : i \in I\}$ *de subconjuntos cerrados de* X *es cerrada en* X.
(d) La unión $C \cup D$ *de dos subconjuntos cerrados* C *y* D *de* X *es cerrada en* X.
(Sugerencia: Aplica las Proposiciones 3.26 y 3.19).

Ejercicio 3.62 *Sean* A *y* B *subconjuntos de un espacio métrico* X. *Demuestra las siguientes afirmaciones.*
(a) $\operatorname{int}(B) \subset \operatorname{int}(A)$ *si* $B \subset A$.
(b) $\operatorname{int}(A)$ *es el máximo subconjunto abierto de* X *contenido en* A.

Ejercicio 3.63 *Sean* A *y* B *subconjuntos de un espacio métrico* X. *Demuestra las siguientes afirmaciones.*
(a) $\overline{B} \subset \overline{A}$ *si* $B \subset A$.
(b) $\overline{A}$ *es el mínimo subconjunto cerrado de* X *que contiene a* A.

Ejercicio 3.64 *Sea* A *un subconjunto de un espacio métrico* X. *La* ***frontera*** *de* A *en* X *es el conjunto*

$$\partial A := \overline{A} \smallsetminus \operatorname{int}(A).$$

Prueba que $x \in \partial A$ *si y sólo si* $B_X(x_0, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ *y* $B_X(x_0, \varepsilon) \cap (X \smallsetminus A) \neq \emptyset$ *para todo* $\varepsilon > 0$.

Ejercicio 3.65 *Prueba que la frontera* ∂A *de cualquier subconjunto* A *de* X *es un subconjunto cerrado de* X.

Ejercicio 3.66 *(a) Prueba que la frontera de la bola abierta* $B_V(v_0, r)$ *en un espacio normado* V *es la esfera*

$$S_V(v_0, r) := \{v \in V : \|v - v_0\| = r\}.$$

(b) ¿Es cierto que la frontera de la bola abierta $B_X(x_0, r)$ *en un espacio métrico arbitrario* X *es la esfera*

$$S_X(x_0, r) := \{x \in X : d_X(x, x_0) = r\}?$$

Capítulo 4

Compacidad

Los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que son cerrados y acotados tienen una propiedad fundamental: cualquier sucesión de puntos en ellos contiene una subsucesión convergente. Esta propiedad resulta también relevante en espacios de funciones. Permite, por ejemplo, concluir la existencia de una solución de una ecuación diferencial tomando el límite de ciertas aproximaciones elementales, como ocurre en el Teorema de Cauchy-Peano que demostraremos más adelante (ver Teorema 7.14).

A un subconjunto de un espacio métrico que tiene la propiedad de que cualquier sucesión de puntos en él contiene una subsucesión que converge a un punto de él se le llama *compacto*. Este término fue introducido por Fréchet en 1906.

La compacidad tiene consecuencias muy importantes. Por ejemplo, toda función continua en un espacio métrico compacto alcanza su máximo y su mínimo.

Existen varias nociones equivalentes de compacidad en espacios métricos. Una de ellas afirma que un subconjunto K de un espacio métrico es compacto si de cualquier familia de conjuntos abiertos cuya unión contiene a K podemos extraer una familia finita cuya unión también contiene a K. Esta es la definición que usaremos aquí como punto de partida.

4.1. Conjuntos compactos

Sea X un espacio métrico y sea A un subconjunto de X.

Definición 4.1 *Una* ***cubierta*** *de A es una familia $\mathfrak{C} = \{X_i : i \in \mathcal{I}\}$ de subconjuntos de X tal que*

$$A \subset \bigcup_{i \in \mathcal{I}} X_i.$$

Si además X_i es abierto en X para toda $i \in \mathcal{I}$, se dice que $\mathfrak{C}$ es una ***cubierta abierta*** *de A.*

Definición 4.2 *Un subconjunto K de X es* ***compacto*** *si cada cubierta abierta $\mathfrak{C} = \{X_i : i \in \mathcal{I}\}$ de K en X contiene un subconjunto finito $\{X_{i_1}, \ldots, X_{i_m}\} \subset \mathfrak{C}$ tal que*

$$K \subset X_{i_1} \cup \cdots \cup X_{i_m}.$$

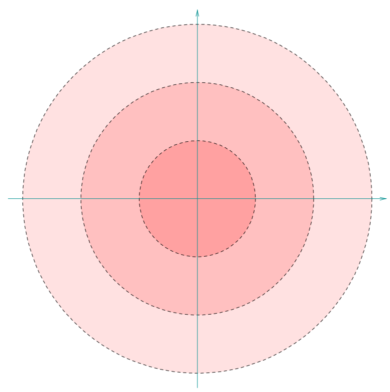
Veamos algunos ejemplos. Denotemos por

$$B(x_0, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < r\}$$

a la bola abierta en $\mathbb{R}^n$ con centro en x_0 y radio r.

Ejemplo 4.3 $\mathbb{R}^n$ *no es compacto.*

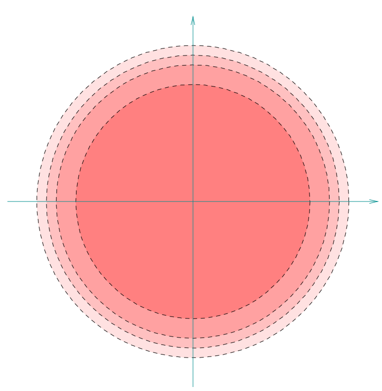
Demostración: $\mathfrak{C} := \{B(0, k) : k \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta de $\mathbb{R}^n$, pero ningún subconjunto finito de $\mathfrak{C}$ es cubierta de $\mathbb{R}^n$.



Por tanto, $\mathbb{R}^n$ no es compacto. ■

Ejemplo 4.4 *La bola abierta $B(0, 1)$ en $\mathbb{R}^n$ no es compacta.*

Demostración: $\mathfrak{C} := \{B(0, 1 - \frac{1}{k}) : k \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta de $B(0, 1)$, pero ningún subconjunto finito de $\mathfrak{C}$ es cubierta de $B(0, 1)$.



Por tanto, $B(0,1)$ no es compacta. ■

A continuación probaremos algunas propiedades importantes de los conjuntos compactos.

Proposición 4.5 *Si K es un subconjunto compacto de X, entonces toda sucesión (x_k) de elementos de K contiene una subsucesión que converge en X a un elemento de K.*

Demostración: Sea (x_k) una sucesión en K. Probaremos primero que existe un punto $y_0 \in K$ tal que, para cada $\varepsilon > 0$, la bola abierta $B_X(y_0, \varepsilon)$ con centro en y_0 y radio ε contiene alguna subsucesión de (x_k).
Argumentando por contradicción, supongamos que para cada $y \in K$ existe $\varepsilon_y > 0$ tal que $B_X(y, \varepsilon_y)$ no contiene ninguna subsucesión de (x_k). Entonces existe $k_y \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_k \notin B_X(y, \varepsilon_y) \quad \forall k \geq k_y.$$

Como K es compacto y $\mathfrak{C} := \{B_X(y, \varepsilon_y) : y \in K\}$ es una cubierta abierta de K, existen $y_1, ..., y_m \in K$ tales que

$$K \subset B_X(y_1, \varepsilon_{y_1}) \cup \cdots \cup B_X(y_m, \varepsilon_{y_m}).$$

Esto implica que $x_k \notin K$ para todo $k \geq \text{máx}\{k_{y_1}, ..., k_{y_m}\}$, lo cual es falso.
En consecuencia, existe $y_0 \in K$ tal que toda bola abierta con centro en y_0 contiene a una subsucesión de (x_k). Esto nos permite escoger, inductivamente, para cada $j \in \mathbb{N}$ un punto $x_{k_j} \in B_X(y_0, \frac{1}{j})$ tal que $k_j > k_{j-1}$. La sucesión (x_{k_j}) es una subsucesión de (x_k) que converge a y_0. ■

Más adelante veremos que el recíproco también es válido, es decir, que K es un subconjunto compacto de X si y sólo si toda sucesión (x_k) en K contiene una subsucesión convergente en K. (ver Teorema 7.4).

Definición 4.6 *Un subconjunto A de un espacio métrico X es* ***acotado*** *si existen $x \in X$ y $\varepsilon > 0$ tales que $A \subset B_X(x, \varepsilon)$.*

Proposición 4.7 *Si K es un subconjunto compacto de X, entonces K es cerrado y acotado.*

Demostración: Sea K un subconjunto compacto de X. Si $x_0 \in \overline{K}$, existe una sucesión (x_k) en K que converge a x_0 en X (ver Proposición 3.32). Por la Proposición 4.5, (x_k) contiene una subsucesión (x_{k_j}) que converge a un punto $y_0 \in K$. De la Proposición 3.29 se sigue que $x_0 = y_0 \in K$. Esto prueba que K es cerrado.

Probemos ahora que K es acotado. Fijemos un punto $x_0 \in X$. El conjunto $\mathfrak{C} := \{B_X(x_0, k) : k \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta de K. Como K es compacto, existen $k_1, ..., k_m \in \mathbb{N}$ tales que

$$K \subset B_X(x_0, k_1) \cup \cdots \cup B_X(x_0, k_m).$$

Sea $k_0 := \text{máx}\{k_1, ..., k_m\}$. Entonces $K \subset B_X(x_0, k_0)$, es decir, K es acotado. $\blacksquare$

El recíproco no es cierto en general, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.8 *La bola cerrada* $\bar{B}_{\ell_2}(0,1) := \{(x_k) \in \ell_2 : \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \leq 1\}$ *no es compacta en* ℓ_2*.*

Demostración: Para cada $k \in \mathbb{N}$ consideremos la sucesión $e_k = (e_{k,n})$ tal que $e_{k,k} = 1$ y $e_{k,n} = 0$ si $k \neq n$. Claramente $e_k \in \bar{B}_{\ell_2}(0,1)$. Observa que

$$\|e_j - e_k\|_2 = \sqrt{2} \qquad \forall j \neq k.$$

Supongamos que una subsucesión (e_{k_j}) converge a e en ℓ_2. Entonces existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left\|e_{k_j} - e\right\|_2 < \frac{\sqrt{2}}{2}$ para todo $j \geq j_0$. En consecuencia,

$$\left\|e_{k_j} - e_{k_i}\right\|_2 \leq \left\|e_{k_j} - e\right\|_2 + \|e - e_{k_i}\|_2 < \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \qquad \forall i, j \geq j_0,$$

lo cual es imposible. Esto prueba que (e_k) no contiene ninguna subsucesión convergente. La Proposición 4.5 implica que $\bar{B}_{\ell_2}(0,1)$ no es compacta. $\blacksquare$

En general, las bolas cerradas en espacios de dimensión infinita nunca son compactas (ver Ejercicio 5.39). Veremos en la próxima sección que en $\mathbb{R}^n$ sí lo son.

Proposición 4.9 *Sea K un subconjunto compacto de X. Si $C \subset K$ es cerrado en X, entonces C es compacto.*

Demostración: Sea C un subconjunto cerrado de un conjunto compacto K. Si $\mathfrak{C} = \{U_i : i \in \mathcal{I}\}$ es una cubierta abierta de C en X, entonces $\mathfrak{C}' := \{U_i : i \in \mathcal{I}\} \cup \{X \smallsetminus C\}$ es una cubierta abierta de K en X. Como K es compacto, existen $U_{i_1}, ..., U_{i_m} \in \mathfrak{C}$ tales que

$$K \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_m} \cup (X \smallsetminus C).$$

En consecuencia, $C \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_m}$. Esto prueba que C es compacto. $\blacksquare$

La compacidad se preserva bajo funciones continuas.

Proposición 4.10 *Si $\phi : X \to Y$ es continua y K es un subconjunto compacto de X, entonces $\phi(K)$ es un subconjunto compacto de Y.*

Demostración: Sea $\mathfrak{C} = \{V_i : i \in \mathcal{I}\}$ una cubierta abierta de $\phi(K)$ en Y. Como ϕ es continua, $\phi^{-1}(V_i)$ es abierto en X (ver Proposición 3.24). Por tanto, $\mathfrak{C}' := \left\{\phi^{-1}(V_i) : i \in \mathcal{I}\right\}$ es una cubierta abierta de K en X y, como K es compacto, existen $\phi^{-1}(V_{i_1}), ..., \phi^{-1}(V_{i_m}) \in \mathfrak{C}'$ tales que $K \subset \phi^{-1}(V_{i_1}) \cup \cdots \cup \phi^{-1}(V_{i_m})$. En consecuencia, $\phi(K) \subset V_{i_1} \cup \cdots \cup V_{i_m}$. Esto prueba que $\phi(K)$ es compacto. ■

Corolario 4.11 *Si K es un espacio métrico compacto y $\phi : K \to X$ es continua, entonces ϕ es una función acotada.*

Demostración: Por la proposición anterior, $\phi(K)$ es un subconjunto compacto de X. La Proposición 4.7 asegura entonces que $\phi(K)$ es acotado, es decir, ϕ es una función acotada (ver Definición 2.23). ■

4.2. El teorema de Heine-Borel

Resulta difícil decidir a partir de la definición si un conjunto es compacto o no lo es. A continuación daremos una caracterización sencilla de los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$. Probaremos que son precisamente aquéllos que son cerrados y acotados. A este resultado se le conoce como el Teorema de Heine-Borel, aunque su paternidad es más complicada[1].

Empezaremos probando la siguiente afirmación.

Proposición 4.12 *El cubo cerrado*

$$Q := \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \in [-r, r],\ i = 1, ...n\}, \qquad r > 0,$$

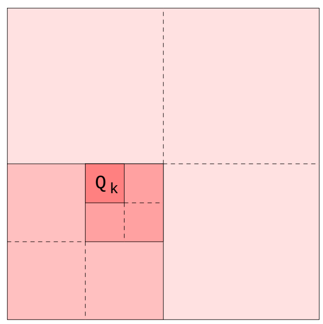
es compacto.

[1] P. Dugac en su artículo *Sur la correspondance de Borel et le théorème de Dirichlet-Heine-Weierstrass-Borel-Schoenflies-Lebesgue*, Arch. Internat. Hist. Sci. 39 (1989), págs. 69-110, cuenta que la historia de este resultado empieza con su uso implícito en diversas demostraciones del teorema que establece que toda función continua en un intervalo cerrado es uniformemente continua. Dirichlet fue el primero en probar este teorema en sus notas de 1862, publicadas en 1904, mientras que la demostración de Heine data de 1872. Dirichlet usó la existencia de una subcubierta finita de una cubierta abierta dada del intervalo de manera más explícita que Heine. Émile Borel fue el primero en formular y demostrar en 1895 una versión explícita del resultado que ahora conocemos como el teorema de Heine-Borel, para cubiertas numerables. Cousin (1895), Lebesgue (1898) y Schoenflies (1900) la generalizaron a cubiertas arbitrarias.

Demostración: Argumentando por contradicción, supongamos que Q no es compacto. Entonces existe una cubierta abierta $\mathfrak{C} = \{U_i : i \in \mathcal{I}\}$ de Q en $\mathbb{R}^n$ tal que ningún subconjunto finito de $\mathfrak{C}$ es cubierta de Q. En consecuencia, si subdividimos a Q en 2^n cubos cerrados de lado r, se cumple que al menos uno de ellos, llamémoslo Q_1, no está contenido en la unión de un número finito de elementos de $\mathfrak{C}$. Subdividamos ahora Q_1 en 2^n cubos cerrados de lado $\frac{r}{2}$ y repitamos este argumento para obtener una sucesión decreciente cubos cerrados

$$Q \supset Q_1 \supset \cdots \supset Q_k \supset \cdots,$$

tales Q_k es un cubo de lado $\frac{r}{2^{k-1}}$ y Q_k no esta contenido en la unión de ningún subconjunto finito de $\mathfrak{C}$.



Denotemos por $\xi^k = (\xi_1^k, ..., \xi_n^k)$ al centro de Q_k. Entonces,

$$\left|\xi_i^k - x_i\right| \leq \frac{r}{2^k} \qquad \forall x = (x_1, ..., x_N) \in Q_k. \tag{4.1}$$

En particular, como $\xi^j \in Q_k$ para $j \geq k$, se tiene que

$$\left|\xi_i^k - \xi_i^j\right| \leq \frac{r}{2^k} \qquad \forall j \geq k, \ \forall i = 1, ..., n. \tag{4.2}$$

Por tanto, para cada $i = 1, ..., n$, la sucesión (ξ_i^k) es de Cauchy en $\mathbb{R}$ y, en consecuencia, existe $\xi_i \in \mathbb{R}$ tal que $\xi_i^k \to \xi_i$ en $\mathbb{R}$. Pasando al límite cuando $j \to \infty$ en la desigualdad (4.2) obtenemos que

$$\left|\xi_i^k - \xi_i\right| \leq \frac{r}{2^k} \qquad \forall k, \ \forall i = 1, ..., n. \tag{4.3}$$

Como $\xi_i^k \in [-r, r]$, se tiene que $\xi_i \in [-r, r]$. Es decir, $\xi := (\xi_1, ..., \xi_n) \in Q$. Y como $\mathfrak{C}$ es cubierta de Q, existe $U_* \in \mathfrak{C}$ tal que $\xi \in U_*$.
Dado que U_* es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(\xi, \varepsilon) \subset U_*$. Ahora bien, si $x \in Q_k$, usando las desigualdades (4.1) y (4.3) obtenemos

$$\|x - \xi\| \leq \left\|x - \xi^k\right\| + \left\|\xi^k - \xi\right\| \leq \frac{r\sqrt{n}}{2^k} + \frac{r\sqrt{n}}{2^k} = \frac{r\sqrt{n}}{2^{k-1}}.$$

En consecuencia,

$$Q_k \subset B(\xi, \varepsilon) \subset U_* \qquad \text{si } \frac{r\sqrt{n}}{2^{k-1}} < \varepsilon.$$

Esto contradice que Q_k no puede ser cubierto por un número finito de elementos de $\mathfrak{C}$. Esto demuestra que Q es compacto. ■

El siguiente resultado da una caracterización sencilla de los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 4.13 (Heine-Borel) *Sea K un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Entonces, K es compacto si y sólo si K es cerrado y acotado.*

Demostración: Por la Proposición 4.7, si K es compacto entonces es cerrado y acotado. Inversamente, supongamos que K es cerrado y acotado. Entonces existe $r > 0$ tal que K está contenido en el cubo

$$Q := \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \in [-r, r],\ i = 1, ...n\},$$

que es compacto. La Proposición 4.9 implica que K también lo es. ■

Otra consecuencia importante de la Proposición 4.12 es el siguiente resultado, que se conoce como el teorema de Bolzano[2]-Weierstrass.

Bernard Bolzano

[2]Bernardus Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781-1848) nació en Praga, entonces parte del Imperio Austriaco. Cultivó la filosofía, la teología y las matemáticas. Fue uno de los pioneros en proponer un tratamiento riguroso del Análisis Matemático. Sus contribuciones sólo fueron conocidas y valoradas muchos años más tarde, ya que fue destituído de su cátedra en la Universidad de Praga por razones políticas y puesto bajo arresto domiciliario con la prohibición de publicar.

Teorema 4.14 (Bolzano-Weierstrass) *Toda sucesión acotada en* $\mathbb{R}^n$ *contiene una subsucesión convergente.*

Demostración: Si (ζ_k) es una sucesión acotada en $\mathbb{R}^n$, entonces existe $r > 0$ tal que $\zeta_k \in Q$ para todo $k \in \mathbb{N}$, donde Q es el cubo

$$Q := \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \in [-r, r],\ i = 1, ...n\},$$

que es compacto. Por la Proposición 4.5, la sucesión (ζ_k) contiene una subsucesión convergente. ■

4.3. Existencia de máximos y mínimos

Sean X un espacio métrico y $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ una función.

Definición 4.15 *Decimos que* f ***alcanza su mínimo en*** X *si existe* $x_0 \in X$ *tal que*

$$f(x_0) \leq f(x) \qquad \forall x \in X.$$

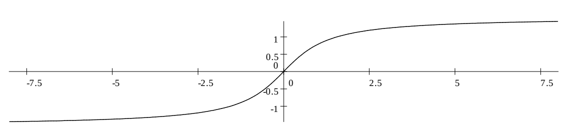
Decimos que f ***alcanza su máximo en*** X *si existe* $x_1 \in X$ *tal que*

$$f(x_1) \geq f(x) \qquad \forall x \in X.$$

El punto x_0 *se llama un* ***mínimo*** *de* f *en* X *y el punto* x_1 *se llama un* ***máximo*** *de* f *en* X.

Una función continua no alcanza, en general, su mínimo o su máximo. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 4.16 *La función* arctan : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *está acotada inferior y superiormente pero no alcanza ni su mínimo ni su máximo en* $\mathbb{R}$.



$$y = \arctan x$$

Una consecuencia importante de la compacidad es la siguiente.

Teorema 4.17 *Si K es un espacio métrico compacto y no vacío, entonces toda función continua $f : K \to \mathbb{R}$ alcanza su mínimo y su máximo en K.*

Demostración: El Corolario 4.11 asegura que $f(K)$ es un subconjunto acotado en $\mathbb{R}$ y, dado que no es vacío, se tiene que

$$m_0 := \inf_{z \in K} f(z) \in \mathbb{R}.$$

Escojamos $z_k \in K$ tal que

$$m_0 \leq f(z_k) < m_0 + \frac{1}{k} \qquad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{4.4}$$

Como K es compacto, la Proposición 4.5 asegura que la sucesión (z_k) contiene una subsucesión (z_{k_j}) que converge a un punto z_0 en K. Dado que f es continua, se tiene entonces que $f(z_{k_j}) \to f(z_0)$ en $\mathbb{R}$. De la desigualdad (4.4) se sigue que

$$m_0 = \lim_{j \to \infty} f(z_{k_j}) = f(z_0).$$

Es decir, z_0 es un mínimo de f.
De manera análoga se prueba que f alcanza su máximo en K [Ejercicio 4.39]. ■

En particular, se tiene el siguiente resultado, al que nos referimos en el Capítulo 1.

Corolario 4.18 *Sea $K \neq \emptyset$ un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^n$. Entonces toda función continua $f : K \to \mathbb{R}$ alcanza su máximo y su mínimo en K.*

Demostración: Esta afirmación es consecuencia inmediata de los Teoremas 4.17 y 4.13. ■

Una consecuencia importante del Teorema 4.17 es el siguiente resultado.

Teorema 4.19 *Cualesquiera dos normas en un espacio vectorial de dimensión finita son equivalentes.*

Demostración: Sea $V = (V, \|\cdot\|)$ un espacio normado de dimensión finita y sea $\{e_1, ..., e_n\}$ una base de V. Dado $v \in V$ lo expresamos como $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ con $x_i \in \mathbb{R}$, y definimos

$$\|v\|_* := \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}.$$

Es sencillo comprobar que $\|\cdot\|_*$ es una norma en V (ver Ejercicio 2.54).
Para probar este teorema, basta probar que $\|\cdot\|_*$ y $\|\cdot\|$ son normas equivalentes. A fin de distinguir qué norma le estamos dando a V, denotaremos por $V_* := (V, \|\cdot\|_*)$.
Sea $c_1 := \left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|^2\right)^{1/2}$. Nota que $c_1 > 0$. Usando la desigualdad del triángulo para $\|\cdot\|$ y la desigualdad de Hölder en $\mathbb{R}^n$ con $p = q = 2$ (ver Proposición 2.12) obtenemos

$$\|v\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \, \|e_i\| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|^2\right)^{1/2} \leq c_1 \|v\|_* . \tag{4.5}$$

De esta desigualdad se sigue que la función $\|\cdot\| : V_* \to \mathbb{R}$ es continua. En efecto, si $v_k \to v$ en V_*, como

$$|\|v_k\| - \|v\|| \leq \|v_k - v\| \leq c_1 \|v_k - v\|_* ,$$

se tiene que $\|v_k\| \to \|v\|$ en $\mathbb{R}$. Esto demuestra que $\|\cdot\| : V_* \to \mathbb{R}$ es continua.
Por otra parte, la función $\phi : \mathbb{R}^n \to V_*$ dada por

$$\phi(x_1, ..., x_n) := \sum_{i=1}^n x_i e_i,$$

es, claramente, una isometría biyectiva. Por tanto, el conjunto $S := \{v \in V : \|v\|_* = 1\}$ es la imagen bajo ϕ de la esfera unitaria $\mathbb{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$, que es cerrada y acotada en $\mathbb{R}^n$. El Teorema de Heine-Borel y la Proposición 4.10 aseguran entonces que S es compacto en V_*. Aplicando el Teorema 4.17 concluimos que existe $v_0 \in S$ tal que $\|v_0\| \leq \|v\|$ para todo $v \in S$, es decir,

$$c_2 := \|v_0\| \leq \left\| \frac{v}{\|v\|_*} \right\| = \frac{\|v\|}{\|v\|_*} \qquad \forall v \in V, \ v \neq 0.$$

O, equivalentemente,

$$c_2 \|v\|_* \leq \|v\| \qquad \forall v \in V. \tag{4.6}$$

Nota que $c_2 > 0$. Las desigualdades (4.5) y (4.6) demuestran que las normas $\|\cdot\|_*$ y $\|\cdot\|$ son equivalentes. ■

Denotemos por

$$\mathcal{C}^0(X, Y) := \{\phi : X \to Y : \phi \text{ es continua}\}. \tag{4.7}$$

El Corolario 4.11 asegura que, si X es un espacio métrico compacto, entonces $\mathcal{C}^0(X, Y)$ está contenido en el espacio de funciones acotadas $\mathcal{B}(X, Y)$ (ver Sección 2.4). Podemos entonces darle a $\mathcal{C}^0(X, Y)$ la métrica uniforme

$$d_\infty(\phi, \psi) := \sup_{x \in X} d_Y(\phi(x), \psi(x)).$$

Observa que, si $\phi, \psi \in \mathcal{C}^0(X, Y)$, la función $f : X \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) := d_Y(\phi(x), \psi(x))$ es continua. Si X es compacto y no vacío, esta función alcanza su máximo en X, por lo que en ese caso

$$d_\infty(\phi, \psi) = \max_{x \in X} d_Y(\phi(x), \psi(x)).$$

4.4. Semicontinuidad

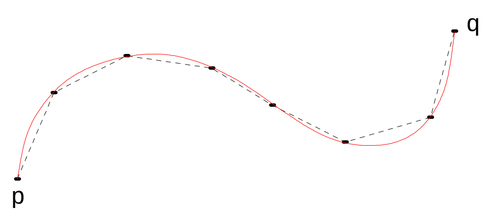
Volvamos ahora a nuestro problema de partida, el Problema 1.1, que formulamos como sigue: ¿Alcanza la función longitud su mínimo en el conjunto de trayectorias $\mathcal{T}_{p,q}(X)$?. El conjunto $\mathcal{T}_{p,q}(X)$ es un espacio métrico con la métrica uniforme. Sin embargo, el Teorema 4.17 no es aplicable a la función longitud porque ésta no es continua (ver Ejercicio 3.47).

En cierto sentido las condiciones de compacidad y continuidad son opuestas la una de la otra, es decir, mientras más abiertos tenga X más fácil es que una función $X \to Y$ resulte continua pero más difícil es que X sea compacto. Y viceversa. Esta disyuntiva se presenta con frecuencia en las aplicaciones. Resulta pues conveniente contar con un resultado de existencia de mínimos para funciones no necesariamente continuas.

Empecemos extendiendo el concepto de trayectoria a un espacio métrico arbitrario $X = (X, d_X)$.

Definición 4.20 *Una **trayectoria en** X es una función continua $\sigma : [a, b] \to X$. La **longitud de** σ se define como*

$$\mathfrak{L}(\sigma) := \sup \left\{ \sum_{k=1}^{m} d_X(\sigma(t_{k-1}), \sigma(t_k)) : a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_m = b,\ m \in \mathbb{N} \right\}.$$

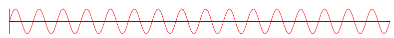


La longitud de una trayectoria no es necesariamente finita [Ejercicio 4.48]. Denotemos por

$$\mathfrak{L} : \mathcal{C}^0([a, b], X) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

a la función que a cada trayectoria le asocia su longitud.

Sabemos que esta función no es continua en general (ver Ejercicio 3.47). Esto se debe a que pueden existir trayectorias arbitrariamente largas tan cercanas como queramos a una trayectoria dada.



Sin embargo, no pueden existir trayectorias arbitrariamente cortas tan cercanas como queramos a una trayectoria dada, como lo muestra el siguiente resultado.

Proposición 4.21 *Dadas* $\sigma \in \mathcal{C}^0([a,b], X)$ *y* $c < \mathfrak{L}(\sigma)$*, existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$c < \mathfrak{L}(\tau) \qquad \text{si } d_\infty(\tau, \sigma) < \delta.$$

Demostración: Sean $\sigma : [a,b] \to X$ una trayectoria en X y $c < \mathfrak{L}(\sigma)$. Escojamos $\delta_0 > 0$ tal que $c + \delta_0 < \mathfrak{L}(\sigma)$ y una partición $a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_m = b$ tal que

$$c + \delta_0 < \sum_{k=1}^{m} d_X(\sigma(t_{k-1}), \sigma(t_k)).$$

Sea $\delta := \frac{\delta_0}{2m}$. Si $d_\infty(\sigma, \tau) < \delta$, se tiene que

$$\begin{aligned} d_X(\sigma(t_{k-1}), \sigma(t_k)) &\leq d_X(\sigma(t_{k-1}), \tau(t_{k-1})) + d_X(\tau(t_{k-1}), \tau(t_k)) + d_X(\tau(t_k), \sigma(t_k)) \\ &< \delta + d_X(\tau(t_{k-1}), \tau(t_k)) + \delta = d_X(\tau(t_{k-1}), \tau(t_k)) + \frac{\delta_0}{m}. \end{aligned}$$

Sumando estas desigualdades para todo $k = 1, ..., m$ obtenemos que

$$c + \delta_0 < \sum_{k=1}^{m} d_X(\sigma(t_{k-1}), \sigma(t_k)) < \sum_{k=1}^{m} d_X(\tau(t_{k-1}), \tau(t_k)) + \delta_0 \leq \mathfrak{L}(\tau) + \delta_0.$$

En consecuencia, $c < \mathfrak{L}(\tau)$. ■

A continuación estudiaremos a las funciones que tienen esta propiedad.

Definición 4.22 *Una función* $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *es* ***semicontinua inferiormente en el punto*** $x_0 \in X$ *si, dada* $c < f(x_0)$*, existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$c < f(x) \qquad \text{si } \ d_X(x, x_0) < \delta.$$

Se dice que f *es* ***semicontinua inferiormente (s.c.i.)*** *si lo es en todo punto* $x_0 \in X$.

Análogamente, se define el siguiente concepto.

Definición 4.23 *Una función $f : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ es **semicontinua superiormente en el punto** $x_0 \in X$ si, dada $c > f(x_0)$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$f(x) < c \quad \text{si} \;\; d_X(x, x_0) < \delta.$$

*Se dice que f es **semicontinua superiormente (s.c.s.)** si lo es en todo punto $x_0 \in X$.*

Observa que $f : X \to \mathbb{R}$ es continua si y sólo si f es s.c.i. y s.c.s. [Ejercicio 4.43].

Ejemplo 4.24 *(a) La función $]\cdot[: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$]t[:= n \quad \text{si} \;\; n - 1 < t \leq n, \;\; n \in \mathbb{Z}.$$

es s.c.i. pero no es continua.
(b) La función parte entera $[\cdot] : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$[t] := n \quad \text{si} \;\; n \leq t < n + 1, \;\; n \in \mathbb{Z},$$

es s.c.s. pero no es continua.

La demostración es sencilla [Ejercicio 4.44].

Ejemplo 4.25 *La* Proposición 4.21 *asegura que la función longitud*

$$\mathfrak{L} : \mathcal{C}^0([a, b], X) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \qquad \sigma \mapsto \mathfrak{L}(\sigma),$$

es s.c.i.

Una caracterización muy útil de la semicontinuidad inferior está dada en términos del siguiente concepto.

Definición 4.26 *Sea (t_k) una sucesión en $\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. El **límite inferior de** (t_k) se define como*

$$\liminf_{k \to \infty} t_k := \sup_{m \geq 1} \; \inf_{k \geq m} t_k \quad \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\},$$

*y el **límite superior de** (t_k) como*

$$\limsup_{k \to \infty} t_k := \inf_{m \geq 1} \; \sup_{k \geq m} t_k \quad \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}.$$

Ejemplo 4.27 *Si $t_k := (-1)^k$ entonces la sucesión (t_k) no converge, y se tiene que*

$$\liminf_{k \to \infty} t_k = -1 \qquad y \qquad \limsup_{k \to \infty} t_k = 1.$$

Es fácil ver [Ejercicio 4.45] que, si una sucesión de números reales (t_k) converge en $\mathbb{R}$, entonces

$$\liminf_{k\to\infty} t_k = \lim_{k\to\infty} t_k = \limsup_{k\to\infty} t_k, \tag{4.8}$$

Proposición 4.28 *$f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ es semicontinua inferiormente en x_0 si y sólo si para toda sucesión (x_k) en X tal que $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ se cumple que*

$$f(x_0) \leq \liminf_{k\to\infty} f(x_k).$$

Demostración: $\Rightarrow$) Supongamos que f es semicontinua inferiormente en x_0. Sea (x_k) una sucesión en X tal que $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$. Entonces, para cada $c < f(x_0)$, existe $\delta > 0$ tal que

$$c < f(x) \quad \text{si} \quad d_X(x, x_0) < \delta.$$

Sea $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_k \in B_X(x_0, \delta) \quad \forall k \geq k_0.$$

Entonces,

$$c \leq \inf_{k \geq k_0} f(x_k) \leq \liminf_{k\to\infty} f(x_k).$$

Como esta desigualdad se cumple para todo $c < f(x_0)$, concluímos que

$$f(x_0) \leq \liminf_{k\to\infty} f(x_k).$$

$\Leftarrow$) Supongamos que f no es semicontinua inferiormente en x_0. Entonces, para algún $c_0 < f(x_0)$ existe una sucesión (x_k) en X tal que

$$x_k \in B_X(x_0, \frac{1}{k}) \quad \text{y} \quad c_0 \geq f(x_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Esto implica que (x_k) converge a x_0 en X y que

$$\liminf_{k\to\infty} f(x_k) \leq c_0 < f(x_0),$$

lo que demuestra la implicación deseada. ■

Dado $a \in \mathbb{R}$, denotamos

$$f^{\leq a} := \{x \in X : f(x) \leq a\}.$$

El siguiente resultado tiene aplicaciones importantes. Por lo pronto, como la función longitud es s.c.i., nos da esperanzas de obtener alguna respuesta al Problema 1.1.

Teorema 4.29 *Si $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ s.c.i. y si $f^{\leq a}$ es compacto y no vacío para algún $a \in \mathbb{R}$, entonces f alcanza su mínimo en X.*

Demostración: Sea $m_0 := \inf_{x \in X} f(x)$. Como $f^{\leq a} \neq \emptyset$, se tiene que $-\infty \leq m_0 \leq a$. Sea (x_k) una sucesión en $f^{\leq a}$ tal que $f(x_k) \to m_0$. Como $f^{\leq a}$ es compacto, (x_k) contiene una subsucesión (x_{k_j}) tal que $x_{k_j} \to x_0$ en X. De la proposición anterior y la observación (4.8) se sigue que

$$m_0 \leq f(x_0) \leq \liminf_{k \to \infty} f(x_k) = \lim_{k \to \infty} f(x_k) = m_0.$$

Por lo tanto, $f(x_0) = m_0$, es decir, x_0 es un mínimo de f. ■

Para aplicar este resultado al Problema 1.1 deberemos investigar si para algún $a \in \mathbb{R}$ el conjunto de trayectorias en $\mathcal{T}_{p,q}(X)$ de longitud a lo más a es compacto y no vacío. Es sencillo comprobar que no es así [Ejercicio 4.49]. Volveremos al Problema 1.1 en el Capítulo 7.

4.5. Continuidad uniforme

La noción de continuidad de una función es una propiedad local, es decir, una función es continua si lo es en cada punto. A continuación daremos una noción de continuidad, que no depende de cada punto en particular, sino únicamente de la distancia entre los puntos. Esta propiedad es importante, por ejemplo, para garantizar la continuidad de ciertas funciones definidas en espacios de funciones [Ejercicio 4.52].

Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos.

Definición 4.30 *Una función $\phi : X \to Y$ es* ***uniformemente continua*** *si dada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (que depende únicamente de ε) tal que, para cualesquiera $x_1, x_2 \in X$,*

$$d_Y(\phi(x_1), \phi(x_2)) < \varepsilon \quad \text{si } d_X(x_1, x_2) < \delta.$$

Claramente toda función uniformemente continua es continua. Pero el recíproco no es cierto en general [Ejercicio 4.51]. El siguiente resultado afirma que, si la función está definida en un espacio compacto, ambas nociones coinciden.

Teorema 4.31 *Sea X un espacio métrico compacto. Entonces toda función continua $\phi : X \to Y$ es uniformemente continua.*

Demostración: Argumentando por contradicción, supongamos que X es compacto y que $\phi : X \to Y$ es continua pero no es uniformemente continua. Entonces para algún $\varepsilon_0 > 0$ y para todo $k \in \mathbb{N}$ existen $x_k, \widetilde{x}_k \in X$ tales que

$$d_X(x_k, \widetilde{x}_k) < \frac{1}{k} \qquad \text{y} \qquad d_Y(\phi(x_k), \phi(\widetilde{x}_k)) \geq \varepsilon_0.$$

Como X es compacto, la sucesión (x_k) contiene una subsucesión (x_{k_j}) tal que $x_{k_j} \to x$ en X (Proposición 4.5). De la desigualdad del triángulo

$$d_X(x, \widetilde{x}_{k_j}) \leq d_X(x, x_{k_j}) + d_X(x_{k_j}, \widetilde{x}_{k_j})$$

se sigue que $\widetilde{x}_{k_j} \to x$ en X y, como ϕ es continua, se cumple entonces que $\phi(x_{k_j}) \to \phi(x)$ y $\phi(\widetilde{x}_{k_j}) \to \phi(x)$ en Y (Proposición 3.33). En consecuencia,

$$d_Y(\phi(x_{k_j}), \phi(\widetilde{x}_{k_j})) \leq d_Y(\phi(x_{k_j}), \phi(x)) + d_Y(\phi(x), \phi(\widetilde{x}_{k_j})) < \varepsilon_0$$

para j suficientemente grande. Esto contradice nuestra suposición. ∎

4.6. Ejercicios

Ejercicio 4.32 *Sea V un espacio normado y sea $S_V := \{x \in V : \|x\| = 1\}$ la esfera unitaria en V. En cada uno de los siguientes casos investiga si la esfera unitaria es o no compacta. Justifica tu afirmación.*
(a) $\dim V < \infty$.
(b) $V = \ell_p$ *con* $p \in [1, \infty]$.
(c) $V = \mathcal{C}_p^0[0,1]$ *con* $p \in [1, \infty]$.

Ejercicio 4.33 *(a) Sean K un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$, $\delta > 0$ y $p \in [1, \infty]$. Prueba que el conjunto*

$$\widehat{K} := \bigcup_{\xi \in K} \bar{B}_p(\xi, \delta)$$

es compacto, donde $\bar{B}_p(\xi, \delta) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - \xi\|_p \leq \delta\}$ es la bola cerrada en $\mathbb{R}^n_p$ con centro en ξ y radio δ.
(b) Prueba que la afirmación anterior no es válida en un espacio métrico arbitrario. (Sugerencia: Toma $K := \{0\}$ en ℓ_2 y usa el Ejemplo 4.8.)

Ejercicio 4.34 *¿Es cierto en general que, si $\phi : X \to Y$ es continua y K es un subconjunto compacto de Y, entonces $\phi^{-1}(K)$ es un subconjunto compacto de X? Justifica tu respuesta.*

Ejercicio 4.35 *Prueba que, si $\phi : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces K es compacto en X si y sólo si $\phi(K)$ es compacto en Y.*

Ejercicio 4.36 *Sea X un espacio discreto. Prueba que X es compacto si y sólo si es finito.*

Ejercicio 4.37 *Prueba que, si $\phi : X \to Y$ es continua y biyectiva y X es compacto, entonces $\phi^{-1} : Y \to X$ es continua (es decir, ϕ es un homeomorfismo).*

Ejercicio 4.38 *Sea $\mathbb{S}^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ el círculo unitario en $\mathbb{R}^2$. Considera la función*

$$f : [0, 2\pi) \to \mathbb{S}^1, \qquad f(t) = (\cos t, \mathrm{sen} t).$$

Prueba que
(a) f es continua y biyectiva,
(b) $f^{-1} : \mathbb{S}^1 \to [0, 2\pi)$ no es continua.
Es decir, la compacidad de X es esencial en la afirmación del ejercicio anterior.

Ejercicio 4.39 *Prueba que, si un espacio métrico X es compacto y no vacío, entonces toda función continua $f : X \to \mathbb{R}$ alcanza su máximo en X.*

Ejercicio 4.40 *Sean A un subconjunto no vacío de un espacio métrico X y $x \in X$. Como en el* Ejercicio 3.51 *definimos la distancia de x a A como*

$$\mathrm{dist}(x, A) := \inf_{y \in A} d_X(x, y).$$

(a) Prueba que, si A es compacto, entonces para cada $x \in X$ existe $z \in A$ tal que

$$d_X(x, z) = \mathrm{dist}(x, A).$$

(b) ¿Es cierta la afirmación anterior si A es un subconjunto arbitrario de X?

Ejercicio 4.41 *La distancia entre dos subconjuntos no vacíos A y B de un espacio métrico X se define como*

$$\mathrm{dist}(A, B) := \inf\{d_X(x, y) : x \in A,\ y \in B\}.$$

(a) Prueba que, si A es compacto, B es cerrado y $A \cap B = \emptyset$, entonces $\mathrm{dist}(A, B) > 0$.
(b) ¿Es cierta la afirmación anterior si B es abierto en vez de cerrado?
(c) ¿Es cierto en general que la distancia entre dos cerrados ajenos es positiva?

Ejercicio 4.42 *Sean V y W espacios normados. Demuestra las siguientes afirmaciones:*
(a) Si $\dim V = \dim W < \infty$, *entonces existe una equivalencia $\phi : V \to W$ que es además un isomorfismo lineal.*
(b) Si $\dim V < \infty$ *y* $K \subset V$, *entonces K es compacto si y sólo si K es cerrado y acotado en V.*
(c) Si $\dim V < \infty$, *entonces toda transformación lineal $L : V \to W$ es Lipschitz continua.* (Sugerencia: Prueba que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\|Lv\|_W \leq c$ si $\|v\|_V = 1$, y demuestra que se cumple la afirmación *(iii)* del Ejercicio 3.35.)

Ejercicio 4.43 *Sea $x_0 \in X$. Prueba que $f : X \to \mathbb{R}$ es continua en x_0 si y sólo si f es s.c.i. y s.c.s. en x_0.*

Ejercicio 4.44 *Prueba que:*
(a) La función $]\cdot[: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$]t[:= n \quad si \quad n - 1 < t \leq n, \;\; n \in \mathbb{Z}.$$

es s.c.i.
(b) La función parte entera $[\cdot] : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$[t] := n \quad si \quad n \leq t < n + 1, \;\; n \in \mathbb{Z},$$

es s.c.s.

Ejercicio 4.45 *Sea (t_k) una sucesión en en $\mathbb{R}$.*
(a) Prueba que

$$\liminf_{k\to\infty} t_k \leq \limsup_{k\to\infty} t_k.$$

(b) Prueba que la sucesión (t_k) converge en $\mathbb{R}$ si y sólo si

$$\liminf_{k\to\infty} t_k = \limsup_{k\to\infty} t_k,$$

y que, en ese caso,

$$\liminf_{k\to\infty} t_k = \lim_{k\to\infty} t_k = \limsup_{k\to\infty} t_k.$$

Ejercicio 4.46 *Prueba que son equivalentes las siguientes afirmaciones:*
(a) f es s.c.i.
(b) $f_{>a} := \{x \in X : f(x) > a\}$ es abierto para toda $a \in \mathbb{R}$.
(c) $f^{\leq a} := \{x \in X : f(x) \leq a\}$ es cerrado para toda $a \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 4.47 *(a) Prueba que* $f : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *es s.c.s. si y sólo si* $-f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *es s.c.i.*
(b) Para una función s.c.s. $f : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *enuncia y demuestra los resultados correspondientes al* Ejercicio 4.46, *la* Proposición 4.28, *y el* Teorema 4.29.

Ejercicio 4.48 *Da un ejemplo de una trayectoria* $\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ *de longitud infinita.*

Ejercicio 4.49 *Considera la sucesión de trayectorias* $\sigma_k : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$\sigma_k(t) := \begin{cases} 2^k t & si \;\; 0 \leq t \leq \frac{1}{2^k}, \\ 1 & si \;\; \frac{1}{2^k} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

(a) Prueba que σ_k *es un mínimo de la función longitud* $\mathfrak{L} : \mathcal{T}_{0,1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$.
(b) Prueba que (σ_k) *no contiene ninguna subsucesión convergente en* $\mathcal{C}^0[0,1]$ (Sugerencia: Prueba que $\|\sigma_j - \sigma_k\|_\infty \geq \frac{1}{2}\ \forall j \neq k$).
(c) Prueba que

$$\mathfrak{L}^{\leq a} := \{\sigma \in \mathcal{T}_{0,1}(\mathbb{R}) : \mathfrak{L}(\sigma) \leq a\}$$

no es un subconjunto compacto de $\mathcal{C}^0[0,1]$ *para ningún* $a \geq 1$.
(d) Concluye que $\mathfrak{L} : \mathcal{T}_{0,1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *no satisface las hipótesis del* Teorema 4.29.

Ejercicio 4.50 *Sean* $\mathbb{S}^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ *el círculo unitario en* $\mathbb{R}^2$, $p = (1,0)$,

$$\mathcal{T}_{p,p}(\mathbb{S}^1) := \{\sigma \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{S}^1) : \sigma(0) = p = \sigma(1)\}$$

y $\mathfrak{L} : \mathcal{T}_{p,p}(\mathbb{S}^1) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *la función longitud. ¿Para qué valores de* $a \in \mathbb{R}$ *es*

$$\mathfrak{L}^{\leq a} := \{\sigma \in \mathcal{T}_{p,p}(\mathbb{S}^1) : \mathfrak{L}(\sigma) \leq a\}$$

un subconjunto compacto de $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{S}^1)$*?*

Ejercicio 4.51 *¿Cuáles de las siguiente funciones son uniformemente continuas? Justifica tu respuesta.*
(a) $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{1}{t}$.
(b) $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{1}{t}$, *con* $a > 0$.
(c) $f : X \to \mathbb{R}$, $f(x) := \operatorname{dist}(x, A)$, *donde* A *es un subconjunto arbitrario del espacio métrico* X.

Ejercicio 4.52 *Sean* $\mathcal{K} : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ *y* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *funciones continuas. Definimos* $\widehat{f} : [a,b] \to \mathbb{R}$ *como*

$$\widehat{f}(x) := \int_a^b \mathcal{K}(x,y) f(y) dy.$$

Prueba que $\widehat{f}$ *es continua.* (Sugerencia: Usa la continuidad uniforme de $\mathcal{K}$.)

Ejercicio 4.53 *Investiga si son falsas o verdaderas las siguientes afirmaciones.*
(a) Toda función Lipschitz continua es uniformemente continua.
(b) Toda función uniformemente continua es Lipschitz continua.

Capítulo 5

Completitud

Resulta útil contar con un criterio de convergencia de sucesiones que dependa únicamente de la sucesión misma. Para sucesiones de números reales contamos con un criterio tal, a saber: si una sucesión de números reales es de Cauchy entonces converge.

La noción de sucesión de Cauchy se extiende de manera natural a espacios métricos. Sin embargo, no es cierto en general que cualquier sucesión de Cauchy en un espacio métrico converge. A los espacios métricos en los que, como ocurre en $\mathbb{R}$, cualquier sucesión de Cauchy converge se les llama *completos*.

La completitud es una propiedad muy importante. Permite, por ejemplo, obtener soluciones de sistemas de ecuaciones numéricas, de ecuaciones diferenciales y de ecuaciones integrales mediante un proceso de iteración, como veremos en el siguiente capítulo.

5.1. Espacios métricos completos

Sea $X = (X, d_X)$ un espacio métrico.

Definición 5.1 *Una sucesión (x_k) en X es* ***de Cauchy***[1] *si, dada $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$d_X(x_k, x_j) < \varepsilon \qquad \forall k, j \geq k_0.$$

[1] Augustin Louis Cauchy (1789-1857) nació en París. Es uno de los pioneros del Análisis Matemático. Fue un matemático profundo, que cultivó diversas áreas de las matemáticas y ejerció una fuerte influencia sobre sus contemporáneos y sucesores. Escribió cerca de 800 artículos de investigación.

Augustin Cauchy

Proposición 5.2 *Toda sucesión convergente en X es de Cauchy.*

Demostración: Si $x_k \to x$ en X entonces, dada $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d_X(x_k, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ si $k \geq k_0$. Por tanto

$$d_X(x_k, x_j) \leq d_X(x_k, x) + d_X(x, x_j) < \varepsilon \qquad \forall k, j \geq k_0.$$

Es decir, (x_k) es de Cauchy. ■

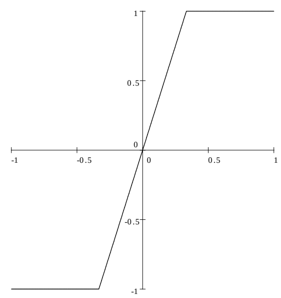
No es cierto, en general, que cualquier sucesión de Cauchy converge. Veamos un par de ejemplos.

Ejemplo 5.3 *Sea $X := (0,1)$ con la métrica inducida por la de $\mathbb{R}$. La sucesión $(\frac{1}{k})$ es de Cauchy en X pero no converge en X* [Ejercicio 5.31].

Ejemplo 5.4 *La sucesión de funciones $f_k : [-1,1] \to \mathbb{R}$,*

$$f_k(x) = \begin{cases} -1 & si \ -1 \leq x \leq -\frac{1}{k}, \\ kx & si \ -\frac{1}{k} \leq x \leq \frac{1}{k}, \\ 1 & si \ \frac{1}{k} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

es de Cauchy en $\mathcal{C}_1^0[-1,1]$ *pero no converge en* $\mathcal{C}_1^0[-1,1]$.



$y = f_3(x)$

Demostración: Para $j \geq k$ se tiene que

$$\int_{-1}^{1} |f_j(x) - f_k(x)|\, dx = 2\int_0^1 (f_j(x) - f_k(x))\, dx = \frac{1}{k} - \frac{1}{j}.$$

En consecuencia, dada $\varepsilon > 0$ se cumple que

$$\|f_j - f_k\|_1 < \varepsilon \qquad \forall k, j > \frac{2}{\varepsilon}.$$

Así pues, (f_k) es de Cauchy.
Supongamos que $f_k \to f$ en $\mathcal{C}_1^0[-1,1]$. Sea $a \in (0,1)$. Si $k \geq \frac{1}{a}$, entonces $f_k(x) = 1$ para todo $x \in [a,1]$. En consecuencia,

$$0 \leq \int_a^1 |1 - f(x)|\, dx \leq \int_{-1}^{1} |f_k(x) - f(x)|\, dx =: \|f_k - f\|_1 \to 0.$$

Por tanto,

$$\int_a^1 |1 - f(x)|\, dx = 0,$$

y esto implica que $f(x) = 1$ para todo $x \in [a,1]$. Análogamente, $f(x) = -1$ para todo $x \in [-1,-a]$ y, como $a \in (0,1)$ es arbitraria, tenemos que

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in [-1,0), \\ 1 & \text{si } x \in (0,1]. \end{cases}$$

En consecuencia, f no es continua en $[-1,1]$, lo cual contradice nuestra suposición. $\blacksquare$

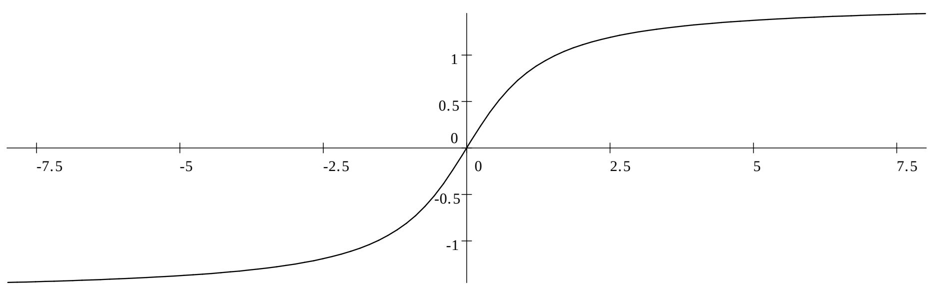
En la siguiente sección probaremos que en $\mathcal{C}_\infty^0[-1,1]$ cualquier sucesión de Cauchy converge. A los espacios métricos que tienen esta propiedad se les llama completos.

Definición 5.5 *Un espacio métrico X es* ***completo****, si toda sucesión de Cauchy en X converge en X. Un espacio normado que es completo con la métrica inducida por su norma se llama un* ***espacio de Banach****.*

Los ejemplos anteriores muestran que (a,b) y $\mathcal{C}_1^0[a,b]$ no son completos. De hecho, $\mathcal{C}_p^0[a,b]$ no es un espacio de Banach para ninguna $p \in [1,\infty)$ [Ejercicio 5.32]. Sin embargo es posible extender $\mathcal{C}_p^0[a,b]$ a un espacio completo en el sentido de la Definición 5.56. Más adelante daremos una completación explícita de $\mathcal{C}_p^0[a,b]$, el espacio de Lebesgue $L^p(a,b)$, que aparece de manera natural en muchas aplicaciones importantes.

La completitud no es invariante bajo homeomorfismos, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.6 *La función* $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ *es un homeomorfismo.* $\mathbb{R}$ *es un espacio métrico completo, pero* $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ *no lo es.*



$\arctan x$

Sin embargo, la completitud sí se preserva bajo equivalencias.

Proposición 5.7 *Si existe una equivalencia $\phi : X \to Y$ entre dos espacios métricos X y Y, entonces X es completo si y sólo si Y lo es.*

Demostración: Supongamos que Y es completo y que $\phi : X \to Y$ es Lipschitz continua. Sea (x_k) una sucesión de Cauchy en X. Entonces, dada $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que
$$d_Y(\phi(x_j), \phi(x_k)) \leq c\, d_X(x_j, x_k) < \varepsilon \qquad \forall j,k \geq k_0.$$
Es decir, la sucesión $(\phi(x_k))$ es de Cauchy en Y y, como Y es completo, se tiene que $\phi(x_k) \to y$ en Y. Ahora bien, como ϕ^{-1} es continua, la Proposición 3.33 garantiza que $x_k = \phi^{-1}(\phi(x_k)) \to \phi^{-1}(y)$ en X. Esto prueba que X es completo. El recíproco se obtiene remplazando Y por X y ϕ por ϕ^{-1} en el argumento anterior. ∎

Una consecuencia importante es la siguiente.

Teorema 5.8 *Todo espacio normado de dimensión finita es de Banach.*

Demostración: Como para cualquier espacio normado V de dimensión n existe una equivalencia $\phi : \mathbb{R}^n_\infty \to V$ (ver Ejercicio 4.42), en virtud de la Proposición 5.7 bastará probar que $\mathbb{R}^n_\infty$ es completo. Sea (x_k) una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^n_\infty$, donde $x_k = (x_{k,1}, ..., x_{k,n})$. Entonces, dada $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_{j,i} - x_{k,i}| \leq \max_{i=1,...,n} |x_{j,i} - x_{k,i}| =: \|x_j - x_k\|_\infty < \varepsilon \quad \forall j,k \geq k_0,\ \forall i = 1,...,n.$$

Esto prueba que, para cada $i = 1,...,n$, la sucesión $(x_{k,i})$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ es completo, $x_{k,i} \to x_i$ en $\mathbb{R}$. Por tanto, dada $\varepsilon > 0$, existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_{k,i} - x_i| < \varepsilon \quad \forall k \geq k_i,\ \forall i = 1,...,n,$$

y, en consecuencia,

$$\|x_k - x\|_\infty := \max_{i=1,...,n} |x_{k,i} - x_i| < \varepsilon \quad \forall k \geq \max\{k_1,...,k_n\},$$

donde $x := (x_1,...,x_n)$. Es decir, $x_k \to x$ en $\mathbb{R}^n_\infty$. ■

No todo subespacio de un espacio métrico completo es un espacio métrico completo. Por ejemplo, $\mathbb{R}$ es completo pero ningún intervalo abierto (a,b) lo es. La siguiente proposición caracteriza a aquéllos que sí lo son.

Proposición 5.9 *Sea X un espacio métrico completo. Un subespacio A de X es completo si y sólo si es cerrado en X.*

Demostración: Supongamos que A es cerrado en X. Sea (a_k) una sucesión de Cauchy en A. Entonces (a_k) una sucesión de Cauchy en X y, como X es completo, $a_k \to x$ en X. Por la Proposición 3.32 se tiene que $x \in \overline{A} = A$. Esto prueba que A es completo.
Supongamos ahora que A es completo. Sea $x \in \overline{A}$. Por la Proposición 3.32, existe una sucesión (a_k) en A tal que $a_k \to x$ en X. La Proposición 5.2 asegura entonces que (a_k) es de Cauchy y, como A es completo, se tiene que $a_k \to a$ en A. De la unicidad del límite (ver Proposición 3.29) se sigue que $x = a \in A$. En consecuencia, A es cerrado. ■

5.2. Convergencia uniforme

En esta sección daremos ejemplos importantes de espacios métricos completos. Empezaremos comparando ciertos tipos de convergencia para sucesiones de funciones.

Sean S un conjunto y $X = (X, d_X)$ un espacio métrico.

Definición 5.10 *Una sucesión de funciones $f_k : S \to X$, $k \in \mathbb{N}$, converge* ***puntualmente*** *en S a una función $f : S \to X$ si $f_k(z) \to f(z)$ en X para cada $z \in S$. Es decir, (f_k) converge puntualmente a f en S si, para cada $\varepsilon > 0$ y cada $z \in S$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ (que depende de ε y de z) tal que*

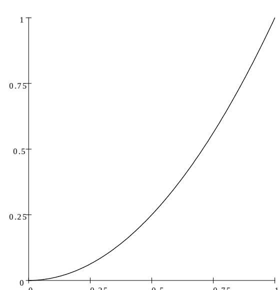
$$d_X(f_k(z), f(z)) < \varepsilon \qquad \forall k \geq k_0.$$

La función f se llama el ***límite puntual*** *de (f_k).*

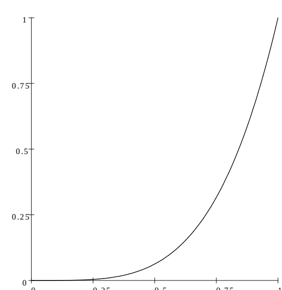
El límite puntual de una sucesión de funciones continuas no es, por lo general, una función continua, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.11 *La sucesión de funciones $f_k : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f_k(x) = x^k$, converge puntualmente a*

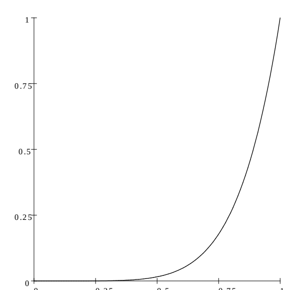
$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ 0 \leq x < 1, \\ 1 & si\ x = 1. \end{cases}$$



$y = x^2$



$y = x^4$



$y = x^6$

Daremos a continuación una noción de convergencia según la cual el límite de una sucesión de funciones continuas resultará ser una función continua.

Definición 5.12 *Una sucesión de funciones $f_k : S \to X$, $k \in \mathbb{N}$, converge* ***uniformemente*** *en S a una función $f : S \to X$ si, dada $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ (que depende de ε) tal que*

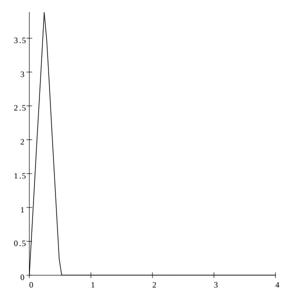
$$d_X(f_k(z), f(z)) < \varepsilon \qquad \forall k \geq k_0,\ \forall z \in S.$$

La función f se llama el ***límite uniforme*** *de (f_k).*

Notemos que esta noción es más fuerte que la de convergencia puntual, es decir, si (f_k) converge uniformemente a f, entonces converge puntualmente a f. El recíproco no es cierto pues la sucesión (f_k) del Ejemplo 5.11 no converge uniformemente en $[0,1]$ [Ejercicio 5.41]. El siguiente ejemplo muestra que, aun cuando una sucesión de funciones continuas converge puntualmente a una función continua, no necesariamente converge uniformemente.

Ejemplo 5.13 *Sea $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ la función dada por*

$$f_k(x) = \text{máx}\left\{k - k^2\left|x - \frac{1}{k}\right|, 0\right\}.$$



$y = f_4(x)$

La sucesión (f_k) converge puntualmente a 0, pero no converge uniformemente a 0 ya que, si $\varepsilon \in (0,1)$, ningún $k \in \mathbb{N}$ cumple que $|f_k(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in [0,1]$. En efecto,

$$\left|f_k\left(\frac{1}{k}\right)\right| = k > \varepsilon \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

La propiedad fundamental de la convergencia uniforme es la siguiente.

Teorema 5.14 *Sean $Z = (Z, d_Z)$ y $X = (X, d_X)$ espacios métricos. Si $f_k : Z \to X$ es continua para todo $k \in \mathbb{N}$ y (f_k) converge uniformemente a f en Z, entonces $f : Z \to X$ es continua.*

Demostración: Sean $z_0 \in Z$ y $\varepsilon > 0$. Como (f_k) converge uniformemente a f, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d_X(f_k(z), f(z)) < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall z \in Z,\ \forall k \geq k_0.$$

Y, como f_{k_0} es continua, existe $\delta > 0$ tal que

$$d_X(f_{k_0}(z), f_{k_0}(z_0)) < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{si } \ d_Z(z, z_0) < \delta.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} d_X(f(z), f(z_0)) &\leq d_X(f(z), f_{k_0}(z)) + d_X(f_{k_0}(z), f_{k_0}(z_0)) + d_X(f_{k_0}(z_0), f(z_0)) \\ &< \varepsilon \quad \text{ si } \; d_Z(z, z_0) < \delta. \end{aligned}$$

Esto prueba que f es continua. ■

Para funciones acotadas la convergencia uniforme es simplemente la convergencia en el espacio métrico $\mathcal{B}(S, X)$, definido en la Sección 2.4, cuya métrica es la métrica uniforme

$$d_\infty(f, g) := \sup_{z \in S} d_X(f(z), g(z)), \qquad f, g \in \mathcal{B}(S, X).$$

Es decir, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 5.15 *Sea (f_k) una sucesión en $\mathcal{B}(S, X)$. Entonces, (f_k) converge uniformemente a f en S si y sólo si (f_k) converge a f en $\mathcal{B}(S, X)$.*

Demostración: Si (f_k) converge a f en $\mathcal{B}(S, X)$ entonces, dada $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d_\infty(f_k, f) := \sup_{z \in S} d_X(f_k(z), f(z)) < \varepsilon \qquad \forall k \geq k_0.$$

En consecuencia,

$$d_X(f_k(z), f(z)) < \varepsilon \quad \forall k \geq k_0, \;\; \forall z \in S.$$

Es decir, (f_k) converge uniformemente a f en S.
Recíprocamente, si $f_k \in \mathcal{B}(S, X)$ y (f_k) converge uniformemente a f en S entonces, dada $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in N$ tal que

$$d_X(f_k(z), f(z)) < \varepsilon \quad \forall k \geq k_0, \;\; \forall z \in S. \tag{5.1}$$

Como f_{k_0} es acotada, existen $c > 0$ y $x_0 \in X$ tales que $d_X(f_{k_0}(z), x_0) < c$ para todo $z \in S$. En consecuencia,

$$d_X(f(z), x_0) \leq d_X(f(z), f_{k_0}(z)) + d_X(f_{k_0}(z), x_0) < \varepsilon + c \qquad \forall z \in S.$$

Esto prueba que $f \in \mathcal{B}(S, X)$. De (5.1) se sigue que

$$d_\infty(f_k, f) := \sup_{z \in S} d_X(f_k(z), f(z)) \leq \varepsilon \quad \forall k \geq k_0.$$

Es decir, (f_k) converge a f en $\mathcal{B}(S, X)$. ■

El siguiente espacio jugará un papel importante en las aplicaciones del próximo capítulo.

Definición 5.16 *Sean Z y X espacios métricos. El* ***espacio de funciones continuas y acotadas*** *de Z a X es el espacio métrico*

$$\mathcal{C}_b^0(Z, X) := \{f : Z \to X : f \text{ es continua y acotada}\}$$

con la métrica inducida por la de $\mathcal{B}(Z, X)$, es decir,

$$d_\infty(f, g) := \sup_{z \in Z} d_X(f(z), g(z))$$

si $f, g \in \mathcal{C}_b^0(Z, X)$.

Para sucesiones de funciones continuas y acotadas podemos reinterpretar el Teorema 5.14 como sigue.

Corolario 5.17 *Sean Z y X espacios métricos. Entonces $\mathcal{C}_b^0(Z, X)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{B}(Z, X)$.*

Demostración: Sea $f \in \overline{\mathcal{C}_b^0(Z, X)}$. Por la Proposición 3.32 existe una sucesión (f_k) en $\mathcal{C}_b^0(Z, X)$ tal que $f_k \to f$ en $\mathcal{B}(Z, X)$. El Teorema 5.14 asegura entonces que $f \in \mathcal{C}_b^0(Z, X)$. Esto prueba que $\mathcal{C}_b^0(Z, X)$ es cerrado en $\mathcal{B}(Z, X)$. ■

Concluímos esta sección con otra consecuencia importante de la convergencia uniforme.

Teorema 5.18 *Si $f_k : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una sucesión de funciones continuamente diferenciables en $[a, b]$ tales que (f_k) converge a f puntualmente en $[a, b]$ y (f_k') converge a g uniformemente en $[a, b]$, entonces f es continuamente diferenciable en $[a, b]$ y $f' = g$.*

Demostración: Sea $x_0 \in (a, b)$. Aplicando el teorema del valor medio a la función $f_j - f_k$ se tiene que, para cada $x \in (a, b)$, existe $\xi_x \in (a, b)$ tal que

$$f_j(x) - f_k(x) - (f_j(x_0) - f_k(x_0)) = \left(f_j'(\xi_x) - f_k'(\xi_x)\right)(x - x_0).$$

En consecuencia,

$$|f_j(x) - f_j(x_0) - f_k(x) + f_k(x_0)| \leq \left\|f_j' - f_k'\right\|_\infty |x - x_0| \qquad \forall x \in (a, b).$$

Como (f_k') converge en $\mathcal{C}^0[a, b]$, dada $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_j(x) - f_j(x_0) - f_k(x) + f_k(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3} |x - x_0| \qquad \forall x \in (a, b),\ \forall j, k \geq k_0.$$

Tomando el límite cuando $j \to \infty$, concluímos que

$$|f(x) - f(x_0) - f_k(x) + f_k(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}\,|x - x_0| \qquad \forall x \in (a,b),\ \forall k \geq k_0. \tag{5.2}$$

Por otra parte, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_k'(x_0) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall k \geq k_1. \tag{5.3}$$

Sea $k_* := \text{máx}\{k_0, k_1\}$, y sea $\delta > 0$ tal que

$$\left|\frac{f_{k_*}(x) - f_{k_*}(x_0)}{x - x_0} - f_{k_*}'(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{si } |x - x_0| < \delta. \tag{5.4}$$

De las desigualdades (5.2), (5.3) y (5.4) se sigue que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - g(x_0)\right| &\leq \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{f_{k_*}(x) - f_{k_*}(x_0)}{x - x_0}\right| \\
&\quad + \left|\frac{f_{k_*}(x) - f_{k_*}(x_0)}{x - x_0} - f_{k_*}'(x_0)\right| + \left|f_{k_*}'(x_0) - g(x_0)\right| \\
&< \varepsilon \qquad \text{si } |x - x_0| < \delta.
\end{aligned}$$

Es decir, f es diferenciable en x_0 y $f'(x_0) = g(x_0)$. Finalmente, como $f_k' \in \mathcal{C}^0[a,b]$, se tiene que $g \in \mathcal{C}^0[a,b]$, es decir, f es continuamente diferenciable en $[a,b]$. ■

5.3. Espacios completos de funciones

A continuación daremos un criterio que garantiza la convergencia uniforme de una sucesión de funciones en términos de la sucesión misma.

Sean S un conjunto y $X = (X, d_X)$ un espacio métrico.

Definición 5.19 *Una sucesión de funciones $f_k : S \to X$, $k \in \mathbb{N}$, es* ***uniformemente de Cauchy*** *en S si, para cada $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$d_X(f_k(z), f_j(z)) < \varepsilon \qquad \forall j, k \geq k_0,\ \ \forall z \in S.$$

El siguiente teorema nos da una condición necesaria y suficiente para la convergencia uniforme de una sucesión de funciones.

Teorema 5.20 (Criterio de convergencia uniforme de Cauchy) *Sea X un espacio métrico completo. Una sucesión de funciones $f_k : S \to X$, $k \in \mathbb{N}$, converge uniformemente en S si y sólo si (f_k) es uniformemente de Cauchy en S.*

Demostración: Si (f_k) converge uniformemente a f en S entonces, dada $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d_X(f_k(z), f(z)) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall k \geq k_0,\ \forall z \in S.$$

En consecuencia,

$$d_X(f_k(z), f_j(z)) \leq d_X(f_k(z), f(z)) + d_X(f(z), f_j(z)) < \varepsilon \quad \forall j, k \geq k_0, \forall z \in S.$$

Es decir, (f_k) es uniformemente de Cauchy.
Supongamos ahora que (f_k) es uniformemente de Cauchy en S. Entonces, para cada $z \in S$, la sucesión $(f_k(z))$ es de Cauchy en X y, como X es completo, esta sucesión converge a un punto de X al que denotaremos por $f(z)$. Probaremos ahora que $f_k \to f$ uniformemente en S. Sea $\varepsilon > 0$. Como (f_k) es uniformemente de Cauchy, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d_X(f_k(z), f_j(z)) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall j, k \geq k_0, \forall z \in S.$$

Y como para cada $z \in S$ se tiene que $f_j(z) \to f(z)$ en X, existe $k(z) \in \mathbb{N}$ (que depende de z) tal que

$$d_X(f_j(z), f(z)) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall j \geq k(z).$$

Dadas $k \geq k_0$ y $z \in S$, tomemos $j := \max\{k_0, k(z)\}$. Entonces

$$d_X(f_k(z), f(z)) \leq d_X(f_k(z), f_j(z)) + d_X(f_j(z), f(z)) < \varepsilon.$$

En consecuencia,

$$d_X(f_k(z), f(z)) < \varepsilon \quad \forall k \geq k_0, \forall z \in S,$$

es decir, (f_k) converge uniformemente a f. ■

Recuerda que, si S es un conjunto y $V = (V, \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial normado, entonces $\mathcal{B}(Z, V)$ con la norma uniforme

$$\|f\|_\infty := \sup_{z \in Z} \|f(z)\| \tag{5.5}$$

es un espacio vectorial normado (ver Ejercicio 2.50). Si Z es un espacio métrico, $\mathcal{C}_b^0(Z, V)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{B}(Z, V)$.

Una consecuencia importante del teorema anterior es la siguiente.

Corolario 5.21 *Sean S un conjunto, Z un espacio métrico y X un espacio métrico completo. Entonces los espacios métricos $\mathcal{B}(S, X)$ y $\mathcal{C}_b^0(Z, X)$ son completos.*
En particular, si V es un espacio de Banach, entonces $\mathcal{B}(S, V)$ y $\mathcal{C}_b^0(Z, V)$ son espacios de Banach.

Demostración: Sea (f_k) una sucesión de Cauchy en $\mathcal{B}(S,X)$. Claramente (f_k) es uniformemente de Cauchy en S y, por el Teorema 5.20, (f_k) converge en $\mathcal{B}(S,X)$. Esto prueba que $\mathcal{B}(S,X)$ es completo. Por el Corolario 5.17, $\mathcal{C}_b^0(Z,X)$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{B}(S,X)$. La Proposición 5.9 asegura entonces que $\mathcal{C}_b^0(Z,X)$ es completo. ∎

Esta propiedad hace que los espacios $\mathcal{B}(S,X)$ y $\mathcal{C}_b^0(Z,X)$ jueguen un papel importante en las aplicaciones, como veremos en el siguiente capítulo.

Recuerda que, si K es un espacio métrico compacto, entonces toda función continua de K en X es acotada (ver Corolario 4.11), es decir,

$$\mathcal{C}^0(K,X) := \{\phi : K \to X : \phi \text{ es continua}\} = \mathcal{C}_b^0(K,X).$$

Por tanto, $\mathcal{C}^0(K,X)$ es un espacio completo si K es compacto y X es completo.

5.4. Series en espacios de Banach

Sea $V = (V, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado y sea (v_k) una sucesión en V.

Definición 5.22 *Decimos que **la serie***

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k$$

***converge** en V si la sucesión (w_n) de sumas parciales $w_n := \sum_{k=1}^{n} v_k$ converge en V. Su límite se denota*

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} v_k.$$

Una observación sencilla es la siguiente.

Proposición 5.23 *Si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ converge en V, entonces $v_k \to 0$ en V. En particular, (v_k) está acotada.*

Demostración: La sucesión $(\sum_{k=1}^{n} v_k)$ es de Cauchy (ver Proposición 5.2). Por tanto, dada $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|v_{n+1}\| = \left\| \sum_{k=1}^{n+1} v_k - \sum_{k=1}^{n} v_k \right\| \leq \varepsilon \qquad \forall n \geq n_0.$$

Esto prueba que $v_k \to 0$ en V. Por la Proposición 3.31, (v_k) está acotada. ∎

En espacios de Banach se tiene el siguiente criterio de convergencia para series.

Proposición 5.24 (Criterio de Cauchy para series) *Sea V un espacio de Banach y sea (v_k) una sucesión en V. La serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k$$

converge en V si y sólo si, para cada $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|v_{k+1} + \cdots + v_{k+j}\| < \varepsilon \quad \forall k \geq k_0, \ \forall j \geq 1.$$

Demostración: Como V es completo, la sucesión (w_n) de sumas parciales $w_n := \sum_{k=1}^{n} v_k$ converge en V si y sólo si (w_n) es de Cauchy, es decir, si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in N$ tal que

$$\|w_{k+j} - w_k\| = \|v_{k+1} + \cdots + v_{k+j}\| < \varepsilon \quad \forall k \geq k_0, \ \forall j \geq 1,$$

como afirma el enunciado. ■

El siguiente criterio garantiza la convergencia uniforme de una serie de funciones en términos de la convergencia de una serie de números reales.

Teorema 5.25 (Criterio de Weierstrass) *Sea V un espacio de Banach y sea (v_k) una sucesión en V. Si la serie de números reales*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|v_k\|$$

converge, entonces la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k$$

converge en V y se cumple que

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} v_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|v_k\| .$$

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$. Como $\sum_{k=1}^{\infty} \|v_k\|$ converge en $\mathbb{R}$, la Proposición 5.24 asegura que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|v_{k+1}\| + \cdots + \|v_{k+j}\| < \varepsilon \quad \forall k \geq k_0, \ \forall j \geq 1.$$

Usando la desigualdad del triángulo obtenemos que

$$\|v_{k+1} + \cdots + v_{k+j}\| \leq \|v_{k+1}\| + \cdots + \|v_{k+j}\| < \varepsilon \quad \forall k \geq k_0, \ \forall j \geq 1.$$

Aplicando nuevamente la Proposición 5.24 concluímos que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k$$

converge en V. En consecuencia, usando la continuidad de la norma y la desigualdad del triángulo obtenemos

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} v_k \right\| = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} v_k \right\| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \|v_k\| = \sum_{k=1}^{\infty} \|v_k\|,$$

como afirma el enunciado. ■

Sea S un conjunto y sea $f_k : S \to V$ una sucesión de funciones.

Definición 5.26 *Decimos que* ***la serie de funciones***

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k$$

converge uniformemente en S *si la sucesión de funciones* $g_n := \sum_{k=1}^{n} f_k$ *converge uniformemente en* S *a una función* $S \to V$, *a la que se denota*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k.$$

Un ejemplo importante de series de funciones son las series de potencias.

Definición 5.27 *Sea* (a_k) *una sucesión en* $\mathbb{R}$ *y sea* $x_0 \in \mathbb{R}$. *La serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

de funciones reales de variable real x *se llama una* ***serie de potencias***. *Su* ***radio de convergencia*** *se define como*

$$R := \sup\{r \in [0, \infty) : \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k \text{ converge en } \mathbb{R}\} \in [0, \infty].$$

El siguiente resultado justifica llamar a R el radio de convergencia.

Teorema 5.28 *Sean* (a_k) *una sucesión en* $\mathbb{R}$ *y* $x_0 \in \mathbb{R}$.
(a) Las series de potencias

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k \qquad y \qquad \sum_{k=1}^{\infty} ka_k(x-x_0)^{k-1}$$

convergen uniformemente en $[x_0 - r, x_0 + r]$ *para todo* $r \in (0, R)$, *donde* R *es el radio de convergencia de* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$.
(b) La función

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$$

es continuamente diferenciable en $(x_0 - R, x_0 + R)$ *y su derivada está dada por*

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} ka_k(x-x_0)^{k-1}.$$

Demostración: *(a)* Sea $r \in (0, R)$. Definimos $f_k \in \mathcal{C}^0[x_0 - r, x_0 + r]$ como $f_k(x) := a_k(x-x_0)^k$, $k \geq 0$. Probaremos que la sucesión (f_k) satisface el criterio de Weierstrass. De la definición del radio de convergencia se sigue que existe $\hat{r} \in (r, R] \cap \mathbb{R}$ tal que $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \hat{r}^k$ converge en $\mathbb{R}$. Por tanto, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\left|a_k \hat{r}^k\right| < c$ para todo $k \in \mathbb{N}$ (Proposición 5.23) y, en consecuencia,

$$|f_k(x)| = |a_k| \, |x - x_0|^k \leq |a_k| \, \hat{r}^k \theta^k \leq c\theta^k \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \;\; \forall x \in [x_0 - r, x_0 + r],$$

donde $\theta := \frac{r}{\hat{r}}$. Se tiene entonces que

$$\|f_k\|_\infty := \max_{x \in [x_0 - r, x_0 + r]} |f_k(x)| \leq c\theta^k \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Como $\theta \in (0, 1)$, la serie de números reales $\sum_{k=0}^{\infty} \theta^k$ converge. Por consiguiente, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_\infty$ converge [Ejercicio 5.45] y el Teorema 5.25 implica que la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$$

converge uniformemente en $[x_0 - r, x_0 + r]$.
Por otra parte, si definimos $g_k \in \mathcal{C}^0[x_0 - r, x_0 + r]$, como $g_k(x) := ka_k(x-x_0)^{k-1}$, $k \geq 1$, tenemos que

$$|g_k(x)| = k \, |a_k| \, |x - x_0|^{k-1} \leq \frac{c}{\hat{r}} k\theta^{k-1} \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \;\; \forall x \in [x_0 - r, x_0 + r].$$

Por tanto,

$$\|g_k\|_\infty := \max_{x \in [x_0 - r, x_0 + r]} |g_k(x)| \leq \frac{c}{\hat{r}} k\theta^{k-1} \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dado que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} k\theta^{k-1}$converge en $\mathbb{R}$, argumentando como en el caso anterior, concluímos que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} ka_k(x-x_0)^{k-1}$$

converge uniformemente en $[x_0 - r, x_0 + r]$.
(b) Sea $r \in (0, R)$ y denotemos por

$$F_k(x) := \sum_{j=0}^{k} a_j(x-x_0)^j, \quad f(x) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x-x_0)^j, \quad g(x) := \sum_{j=1}^{\infty} ja_j(x-x_0)^{j-1}.$$

F_k es continuamente diferenciable, y acabamos de probar que (F_k) converge a f y (F_k') converge a g uniformemente en $[x_0 - r, x_0 + r]$. El Teorema 5.18 asegura entonces que f es continuamente diferenciable en $[x_0 - r, x_0 + r]$ y que $f' = g$. ■

Una función $f : (x_0 - R, x_0 + R) \to \mathbb{R}$ que se puede expresar como una serie de potencias

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$$

se llama una **función analítica**. Una función analítica tiene derivadas de todos los órdenes [Ejercicio 5.50]. El recíproco no es cierto [Ejercicio 5.51].

5.5. Ejercicios

Ejercicio 5.29 *Sea X_{disc} un espacio métrico discreto.*
(a) Describe a las sucesiones de Cauchy en X_{disc}.
(b) ¿Es X_{disc} un espacio métrico completo?

Ejercicio 5.30 *Sea (x_k) una sucesión de Cauchy en un espacio métrico X.*
(i) Prueba que (x_k) está acotada en X.
(ii) Prueba que, si alguna subsucesión de (x_k) converge a x en X, entonces (x_k) converge a x en X.

Ejercicio 5.31 *Sea $X = (0,1)$ con la métrica inducida por la de $\mathbb{R}$. Prueba que la sucesión $(\frac{1}{k})$ es de Cauchy en X pero no converge en X.*

Ejercicio 5.32 *Considera la sucesión de funciones $f_k : [-1,1] \to \mathbb{R}$,*

$$f_k(x) = \begin{cases} -1 & si \ -1 \leq x \leq -\frac{1}{k}, \\ kx & si \ -\frac{1}{k} \leq x \leq \frac{1}{k}, \\ 1 & si \ \frac{1}{k} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

(a) Prueba que (f_k) *es de Cauchy en* $\mathcal{C}_p^0[-1,1]$ *para toda* $p \in [1,\infty)$.
(b) Prueba que (f_k) *no converge en* $\mathcal{C}_p^0[-1,1]$ *para ninguna* $p \in [1,\infty]$. (Sugerencia: Usa el Ejercicio 3.46 y el Ejemplo 5.4).
(c) ¿Es (f_k) *de Cauchy en* $\mathcal{C}_\infty^0[-1,1]$?

Ejercicio 5.33 *Prueba que* ℓ_p *es un espacio de Banach para todo* $p \in [1,\infty]$.

Ejercicio 5.34 *Considera los siguientes subespacios de* ℓ_∞ *con la norma inducida. ¿Cuáles de ellos son de Banach?*
(i) $\mathfrak{d} := \{(x_n) \in \ell_\infty : x_n \neq 0$ *sólo para un número finito de n's*$\}$.
(ii) $\mathfrak{c}_0 := \{(x_n) \in \ell_\infty : x_n \to 0\}$.
(iii) $\mathfrak{c} := \{(x_n) \in \ell_\infty : (x_n)$ *converge en* $\mathbb{R}\}$.

Ejercicio 5.35 *Sean* X *un espacio métrico completo y* $x, y \in X$. *Prueba que el espacio de trayectorias*

$$\mathcal{T}_{x,y}(X) := \{\sigma \in \mathcal{C}^0([0,1],X) : \sigma(0) = x,\ \sigma(1) = y\}$$

con la métrica uniforme es completo.

Ejercicio 5.36 *Prueba que todo espacio métrico compacto es completo.*

Ejercicio 5.37 *Sean* X *y* Y *espacios métricos completos. Prueba que* $X \times Y$ *con cualquiera de las métricas del* Ejercicio 2.51 *es completo.*

Ejercicio 5.38 *Sea* V *un espacio normado. Prueba que todo subespacio vectorial de dimensión finita de* V *es cerrado en* V.

Ejercicio 5.39 *Sean* $V = (V, \|\cdot\|)$ *un espacio normado y* $S_V := \{v \in V : \|v\| = 1\}$ *la esfera unitaria en* V. *Demuestra las siguientes afirmaciones.*
(a) Si W *es un subespacio vectorial de* V, W *es cerrado en* V *y* $W \neq V$ *entonces, para cada* $\delta \in (0,1)$, *existe* $v_\delta \in S_V$ *tal que*

$$\|v_\delta - w\| \geq \delta \qquad \forall w \in W.$$

(b) ***Teorema (Riesz)*** *La esfera unitaria* $S_V := \{v \in V : \|v\| = 1\}$ *es compacta si y sólo si* $\dim V < \infty$. (Sugerencia: Si $\dim V = \infty$, usa el Ejercicio 5.38 y el inciso *(a)* para construir una sucesión en S_V que no contiene ninguna subsucesión convergente.)
(c) La bola cerrada $\bar{B}_V(0,1) := \{v \in V : \|v\| \leq 1\}$ *es compacta si y sólo si* $\dim V < \infty$.

Ejercicio 5.40 *Sea* $\phi : X \to Y$ *una función uniformemente continua.*
(a) Prueba que, si (x_k) *es de Cauchy en* X, *entonces* $(\phi(x_k))$ *es de Cauchy en* Y.
(b) Prueba que, si existe una función continua $\psi : Y \to X$ *tal que* $\psi \circ \phi = id$ *y* Y *es completo, entonces* X *es completo.*

Ejercicio 5.41 *(a) Prueba que la sucesión de funciones $f_k(x) = x^k$ no converge uniformemente en $[0, 1]$.*
(b) Prueba que la sucesión de funciones $f_k(x) = x^k$ converge uniformemente en cualquier subintervalo cerrado $[a, b] \subset [0, 1)$.

Ejercicio 5.42 *¿Cuáles de las siguientes sucesiones de funciones $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convergen puntualmente en $\mathbb{R}$? Encuentra todos los intervalos donde la convergencia es uniforme.*

$$(a)\quad f_k(x) = \frac{kx}{kx^2+1}; \qquad (b)\quad f_k(x) = \frac{kx}{k^2x^2+1}; \qquad (c)\quad f_k(x) = \frac{k^2x}{kx^2+1}.$$

Ejercicio 5.43 *¿Cuáles de las siguientes sucesiones de funciones $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convergen uniformemente en $\mathbb{R}$? Encuentra el límite de tales sucesiones.*

$$\begin{array}{llcl}
(a) & f_k(x) & = & \begin{cases} |x-k|-1 & si \;\; x \in [k-1, k+1], \\ 0 & si \;\; x \notin [k-1, k+1]. \end{cases} \\
(b) & f_k(x) & = & \dfrac{1}{(x/k)^2+1}. \\
(c) & f_k(x) & = & \operatorname{sen}(x/k). \\
(d) & f_k(x) & = & \begin{cases} \frac{1}{k}\operatorname{sen}x & si \;\; x \in [2\pi k, 2\pi(k+1)], \\ 0 & si \;\; x \notin [2\pi k, 2\pi(k+1)]. \end{cases}
\end{array}$$

Ejercicio 5.44 *Sea $f_k : [a, b] \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones continuamente diferenciables en $[a, b]$ que converge puntualmente a una función f en $[a, b]$. Investiga si son falsas o verdaderas las siguientes afirmaciones..*
(a) f es continua en $[a, b]$.
(b) (f_k) converge uniformemente a f en $[a, b]$.
(c) La sucesión (f_k') converge puntualmente en $[a, b]$.
(d) Si f es continuamente diferenciable, entonces (f_k') converge puntualmente en $[a, b]$.
(e) Si f es continuamente diferenciable y si $(f_k'(x))$ converge para cada $x \in [a, b]$, entonces (f_k') converge puntualmente a f' en $[a, b]$.

Ejercicio 5.45 *(a) Prueba que, si $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $0 \le a_n \le b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge en $\mathbb{R}$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge en $\mathbb{R}$.*

Ejercicio 5.46 *Considera la sucesión de funciones $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,*

$$f_k(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^k}.$$

(a) Prueba que, para cada $x \in \mathbb{R}$, la serie de números reales $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge.
(b) ¿Converge la serie de funciones $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ uniformemente en $\mathbb{R}$?

Ejercicio 5.47 *Considera las funciones* $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dadas por*

$$f_k(x) = \frac{\operatorname{sen} kx}{\sqrt{k}}.$$

(a) Prueba que (f_k) *converge uniformemente a* 0 *en* $\mathbb{R}$.
(b) Prueba que (f_k') *no converge puntualmente en* $\mathbb{R}$, *donde* f_k' *es la derivada de* f_k.

Ejercicio 5.48 *Prueba que, para cada* $r \geq 1$, *el espacio* $\mathcal{C}^r_\infty[a,b]$ *definido en el* Ejercicio 2.49 *es un espacio de Banach.* (Sugerencia: Usa el Teorema 5.18.)

Ejercicio 5.49 *(a) Dada una sucesión* (c_k) *en* $\mathbb{R}$ *definimos*

$$c := \limsup_{k \to \infty} |c_k|^{1/k}.$$

Demuestra el ***criterio de la raíz*** *para la convergencia de series de números reales:*

$$\begin{array}{lll} \sum_{k=0}^\infty c_k & \textit{converge} & \textit{si } c < 1, \\ \sum_{k=0}^\infty c_k & \textit{no converge} & \textit{si } c > 1. \end{array}$$

(b) Prueba que el radio de convergencia R *de una serie de potencias* $\sum_{k=0}^\infty a_k(x - x_0)^k$ *está dado por*

$$R^{-1} = \limsup_{k \to \infty} |a_k|^{1/k}.$$

(c) Calcula el radio de convergencia de las siguientes series de potencias y averigua si convergen o no en los puntos $|x| = R$.

$$\sum_{k=0}^\infty k^k x^k, \qquad \sum_{k=0}^\infty x^k, \qquad \sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{k}, \qquad \sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{k^2}.$$

Ejercicio 5.50 *Sea* $\sum_{k=0}^\infty a_k(x - x_0)^k$, $a_k \in \mathbb{R}$, *una serie de potencias con radio de convergencia* $R > 0$. *Prueba que la función* $f : (x_0 - R, x_0 + R) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) := \sum_{k=0}^\infty a_k(x - x_0)^k$$

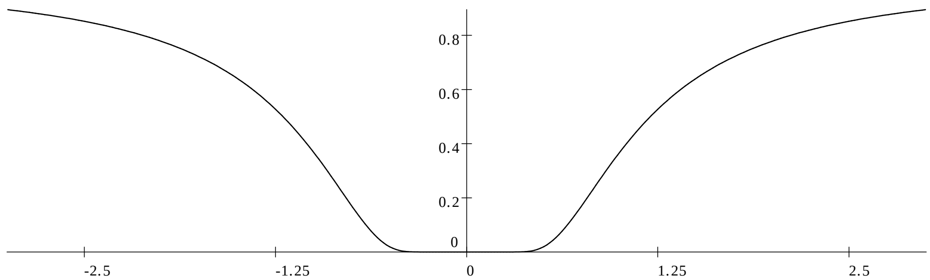
tiene derivadas de todos los órdenes y que la n*-ésima derivada* $f^{(n)}$ *de* f *está dada por*

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^\infty k(k-1)\cdots(k-n+1)a_k(x - x_0)^{k-n}, \qquad x \in (x_0 - R, x_0 + R).$$

En particular se cumple que $f^{(n)}(x_0) = n!a_n$.

Ejercicio 5.51 *Considera la función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & si\ x \neq 0, \\ 0 & si\ x = 0. \end{cases}$$



$$y = e^{-1/x^2}$$

(a) Prueba que f *tiene derivadas de todos los órdenes en* $x = 0$ *y que* $f^{(n)}(0) = 0$.
(b) ¿Se puede escribir f *como una serie*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \qquad a_k \in \mathbb{R},$$

convergente en algún intervalo $(-R, R)$, $R > 0$?

Ejercicio 5.52 *Sean* $a_{kj} \in \mathbb{R}$ *tales que las series de números reales*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{kj}| = b_k$$

convergen para cada $k \in \mathbb{N}$ *y la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *también converge. Prueba que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{kj}.$$

(Sugerencia: Considera el subespacio métrico $X := \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ de $\mathbb{R}$ y aplica el criterio de Weierstrass a la sucesión de funciones $f_k : X \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f_k\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}, \qquad f_k(0) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}.$$

Comprueba que esta sucesión satisface todas las hipótesis del Teorema 5.25.)

Ejercicio 5.53 *Calcula el radio de convergencia R de la serie de potencias*

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

y demuestra que $f' = f$ en $(-R, R)$. ¿Quién es la función f?

Ejercicio 5.54 *Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de todas las funciones polinomiales $p : [0,1] \to \mathbb{R}$, $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, con $a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}$.*
(a) Prueba que $\mathcal{P}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{C}^0[0,1]$.
(b) ¿Es $\mathcal{P}$ con la norma uniforme

$$\|p\|_\infty = \max_{0 \leq x \leq 1} |p(x)|$$

un espacio de Banach? (Sugerencia: Considera la sucesión de polinomios $p_k(x) = \frac{1}{k!}x^k + \cdots + x + 1$ y utiliza la Proposición 5.9).

Ejercicio 5.55 *Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por*

$$\varphi(x) := \begin{cases} x & si \;\; x \in [0,1], \\ 2 - x & si \;\; x \in [1,2], \end{cases}$$

y $\varphi(x+2) = \varphi(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
(a) Prueba que la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k \varphi(4^k x)$$

converge uniformemente en $\mathbb{R}$. En consecuencia, la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k \varphi(4^k x)$$

es continua.
(b) Prueba que f no es diferenciable en ningún punto $x \in \mathbb{R}$. (Sugerencia: Para cada $j \in \mathbb{N}$ toma $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \leq 4^j x < m+1$, y define $y_j := 4^{-j}m$, $z_j := 4^{-j}(m+1)$. Prueba que

$$\left| \frac{f(z_j) - f(y_j)}{z_j - y_j} \right| \to \infty \qquad \text{cuando} \;\; j \to \infty.$$

Usa este hecho para concluir que f no es diferenciable en x.)

5.6. Proyecto de trabajo

Sean $X = (X, d)$ y $X^* = (X^*, d^*)$ espacios métricos.

Definición 5.56 *X^* es una* ***completación de*** *X si X^* es completo y existe una isometría $\iota : X \to X^*$ tal que $\overline{\iota(X)} = X^*$, donde $\overline{\iota(X)}$ denota a la cerradura de $\iota(X)$ en X^*.*

Por ejemplo, el espacio $\mathbb{R}$ de los números reales es una completación del espacio $\mathbb{Q}$ de números racionales.

5.6.1. Objetivo

El objetivo de este proyecto es demostrar que todo espacio métrico admite una completación y que ésta es única salvo isometría.

5.6.2. Esquema de la demostración

UNICIDAD. Demuestra la siguiente afirmación.

Proposición 5.57 *Si $X^* = (X^*, d^*)$ y $X^\# = (X^\#, d^\#)$ son completaciones de X, entonces existe una isometría biyectiva $\beta : X^* \to X^\#$.*

EXISTENCIA. Para construir una completación de X considera la siguiente relación.

Definición 5.58 *Sean (x_k) y (y_k) dos sucesiones de Cauchy en X. Decimos que (x_k) y (y_k) son equivalentes, y lo denotamos $(x_k) \sim (y_k)$, si*

$$\lim_{k\to\infty} d(x_k, y_k) = 0.$$

Demuestra ahora el siguiente lema.

Lema 5.59 *La relación $(x_k) \sim (y_k)$ es una relación de equivalencia en el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy de X.*

Denota por $[x_k]$ a la clase de equivalencia de la sucesión de Cauchy (x_k) y define

$$X^* := \{[x_k] : (x_k) \text{ es de Cauchy en } X\}$$

$$d^*([x_k], [y_k]) := \lim_{k\to\infty} d(x_k, y_k).$$

Demuestra el siguiente lema.

Lema 5.60 *(i) d^* está bien definida, es decir, existe* $\lim_{k\to\infty} d(x_k, y_k)$ *y no depende de los representantes (x_k) y (y_k) elegidos.*
(ii) d^* es una métrica en X^*.

Dado $x \in X$ denota por $[x]$ a la clase de equivalencia de la sucesión cuyos términos son todos iguales a x. Demuestra el siguiente teorema.

Teorema 5.61 *X^* es una completación de X. Más precisamente, $X^* = (X^*, d^*)$ es un espacio métrico completo y la función $\iota : X \to X^*$ dada por $\iota(x) := [x]$ es una isometría tal que $\overline{\iota(X)} = X^*$.*

Capítulo 6

El teorema de punto fijo de Banach y aplicaciones

El teorema de punto fijo de Banach, también llamado el *principio de contracción*, garantiza la existencia y unicidad de puntos fijos de cierto tipo de funciones de un espacio métrico completo en sí mismo. A diferencia de otros teoremas de punto fijo, éste da un método constructivo para obtenerlo mediante un proceso de iteración.

El teorema de punto fijo de Banach tiene muchísimas aplicaciones a resultados de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones numéricas, ecuaciones diferenciales y ecuaciones integrales. Daremos aquí algunos ejemplos.

Una aplicación muy importante es el teorema de Picard-Lindelöf que asegura la existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias con una condición inicial. Este resultado fue publicado por primera vez en 1890 por Lindelöf[1]. Simultáneamente, Picard[2] desarrolló un método de aproximación sucesiva de soluciones. El método de iteración de Picard es justamente el método iterativo del teorema de punto fijo de Banach.

6.1. El teorema de punto fijo de Banach

Sea $X = (X, d)$ un espacio métrico.

Definición 6.1 *Una función $\phi : X \to X$ se llama una* ***contracción*** *si existe $\alpha \in (0, 1)$*

[1] Ernst Leonard Lindelöf (1870-1946) fue un matemático finlandés que realizó aportaciones importantes en Análisis y Ecuaciones Diferenciales.

[2] Charles Émile Picard (1856-1941) fue un destacado matemático francés que realizó aportaciones muy importantes en múltiples ramas de las matemáticas, particularmente en Variable Compleja y Ecuaciones Diferenciales.

tal que

$$d(\phi(x), \phi(y)) \leq \alpha d(x,y) \qquad \forall x,y \in X. \tag{6.1}$$

Es decir, una contracción es una función de un espacio métrico en sí mismo que es Lipschitz continua con constante de Lipschitz estrictamente menor que 1. Es importante observar que el que $\phi : X \to X$ sea o no contracción depende de la métrica que le demos a X [Ejercicio 6.20].

Definición 6.2 *Un punto $x^* \in X$ se llama un **punto fijo** de la función $\phi : X \to X$ si $\phi(x^*) = x^*$.*

Denotamos por ϕ^k a la composición

$$\phi^k := \underbrace{\phi \circ \cdots \circ \phi}_{k \text{ veces}} \quad \text{si } k \in \mathbb{N}, \qquad\qquad \phi^0 := id_X,$$

donde $id_X : X \to X$ es la función identidad. El siguiente resultado, debido a Stefan Banach[3], tiene aplicaciones muy importantes.

Stefan Banach

Teorema 6.3 (Banach) *Sea X un espacio métrico completo, no vacío, y sea $\phi : X \to X$ una contracción. Entonces se cumple lo siguiente:*
(i) ϕ tiene un único punto fijo x^*.
(ii) Para cualquier $x_0 \in X$ la sucesión $(\phi^k(x_0))$ converge a x^* en X, y se cumple que

$$d(\phi^k(x_0), x^*) \leq \frac{\alpha^k}{1-\alpha} d(\phi(x_0), x_0), \tag{6.2}$$

donde $\alpha \in (0,1)$ satisface (6.1)*.*

[3]Stefan Banach (1892-1945) nació en Cracovia, Polonia. Fue básicamente autodidacta y su genio fue descubierto accidentalmente por el matemático Hugo Steinhaus. Se le considera fundador del Análisis Funcional moderno. Muchos conceptos y resultados notables llevan su nombre.

Demostración: Sea x_0 un punto cualquiera de X y denotemos por

$$x_k := \phi^k(x_0).$$

Demostraremos primero que la sucesión (x_k) es de Cauchy en X. Nota que, si ϕ satisface (6.1), entonces

$$d(x_{k+1}, x_k) = d(\phi^k(x_1), \phi^k(x_0)) \leq \alpha^k d(x_1, x_0) \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Además, para cualesquiera $y, z \in X$, se cumple que

$$\begin{array}{rcl} d(y,z) & \leq & d(y,\phi(y)) + d(\phi(y),\phi(z)) + d(\phi(z),z) \\ & \leq & d(y,\phi(y)) + \alpha d(y,z) + d(\phi(z),z), \end{array}$$

es decir,

$$(1-\alpha)d(y,z) \leq d(y,\phi(y)) + d(\phi(z),z).$$

Tomando $y := x_k$ y $z := x_j$ obtenemos

$$d(x_k, x_j) \leq \frac{d(x_{k+1},x_k) + d(x_{j+1},x_j)}{1-\alpha} \leq \frac{\alpha^k + \alpha^j}{1-\alpha} d(x_1,x_0). \tag{6.3}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\alpha \in (0,1)$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\alpha^k}{1-\alpha} d(x_1,x_0) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall k \geq k_0. \tag{6.4}$$

En consecuencia,

$$d(x_k, x_j) < \varepsilon \qquad \forall j,k \geq k_0.$$

Esto demuestra que la sucesión (x_k) es de Cauchy en X.
Como X es completo, existe $x^* \in X$ tal que $x_k \to x^*$ en X y, como ϕ es continua, se tiene entonces que $x_{k+1} = \phi(x_k) \to \phi(x^*)$ en X. Como el límite de una sucesión es único, concluímos que $\phi(x^*) = x^*$, es decir, x^* es un punto fijo de ϕ.
Veamos ahora que es único. Si x_1^* y x_2^* son puntos fijos de ϕ entonces

$$d(x_1^*, x_2^*) = d(\phi(x_1^*), \phi(x_2^*)) \leq \alpha d(x_1^*, x_2^*).$$

Como $\alpha < 1$, esta desigualdad implica que $d(x_1^*, x_2^*) = 0$, es decir, $x_1^* = x_2^*$.
Por último, haciendo tender $j \to \infty$ en la desigualdad (6.3) obtenemos que

$$d(x_k, x^*) = \lim_{j\to\infty} d(x_k, x_j) \leq \frac{\alpha^k}{1-\alpha} d(x_1, x_0) \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Esto concluye la demostración. ■

El teorema anterior no sólo afirma la existencia de un único punto fijo para una contracción $\phi : X \to X$. También nos dice cómo encontrarlo, o cómo encontrar una buena aproximación de él: Basta tomar un punto arbitrario $x_0 \in X$ y considerar la sucesión de iteradas $(\phi^k(x_0))$. Esta converge al punto fijo. La desigualdad (6.2) nos da una estimación del error en cada paso de la iteración. A este método se le conoce como el **método de aproximaciones sucesivas.** Veremos algunas aplicaciones en las siguientes secciones.

Los siguientes ejemplos muestran que las condiciones del teorema de punto fijo de Banach son necesarias.

Ejemplo 6.4 *La función* $\phi : (0,1) \to (0,1)$ *dada por* $\phi(t) = \frac{1}{2}t$ *es una contracción y no tiene ningún punto fijo en* $(0,1)$. *Por tanto, para la validez del* Teorema 6.3 *es necesario que* X *sea completo.*

Ejemplo 6.5 *La función* $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $\phi(t) = t + 1$ *satisface*

$$|\phi(t) - \phi(s)| = |t - s| \qquad \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

Sin embargo, no tiene ningún punto fijo. Por tanto, para la validez del Teorema 6.3 *es necesario que el número* α *de la condición* (6.1) *sea estrictamente menor que* 1.

Esta condición también es necesaria para la unicidad del punto fijo [Ejercicio 6.22].

La siguiente generalización del teorema de punto fijo de Banach es muy útil en las aplicaciones.

Corolario 6.6 *Sea* X *un espacio métrico completo y* $\phi : X \to X$ *una función. Si existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $\phi^k : X \to X$ *es una contracción, entonces* ϕ *tiene un único punto fijo.*

Demostración: El Teorema 6.3 asegura que ϕ^k tiene un único punto fijo $x^* \in X$. Aplicando ϕ a la igualdad $\phi^k(x^*) = x^*$ obtenemos que

$$\phi^k(\phi(x^*)) = \phi\left(\phi^k(x^*)\right) = \phi\left(x^*\right),$$

es decir, $\phi(x^*)$ es también un punto fijo de ϕ^k. Como el punto fijo es único, obtenemos que $\phi(x^*) = x^*$. En consecuencia, x^* es también un punto fijo de ϕ. Y es el único, ya que todo punto fijo de ϕ es también un punto fijo de ϕ^k. ■

6.2. Sistemas de ecuaciones lineales

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales

$$Ax - x = b \tag{6.5}$$

donde $A = (a_{ij})$ es una matriz real de $n \times n$ y $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Observemos que $x \in \mathbb{R}^n$ es una solución de este sistema si y sólo si x es un punto fijo de la función $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $\phi(x) := Ax - b$. De modo que, si ϕ es una contracción, podemos aplicar el método de aproximaciones sucesivas para encontrar una solución. El que ϕ sea una contracción depende de la métrica que le demos a $\mathbb{R}^n$. Por ejemplo, si le damos a la métrica $\|\cdot\|_1$ del Ejemplo 2.5 obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 6.7 *Si existe* $\alpha \in (0, 1)$ *tal que*

$$\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \leq \alpha \qquad \forall j = 1, ..., n, \tag{6.6}$$

entonces el sistema (6.5) *tiene solución única para cada* $b \in \mathbb{R}^n$. *La solución* x^* *satisface*

$$\left\| x^* + \sum_{m=0}^{k-1} A^m b \right\|_1 \leq \frac{\alpha^k}{1-\alpha} \|b\|_1 .$$

Demostración: Para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \, |x_j| \leq \alpha \sum_{j=1}^{n} |x_j| = \alpha \|x\|_1 .$$

En consecuencia, la función $\phi : \mathbb{R}^n_1 \to \mathbb{R}^n_1$ dada por $\phi(x) = Ax - b$ satisface

$$\|\phi(x) - \phi(y)\|_1 = \|Ax - Ay\|_1 = \|A(x-y)\|_1 \leq \alpha \|x - y\|_1 \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

es decir, ϕ es una contracción. Por el Teorema 6.3, existe un único $x^* \in \mathbb{R}^n$ tal que $\phi(x^*) = Ax^* - b = x^*$. Más aún, como

$$\phi^k(0) = -\sum_{m=0}^{k-1} A^m b,$$

se tiene que

$$\left\| x^* + \sum_{m=0}^{k-1} A^m b \right\|_1 \leq \frac{\alpha^k}{1-\alpha} \|b\|_1 .$$

Esto concluye la demostración. ■

Si consideramos otras métricas en $\mathbb{R}^n$ obtendremos condiciones, distintas de (6.6), que también garantizan la existencia y unicidad de soluciones del sistema (6.5) para cada b [Ejercicio 6.28].

Sabemos que el sistema (6.5) tiene solución única si y sólo si $\det(A - I) \neq 0$, donde I es la matriz identidad. En consecuencia, la condición (6.5) y las del Ejercicio 6.28 garantizan que $\det(A - I) \neq 0$. En este caso, la matriz $A - I$ es invertible y la solución del sistema está dada por $x := (A - I)^{-1}b$. Sin embargo, en problemas que involucran un número grande de variables, encontrar la inversa de una matriz tiene un costo prohibitivo, incluso con la potencia de las mejores computadoras disponibles. Por ello se utilizan métodos iterativos, como el de Jacobi o el de Gauss-Seidel, para encontrar la solución mediante aproximaciones sucesivas a partir de una estimación inicial. Para ecuaciones no lineales los métodos iterativos son, en general, la única opción.

6.3. Ecuaciones integrales

Aplicaremos el teorema de punto fijo de Banach para probar la existencia y unicidad de soluciones de dos tipos de ecuaciones integrales importantes: la ecuación integral de Fredholm y la ecuación integral de Volterra.

6.3.1. La ecuación integral de Fredholm del segundo tipo

Sean $\mathcal{K} : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ y $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas, y sea λ un número real. Una ecuación integral de la forma

$$\lambda f(x) - \int_a^b \mathcal{K}(x, y) f(y) dy = g(x), \quad x \in [a, b], \tag{6.7}$$

se llama una **ecuación integral de Fredholm**[4]. Se dice que es **del primer tipo** si $\lambda = 0$ y **del segundo tipo** si $\lambda \neq 0$. Una función continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ que satisface (6.7) para todo $x \in [a, b]$ se llama una solución de (6.7). Nos preguntamos, ¿para qué valores λ tiene la ecuación (6.7) una única solución?

Queremos expresar este problema como un problema de punto fijo. Es decir, queremos encontrar una función $\phi_\lambda : \mathcal{C}^0[a, b] \to \mathcal{C}^0[a, b]$ cuyos puntos fijos sean las soluciones de la ecuación (6.7). Para ello, procederemos del siguiente modo. A cada $f \in \mathcal{C}^0[a, b]$ le

[4]Erik Ivar Fredholm (1866-1927) fue un matemático sueco. En 1903 introdujo la teoría moderna de ecuaciones integrales, a la que se conoce como Teoría de Fredholm.

asociamos la función $\mathfrak{F}f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$(\mathfrak{F}f)(x) := \int_a^b \mathcal{K}(x,y)f(y)dy.$$

En términos de esta función la ecuación (6.7) se escribe como

$$\lambda f(x) - (\mathfrak{F}f)(x) = g(x) \qquad \forall x \in [a,b],$$

es decir, f es solución de (6.7) si y sólo si satisface la ecuación funcional

$$\lambda f - \mathfrak{F}f = g.$$

Si $\lambda \neq 0$ esta ecuación es equivalente a

$$f = \frac{1}{\lambda}(\mathfrak{F}f + g).$$

Probaremos que $\mathfrak{F}f \in \mathcal{C}^0[a,b]$ (ver Lema 6.8). Esto nos permite definir una función de $\mathcal{C}^0[a,b]$ en sí mismo como sigue:

$$\phi_\lambda : \mathcal{C}^0[a,b] \to \mathcal{C}^0[a,b], \qquad \phi_\lambda(f) := \frac{1}{\lambda}(\mathfrak{F}f + g).$$

Las soluciones de (6.7) son justamente los puntos fijos de ϕ_λ.

Para poder aplicar el Teorema de Punto Fijo de Banach requerimos que $\mathcal{C}^0[a,b]$ sea completo. De acuerdo con el Corolario 5.21 este espacio, dotado de la norma uniforme

$$\|f\|_\infty := \max_{x\in[a,b]} |f(x)|,$$

es un espacio de Banach. Probaremos que para ciertos valores de λ la función $\phi_\lambda : \mathcal{C}^0[a,b] \to \mathcal{C}^0[a,b]$ es una contracción. El Teorema 6.3 asegura entonces que ϕ_λ tiene un único punto fijo, es decir, que la ecuación (6.7) tiene una única solución (ver Teorema 6.9). A continuación damos los detalles.

Lema 6.8 *Para cada $f \in \mathcal{C}^0[a,b]$, la función $\mathfrak{F}f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por*

$$(\mathfrak{F}f)(x) := \int_a^b \mathcal{K}(x,y)f(y)dy$$

es continua.

Demostración: Sea $f \in \mathcal{C}^0[a,b]$. Si $f = 0$ entonces $\mathfrak{F}f = 0$. Supongamos que $f \neq 0$. Como $[a,b] \times [a,b]$ es compacto, el Teorema 4.31 asegura que $\mathcal{K}$ es uniformemente continua. En consecuencia, dada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|\mathcal{K}(x_1, y_1) - \mathcal{K}(x_2, y_2)| < \frac{\varepsilon}{(b-a)\,\|f\|_\infty} \qquad \text{si } |x_1 - x_2| < \delta \text{ y } |y_1 - y_2| < \delta.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} |(\mathfrak{F}f)(x_1) - (\mathfrak{F}f)(x_2)| &\leq \int_a^b |\mathcal{K}(x_1, y) - \mathcal{K}(x_2, y)|\,|f(y)|\,dy \\ &\leq (b-a)\frac{\varepsilon}{(b-a)\,\|f\|_\infty}\,\|f\|_\infty = \varepsilon \qquad \text{si } |x_1 - x_2| < \delta. \end{aligned}$$

Esto prueba que $\mathfrak{F}f$ es continua. ■

Teorema 6.9 *Si* $|\lambda| > \|\mathcal{K}\|_\infty (b-a)$ *entonces, para cada* $g \in \mathcal{C}^0[a,b]$, *la ecuación integral de Fredholm* (6.7) *tiene una única solución.*

Demostración: Dados $\lambda \neq 0$ y $g \in \mathcal{C}^0[a,b]$, definimos $\phi_\lambda : \mathcal{C}^0[a,b] \to \mathcal{C}^0[a,b]$ como

$$\phi_\lambda(f) := \frac{1}{\lambda}(\mathfrak{F}f + g).$$

El lema anterior asegura que ϕ_λ es, efectivamente, una función de $\mathcal{C}^0[a,b]$ en sí mismo. Veamos que, si $|\lambda| > \|\mathcal{K}\|_\infty (b-a)$, entonces ϕ_λ es una contracción. Sean $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^0[a,b]$. Entonces, para toda $x \in [a,b]$, se tiene que

$$\begin{aligned} |\phi_\lambda(f_1)(x) - \phi_\lambda(f_2)(x)| &= \frac{1}{|\lambda|}\,|\mathfrak{F}f_1(x) - \mathfrak{F}f_2(x)| \\ &\leq \frac{1}{|\lambda|}\int_a^b |\mathcal{K}(x,y)|\,|f_1(y) - f_2(y)|\,dy \\ &\leq \frac{1}{|\lambda|}(b-a)\,\|\mathcal{K}\|_\infty\,\|f_1 - f_2\|_\infty. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\|\phi_\lambda(f_1) - \phi_\lambda(f_2)\|_\infty \leq \frac{1}{|\lambda|}(b-a)\,\|\mathcal{K}\|_\infty\,\|f_1 - f_2\|_\infty \qquad \forall f_1, f_2 \in \mathcal{C}^0[a,b].$$

Por hipótesis, $\frac{1}{|\lambda|}(b-a)\,\|\mathcal{K}\|_\infty < 1$. En consecuencia, ϕ_λ es una contracción.
Dado que $\mathcal{C}^0[a,b]$ es completo (ver Corolario 5.21), el Teorema 6.3 asegura que existe una única $f^* \in \mathcal{C}^0[a,b]$ tal que

$$f^* = \phi_\lambda(f^*) = \frac{1}{\lambda}(\mathfrak{F}f^* + g).$$

Es decir, existe una única $f^* \in \mathcal{C}^0[a,b]$ que satisface la ecuación integral de Fredholm

$$\lambda f^* = \mathfrak{F}f^* + g,$$

como afirma el enunciado. ■

Es sencillo comprobar que la función $\mathfrak{F} : \mathcal{C}^0[a,b] \to \mathcal{C}^0[a,b]$, que a cada f le asocia $\mathfrak{F}f$, es lineal y continua [Ejercicio 6.30]. Si $g = 0$, la ecuación integral de Fredholm se convierte en la **ecuación de valores propios**[5]

$$\mathfrak{F}f = \lambda f$$

para el **operador de Fredholm** $\mathfrak{F}$. Nota que la función $f = 0$ satisface esta ecuación. El teorema anterior asegura que ésta es la única solución si $|\lambda| > \|\mathcal{K}\|_\infty (b-a)$. En consecuencia, los valores propios de $\mathfrak{F}$ están contenidos en el intervalo cerrado $[-\|\mathcal{K}\|_\infty (b-a), \|\mathcal{K}\|_\infty (b-a)]$.

6.3.2. La ecuación integral de Volterra del segundo tipo

Consideremos ahora la ecuación

$$\lambda f(x) - \int_a^x \mathcal{K}(x,y)f(y)dy = g(x) \quad \forall x \in [a,b], \tag{6.8}$$

donde $\mathcal{K} : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ y $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ son funciones continuas dadas y λ es un número real. Nota que ahora la variable x aparece también en el extremo superior de la integral. Una ecuación de este tipo se llama una **ecuación integral de Volterra**[6]. Se dice que es **del primer tipo** si $\lambda = 0$ y **del segundo tipo** si $\lambda \neq 0$.

Queremos expresar a las soluciones de (6.8) como los puntos fijos de una función $\phi_\lambda : \mathcal{C}^0[a,b] \to \mathcal{C}^0[a,b]$. Para ello, a cada función $f \in \mathcal{C}^0[a,b]$ le asociamos la función $\mathfrak{V}f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$(\mathfrak{V}f)(x) := \int_a^x \mathcal{K}(x,y)f(y)dy.$$

En términos de esta función, la ecuación (6.8) se escribe como

$$\lambda f - \mathfrak{V}f = g.$$

[5] Recuerda que $v \in V$ es un *valor propio* (llamado también *autovalor* o *eigenvalor*) de la función lineal $L : V \to V$ si $v \neq 0$ y $Lv = \lambda v$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$.

[6] Las ecuaciones integrales de Volterra fueron estudiadas por el matemático rumano Traian Lalescu en 1908 en su tesis escrita bajo la dirección de Émile Picard. En 1911, Lalescu escribió el primer libro sobre ecuaciones integrales.

Probaremos que $\mathfrak{V}f \in \mathcal{C}^0[a,b]$ (ver Lema 6.10). Si $\lambda \neq 0$, podemos entonces definir una función de $\mathcal{C}^0[a,b]$ en sí mismo como sigue:

$$\phi_\lambda : \mathcal{C}^0[a,b] \to \mathcal{C}^0[a,b], \qquad \phi_\lambda(f) := \frac{1}{\lambda}(\mathfrak{V}f + g).$$

Sus puntos fijos son las soluciones de la ecuación (6.8). Probaremos que para cada $\lambda \neq 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que la función ϕ_λ^k es una contracción (ver Lema 6.11). El Corolario 6.6 asegura entonces que ϕ_λ tiene un único punto fijo, es decir, que la ecuación (6.8) tiene una única solución.

Lema 6.10 *Para cada $f \in \mathcal{C}^0[a,b]$, la función $\mathfrak{V}f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por*

$$(\mathfrak{V}f)(x) := \int_a^x \mathcal{K}(x,y)f(y)dy$$

es continua.

Demostración: Sea $f \in \mathcal{C}^0[a,b]$. Si $f = 0$ entonces $\mathfrak{V}f = 0$. Si $f \neq 0$, por el Teorema 4.31, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|\mathcal{K}(x_1,y_1) - \mathcal{K}(x_2,y_2)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)\|f\|_\infty} \qquad \text{si } \|(x_1,y_1) - (x_2,y_2)\| < \delta.$$

En consecuencia, si $|x_1 - x_2| < \min\{\delta, \frac{\varepsilon}{2\|\mathcal{K}\|_\infty \|f\|_\infty}\}$ y $x_1 \leq x_2$, se tiene que

$$\begin{aligned}
|(\mathfrak{V}f)(x_1) - (\mathfrak{V}f)(x_2)| &= \left| \int_a^{x_1} (\mathcal{K}(x_1,y) - \mathcal{K}(x_2,y))f(y)dy - \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{K}(x_2,y)f(y)dy \right| \\
&\leq \int_a^{x_1} |\mathcal{K}(x_1,y) - \mathcal{K}(x_2,y)|\,|f(y)|\,dy + \int_{x_1}^{x_2} |\mathcal{K}(x_2,y)|\,|f(y)|\,dy \\
&< (x_1 - a)\frac{\varepsilon}{2(b-a)\|f\|_\infty}\|f\|_\infty + \frac{\varepsilon}{2\|\mathcal{K}\|_\infty \|f\|_\infty}\|\mathcal{K}\|_\infty \|f\|_\infty \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Esto prueba que $\mathfrak{V}f$ es continua. ■

Dados $\lambda \neq 0$ y $g \in \mathcal{C}^0[a,b]$, definimos $\phi_\lambda : \mathcal{C}^0[a,b] \to \mathcal{C}^0[a,b]$ como

$$\phi_\lambda(f) := \frac{1}{\lambda}(\mathfrak{V}f + g).$$

El lema anterior asegura que ϕ_λ es, efectivamente, una función de $\mathcal{C}^0[a,b]$ en sí mismo. Probaremos el siguiente resultado.

Lema 6.11 *La función ϕ_λ satisface la desigualdad*

$$\left\|\phi_\lambda^k(f_1) - \phi_\lambda^k(f_2)\right\|_\infty \leq |\lambda|^{-k} \|\mathcal{K}\|_\infty^k \frac{(b-a)^k}{k!} \|f_1 - f_2\|_\infty ,$$

para todas $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^0[a,b]$, $k \in \mathbb{N}$.

Demostración: Probaremos por inducción que

$$\left|\phi_\lambda^k(f_1)(x) - \phi_\lambda^k(f_2)(x)\right| \leq \frac{\left(|\lambda|^{-1} \|\mathcal{K}\|_\infty (x-a)\right)^k}{k!} \|f_1 - f_2\|_\infty \quad \forall x \in [a,b]. \tag{6.9}$$

Para $k = 1$ se tiene que

$$\begin{aligned} |\phi_\lambda(f_1)(x) - \phi_\lambda(f_2)(x)| &\leq \frac{1}{|\lambda|} \int_a^x |\mathcal{K}(x,y)| \, |f_1(y) - f_2(y)| \, dy \\ &\leq \frac{1}{|\lambda|} \|\mathcal{K}\|_\infty (x-a) \|f_1 - f_2\|_\infty . \end{aligned}$$

Supongamos que la desigualdad (6.9) vale para $k-1$. Entonces

$$\begin{aligned} \left|\phi_\lambda^k(f_1)(x) - \phi_\lambda^k(f_2)(x)\right| &\leq \frac{1}{|\lambda|} \int_a^x |\mathcal{K}(x,y)| \left|\phi_\lambda^{k-1}(f_1)(y) - \phi_\lambda^{k-1}(f_2)(y)\right| dy \\ &\leq \frac{\|\mathcal{K}\|_\infty}{|\lambda|} \int_a^x \left|\phi_\lambda^{k-1}(f_1)(y) - \phi_\lambda^{k-1}(f_2)(y)\right| dy \\ &\leq \frac{\|\mathcal{K}\|_\infty^k}{|\lambda|^k} \|f_1 - f_2\|_\infty \int_a^x \frac{(y-a)^{k-1}}{(k-1)!} dy \\ &= \frac{\|\mathcal{K}\|_\infty^k}{|\lambda|^k} \|f_1 - f_2\|_\infty \frac{(x-a)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Esto demuestra la desigualdad (6.9). De ella se sigue que

$$\left|\phi_\lambda^k(f_1)(x) - \phi_\lambda^k(f_2)(x)\right| \leq |\lambda|^{-k} \|\mathcal{K}\|_\infty^k \frac{(b-a)^k}{k!} \|f_1 - f_2\|_\infty \qquad \forall x \in [a,b]$$

y, en consecuencia, que

$$\left\|\phi_\lambda^k(f_1) - \phi_\lambda^k(f_2)\right\|_\infty \leq \frac{\left(|\lambda|^{-1} \|\mathcal{K}\|_\infty (b-a)\right)^k}{k!} \|f_1 - f_2\|_\infty , \tag{6.10}$$

como afirma el enunciado. ■

Teorema 6.12 *Si* $\lambda \neq 0$ *entonces, para cada* $g \in \mathcal{C}^0[a,b]$, *la ecuación integral de Volterra* (6.8) *tiene una única solución.*

Demostración: Existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\left(|\lambda|^{-1} \|\mathcal{K}\|_\infty (b-a)\right)^k}{k!} < 1 \qquad \forall k \geq k_0$$

[Ejercicio 6.33]. Por el lema anterior, para $k \geq k_0$, la función $\phi_\lambda^k : \mathcal{C}^0[a,b] \to \mathcal{C}^0[a,b]$ es una contracción. Del Corolario 6.6 se sigue que ϕ_λ tiene un único punto fijo, es decir, la ecuación (6.8) tiene solución única. ■

Este resultado asegura en particular que, si $\lambda \neq 0$, la solución trivial es la única solución de la **ecuación de valores propios**

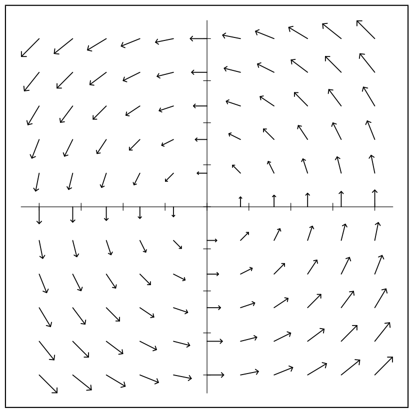
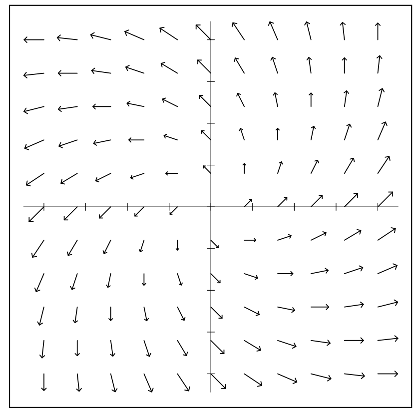
$$\mathfrak{V}f = \lambda f$$

para el **operador de Volterra** $\mathfrak{V}$. Es decir, ningún $\lambda \neq 0$ es un valor propio de $\mathfrak{V}$. La ecuación integral de Volterra del primer tipo, $\mathfrak{V}f = 0$, es bastante más complicada y no la estudiaremos aquí.

6.4. El problema de Cauchy

Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Un campo vectorial en Ω es una función continua de Ω en $\mathbb{R}^n$. Los campos vectoriales se utilizan a menudo en la física para modelar, por ejemplo, la velocidad de un líquido móvil, o la intensidad y la dirección de una cierta fuerza, como la fuerza electromagnética.

Consideraremos campos vectoriales que cambian continuamente con el tiempo, es decir, funciones continuas $\chi : (a,b) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$. El intervalo abierto (a,b) puede ser infinito. Las siguientes figuras ilustran el campo vectorial $\chi(t,x,y) = (tx - y, x + ty)$ para $t = 0$ y $t = 1$.

$\chi(0,x,y) = (-y,x)$ $\qquad$ $\chi(1,x,y) = (x-y,x+y)$

Dado un tiempo inicial $t_0 \in (a,b)$ y una posición inicial $x_0 \in \Omega$, nos preguntamos si existe una trayectoria $u(t)$ en Ω tal que $u(t_0) = x_0$ cuya velocidad $u'(t)$ en cada tiempo t sea precisamente $\chi(t,u(t))$.

Definición 6.13 *Una* ***solución*** *del* ***problema de Cauchy***

$$\begin{cases} u' = \chi(t,u), \\ u(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{6.11}$$

es una función continuamente diferenciable $u : J \to \Omega$, *definida en un subintervalo* J *de* (a,b) *que contiene a* t_0, *que satisface*

$$u'(t) = \chi(t,u(t)) \quad \forall t \in J \qquad y \qquad u(t_0) = x_0.$$

El punto (t_0,x_0) *se llama la* ***condición inicial*** *del problema* (6.11).

Empezaremos mostrando que el problema (6.11) es equivalente a una ecuación integral. Dada una función continua $f = (f_1,...,f_n) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, denotamos por

$$\int_a^b f(t)dt := \left(\int_a^b f_1(t)dt, ..., \int_a^b f_n(t)dt \right) \in \mathbb{R}^n$$

al vector cuyas componentes son las integrales de las componentes de f.

Lema 6.14 $u : [t_0-\delta, t_0+\delta] \to \Omega$ *es solución del problema de Cauchy* (6.11) *si y sólo si* u *es continua y satisface*

$$u(t) = \int_{t_0}^t \chi(s,u(s))ds + x_0 \qquad \forall t \in [t_0-\delta, t_0+\delta]. \tag{6.12}$$

Demostración: Esta afirmación es consecuencia inmediata de los teoremas fundamentales del Cálculo, aplicados a cada componente. En efecto, si $u = (u_1, ..., u_n)$ y $\chi = (\chi_1, ..., \chi_n)$, entonces u_i es continua y satisface

$$u_i(t) = \int_{t_0}^{t} \chi_i(s, u(s))ds + x_{0,i}$$

si y sólo si u_i es continuamente diferenciable y satisface

$$u_i'(t) = \chi_i(t, u(t)), \qquad u_i(t_0) = x_{0,i},$$

para cada $i = 1, ..., n$. ■

Queremos expresar la ecuación integral (6.12) como un problema de punto fijo. Para ello se requiere una condición adicional sobre el campo χ. Denotemos por

$$\bar{B}(x_0, \delta) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq \delta\}$$

a la bola cerrada de radio δ y centro x_0 en $\mathbb{R}^n$ con la norma usual.

Definición 6.15 *Una función $\chi : (a,b) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ es* ***localmente Lipschitz continua en la segunda variable*** *si, para cada $t_0 \in (a,b)$ y $x_0 \in \Omega$, existen $\delta_0 > 0$ y $C > 0$ (que dependen de t_0 y x_0) tales que $[t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0] \subset (a,b)$, $\bar{B}(x_0, \delta_0) \subset \Omega$ y*

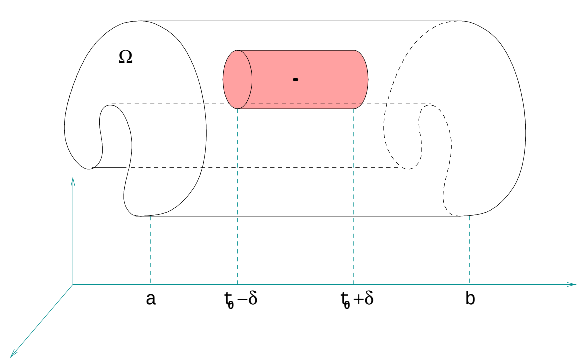
$$\|\chi(t, x_1) - \chi(t, x_2)\| \leq C \|x_1 - x_2\| \qquad \text{si } |t - t_0| \leq \delta_0 \text{ y } x_1, x_2 \in \bar{B}(x_0, \delta_0).$$

En el resto de esta sección supondremos que $\chi : (a,b) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ es localmente Lipschitz continua en la segunda variable.

Para la condición inicial (t_0, x_0) del problema (6.11) escogemos $\delta_0 > 0$ y $C > 0$ como en la Definición 6.15. Escogemos además $M > 0$ tal que

$$\|\chi(t, x)\| \leq M \qquad \forall (t, x) \in [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0] \times \bar{B}(x_0, \delta_0). \tag{6.13}$$

Tal M existe gracias al Corolario 4.11. Finalmente, escogemos $\delta \in \left(0, \text{mín}\{\frac{1}{C}, \frac{\delta_0}{M}\}\right)$.



Definimos
$$X := \{u \in \mathcal{C}^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n) : \|u - x_0\|_\infty \leq \delta M\}$$
donde x_0 es la función constante con valor x_0 y
$$\|u\|_\infty := \max_{t \in [a,b]} \|u(t)\|$$
es la norma uniforme de $\mathcal{C}^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n)$. Recuerda que $\mathcal{C}^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n)$ es un espacio de Banach (Corolario 5.21). Le damos a X la métrica inducida por esta norma.

Lema 6.16 *(a) X es un espacio métrico completo.*
(b) Si $u \in X$, entonces $u(t) \in \Omega$ para toda $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Demostración: *(a)* Observa que X es la bola cerrada con centro en la función constante x_0 y radio δM en el espacio $\mathcal{C}^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n)$ con la norma uniforme. Por tanto, X es un subconjunto cerrado de $\mathcal{C}^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n)$. De la Proposición 5.9 se sigue que X es un espacio métrico completo.
(b) Si $u \in X$ entonces
$$\|u(t) - x_0\| \leq \delta M < \delta_0 \qquad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta].$$
En consecuencia, $u(t) \in \bar{B}(x_0, \delta_0) \subset \Omega$ para toda $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. ■

Para cada $u \in X$ definimos la función $\phi(u) : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathbb{R}^n$ como
$$\phi(u)(t) := \int_{t_0}^{t} \chi(s, u(s))ds + x_0.$$
Nota que el integrando está bien definido porque, de acuerdo con el lema anterior, $u(s) \in \Omega$ para todo $s \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Requerimos la siguiente desigualdad.

Lema 6.17 *Para toda función continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ se cumple que*
$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leq |b - a| \, \|f\|_\infty .$$

La demostración de esta desigualdad es sencilla y se deja como ejercicio [Ejercicio 6.36].

Probaremos ahora que ϕ es una función de X en sí mismo.

Lema 6.18 $\phi(u) \in X$ *para todo* $u \in X$.

Demostración: Por el teorema fundamental del Cálculo, la i-ésima función componente de $\phi(u)$,

$$\phi(u)_i(t) := \int_{t_0}^{t} \chi_i(s, u(s))ds + x_{0,i},$$

es continuamente diferenciable. En particular, $\phi(u) \in \mathcal{C}^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n)$. Usando el Lema 6.17 obtenemos además que

$$\|\phi(u)(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t} \chi(s, u(s))ds \right\| \leq |t - t_0| \, M \leq \delta M.$$

En consecuencia, $u \in X$. ■

El teorema que demostraremos a continuación, es un resultado fundamental de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Teorema 6.19 (Picard-Lindelöf) *Sea* $\chi : (a,b) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ *una función continua y localmente Lipschitz continua en la segunda variable. Entonces, dados* $t_0 \in (a,b)$ *y* $x_0 \in \Omega$, *existe* $\delta > 0$ *tal que el problema de Cauchy* (6.11) *tiene una única solución en el intervalo* $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Demostración: El lema anterior asegura que ϕ es una función de X en sí mismo. Observemos que $u \in X$ satisface la ecuación integral (6.12) si y sólo si

$$\phi(u)(t) := \int_{t_0}^{t} \chi(s, u(s))ds + x_0 = u(t) \qquad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta],$$

es decir, si y sólo si u es un punto fijo de $\phi : X \to X$.
Probaremos que ϕ es una contracción. Sean $u, v \in X$. Usando el Lema 6.17 obtenemos que, para toda $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, se cumple que

$$\begin{aligned}
\|\phi(u)(t) - \phi(v)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} (\chi(s, u(s)) - \chi(s, v(s)))ds \right\| \\
&\leq |t - t_0| \max_{|s-t_0|\leq\delta} \|\chi(s, u(s)) - \chi(s, v(s))\| \\
&\leq |t - t_0| \max_{|s-t_0|\leq\delta} C \|u(s) - v(s)\| \\
&\leq \delta C \|u - v\|_\infty .
\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\|\phi(u) - \phi(v)\|_\infty \leq \delta C \|u - v\|_\infty$$

y, como hemos elegido δ tal que $\delta C < 1$, se tiene que ϕ es una contracción.
Como X es completo, el Teorema 6.3 asegura que ϕ tiene un único punto fijo. Es decir, que existe una única $u^* \in X$ que satisface la ecuación integral (6.12). Del Lema 6.14 se sigue que u^* es la única solución del problema de Cauchy (6.11) en el intervalo $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. ■

6.5. Ejercicios

Ejercicio 6.20 *Sea X un conjunto arbitrario con la métrica discreta d_{disc} definida en el* Ejemplo 2.16*. Prueba que $\phi : X \to X$ es una contracción si y sólo si ϕ es una función constante.*

Ejercicio 6.21 *(a) Prueba que la función $\phi : \mathbb{R}^n_p \to \mathbb{R}^n_p$ dada por $\phi(x) = \frac{1}{2}x$ es una contracción para todo $p \in [1, \infty)$.*
(b) ¿Es posible darle a $\mathbb{R}^n$ alguna métrica tal que ϕ no sea contracción?
(c) ¿Es posible darle a $\mathbb{R}^n$ alguna norma tal que ϕ no sea contracción?

Ejercicio 6.22 *(a) Usa el teorema del valor intermedio para probar que toda función continua $f : [a, b] \to [a, b]$ tiene al menos un punto fijo.*
(b) Da un ejemplo de una función continua $f : [a, b] \to [a, b]$ con una infinidad de puntos fijos.

Ejercicio 6.23 *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciable en $[a, b]$ y tal que $f(a) < 0 < f(b)$ y $f'(x) > 0$ para toda $x \in [a, b]$. Prueba que existe un único $x^* \in [a, b]$ tal que $f(x^*) = 0$ y que x^* se puede encontrar por el método de aproximaciones sucesivas.* (Sugerencia: Demuestra que existe $\lambda > 0$ tal que $x - \lambda f(x) \in [a, b]$ para todo $x \in [a, b]$ y tal que $\phi_\lambda(x) := x - \lambda f(x)$ es una contracción en $[a, b]$.)

Ejercicio 6.24 *Prueba que, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continuamente diferenciable y $|f'(x)| \leq M < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces f es una contracción.*

Ejercicio 6.25 *Da un ejemplo de un espacio métrico completo y una función $\phi : X \to X$ que satisface*

$$d(\phi(x), \phi(y)) < d(x, y) \qquad \forall x, y \in X \text{ con } x \neq y, \tag{6.14}$$

y que no tiene ningún punto fijo. Es decir, la condición (6.14) *no es suficiente para garantizar la existencia de un punto fijo.*

Ejercicio 6.26 *Sean X un espacio métrico completo y $\phi : X \to X$ una función.*
(a) Prueba que, si existe $\alpha \in (0,1)$ tal que

$$d(\phi^2(x), \phi(x)) \leq \alpha d(\phi(x), x) \qquad \forall x \in X,$$

entonces ϕ tiene un punto fijo.
(b) Muestra, mediante un ejemplo, que dicho punto fijo no necesariamente es único.

Ejercicio 6.27 *Prueba que, si X es un espacio métrico compacto y $\phi : X \to X$ satisface*

$$d(\phi(x), \phi(y)) < d(x,y) \qquad \forall x, y \in X \quad \text{con } x \neq y,$$

entonces ϕ tiene un único punto fijo.

Ejercicio 6.28 *Sea $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la función dada por $\phi(x) = Ax - b$, donde $A = (a_{ij})$ es una matriz de $n \times n$ y $b \in \mathbb{R}^n$.*
(a) Prueba que, si

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 < 1, \tag{6.15}$$

entonces $\phi : \mathbb{R}^n_2 \to \mathbb{R}^n_2$ es una contracción.
(b) Prueba que, si

$$\max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| < 1, \tag{6.16}$$

entonces $\phi : \mathbb{R}^n_\infty \to \mathbb{R}^n_\infty$ es una contracción.
(c) Da ejemplos de matrices A que satisfagan cada una de las condiciones (6.6), (6.15) *y* (6.16) *pero no las otras dos. Es decir, cada una de estas condiciones es suficiente para que la ecuación*

$$Ax - x = b,$$

tenga solución única, pero ninguna es necesaria.
(d) En cada uno de los incisos (a) y (b) aplica la fórmula (6.2) *para estimar la solución en términos de A y b exclusivamente.*
(e) Prueba que cada una de las condiciones (6.15) *y* (6.16) *implica que* $\det(A - I) \neq 0$.
(f) Da un ejemplo de una matriz A tal que $\det(A - I) \neq 0$ *y que no cumple ninguna de las condiciones* (6.6), (6.15) *y* (6.16).

Ejercicio 6.29 *Sea A una matriz de $n \times n$. Recuerda que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio de A si existe $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, tal que $Ax = \lambda x$. Prueba que todo valor propio λ de A satisface*

$$|\lambda| \leq \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| .$$

Ejercicio 6.30 *Sea* $\mathcal{K} : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función continua.*
(a) Prueba que el operador de Fredholm $\mathfrak{F} : \mathcal{C}^0[a,b] \to \mathcal{C}^0[a,b]$ *dado por*

$$(\mathfrak{F}f)(x) := \int_a^b \mathcal{K}(x,y)f(y)dy$$

es un operador lineal, es decir,

$$\mathfrak{F}(\mu_1 f_1 + \mu_2 f_2) = \mu_1 \mathfrak{F}(f_1) + \mu_2 \mathfrak{F}(f_2) \qquad \forall f_1, f_2 \in \mathcal{C}^0[a,b],\ \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Prueba que $\mathfrak{F} : \mathcal{C}^0[a,b] \to \mathcal{C}^0[a,b]$ *es Lipschitz continuo.*

Ejercicio 6.31 *Sean* $\mathcal{K} : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ *y* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *funciones continuas, y sea* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tal que* $|\lambda| > \|\mathcal{K}\|_\infty (b-a)$*. Prueba que la solución* f^* *de la ecuación integral de Fredholm* (6.7) *satisface*

$$\left\| f^* - \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{\lambda^m} \mathfrak{F}^{m-1} g \right\|_\infty \leq \frac{\alpha^k}{(1-\alpha)|\lambda|} \|g\|_\infty ,$$

donde $\alpha := \frac{1}{|\lambda|} \|\mathcal{K}\|_\infty (b-a)$ *y* $\mathfrak{F}$ *es el operador de Fredholm.*

Ejercicio 6.32 *Considera la ecuación no lineal de Fredholm*

$$\lambda f(x) - \int_a^b \mathcal{K}(x,y,f(y))dy = g(x),$$

donde $\mathcal{K} : [a,b] \times [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *son funciones continuas, y* $\mathcal{K}$ *es Lipschitz continua en la tercera variable, es decir, existe* $M > 0$ *tal que*

$$|\mathcal{K}(x,y,z_1) - \mathcal{K}(x,y,z_2)| \leq M |z_1 - z_2| \qquad \forall x, y \in [a,b],\ z_1, z_2 \in \mathbb{R}.$$

Prueba que esta ecuación tiene solución única si

$$|\lambda| > M(b-a).$$

Ejercicio 6.33 *Sea* $c > 0$*. Prueba que*

$$\lim_{k \to \infty} \frac{c^k}{k!} = 0.$$

Ejercicio 6.34 *Sea $\mathcal{K} : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua.*
(a) Prueba que el operador de Volterra $\mathfrak{V} : \mathcal{C}^0[a,b] \to \mathcal{C}^0[a,b]$ dado por

$$(\mathfrak{V}f)(x) := \int_a^x \mathcal{K}(x,y) f(y) dy$$

es un operador lineal, es decir,

$$\mathfrak{V}(\mu_1 f_1 + \mu_2 f_2) = \mu_1 \mathfrak{V}(f_1) + \mu_2 \mathfrak{V}(f_2) \qquad \forall f_1, f_2 \in \mathcal{C}^0[a,b],\ \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Prueba que $\mathfrak{V} : \mathcal{C}^0[a,b] \to \mathcal{C}^0[a,b]$ es Lipschitz continuo.
(c) Prueba que, si λ es un valor propio de $\mathfrak{V}$, entonces $\lambda = 0$.

Ejercicio 6.35 *Sean $\mathcal{K} : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ y $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas, y $\lambda \neq 0$. Prueba que la solución f^* de la ecuación integral de Volterra (6.8) satisface*

$$\left\| f^* - \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{\lambda^m} \mathfrak{V}^{m-1} g \right\|_\infty \leq \frac{\alpha^k}{(1-\alpha)|\lambda|} \|g\|_\infty ,$$

donde $\alpha := \frac{1}{|\lambda|} \|\mathcal{K}\|_\infty (b-a)$ y $\mathfrak{V}$ es el operador de Volterra.

Ejercicio 6.36 *Dada una función continua $f = (f_1, ..., f_n) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, denotamos por*

$$\int_a^b f(t)dt := \left(\int_a^b f_1(t)dt, ..., \int_a^b f_n(t)dt \right) \in \mathbb{R}^n$$

al vector cuyas componentes son las integrales de las componentes de f. Prueba que

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leq |b-a| \, \|f\|_\infty ,$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma usual en $\mathbb{R}^n$ y $\|f\|_\infty := \sup_{t\in[a,b]} \|f(t)\|$ es la norma uniforme en $\mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R}^n)$. (Sugerencia: Aplica primero la desigualdad de Hölder para probar que

$$\left| \int_a^b f_i \right| \leq (b-a)^{1/2} \left(\int_a^b f_i^2 \right)^{1/2}$$

para $i = 1, ..., n$).

Ejercicio 6.37 *Prueba que, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continuamente diferenciable, entonces es localmente Lipschitz continua, es decir, para cada $t \in \mathbb{R}$, existe $\delta_t > 0$ tal que la restricción de f al intervalo $[t - \delta_t, t + \delta_t]$ es Lipschitz continua.*

Ejercicio 6.38 *Sea* $\chi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $\chi(t,x) = 3x^{2/3}$.
(a) Prueba que χ *no es localmente Lipschitz continua en la segunda variable.*
(b) Prueba que, para todas $\alpha < 0 < \beta$, *la función*

$$u_{\alpha,\beta}(t) := \begin{cases} (t-\alpha)^3 & \text{si } t \leq \alpha, \\ 0 & \text{si } \alpha \leq t \leq \beta, \\ (t-\beta)^3 & \text{si } t \geq \beta, \end{cases}$$

es diferenciable en $\mathbb{R}$ *y es solución del problema de Cauchy*

$$\begin{cases} u' = 3u^{2/3}, \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

En consecuencia, si χ *no es localmente Lipschitz continua en la segunda variable, el problema de Cauchy puede tener una infinidad de soluciones.*

Ejercicio 6.39 *Sea* $\chi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $\chi(t,x) = -x^2$.
(a) Prueba que χ *es localmente Lipschitz continua en la segunda variable.*
(b) Para $\alpha \neq 0$ *considera el problema de Cauchy*

$$\begin{cases} u' = -u^2, \\ u(0) = -\frac{1}{\alpha}. \end{cases} \tag{6.17}$$

Prueba que

$$u(t) = \frac{1}{t-\alpha}$$

es solución de (6.17) *en algún intervalo que contiene a* 0.
(c) ¿Cuál es el intervalo máximo para el que existe una solución de (6.17)*?*

Capítulo 7

Compacidad en espacios de funciones

En el Capítulo 4 dimos una caracterización sencilla de los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$. Probamos que son precisamente aquellos que son cerrados y acotados.

El objetivo de este capítulo es dar una caracterización sencilla de los subconjuntos compactos del espacio de funciones continuas $\mathcal{C}^0(K, X)$ en un espacio métrico compacto K. Dicha caracterización, debida a Giulio Ascoli[1] y Cesare Arzelà[2], se basa fundamentalmente en la noción de *equicontinuidad*, introducida por Ascoli en 1884.

El teorema de Arzelà-Ascoli es un resultado fundamental en Análisis, que tiene múltiples aplicaciones. En él se basa la demostración del teorema de Cauchy-Peano sobre la existencia de soluciones al problema de Cauchy para campos vectoriales continuos. Permite además obtener condiciones para la existencia de trayectorias de longitud mínima en espacios métricos. En este capítulo expondremos ambas aplicaciones y daremos una respuesta a la pregunta planteada en el Capítulo 1.

7.1. Conjuntos totalmente acotados.

La demostración del teorema de Heine-Borel se basó en el hecho de que podemos cubrir a un cubo en $\mathbb{R}^n$ (y, en consecuencia, a cualquier subconjunto acotado) con un número finito de bolas de radio ε, para cualquier $\varepsilon > 0$. Esto no es cierto en un espacio métrico arbitrario, como lo muestra el siguiente ejemplo.

---

[1] Giulio Ascoli (1843-1896), matemático italiano. Fue profesor en el Politecnico di Milano. Hizo importantes contribuciones a la teoría de funciones de variable real.

[2] Cesare Arzelà (1847-1912), matemático italiano. Fue profesor en Bologna. Destacan sus importantes contribuciones al estudio de sucesiones de funciones.

Ejemplo 7.1 *La bola cerrada* $\bar{B}_{\ell_2}(0,1) := \{(x_n) \in \ell_2 : \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \leq 1\}$ *no puede ser cubierta por un número finito de bolas abiertas de radio* ε *en* ℓ_2*, para ningún* $\varepsilon \in (0, \sqrt{2}/2)$.

Demostración: Sea $e_k = (e_{k,n})$ la sucesión tal que $e_{k,k} = 1$ y $e_{k,n} = 0$ si $k \neq n$. Entonces $e_k \in \bar{B}_{\ell_2}(0,1)$ y

$$\left\|e_j - e_k\right\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (e_{j,n} - e_{k,n})^2\right)^{1/2} = \sqrt{2} \qquad \forall j \neq k.$$

Sea $\varepsilon \in (0, \sqrt{2}/2)$. Si $\bar{B}_{\ell_2}(0,1)$ pudiese ser cubierta por un número finito de bolas de radio ε en ℓ_2, entonces al menos una de ellas tendría que contener a un par e_j, e_k, $j \neq k$, lo cual es imposible. ■

Sea $X = (X, d_X)$ un espacio métrico. Estudiaremos a los subconjuntos de X que tienen la siguiente propiedad.

Definición 7.2 *Un subconjunto* A *de* X *es* ***totalmente acotado*** *si para cada* $\varepsilon > 0$ *existe un número finito de puntos* $a_1, ..., a_m \in A$ *tales que*

$$A \subset B_X(a_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup B_X(a_m, \varepsilon),$$

donde $B_X(a, \varepsilon)$ *denota a la bola abierta con centro en* a *y radio* ε *en* X.

Veamos algunas propiedades sencillas de los conjuntos totalmente acotados.

Proposición 7.3 *Sea* A *un subconjunto de* X.
(a) Si A *es compacto, entonces* A *es totalmente acotado.*
(b) Si A *es totalmente acotado, entonces* A *es acotado en* X.
(c) Si $D \subset A$ *y* A *es totalmente acotado, entonces* D *es totalmente acotado.*
(d) Si A *es totalmente acotado, entonces su cerradura* $\overline{A}$ *en* X *es totalmente acotada.*

Demostración: *(a)* Si $A \subset X$ es compacto entonces, para toda $\varepsilon > 0$, la cubierta abierta $\{B_X(x, \varepsilon) : x \in A\}$ de A contiene una subcubierta finita. Es decir, existen $x_1, ..., x_m \in A$ tales que

$$A \subset B_X(x_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup B_X(x_m, \varepsilon).$$

(b) Si $A \subset X$ es totalmente acotado entonces existen $a_1, ..., a_m \in A$ tales que

$$A \subset B_X(a_1, 1) \cup \cdots \cup B_X(a_m, 1).$$

En consecuencia, $A \subset B_X(a_1, r+1)$ donde $r := \max\{d_X(a_1, a_j) : j = 2, ..., m\}$, es decir, A es acotado.
(c) Sean A un subconjunto de X totalmente acotado, $D \subset A$ y $\varepsilon > 0$. Entonces existen $a_1, ..., a_m \in A$ tales que

$$A \subset B_X(a_1, \frac{\varepsilon}{2}) \cup \cdots \cup B_X(a_m, \frac{\varepsilon}{2}).$$

Sea $J := \{j \in \{1, ..., m\} : B_X(a_j, \frac{\varepsilon}{2}) \cap D \neq \emptyset\}$. Para cada $j \in J$ elegimos un punto $b_j \in B_X(a_j, \frac{\varepsilon}{2}) \cap D$. Entonces se cumple que

$$D \subset \bigcup_{j \in J} B_X(b_j, \varepsilon).$$

Esto prueba que D es totalmente acotado.
(d) Sean A un subconjunto totalmente acotado de X, $\varepsilon > 0$, y $a_1, ..., a_m \in A$ tales que

$$A \subset B_X(a_1, \frac{\varepsilon}{2}) \cup \cdots \cup B_X(a_m, \frac{\varepsilon}{2}).$$

Como $\bar{B}_X(a_1, \frac{\varepsilon}{2}) \cup \cdots \cup \bar{B}_X(a_m, \frac{\varepsilon}{2})$ es cerrado, se tiene que

$$\overline{A} \subset \bar{B}_X(a_1, \frac{\varepsilon}{2}) \cup \cdots \cup \bar{B}_X(a_m, \frac{\varepsilon}{2}).$$

En consecuencia,

$$\overline{A} \subset B_X(a_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup B_X(a_m, \varepsilon).$$

Esto prueba que $\overline{A}$ es totalmente acotado. ■

El siguiente resultado da caracterizaciones muy útiles de los espacios métricos compactos.

Teorema 7.4 *Las siguientes tres afirmaciones son equivalentes:*
(a) X es compacto.
(b) Toda sucesión en X contiene una subsucesión que converge en X.
(c) X es completo y totalmente acotado.

Demostración: *(a)⇒(b)*: Esta es la afirmación de la Proposición 4.5.
(b)⇒(c): Sea (x_k) una sucesión de Cauchy en X. Si X satisface *(b)* entonces (x_k) contiene una subsucesión que converge a un punto $x \in X$. En consecuencia, (x_k) converge a x en X. [Ejercicio 5.30]. Esto prueba que X es completo.
Supongamos ahora que X no es totalmente acotado. Entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que X no

puede ser cubierto por un número finito de bolas abiertas de radio ε_0. Por consiguiente, podemos escoger, inductivamente, una sucesión de puntos $x_k \in X$ tales que

$$x_k \notin B_X(x_1, \varepsilon_0) \cup \cdots \cup B_X(x_{k-1}, \varepsilon_0).$$

Por tanto, $d_X(x_j, x_k) \geq \varepsilon_0$ para toda $j \neq k$ y, en consecuencia, ninguna subsucesión de (x_k) es de Cauchy. Esto implica que (x_k) no contiene ninguna subsucesión convergente. Es decir, si X no es totalmente acotado, entonces *(b)* no se cumple.
(c)⇒(a): Argumentando por contradicción, supongamos que X es completo y totalmente acotado pero no es compacto. Entonces X tiene una cubierta abierta $\mathcal{U} = \{U_i : i \in \mathcal{I}\}$ que no contiene ninguna subcubierta finita. Como X es totalmente acotado, está contenido en un número finito de bolas abiertas de radio 1. Por tanto, existe un punto $x_0 \in X$ tal que $B_X(x_0, 1)$, no puede ser cubierta por un número finito de elementos de $\mathcal{U}$. Como $B_X(x_0, 1)$ es totalmente acotado (ver Proposición 7.3), está contenido en un número finito de bolas abiertas de radio $\frac{1}{2}$ cuyos centros están en $B_X(x_0, 1)$. Por consiguiente, existe $x_1 \in B_X(x_0, 1)$ tal que $B_X(x_1, \frac{1}{2})$, no puede ser cubierta por un número finito de elementos de $\mathcal{U}$. De este modo construímos, inductivamente, una sucesión (x_k) tal que $x_k \in B_X(x_{k-1}, \frac{1}{2^{k-1}})$ y $B_X(x_k, \frac{1}{2^k})$ no puede ser cubierta por un número finito de elementos de $\mathcal{U}$. Para toda $j \geq k$, se tiene entonces que

$$d_X(x_k, x_j) \leq d_X(x_k, x_{k+1}) + \cdots + d_X(x_{j-1}, x_j) < \frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^{j-1}} < \frac{1}{2^{k-1}}, \tag{7.1}$$

es decir, la sucesión (x_k) es Cauchy. Como X es completo, esta sucesión converge a un punto x^* en X. Haciendo tender $j \to \infty$ en la desigualdad (7.1) obtenemos que

$$d_X(x_k, x^*) \leq \frac{1}{2^{k-1}} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Por otra parte, como $x^* \in X$, existe $U^* \in \mathcal{U}$ tal que $x^* \in U^*$. Como U^* es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_X(x^*, \varepsilon) \subset U^*$. Sea k tal que $\frac{1}{2^{k-1}} < \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces, para todo $x \in B_X(x_k, \frac{1}{2^k})$, se tiene que

$$d_X(x, x^*) \leq d_X(x, x_k) + d_X(x^*, x_k) < \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k-1}} < \varepsilon,$$

es decir,

$$B_X(x_k, \frac{1}{2^k}) \subset B_X(x^*, \varepsilon) \subset U^*.$$

Esto es una contradicción, ya que habíamos supuesto que $B_X(x_k, \frac{1}{2^k})$ no puede ser cubierta por un número finito de elementos de $\mathcal{U}$. ■

Observa la similitud de la demostración de la afirmación *(c)⇒(a)* con la de la Proposición 4.12, que constituye la parte medular de la demostración del teorema de

Heine-Borel. La caracterización *(c)* es muy útil, como veremos en las siguientes secciones.

Definición 7.5 *Un subconjunto A de X es **relativamente compacto** en X si su cerradura $\overline{A}$ en X es compacta.*

Los subconjuntos relativamente compactos de $\mathbb{R}^n$ son precisamente aquellos que son acotados. En un espacio métrico completo se cumple lo siguiente.

Corolario 7.6 *Un subconjunto A de un espacio métrico completo X es relativamente compacto en X si y sólo si es totalmente acotado.*

Demostración: Sea A relativamente compacto en X. La Proposición 7.3 implica entonces que $\overline{A}$ es totalmente acotado y, en consecuencia, que A también lo es.
Inversamente, supongamos que A es totalmente acotado. La Proposición 7.3 afirma que $\overline{A}$ es totalmente acotado. Por otra parte, como X es completo y $\overline{A}$ es cerrado en X, se tiene que $\overline{A}$ es completo (ver Proposición 5.9). El Teorema 7.4 asegura entonces que $\overline{A}$ es compacto. ■

7.2. El teorema de Arzelà-Ascoli.

Sean $K = (K, d_K)$ un espacio métrico compacto y $X = (X, d_X)$ un espacio métrico. Consideremos el espacio de funciones continuas

$$\mathcal{C}^0(K, X) := \{f : K \to X : f \text{ es continua}\}$$

con la métrica uniforme

$$d_\infty(f, g) := \max_{z \in K} d_X(f(z), g(z)),$$

que introdujimos en la Definición 5.16. Usaremos el Corolario 7.6 para obtener una caracterización sencilla de los subconjuntos relativamente compactos de $\mathcal{C}^0(K, X)$. La siguiente noción jugará un papel fundamental.

Definición 7.7 *Un subconjunto $\mathcal{H}$ de $\mathcal{C}^0(K, X)$ es **equicontinuo** en el punto $z_0 \in K$ si, dada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ (que depende de ε y de z_0) tal que, para toda $f \in \mathcal{H}$,*

$$d_X\left(f(z), f(z_0)\right) < \varepsilon \quad \text{si} \;\; d_Z\left(z, z_0\right) < \delta.$$

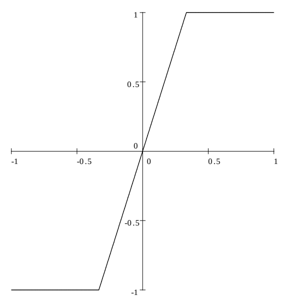
*$\mathcal{H}$ es **equicontinuo** si lo es en todo punto de K.*

El aspecto crucial de esta definición es que la misma $\delta > 0$ nos sirve para todas las funciones que pertenecen a $\mathcal{H}$. Un ejemplo en el que esto no se cumple es el siguiente.

Ejemplo 7.8 *El conjunto* $\mathcal{H} = \{f_k \in \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R}) : k \in \mathbb{N}\}$, *donde*

$$f_k(t) = \begin{cases} -1 & si \;\; t \in \left[-1, -\frac{1}{k}\right], \\ kt & si \;\; t \in \left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right], \\ 1 & si \;\; t \in \left[\frac{1}{k}, 1\right], \end{cases}$$

no es equicontinuo en 0.



f_3

La demostración es sencilla [Ejercicio 7.29].

Denotaremos por

$$B_\infty(f_0, r) := \{f \in \mathcal{C}^0(K,X) : d_\infty(f, f_0) < r\}$$

a la bola abierta en $\mathcal{C}^0(K,X)$ con centro en f_0 y radio r.

Teorema 7.9 (Arzelà-Ascoli) *Sean K un espacio métrico compacto y X un espacio métrico completo. Un subconjunto $\mathcal{H}$ de $\mathcal{C}^0(K,X)$ es relativamente compacto en $\mathcal{C}^0(K,X)$ si y sólo si $\mathcal{H}$ es equicontinuo y los conjuntos*

$$\mathcal{H}(z) := \{f(z) : f \in \mathcal{H}\}$$

son relativamente compactos en X para cada $z \in K$.

Demostración: Supongamos que $\mathcal{H}$ es relativamente compacto en $\mathcal{C}^0(K,X)$. Entonces $\mathcal{H}$ es totalmente acotado. En consecuencia, dada $\varepsilon > 0$, existen $g_1, ..., g_m \in \mathcal{H}$ tales que

$$\mathcal{H} \subset B_\infty(g_1, \frac{\varepsilon}{3}) \cup \cdots \cup B_\infty(g_m, \frac{\varepsilon}{3}).$$

Por tanto, $g_i(z) \in \mathcal{H}(z)$ para $i = 1, ..., m$, y

$$\mathcal{H}(z) \subset B_X(g_1(z), \frac{\varepsilon}{3}) \cup \cdots \cup B_X(g_m(z), \frac{\varepsilon}{3}) \quad \forall z \in K.$$

Esto prueba que $\mathcal{H}(z)$ es totalmente acotado y, como X es completo, el Corolario 7.6 asegura que $\mathcal{H}(z)$ es relativamente compacto en X para todo $z \in K$. Por otra parte, como K es compacto, cada g_i es uniformemente continua. En consecuencia, existe $\delta_i > 0$ tal que, para cualesquiera $y, z \in K$,

$$d_X\left(g_i(y), g_i(z)\right) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{si } d_K(y, z) < \delta_i. \tag{7.2}$$

Definimos $\delta := \text{mín}\{\delta_1, ..., \delta_m\}$. Dada $f \in \mathcal{H}$ existe $i \in \{1, ..., m\}$ tal que $d_\infty(f, g_i) < \frac{\varepsilon}{3}$. Usando (7.2) obtenemos que

$$\begin{array}{rcl} d_X(f(y), f(z)) & \leq & d_X(f(y), g_i(y)) + d_X(g_i(y), g_i(z)) + d_X\left(g_i(z), f(z)\right) \\ & < & \varepsilon \quad \text{ si } \ d_K(y, z) < \delta. \end{array}$$

Esto prueba que $\mathcal{H}$ es equicontinuo.
Supongamos ahora que $\mathcal{H}$ es equicontinuo y que $\mathcal{H}(z)$ es relativamente compacto en X para todo $z \in K$. Queremos probar que $\mathcal{H}$ es relativamente compacto en $\mathcal{C}^0(K, X)$. Como X es completo, $\mathcal{C}^0(K, X)$ también lo es (ver Corolario 5.21). Por el Corolario 7.6 basta entonces probar que $\mathcal{H}$ es totalmente acotado. Sea $\varepsilon > 0$. Para cada $z \in K$ tomemos $\delta_z > 0$ tal que, para toda $f \in \mathcal{H}$,

$$d_X\left(f(y), f(z)\right) < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{si } d_K\left(y, z\right) < \delta_z. \tag{7.3}$$

Como K es compacto, existen $z_1, ..., z_m \in K$ tales que

$$K \subset B_K(z_1, \delta_{z_1}) \cup \cdots \cup B_K(z_m, \delta_{z_m}) \tag{7.4}$$

y, como cada $\mathcal{H}(z_i)$ es totalmente acotado, existen $x_1, ..., x_k \in X$ tales que

$$\mathcal{H}(z_1) \cup \cdots \cup \mathcal{H}(z_m) \subset B_X(x_1, \frac{\varepsilon}{4}) \cup \cdots \cup B_X(x_k, \frac{\varepsilon}{4}) \tag{7.5}$$

Consideremos el conjunto (finito) S de todas las funciones $\sigma : \{1, ..., m\} \to \{1, ..., k\}$. Para cada $\sigma \in S$ consideremos el conjunto

$$\mathcal{H}_\sigma := \{f \in \mathcal{H} : f(z_i) \in B_X(x_{\sigma(i)}, \frac{\varepsilon}{4}) \ \ \forall i = 1, ..., m\}.$$

Se sigue de (7.5) que, para cada $f \in \mathcal{H}$ y cada $i \in \{1, ..., m\}$, existe $\sigma(i) \in \{1, ..., k\}$ tal que $f(z_i) \in B_X(x_{\sigma(i)}, \frac{\varepsilon}{4})$. En consecuencia,

$$\mathcal{H} \subset \bigcup_{\sigma \in S} \mathcal{H}_\sigma. \tag{7.6}$$

Sean $f, g \in \mathcal{H}_\sigma$ y sea $z \in K$. Se sigue de (7.4) que existe $i \in \{1, ..., m\}$ tal que $d_K(z, z_i) < \delta_{z_i}$ y, en consecuencia, (7.3) implica que $d_X(h(z), h(z_i)) < \frac{\varepsilon}{4}$ para toda $h \in \mathcal{H}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} d_X(f(z), g(z)) &\leq d_X(f(z), f(z_i)) + d_X(f(z_i), x_{\sigma(i)}) \\ &\quad + d_X(g(z_i), x_{\sigma(i)}) + d_X(g(z), g(z_i)) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Tomando el máximo sobre toda $z \in K$ concluimos que $d_\infty(f, g) < \varepsilon$ para todas $f, g \in \mathcal{H}_\sigma$. En consecuencia, para cualquier elección de $g_\sigma \in \mathcal{H}_\sigma$, se cumple que

$$\mathcal{H}_\sigma \subset B_\infty(g_\sigma, \varepsilon). \tag{7.7}$$

De (7.6) y (7.7) se sigue que

$$\mathcal{H} \subset \bigcup_{\sigma \in S} B_\infty(g_\sigma, \varepsilon).$$

Por tanto, $\mathcal{H}$ es totalmente acotado. ∎

Recordemos que $\mathcal{H}$ es un subconjunto acotado de $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R}^n)$ si existen $f_0 \in \mathcal{H}$ y $C > 0$ tales que

$$\|f - f_0\|_\infty := \max_{z \in K} \|f(z) - f_0(z)\| \leq C \quad \forall f \in \mathcal{H}$$

(ver Definición 4.6). El teorema de Arzelà-Ascoli permite caracterizar a los subconjuntos relativamente compactos de $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R}^n)$ como sigue.

Corolario 7.10 *Sea K un espacio métrico compacto. Un subconjunto $\mathcal{H}$ de $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R}^n)$ es relativamente compacto en $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R}^n)$ si y sólo si $\mathcal{H}$ es equicontinuo y acotado en $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R}^n)$.*

Demostración: Sea $\mathcal{H}$ un subconjunto relativamente compacto en $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R}^n)$. Por el Teorema 7.9, $\mathcal{H}$ es equicontinuo y, por la Proposición 4.7, la cerradura de $\mathcal{H}$ es acotada en $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R}^n)$. En consecuencia, $\mathcal{H}$ es acotado en $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R}^n)$.
Inversamente, supongamos que $\mathcal{H}$ es equicontinuo y acotado en $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R}^n)$. Entonces existen $f_0 \in \mathcal{H}$ y $C > 0$ tales que

$$\|f - f_0\|_\infty := \max_{z \in K} \|f(z) - f_0(z)\| \leq C \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

En consecuencia, $\mathcal{H}(z)$ está acotado en $\mathbb{R}^n$ para todo $z \in K$ y, por el teorema de Heine-Borel (ver Teorema 4.13), $\mathcal{H}(z)$ es relativamente compacto en $\mathbb{R}^n$ para todo $z \in K$. El Teorema 7.9 asegura entonces que $\mathcal{H}$ es relativamente compacto en $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R}^n)$. ∎

Daremos a continuación una primera aplicación interesante de este resultado. Requerimos la siguiente definición.

Definición 7.11 *Una función lineal $T : V \to W$ entre espacios de Banach se llama un **operador compacto** si, para toda sucesión acotada (v_k) en V, la sucesión (Tv_k) contiene una subsucesión convergente en W.*

Proposición 7.12 *Sea $\mathcal{K} : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. El operador de Volterra $\mathfrak{V} : \mathcal{C}^0[a,b] \to \mathcal{C}^0[a,b]$ dado por*

$$(\mathfrak{V}f)(x) := \int_a^x \mathcal{K}(x,y)f(y)dy$$

es un operador compacto.

Demostración: Sea (f_k) una sucesión en $\mathcal{C}^0[a,b]$ tal que $\|f_k\|_\infty \leq c$ para algún $c \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$|(\mathfrak{V}f_k)(x)| \leq \int_a^x |\mathcal{K}(x,y)|\,|f_k(y)|\,dy \leq (b-a)\,\|\mathcal{K}\|_\infty\,\|f_k\|_\infty \leq (b-a)\,\|\mathcal{K}\|_\infty\,c$$

para todo $x \in [a,b]$ y todo $k \in \mathbb{N}$. Por tanto, $\|\mathfrak{V}f_k\|_\infty \leq (b-a)\,\|\mathcal{K}\|_\infty\,c$ para todo $k \in \mathbb{N}$, es decir, $\mathcal{H} := \{\mathfrak{V}f_k : k \in \mathbb{N}\}$ es acotado en $\mathcal{C}^0[a,b]$. Más aún, como $\mathcal{K}$ es uniformemente continua, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$|\mathcal{K}(x_1,y_1) - \mathcal{K}(x_2,y_2)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)c} \qquad \text{si } \|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\| < \delta_1.$$

En consecuencia, si $|x_1 - x_2| < \delta := \text{mín}\{\delta_1, \frac{\varepsilon}{2\|\mathcal{K}\|_\infty c}\}$ y $x_1 \leq x_2$, se tiene que

$$\begin{aligned} |(\mathfrak{V}f_k)(x_1) - (\mathfrak{V}f_k)(x_2)| &= \left|\int_a^{x_1} (\mathcal{K}(x_1,y) - \mathcal{K}(x_2,y))f_k(y)dy - \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{K}(x_2,y)f_k(y)dy\right| \\ &\leq \int_a^{x_1} |\mathcal{K}(x_1,y) - \mathcal{K}(x_2,y)|\,|f_k(y)|\,dy + \int_{x_1}^{x_2} |\mathcal{K}(x_2,y)|\,|f_k(y)|\,dy \\ &< (b-a)\frac{\varepsilon}{2(b-a)c}c + \frac{\varepsilon}{2\,\|\mathcal{K}\|_\infty\,c}\,\|\mathcal{K}\|_\infty\,c = \varepsilon, \end{aligned}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Esto prueba que $\mathcal{H}$ es equicontinuo. Por el Corolario 7.10, $\mathcal{H}$ es relativamente compacto en $\mathcal{C}^0[a,b]$ y, en consecuencia, $(\mathfrak{V}f_k)$ contiene una subsucesión convergente en $\mathcal{C}^0[a,b]$. ■

Esta proposición tiene consecuencias importantes, como la que veremos en la Sección ??. A continuación daremos otras dos aplicaciones interesantes del teorema de Arzelà-Ascoli.

7.3. El problema de Cauchy

Sean Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $\chi : (a,b) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ una función continua, $t_0 \in (a,b)$ y $x_0 \in \Omega$. En la Sección 6.4 probamos que el problema de Cauchy

$$\begin{cases} u' = \chi(t,u), \\ u(t_0) = x_0. \end{cases}$$

tiene una única solución en un intervalo $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ si el campo vectorial χ es localmente Lipschitz continuo en la segunda variable (ver Teorema 6.19). Usaremos el teorema de Arzelà-Ascoli para probar que basta con que el campo vectorial sea continuo para que este problema tenga solución. En este caso, sin embargo, la solución no necesariamente es única (ver Ejercicio 6.38).

Fijemos $r > 0$ tal que

$$[t_0 - r, t_0 + r] \subset (a,b) \quad \text{y} \quad \bar{B}(x_0, r) \subset \Omega \tag{7.8}$$

y consideremos el conjunto

$$K := \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| \leq r, \ \ \|x - x_0\| \leq r\}.$$

Sea $M > 0$ tal que

$$M > \max_{(t,x) \in K} \|\chi(t,x)\|,$$

y sea

$$\delta := \min\{r, \frac{r}{M}\}.$$

Empezaremos demostrando que el problema de Cauchy tiene soluciones aproximadas.

Lema 7.13 *Dada $\varepsilon > 0$ existe $u_\varepsilon \in \mathcal{C}^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n)$ con las siguientes propiedades:*
(i) $u_\varepsilon(t_0) = x_0$.
(ii) $\|u_\varepsilon(t) - x_0\| \leq r$ *para todo* $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.
(iii) $\|u_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(s)\| \leq M|t - s|$ *si* $s, t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.
(iv) Existe un subconjunto finito F_ε de $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ tal que u_ε es continuamente diferenciable en $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \smallsetminus F_\varepsilon$, y

$$\|u_\varepsilon'(t) - \chi(t, u_\varepsilon(t))\| < \varepsilon \qquad \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \smallsetminus F_\varepsilon.$$

Demostración: Como χ es uniformemente continua en K, existe $\gamma > 0$ tal que, para cualesquiera $(s,x), (t,y) \in K$,

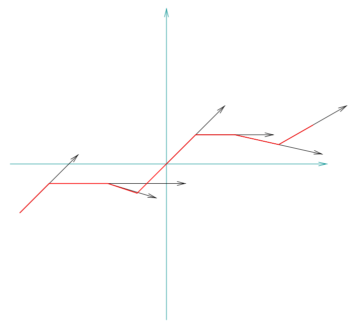
$$\|\chi(s,x) - \chi(t,y)\| \leq \varepsilon \quad \text{si } |s - t| \leq \gamma, \ \ \|x - y\| \leq \gamma. \tag{7.9}$$

Subdividimos el intervalo $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ en subintervalos

$$t_0 - \delta =: t_{-n} < \cdots < t_{-1} < t_0 < t_1 < \cdots < t_n := t_0 + \delta$$

tales que $|t_{i+1} - t_i| \leq \text{mín}\{\gamma, \gamma/M\}$ para toda $i = -n, ..., n-1$.
Definimos $u_\varepsilon : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathbb{R}^n$, empezando con $u_\varepsilon(t_0) := x_0$, recursivamente como sigue:

$$u_\varepsilon(t) := \begin{cases} u_\varepsilon(t_i) + (t - t_i)\chi(t_i, u_\varepsilon(t_i)) & \text{si } i \geq 0,\ t \in [t_i, t_{i+1}] \\ u_\varepsilon(t_i) + (t - t_i)\chi(t_i, u_\varepsilon(t_i)) & \text{si } i \leq 0,\ t \in [t_{i-1}, t_i] \end{cases}$$



Probaremos primero que u_ε está bien definida, es decir, que $u_\varepsilon(t_i) \in \Omega$ para todo $i = -n, ..., n$. Para ello, basta probar que

$$\|u_\varepsilon(t_i) - x_0\| \leq M\,|t_i - t_0| \qquad \forall i = -n, ..., n, \tag{7.10}$$

ya que, en ese caso, $\|u_\varepsilon(t_i) - x_0\| \leq M\delta \leq r$ y, en consecuencia, $u_\varepsilon(t_i) \in \Omega$. Demostraremos la desigualdad (7.10) inductivamente. Si $i = 0$, puesto que hemos definido $u_\varepsilon(t_0) := x_0$, la desigualdad se cumple. Supongamos que $\|u_\varepsilon(t_i) - x_0\| \leq M\,|t_i - t_0|$ para algún $|i| < n$ y tomemos $s, t \in [t_i, t_{i+1}]$ si $i \geq 0$, o bien $s, t \in [t_{i-1}, t_i]$ si $i \leq 0$. Como

$$\|u_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(s)\| = \|(t - s)\chi(t_i, u_\varepsilon(t_i))\| \leq M\,|t - s|\,,$$

se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon(t) - x_0\| &\leq \|u_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(t_i)\| + \|u_\varepsilon(t_i) - x_0\| \\ &\leq M\,|t - t_i| + M\,|t_i - t_0| = M\,|t - t_0|\,. \end{aligned}$$

En particular, $\|u_\varepsilon(t_{i+1}) - x_0\| \leq M\,|t_{i+1} - t_0|$ si $i \geq 0$ y $\|u_\varepsilon(t_{i-1}) - x_0\| \leq M\,|t_{i-1} - t_0|$ si $i \leq 0$. Esto prueba, inductivamente, la desigualdad (7.10).
Verifiquemos ahora que u_ε tiene las propiedades deseadas. Por definición, u_ε cumple *(i)*. Para $s, t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ con $t_{j-1} \leq s < t_j < \cdots < t_{j+i} < t \leq t_{j+i+1}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(s)\| &\leq \|u_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(t_{j+i})\| + \cdots + \|u_\varepsilon(t_j) - u_\varepsilon(s)\| \\ &\leq M(t - t_{j+i}) + \cdots + M(t_j - s) = M\,|t - s|\,. \end{aligned}$$

Es decir, se cumple *(iii)*. Tomando $s = t_0$ en la desigualdad anterior obtenemos

$$\|u_\varepsilon(t) - x_0\| \leq M\,|t - t_0| \leq r \qquad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta].$$

Esta es la afirmación *(ii)*. Claramente, u_ε es continuamente diferenciable en $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \smallsetminus \{t_i : i = -n+1, \ldots, n-1\}$. Si $t \in (t_i, t_{i+1})$, usando *(iii)* obtenemos que

$$|t - t_i| \leq \gamma \quad \text{y} \quad \|u_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(t_i)\| \leq \gamma.$$

Se sigue entonces de (7.9) que

$$\|\chi(t, u_\varepsilon(t)) - u_\varepsilon'(t)\| = \|\chi(t, u_\varepsilon(t)) - \chi(t_i, u_\varepsilon(t_i))\| \leq \varepsilon.$$

Esto prueba la afirmación *(iv)*. ■

Teorema 7.14 (Cauchy-Peano) *Sean Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $\chi : (a,b) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ una función continua. Entonces, para cada $(t_0, x_0) \in (a,b) \times \Omega$, existe $\delta > 0$ tal que el problema de Cauchy*

$$\begin{cases} u' = \chi(t,u), \\ u(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{7.11}$$

tiene al menos una solución en el intervalo $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Demostración: Consideremos el conjunto

$$\mathcal{H} := \{u_{1/k} \in \mathcal{C}^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n) : k \in \mathbb{N}\},$$

donde $u_{1/k}$ es la función dada por el Lema 7.13. En particular, si denotamos por x_0 a la función constante con valor x_0 definida en $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, la función $u_{1/k}$ satisface

$$\left\|u_{1/k} - x_0\right\|_\infty := \max_{|t-t_0| \leq \delta} \left\|u_{1/k}(t) - x_0\right\| \leq r.$$

Esto prueba que $\mathcal{H}$ está acotado en $\mathcal{C}^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n)$. Por otra parte, dada $\varepsilon > 0$, la propiedad *(iii)* del Lema 7.13 asegura que, para toda $k \in \mathbb{N}$,

$$\left\|u_{1/k}(t) - u_{1/k}(s)\right\| < \varepsilon \qquad \text{si} \quad |t - s| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Esto prueba que $\mathcal{H}$ es equicontinuo.
El Corolario 7.10 asegura entonces que $\mathcal{H}$ es relativamente compacto en $\mathcal{C}^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n)$. Por tanto, existen una subsucesión (u_{1/k_j}) de $(u_{1/k})$ y una función $u^* \in \mathcal{C}^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n)$ tales que

$$u_{1/k_j} \to u^* \text{ cuando } j \to \infty \quad \text{en } \mathcal{C}^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n). \tag{7.12}$$

Probaremos ahora que u^* es una solución del problema (7.11).
Como $u_{1/k_j}(t) \to u^*(t)$ para cada $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, la propiedad *(ii)* implica que

$$\|u^*(t) - x_0\| \leq r \qquad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta].$$

Se sigue de (7.8) que $u^*(t) \in \Omega$ para todo $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Además, la propiedad *(i)* implica que $u^*(t_0) = x_0$. Demostraremos que u^* satisface

$$u^*(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \chi(s, u^*(s))ds \qquad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]. \tag{7.13}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como χ es uniformemente continua en K, existe $\eta > 0$ tal que

$$\|\chi(s, x) - \chi(s, y)\| < \frac{\varepsilon}{3\delta} \qquad \text{si } (s, x), (s, y) \in K \text{ y } \|x - y\| < \eta.$$

Tomemos $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{\delta}{k_j} < \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $j \geq j_0$ y tal que

$$\left\|u_{1/k_j} - u^*\right\|_\infty < \text{mín}\{\eta, \frac{\varepsilon}{3}\} \qquad \text{si } j \geq j_0.$$

Entonces, usando el Lema 6.17, para cada $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ obtenemos

$$\begin{aligned} \left\|\int_{t_0}^{t} \left[\chi(s, u_{1/k_j}(s)) - \chi(s, u^*(s))\right] ds\right\| &\leq |t - t_0| \max_{|s - t_0| \leq \delta} \left\|\chi(s, u_{1/k_j}(s)) - \chi(s, u^*(s))\right\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{si } j \geq j_0. \end{aligned}$$

Usando además el teorema fundamental del Cálculo y la propiedad *(iv)* obtenemos

$$\begin{aligned} \left\|u_{1/k_j}(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} \chi(s, u_{1/k_j}(s))ds\right\| &= \left\|\int_{t_0}^{t} \left[u'_{1/k_j}(s) - \chi(s, u_{1/k_j}(s))\right] ds\right\| \\ &\leq |t - t_0| \frac{1}{k_j} \\ &< \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{si } j \geq j_0. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \left\|u^*(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} \chi(s, u^*(s))ds\right\| &\leq \left\|u^*(t) - u_{1/k_j}(t)\right\| \\ &\quad + \left\|u_{1/k_j}(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} \chi(s, u_{1/k_j}(s))ds\right\| \\ &\quad + \left\|\int_{t_0}^{t} \left[\chi(s, u_{1/k_j}(s)) - \chi(s, u^*(s))\right] ds\right\| \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

para toda $\varepsilon > 0$. Esto demuestra (7.13). El Lema 6.14 asegura entonces que u^* es solución del problema (7.11). ∎

7.4. Existencia de trayectorias de longitud mínima

Volvamos a nuestro problema de partida, el Problema 1.1. Podemos ahora plantear esa misma pregunta de manera más general, para trayectorias en espacios métricos y no únicamente en subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.

Sean $X = (X, d)$ un espacio métrico y $x, y \in X$. Una **trayectoria de x a y en X** es una función continua $\sigma : [a, b] \to X$ tal que $\sigma(a) = x$ y $\sigma(b) = y$. Recordemos que la longitud de σ se define como

$$\mathfrak{L}(\sigma) := \sup \left\{ \sum_{k=1}^{m} d(\sigma(t_{k-1}), \sigma(t_k)) : a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_m = b,\ m \in \mathbb{N} \right\}$$

(ver Definición 4.20). El objetivo de esta sección es dar una respuesta a la siguiente pregunta.

Problema 7.15 *Dados $x, y \in X$, ¿existe una trayectoria de longitud mínima de x a y en X?*

Para poder expresar este problema como un problema de minimización en un espacio de funciones veremos primero que, reparametrizando a σ, podemos siempre suponer que está definida en el intervalo $[0, 1]$.

Si $\rho : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ es una función continua, no decreciente y suprayectiva, y $\sigma \in \mathcal{C}^0([a, b], X)$ es una trayectoria de x a y en X, entonces la trayectoria $\sigma \circ \rho \in \mathcal{C}^0([\alpha, \beta], X)$ es también una trayectoria de x a y en X. Se le llama una **reparametrización de** σ. Las reparametrizaciones preservan la longitud, es decir, se cumple lo siguiente.

Lema 7.16 *Si $\sigma \circ \rho$ es una reparametrización de σ, entonces $\mathfrak{L}(\sigma \circ \rho) = \mathfrak{L}(\sigma)$.*

La demostración es sencilla y se deja como ejercicio [Ejercicio 7.37].

Cualquier trayectoria $\sigma \in \mathcal{C}^0([a, b], X)$ se puede reparamentrizar mediante la función

$$\rho : [0, 1] \to [a, b], \qquad \rho(t) = (1 - t)a + tb.$$

El dominio de la trayectoria $\sigma \circ \rho$ es el intervalo $[0, 1]$ y esta trayectoria tiene la misma longitud que σ.

Consideremos entonces el **espacio de trayectorias**

$$\mathcal{T}_{x,y}(X) := \{\sigma \in \mathcal{C}^0([0,1], X) : \sigma(0) = x,\ \sigma(1) = y\}$$

con la métrica uniforme

$$d_\infty(\sigma, \tau) := \max_{t\in[0,1]} d(\sigma(t), \tau(t)),$$

y la **función longitud**

$$\mathfrak{L} : \mathcal{T}_{x,y}(X) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \qquad \sigma \mapsto \mathfrak{L}(\sigma).$$

El Problema 7.15 se puede reformular como sigue.

Problema 7.17 *¿Alcanza $\mathfrak{L}$ su mínimo en $\mathcal{T}_{x,y}(X)$?*

Recordemos que la función $\mathfrak{L}$ es semicontinua inferiormente (ver Proposición 4.21). Sin embargo, vimos un ejemplo en el que no es posible aplicar el Teorema 4.29 para obtener la existencia de una trayectoria de longitud mínima (ver Ejercicio 4.49). El siguiente resultado muestra que, para nuestro problema, las hipótesis de dicho teorema casi nunca se cumplen.

Proposición 7.18 *Sean $x, y \in X$, $x \neq y$, $c \in \mathbb{R}$. Si $\mathfrak{L}^{\leq c} := \{\sigma \in \mathcal{T}_{x,y}(X) : \mathfrak{L}(\sigma) \leq c\} \neq \emptyset$, entonces $\mathfrak{L}^{\leq c}$ no es compacto.*

Demostración: Sea $\sigma \in \mathcal{T}_{x,y}(X)$ tal que $\mathfrak{L}(\sigma) \leq c$. Las funciones $\rho_k : [0,1] \to [0,1]$ dadas por

$$\rho_k(t) := \begin{cases} kt & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{k}\right], \\ 1 & \text{si } t \in \left[\frac{1}{k}, 1\right], \end{cases}$$

son continuas, no decrecientes y suprayectivas. Por tanto, $\sigma_k := \sigma \circ \rho_k$ es una reparametrización de σ y, en consecuencia, $\mathfrak{L}(\sigma_k) = \mathfrak{L}(\sigma) \leq c$. Observa que

$$\begin{aligned} \sigma_k(t) &= \sigma(1) = y \ \text{ si } t \in (0,1] \text{ y } k \geq \frac{1}{t}, \\ \sigma_k(0) &= \sigma(0) = x \ \text{ para todo } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Argumentando por contradicción, supongamos que $\mathfrak{L}^{\leq c}$ es compacto. Entonces (σ_k) contiene una subsucesión tal que $\sigma_{k_j} \to \sigma^*$ en $\mathcal{C}^0([0,1], X)$. En particular, converge puntualmente, es decir,

$$\sigma^*(t) = \lim_{j\to\infty} \sigma_{k_j}(t) = \begin{cases} x & \text{si } t = 0, \\ y & \text{si } t \in (0,1], \end{cases}$$

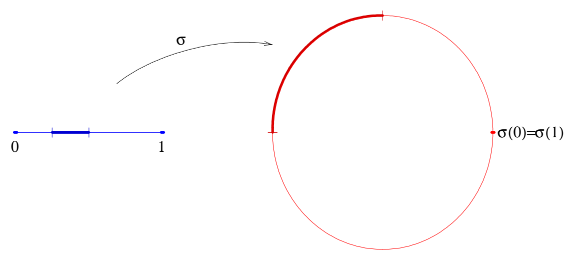
lo que contradice la continuidad de σ^*. En consecuencia, $\mathfrak{L}^{\leq c}$ no es compacto. ■

En la proposición anterior la falta de compacidad se deriva de admitir muchas parametrizaciones de una trayectoria. Mostraremos a continuación que es posible seleccionar una parametrización específica para cada trayectoria.

Definición 7.19 *Decimos que una trayectoria $\sigma \in \mathcal{C}^0([0,1],X)$ de longitud finita está* ***parametrizada proporcionalmente a la longitud de arco*** *si*

$$\mathfrak{L}(\sigma\mid_{[0,t]}) = \mathfrak{L}(\sigma)t \qquad \forall t \in [0,1],$$

donde $\sigma\mid_{[0,t]}: [0,t] \to X$ denota la restricción de σ al intervalo $[0,t]$.



Denotamos por

$$\hat{\mathcal{T}}_{x,y}(X) := \{\sigma \in \mathcal{T}_{x,y}(X) : \mathfrak{L}(\sigma) < \infty,\ \mathfrak{L}(\sigma\mid_{[0,t]}) = \mathfrak{L}(\sigma)t \quad \forall t \in [0,1]\}$$

al espacio de las trayectorias de x a y parametrizadas proporcionalmente a la longitud de arco, con la métrica uniforme.

Lema 7.20 *Para cada $\sigma \in \mathcal{T}_{x,y}(X)$ de longitud finita existe $\hat{\sigma} \in \hat{\mathcal{T}}_{x,y}(X)$ tal que $\mathfrak{L}(\hat{\sigma}) = \mathfrak{L}(\sigma)$.*

Demostración: Sea $\sigma \in \mathcal{T}_{x,y}(X)$. Es sencillo comprobar que la función $\lambda : [0,1] \to [0,\mathfrak{L}(\sigma)]$, dada por

$$\lambda(t) := \mathfrak{L}(\sigma\mid_{[0,t]}),$$

es continua, no decreciente y suprayectiva [Ejercicio 7.38]. Observa que, si $\lambda(t_1) = \lambda(t_2)$, entonces $\sigma(t) = \sigma(t_1)$ para todo $t \in [t_1,t_2]$. Por tanto, la función $\widetilde{\sigma} : [0,\mathfrak{L}(\sigma)] \to X$, dada por

$$\widetilde{\sigma}(s) = \sigma(t) \quad \text{ con } \ \lambda(t) = s,$$

está bien definida. Además es continua [Ejercicio 7.39] y, como $\widetilde{\sigma} \circ \lambda = \sigma$, el Lema 7.16 asegura que

$$\mathfrak{L}(\widetilde{\sigma}\mid_{[0,s]}) = \mathfrak{L}(\sigma\mid_{[0,t]}) = \lambda(t) = s \qquad \forall s \in [0,\mathfrak{L}(\sigma)].$$

Definimos ahora $\hat{\sigma} : [0,1] \to X$ como

$$\hat{\sigma}(t) := \widetilde{\sigma}(\mathfrak{L}(\sigma)t).$$

Claramente, $\hat{\sigma}$ es continua y satisface

$$\mathfrak{L}(\hat{\sigma}\mid_{[0,t]}) = \mathfrak{L}(\widetilde{\sigma}\mid_{[0,\mathsf{L}(\sigma)t]}) = \mathfrak{L}(\sigma)t \qquad \forall t \in [0,1].$$

En particular, $\mathfrak{L}(\hat{\sigma}) = \mathfrak{L}(\sigma)$. Por tanto, $\hat{\sigma} \in \hat{\mathcal{T}}_{x,y}(X)$. ■

El siguiente resultado da una respuesta afirmativa al Problema 7.15 cuando X es compacto.

Teorema 7.21 (Existencia de trayectorias geodésicas) *Sean X un espacio métrico compacto y $x, y \in X$. Si existe una trayectoria de x a y en X, entonces existe una trayectoria de longitud mínima de x a y en X.*

Demostración: Por hipótesis, $\mathcal{T}_{x,y}(X) \neq \emptyset$. Si todas las trayectorias en $\mathcal{T}_{x,y}(X)$ tienen longitud infinita, cualquiera de ellas es un mínimo de $\mathfrak{L}$. Supongamos que $\mathcal{T}_{x,y}(X)$ contiene una trayectoria de longitud finita. Por el Lema 7.20, basta probar que la función

$$\mathfrak{L} : \hat{\mathcal{T}}_{x,y}(X) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

alcanza su mínimo. Sea $\tau \in \hat{\mathcal{T}}_{x,y}(X)$ tal que $\mathfrak{L}(\tau) =: c < \infty$, entonces

$$\mathcal{H} := \{\sigma \in \hat{\mathcal{T}}_{x,y}(X) : \ \mathfrak{L}(\sigma) \leq c\} \neq \emptyset.$$

Usaremos el teorema de Arzelà-Ascoli para probar que este conjunto es relativamente compacto. Como X es compacto, cualquier subconjunto de X es relativamente compacto en él. En particular, $\mathcal{H}(t)$ es relativamente compacto en X para todo $t \in [0,1]$. Así pues, basta probar que $\mathcal{H}$ es equicontinuo. Sean $t_0 \in [0,1]$ y $\varepsilon > 0$. Para toda $\sigma \in \mathcal{H}$ se cumple que

$$\begin{aligned} d(\sigma(t), \sigma(t_0)) &\leq \left|\mathfrak{L}(\sigma\mid_{[0,t]}) - \mathfrak{L}(\sigma\mid_{[0,t_0]})\right| \\ &= \mathfrak{L}(\sigma)\,|t - t_0| \leq c\,|t - t_0| < \varepsilon \quad \text{ si } \quad |t - t_0| < \frac{\varepsilon}{c}. \end{aligned}$$

Esto prueba que $\mathcal{H}$ es equicontinuo. El teorema de Arzelà-Ascoli asegura entonces que $\mathcal{H}$ es relativamente compacto en $\mathcal{C}^0([0,1], X)$.
Como $\mathfrak{L}$ es s.c.i. (ver Proposición 4.21), se tiene que $\mathcal{H}$ es cerrado en $\mathcal{C}^0([0,1], X)$ [Ejercicio 4.46]. En consecuencia, $\mathcal{H}$ es compacto. El Teorema 4.29 asegura entonces que $\mathfrak{L}$ alcanza su mínimo en $\hat{\mathcal{T}}_{x,y}(X)$. ■

7.5. Ejercicios

Ejercicio 7.22 *Sea A un subconjunto de X. Investiga si es falsa o verdadera cada una de las siguientes afirmaciones.*
(a) Si A es acotado, entonces A es totalmente acotado.
(b) Si A es totalmente acotado, entonces A es compacto.
(c) Si A es totalmente acotado, entonces A es relativamente compacto en X.
(d) Si A es relativamente compacto en X, entonces A es totalmente acotado.
(e) Si X es compacto, entonces A es relativamente compacto en X.

Ejercicio 7.23 *Prueba que un espacio métrico X es totalmente acotado si y sólo si toda sucesión en X contiene una subsucesión de Cauchy.*

Ejercicio 7.24 *(a) Prueba que, si $\phi : X \to Y$ es uniformemente continua y A es un subconjunto totalmente acotado de X, entonces $\phi(A)$ es un subconjunto totalmente acotado de Y.*
(b) ¿Es cierto que, si $\phi : X \to Y$ es continua y A es un subconjunto totalmente acotado de X, entonces $\phi(A)$ es un subconjunto totalmente acotado de Y? Demuestra tu afirmación.

Ejercicio 7.25 *Prueba que los subconjuntos totalmente acotados de $\mathbb{R}^n$ son precisamente los conjuntos acotados.*

Ejercicio 7.26 *Sea X un espacio vectorial normado y sea $S_X := \{x \in X : \|x\| = 1\}$ la esfera unitaria en X. En cada uno de los siguientes casos investiga si la esfera unitaria es o no totalmente acotada. Demuestra tu afirmación.*
(a) $X = \ell_2$.
(b) $X = \ell_\infty$.
(c) $X = \mathcal{C}^0[0,1]$.
(d) $X = \mathcal{C}^0_1[0,1]$.

Ejercicio 7.27 *Prueba que, si X y Y son espacios métricos compactos, el producto $X \times Y$ con cualquiera de las métricas del* Ejercicio 2.51 *es compacto.*

Ejercicio 7.28 *El conjunto*

$$\mathcal{Q} := \left\{ (x_k) \in \ell_2 : |x_k| \leq \frac{1}{2^{k-1}} \right\}$$

*se llama el **cubo de Hilbert.** Prueba que*
(a) $\mathcal{Q}$ es cerrado en ℓ_2

(b) $\mathcal{Q}$ es totalmente acotado. (Sugerencia: Prueba que, para cada $k_0 \in \mathbb{N}$, el conjunto $\mathcal{Q}^{k_0} := \{(x_k) \in \mathcal{Q} : x_k = 0 \quad \forall k > k_0\}$ es compacto. Dado $x = (x_k) \in \mathcal{Q}$, define $x^{k_0} := (x_1, ..., x_{k_0}, 0, 0, ...) \in \mathcal{Q}^{k_0}$. Prueba que $\left\|x - x^{k_0}\right\|_2 < \frac{1}{2^{k_0-1}}$.)
En consecuencia, el cubo de Hilbert es compacto.

Ejercicio 7.29 *Prueba que el conjunto $\mathcal{H} = \{f_k : [-1,1] \to \mathbb{R} : k \in \mathbb{N}\}$ de las funciones continuas*

$$f_k(x) = \begin{cases} -1 & si\ -1 \leq x \leq -\frac{1}{k} \\ kx & si\ -\frac{1}{k} \leq x \leq \frac{1}{k} \\ 1 & si\ \frac{1}{k} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

no es equicontinuo en 0.

Ejercicio 7.30 *Sean Z y X espacios métricos y $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}_b^0(Z,X)$. Prueba que, si existen $C, \alpha > 0$ tales que*

$$d_X(f(x), f(y)) \leq C\,(d_Z(x,y))^{\alpha} \qquad \forall f \in \mathcal{H},$$

entonces $\mathcal{H}$ es equicontinuo.

Ejercicio 7.31 *Sean Z y X espacios métricos. Prueba que la cerradura en $\mathcal{C}_b^0(Z,X)$ de cualquier subconjunto equicontinuo es equicontinua.*

Ejercicio 7.32 *Sea $f_k : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ la función dada por $f_k(t) := \operatorname{sen}\sqrt{t + 4\pi^2 k^2}$. Demuestra las siguientes afirmaciones.*
(a) El conjunto $\mathcal{H} := \{f_k : k \in \mathbb{N}\}$ es equicontinuo.
(b) El conjunto $\mathcal{H}(t)$ es relativamente compacto en $\mathbb{R}$ para cada $t \in [0,\infty)$. (Sugerencia: Prueba que la sucesión (f_k) converge puntualmente a 0 en $[0,\infty)$.)
(c) $\mathcal{H}$ no es un subconjunto compacto de $\mathcal{C}_b^0([0,\infty),\mathbb{R})$. (Sugerencia: Prueba que la sucesión (f_k) no converge uniformemente a 0 en $[0,\infty)$.)
Concluye que la compacidad de K es necesaria en el teorema de Arzelà-Ascoli.

Ejercicio 7.33 *Sean $X := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (\frac{1}{2},0)\}$ y $\sigma_k \in \mathcal{C}^0([0,1],X)$ la función $\sigma_k(t) := (t, \frac{1}{k}sen\pi t)$. Considera el conjunto $\mathcal{H} := \{\sigma_k : k \in \mathbb{N}\}$.*
(a) ¿Es $\mathcal{H}$ equicontinuo?
(b) ¿Es $\mathcal{H}$ acotado en $\mathcal{C}^0([0,1],X)$?
(c) ¿Es $\mathcal{H}$ relativamente compacto en $\mathcal{C}^0([0,1],X)$?
Compara tus conclusiones con el Corolario 7.10.

Ejercicio 7.34 *Sean K un espacio métrico compacto, X un espacio métrico completo y (f_k) una sucesión en $\mathcal{C}^0(K,X)$ que converge puntualmente a una función $f : K \to X$. Prueba que, si $\mathcal{H} := \{f_k : k \in \mathbb{N}\}$ es equicontinuo, entonces f es continua y $f_k \to f$ en $\mathcal{C}^0(K,X)$.*

Ejercicio 7.35 *Prueba que, si K y X son espacios métricos compactos, entonces un subconjunto $\mathcal{H}$ de $\mathcal{C}^0(K,X)$ es relativamente compacto en $\mathcal{C}^0(K,X)$ si y sólo si es equicontinuo.*

Ejercicio 7.36 *Sea $\mathcal{K} : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Prueba que el operador de Fredholm $\mathfrak{F} : \mathcal{C}^0[a,b] \to \mathcal{C}^0[a,b]$ dado por*

$$(\mathfrak{F}f)(x) := \int_a^b \mathcal{K}(x,y) f(y) dy$$

es un operador compacto.

Ejercicio 7.37 *Sea $\rho : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ una función continua, no decreciente y suprayectiva. Prueba que, para toda $\sigma \in \mathcal{C}^0([a,b],X)$ se cumple que*

$$\mathfrak{L}(\sigma \circ \rho) = \mathfrak{L}(\sigma).$$

Ejercicio 7.38 *Sea $\sigma \in \mathcal{C}^0([0,1],X)$ una trayectoria de longitud finita. Prueba que la función $\lambda : [0,1] \to [0, \mathfrak{L}(\sigma)]$, dada por*

$$\lambda(t) := \mathfrak{L}(\sigma \mid_{[0,t]}),$$

es continua, no decreciente y suprayectiva.

Ejercicio 7.39 *Sea $\sigma \in \mathcal{C}^0([0,1],X)$ una trayectoria de longitud finita. Prueba que la función $\widetilde{\sigma} : [0, \mathfrak{L}(\sigma)] \to X$ dada por*

$$\widetilde{\sigma}(s) := \sigma(t), \quad \text{donde } t \in [0,1] \text{ es tal que } \mathfrak{L}(\sigma \mid_{[0,t]}) = s,$$

es continua.

Ejercicio 7.40 *Sean X un espacio métrico y $x \in X$. Prueba que el espacio de trayectorias*

$$\mathcal{T}_x(X) := \{\sigma \in \mathcal{C}^0([0,1],X) : \sigma(0) = \sigma(1) = x\}$$

de x a x en X es relativamente compacto en $\mathcal{C}^0([0,1],X)$ si y sólo si la única trayectoria de x a x en X es la trayectoria constante.

Capítulo 8

Teoremas de aproximación

Cuando hacemos cálculos con números reales usamos siempre una aproximación decimal de éstos, es decir, usamos algún número racional suficientemente cercano al número real que nos interesa.

En este capítulo probaremos que toda función continua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se puede aproximar uniformemente por una función polinomial. Este resultado se conoce como el teorema de aproximación de Weierstrass y tiene gran relevancia desde el punto de vista teórico y práctico, ya que que los polinomios son funciones sencillas y fáciles de calcular.

De hecho, exhibiremos una sucesión explícita de polinomios que converge uniformemente a f en $[a,b]$, los *polinomios de Bernstein*, y estimaremos el error en la aproximación.

La versión original del teorema de aproximación fue formulada por Karl Weierstrass en 1885. En 1937 Marshall H. Stone[1] generalizó considerablemente este resultado, y simplificó su demostración. Su resultado se conoce como el teorema de Stone-Weierstrass, y extiende el resultado original de Weierstrass en dos sentidos: permite remplazar al intervalo $[a,b]$ por cualquier espacio métrico compacto K, y permite remplazar a los polinomios por subconjuntos más generales del espacio de funciones continuas $\mathcal{C}^0(K,\mathbb{R})$. En este capítulo expondremos también este resultado.

8.1. El teorema de aproximación de Weierstrass

El objetivo de esta sección es demostrar que toda función continua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se puede aproximar uniformemente por polinomios, es decir, por funciones de la forma

$$p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n, \qquad a_k \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

[1]Marshall Harvey Stone (1903-1989) fue un matemático estadounidense que realizó importantes contribuciones al análisis real, al análisis funcional y a la topología.

Este resultado se conoce como el teorema de aproximación de Weierstrass. Más aún, exhibiremos una sucesión explícita de polinomios que converge uniformemente a la función f en $[a, b]$.

Para $0 \leq k \leq n$ consideremos los polinomios

$$\gamma_{n,k}(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k},$$

donde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

es el coeficiente binomial. De la conocida fórmula binomial

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

se sigue que

$$\sum_{k=0}^{n} \gamma_{n,k}(t) = 1. \tag{8.1}$$

Multiplicando por t la igualdad (8.1) para $n-1$ en vez de n, obtenemos

$$\begin{aligned} t &= t \sum_{j=0}^{n-1} \gamma_{n-1,k}(t) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} t^{j+1} (1-t)^{n-1-j} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{j+1}{n} \binom{n}{j+1} t^{j+1} (1-t)^{n-(j+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \gamma_{n,k}(t) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \gamma_{n,k}(t). \end{aligned}$$

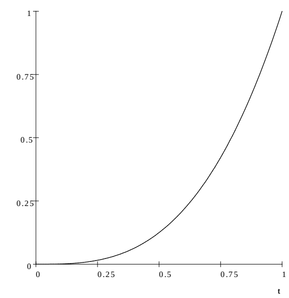
En consecuencia,

$$nt = \sum_{k=0}^{n} k \gamma_{n,k}(t). \tag{8.2}$$

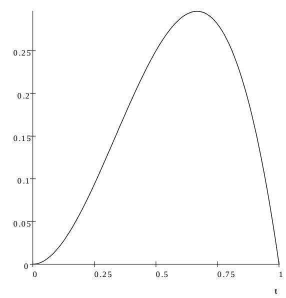
De manera análoga, multiplicando por t^2 la igualdad (8.1) para $n-2$ en vez de n, es sencillo probar que

$$(n^2-n)t^2 = \sum_{k=0}^{n}(k^2-k)\gamma_{n,k}(t) \tag{8.3}$$

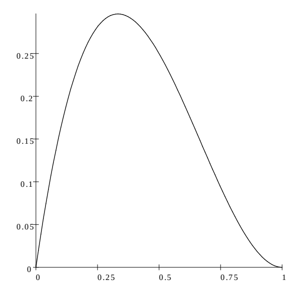
[Ejercicio 8.12].



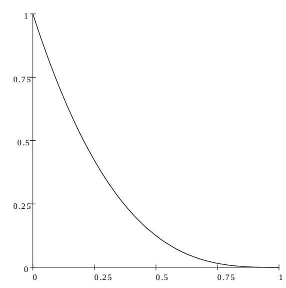
$\gamma_{3,3}(t) = t^3$



$\gamma_{3,2}(t) = 2t^2(1-t)$



$\gamma_{3,1}(t) = 2t(1-t)^2$



$\gamma_{3,0}(t) = (1-t)^3$

Definición 8.1 *Sea $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ una función continua. El* ***n-ésimo polinomio de Bernstein***[2] ***de*** *f es el polinomio*

$$\beta_n(t) = \beta_{f,n}(t) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\gamma_{n,k}(t).$$

[2] Sergei Natanovich Bernstein (1880-1968) fue un matemático ruso. En su tesis doctoral, presentada en 1904 en la Sorbona, resolvió el 19^o problema de Hilbert sobre la solución analítica de ecuaciones diferenciales elípticas. Realizó importantes contribuciones a la teoría de probabilidad, la teoría constructiva de funciones y los fundamentos matemáticos de la genética.

Se tiene el siguiente resultado.

Teorema 8.2 (Bernstein) *Sea $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ una función continua. La sucesión de polinomios de Bernstein $(\beta_{f,n})$ converge uniformemente a f en $[0,1]$.*

Demostración: Sea $\varepsilon>0$. Como f es uniformemente continua, existe $\delta>0$ tal que

$$|f(s)-f(t)|<\frac{\varepsilon}{2}\quad \text{si } |s-t|<\delta. \tag{8.4}$$

Fijemos $t\in[0,1]$. Multiplicando la igualdad (8.1) por $f(t)$ obtenemos que

$$f(t)=\sum_{k=0}^{n}f(t)\gamma_{n,k}(t)\qquad \forall n\in\mathbb{N}.$$

En consecuencia,

$$\left|f(t)-\beta_{f,n}(t)\right|=\left|\sum_{k=0}^{n}(f(t)-f\left(\frac{k}{n}\right))\gamma_{n,k}(t)\right|\leq\sum_{k=0}^{n}\left|f(t)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\gamma_{n,k}(t). \tag{8.5}$$

Probaremos que el lado derecho de esta desigualdad es menor que ε si n satisface

$$n\geq \max\left\{\frac{1}{\delta^4},\frac{\|f\|_\infty^2}{\varepsilon^2}\right\} \tag{8.6}$$

Consideremos los conjuntos

$$\begin{aligned} I_1 &= \left\{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}:0\leq k\leq n,\ \left|\frac{k}{n}-t\right|<\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{4}}\right\},\\ I_2 &= \{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}:0\leq k\leq n,\ k\notin I_1\},\end{aligned}$$

y tomemos una n que cumple (8.6). Entonces $\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{4}}\leq\delta$, y se sigue de (8.4) y de (8.1) que

$$\sum_{k\in I_1}\left|f(t)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\gamma_{n,k}(t)<\sum_{k\in I_1}\frac{\varepsilon}{2}\gamma_{n,k}(t)\leq\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n}\gamma_{n,k}(t)=\frac{\varepsilon}{2}. \tag{8.7}$$

Por otra parte, si $k\in I_2$ entonces $(t-\frac{k}{n})^{-2}\leq\sqrt{n}$ y, en consecuencia,

$$\begin{aligned}\sum_{k\in I_2}\left|f(t)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\gamma_{n,k}(t) &\leq \sum_{k\in I_2}2\|f\|_\infty\gamma_{n,k}(t)\\ &= 2\|f\|_\infty\sum_{k\in I_2}\frac{(t-\frac{k}{n})^2}{(t-\frac{k}{n})^2}\gamma_{n,k}(t)\\ &\leq 2\|f\|_\infty\sqrt{n}\sum_{k\in I_2}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2\gamma_{n,k}(t). \qquad (8.8)\end{aligned}$$

Probaremos que ahora que

$$\sum_{k=0}^{n}\left(t-\frac{k}{n}\right)^{2}\gamma_{n,k}(t)\leq\frac{1}{4n}\qquad\forall n\in\mathbb{N}. \tag{8.9}$$

Multiplicando la igualdad (8.1) por t^2, la igualdad (8.2) por $-\frac{2}{n}t$, y la suma de las igualdades (8.2) y (8.3) por $\frac{1}{n^2}$ obtenemos, respectivamente,

$$\begin{aligned}
t^2 &= \sum_{k=0}^{n} t^2\gamma_{n,k}(t),\\
-2t^2 &= \sum_{k=0}^{n} -2\frac{k}{n}t\gamma_{n,k}(t),\\
\left(1-\frac{1}{n}\right)t^2+\frac{1}{n}t &= \sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}\gamma_{n,k}(t).
\end{aligned}$$

Sumando estas tres igualdades obtenemos

$$\frac{1}{n}(t-t^2)=\sum_{k=0}^{n}\left(t-\frac{k}{n}\right)^{2}\gamma_{n,k}(t). \tag{8.10}$$

Observa que $\text{máx}_{t\in[0,1]}(t-t^2)=\frac{1}{4}$. En consecuencia, (8.10) implica (8.9).
Si n satisface (8.6) entonces $\frac{\|f\|_\infty}{\sqrt{n}}\leq\varepsilon$. Por tanto, (8.8) y (8.9) implican que

$$\sum_{k\in I_2}\left|f(t)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\gamma_{n,k}(t)\leq\frac{\varepsilon}{2}.$$

De esta desigualdad, junto con (8.5) y (8.7), obtenemos que

$$\begin{aligned}
\left|f(t)-\beta_{f,n}(t)\right| &\leq \sum_{k=0}^{n}\left|f(t)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\gamma_{n,k}(t)\\
&= \sum_{k\in I_1}\left|f(t)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\gamma_{n,k}(t)+\sum_{k\in I_2}\left|f(t)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\gamma_{n,k}(t)<\varepsilon
\end{aligned}$$

para toda $t\in[0,1]$, si n satisface (8.6). Es decir,

$$\left\|f-\beta_{f,n}\right\|_\infty<\varepsilon\qquad\text{si}\ \ n\geq\text{máx}\left\{\frac{1}{\delta^4},\frac{\|f\|_\infty^2}{\varepsilon^2}\right\}. \tag{8.11}$$

Esto concluye la demostración. ■

Observa que la fórmula (8.11) nos da una estimación del error, en términos de f, en cada paso de la aproximación.

El siguiente resultado es consecuencia inmediata del teorema anterior.

Teorema 8.3 (de aproximación de Weierstrass) *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces existe una sucesión de polinomios (p_n) que converge uniformemente a f en $[a,b]$.*

Demostración: Este resultado se obtiene del anterior mediante un cambio de variable. Específicamente, sea $\rho : [0,1] \to [a,b]$ la función dada por $\rho(t) := (1-t)a + tb$. Aplicando el Teorema 8.2 a la función $g := f \circ \rho$ obtenemos que

$$\beta_{g,n} \to g \quad \text{en } \mathcal{C}^0[0,1].$$

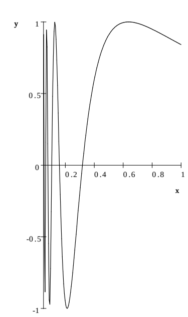
La función $p_n := \beta_{g,n} \circ \rho^{-1}$ es un polinomio y se cumple que

$$\|p_n - f\|_\infty := \max_{s\in[a,b]} |p_n(s) - f(s)| = \max_{t\in[0,1]} \left|\beta_{g,n}(t) - g(t)\right| =: \left\|\beta_{g,n} - g\right\|_\infty .$$

En consecuencia, $p_n \to f$ en $\mathcal{C}^0[a,b]$. ■

La compacidad del dominio de f jugó un papel importante en la demostración del Teorema 8.2 para asegurar la continuidad uniforme de f. El siguiente ejemplo muestra que el Teorema 8.3 no es válido, en general, si el dominio no es compacto.

Ejemplo 8.4 *Sea $f(t) = \operatorname{sen}\frac{1}{t}$, $t \in (0,1]$. Ninguna sucesión de polinomios converge uniformemente a f en $(0,1]$.*



Demostración: Argumentando por contradicción, supongamos que existe una sucesión de polinomios (p_k) que converge uniformemente a f en $(0,1]$. Entonces (p_k) converge a f en $\mathcal{B}((0,1],\mathbb{R})$ (ver Proposición 5.15) y, por tanto, es de Cauchy en $\mathcal{B}((0,1],\mathbb{R})$. Es decir, dada $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|p_k(t) - p_j(t)| < \varepsilon \qquad \forall t \in (0,1]\,,\ \forall k,j \geq k_0.$$

Como la función $t \mapsto |p_k(t) - p_j(t)|$ es continua en todo $\mathbb{R}$, la desigualdad anterior implica que

$$|p_k(0) - p_j(0)| \leq \varepsilon \qquad \forall k,j \geq k_0.$$

Esto demuestra que (p_k) es de Cauchy en $\mathcal{C}^0[0,1]$. Por tanto, como $\mathcal{C}^0[0,1]$ es completo (ver Corolario 5.21), existe $g \in \mathcal{C}^0[0,1]$ tal que

$$p_k \to g \quad \text{ en } \ \mathcal{C}^0[0,1].$$

En particular, se cumple que

$$g(t) = \lim_{k\to\infty} p_k(t) = \operatorname{sen}\frac{1}{t} \qquad \forall t \in (0,1].$$

Como g es continua en $[0,1]$, se tiene entonces que

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} g\left(\frac{2}{n\pi}\right) = g(0),$$

lo cual es una contradicción, ya que la sucesión $\left(\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\right)$ no converge. ■

8.2. El teorema de Stone-Weierstrass

Sea X un espacio métrico.

Definición 8.5 *Un subconjunto A de X es* ***denso en*** *X si $\overline{A} = X$, es decir, si para todo $x \in X$ existe una sucesión (a_k) en A tal que $a_k \to x$ en X.*

Por ejemplo, el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es denso en $\mathbb{R}$.

Denotemos por $\mathbb{R}[t]$ al conjunto de todos los polinomios

$$p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_n t^n, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ \alpha_i \in \mathbb{R},$$

con coeficientes reales. En términos de la definición anterior, el Teorema 8.3 afirma que el conjunto de funciones polinomiales en $[a,b]$,

$$\mathcal{P}[a,b] := \{p\,|_{[a.b]} \colon p \in \mathbb{R}[t]\},$$

es denso en $\mathcal{C}^0[a,b]$.

En esta sección probaremos un resultado más general, conocido como el teorema de Stone-Weierstrass. Supondremos de aquí en adelante que K es un espacio métrico compacto y, por simplicidad, denotaremos por

$$\mathcal{C}^0(K) := \mathcal{C}^0(K,\mathbb{R})$$

al espacio de funciones continuas $f : K \to \mathbb{R}$ con la norma uniforme

$$\|f\|_\infty := \max_{x\in K} |f(x)|\,.$$

Observa que $\mathcal{C}^0(K)$ no sólo es un espacio vectorial sino que cuenta además con un producto, definido como sigue:

$$fg : K \to \mathbb{R}, \qquad (fg)(x) := f(x)g(x).$$

Este producto le da al espacio vectorial $\mathcal{C}^0(K)$ la estructura de una $\mathbb{R}$-álgebra con unidad [Ejercicio 8.26]. La unidad es la función constante igual a 1, a la que denotamos por 1.

El siguiente resultado da condiciones suficientes para que un subconjunto $\mathcal{A}$ de $\mathcal{C}^0(K)$ sea denso en $\mathcal{C}^0(K)$.

Teorema 8.6 (Stone-Weierstrass) *Sea K un espacio métrico compacto y sea $\mathcal{A}$ un subconjunto de $\mathcal{C}^0(K)$ con las siguientes propiedades:*
(a) $\lambda\varphi + \mu\psi \in \mathcal{A}$ *para todas $\varphi,\psi \in \mathcal{A}$ y $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$.*
(b) $\varphi\psi \in \mathcal{A}$ *para todas $\varphi,\psi \in \mathcal{A}$.*
(c) $1 \in \mathcal{A}$.
(d) Dados $x_1 \neq x_2$ en K, existe $\varphi \in \mathcal{A}$ tal que $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$.
Entonces $\mathcal{A}$ es denso en $\mathcal{C}^0(K)$, es decir, dada una función continua $f : K \to \mathbb{R}$ existe una sucesión (φ_k) de funciones en $\mathcal{A}$ que converge uniformemente a f en K.

En términos algebraicos, las primeras tres condiciones *(a)*, *(b)* y *(c)* se expresan diciendo que "$\mathcal{A}$ es una $\mathbb{R}$-subálgebra con unidad de la $\mathbb{R}$-álgebra de funciones continuas $\mathcal{C}^0(K)$". La propiedad *(d)* suele expresarse diciendo que "$\mathcal{A}$ separa puntos".

Para demostrar el teorema de Stone-Weierstrass usaremos los siguientes cuatro lemas.

Lema 8.7 *Dados $x_1 \neq x_2$ en K y $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, existe $\psi \in \mathcal{A}$ tal que $\psi(x_1) = c_1$ y $\psi(x_2) = c_2$.*

Demostración: Sea $\varphi \in \mathcal{A}$ tal que $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$. Como el determinante

$$\begin{vmatrix} \varphi(x_1) & 1 \\ \varphi(x_2) & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

existen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tales que

$$\lambda\varphi(x_1) + \mu = c_1 \tag{8.12}$$
$$\lambda\varphi(x_2) + \mu = c_2 \tag{8.13}$$

De las propiedades *(a)* y *(c)* se sigue que la función $\psi := \lambda\varphi + \mu 1 \in \mathcal{A}$. Las igualdades (8.12) y (8.13) afirman que $\psi(x_1) = c_1$ y $\psi(x_2) = c_2$. ■

Lema 8.8 *La cerradura $\overline{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{C}^0(K)$ también tiene las propiedades (a), (b) y (c).*

Demostración: Es sencillo comprobar que $\overline{\mathcal{A}}$ tiene la propiedad *(a)* [Ejercicio 8.27]. La propiedad *(c)* es inmediata. Probemos *(b)*. Dadas $\varphi, \psi \in \overline{\mathcal{A}}$ existen $\varphi_k, \psi_k \in \mathcal{A}$ tales que $\varphi_k \to \varphi$ y $\psi_k \to \psi$ en $\mathcal{C}^0(K)$ (ver Proposición 3.32). Como toda sucesión convergente está acotada, existe $C > 0$ tal que $\|\psi_k\|_\infty \leq C$ para toda k. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \|\varphi\psi - \varphi_k\psi_k\|_\infty &\leq \|\varphi(\psi - \psi_k)\|_\infty + \|(\varphi - \varphi_k)\psi_k\|_\infty \\ &\leq \|\varphi\|_\infty \|(\psi - \psi_k)\|_\infty + \|(\varphi - \varphi_k)\|_\infty \|\psi_k\|_\infty \\ &\leq \|\varphi\|_\infty \|(\psi - \psi_k)\|_\infty + C \|(\varphi - \varphi_k)\|_\infty \end{aligned}$$

Tomando el límite cuando $k \to \infty$ en ambos lados de la desigualdad obtenemos que $\varphi_k\psi_k \to \varphi\psi$. Dado que $\varphi_k\psi_k \in \mathcal{A}$, concluimos que $\varphi\psi \in \overline{\mathcal{A}}$ (ver Proposición 3.32). ■

Lema 8.9 *Si $\varphi \in \overline{\mathcal{A}}$, entonces $|\varphi| \in \overline{\mathcal{A}}$.*

Demostración: Como φ es continua y K es compacto, se tiene que $\varphi(K)$ es acotado en $\mathbb{R}$ (ver Corolario 4.11). Por tanto, $\varphi(K)$ está contenido en algún intervalo $[a, b]$. Por el Teorema 8.3 existe una sucesión de polinomios p_k que converge uniformemente a la función valor absoluto $|\cdot|$ en el intervalo $[a, b]$, es decir, dada $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|p_k(t) - |t|| < \varepsilon \quad \forall k \geq k_0 \ \ \forall t \in [a, b].$$

Esta desigualdad se cumple, en particular, para $t=\varphi(x)$ con $x\in K$. Por tanto,

$$\|p_k\circ\varphi-|\varphi|\|_\infty=\max_{x\in K}|p_k(\varphi(x))-|\varphi(x)||<\varepsilon\qquad\forall k\geq k_0,$$

es decir, $p_k\circ\varphi\to|\varphi|$ en $\mathcal{C}^0(K)$.
Finalmente, el Lema 8.8 implica que, para cualquier polinomio $p(t)=\alpha_0+\alpha_1t+\cdots+\alpha_mt^m$, se cumple que

$$p\circ\varphi=\alpha_0+\alpha_1\varphi+\cdots+\alpha_m\varphi^m\in\overline{\mathcal{A}}.$$

Por tanto, $|\varphi|\in\overline{\mathcal{A}}$. ■

Dadas dos funciones $f,g:K\to\mathbb{R}$ denotamos por $\max\{f,g\},\min\{f,g\}:K\to\mathbb{R}$ a las funciones

$$\begin{aligned}(\max\{f,g\})(x)\ &:=\max\{f(x),g(x)\},\\(\min\{f,g\})(x)\ &:=\min\{f(x),g(x)\}.\end{aligned}$$

Lema 8.10 *Si* $\varphi,\psi\in\overline{\mathcal{A}}$. *entonces* $\max\{\varphi,\psi\},\min\{\varphi,\psi\}\in\overline{\mathcal{A}}$.

Demostración: Basta observar que

$$\max\{\varphi,\psi\}=\frac{1}{2}(\varphi+\psi+|\varphi-\psi|)\tag{8.14}$$

$$\min\{\varphi,\psi\}=\frac{1}{2}(\varphi+\psi-|\varphi-\psi|)\tag{8.15}$$

Como $\overline{\mathcal{A}}$ satisface la propiedad *(a)*, el lema anterior implica que $\max\{\varphi,\psi\},\min\{\varphi,\psi\}\in\overline{\mathcal{A}}$. ■

Demostración del Teorema 8.6. Sea $f:K\to\mathbb{R}$ una función continua y sea $\varepsilon>0$. El Lema 8.7 asegura que, para cada par de puntos $x,y\in K$, podemos escoger $\varphi_{x,y}\in\mathcal{A}$ tal que $\varphi_{x,y}(x)=f(x)$ y $\varphi_{x,y}(y)=f(y)$.
Fijemos $x\in K$. Como $\varphi_{x,y}-f$ es continua y $\varphi_{x,y}(y)-f(y)=0$, existe $\delta_y>0$ tal que

$$\left|\varphi_{x,y}(z)-f(z)\right|<\varepsilon\qquad\forall z\in B_K(y,\delta_y)\tag{8.16}$$

y, como K es compacto, existen $y_1,...,y_m\in K$ tales que

$$K\subset B_K(y_1,\delta_{y_1})\cup\cdots\cup B_K(y_m,\delta_{y_m}).$$

Sea $\varphi_x := \max\{\varphi_{x,y_1}, ..., \varphi_{x,y_m}\}$. El Lema 8.10 asegura que $\varphi_x \in \overline{\mathcal{A}}$. Puesto que cada $z \in K$ pertenece a alguna $B(y_i, \delta_{y_i})$, la desigualdad (8.16) implica que

$$\varphi_x(z) - f(z) > -\varepsilon \quad \forall z \in K. \tag{8.17}$$

Por otra parte, dado que $\varphi_{x,y}(x) = f(x)$ para todo $y \in K$, se tiene que $\varphi_x(x) = f(x)$ y, como $\varphi_x - f$ es continua, existe $\gamma_x > 0$ tal que

$$|\varphi_x(z) - f(z)| < \varepsilon \quad \forall z \in B_K(x, \gamma_x). \tag{8.18}$$

De la compacidad de K se sigue que existen $x_1, ..., x_n \in K$ tales que

$$K \subset B_K(x_1, \gamma_{x_1}) \cup \cdots \cup B_K(x_n, \gamma_{x_n}).$$

Sea $\varphi := \min\{\varphi_{x_1}, ..., \varphi_{x_n}\}$. El Lema 8.10 asegura que $\varphi \in \overline{\mathcal{A}}$. Puesto que cada $z \in K$ pertenece a alguna $B(x_i, \gamma_{x_i})$, usando la desigualdad (8.18) obtenemos que

$$\varphi(z) - f(z) < \varepsilon \quad \forall z \in K. \tag{8.19}$$

Y, como la desigualdad (8.17) vale para toda $x \in K$, se tiene además que

$$\varphi(z) - f(z) > -\varepsilon \quad \forall z \in K. \tag{8.20}$$

Las desigualdades (8.19) y (8.20) implican que $\|\varphi - f\|_\infty < \varepsilon$. Por consiguiente, dado que $\varphi \in \overline{\mathcal{A}}$, concluímos que $f \in \overline{\mathcal{A}}$. ■

Denotemos por $\mathbb{R}[x_1, ..., x_n]$ al conjunto de polinomios

$$p(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_1^{k_{i,1}} \cdots x_n^{k_{i,n}}, \qquad a_i \in \mathbb{R},\ k_{i,j} \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

en n variables con coeficientes reales. Una consecuencia interesante del teorema de Stone-Weierstrass es la siguiente.

Corolario 8.11 *Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$. Entonces, dada una función continua $f : K \to \mathbb{R}$, existe una sucesión de polinomios (p_k) en $\mathbb{R}[x_1, ..., x_n]$ que converge uniformemente a f en K.*

Demostración: Obviamente el conjunto

$$\mathcal{P}(K) := \{p\,|_K : p \in \mathbb{R}[x_1, ..., x_n]\}$$

satisface las condiciones *(a), (b)* y *(c)* del Teorema 8.6. Consideremos los polinomios $\pi_i(x_1, ..., x_n) = x_i$, $i = 1, ..., n$. Si $\xi, \eta \in K$ son puntos distintos, entonces al menos una de sus coordenadas es distinta, digamos que $\xi_i \neq \eta_i$. Entonces, $\pi_i(\xi) = \xi_i \neq \eta_i = \pi_i(\eta)$. Esto prueba que $\mathcal{P}(K)$ satisface la condición *(d).* El Teorema 8.6 asegura que existe una sucesión de polinomios (p_k) en $\mathbb{R}[x_1, ..., x_n]$ que converge uniformemente a f en K.
■

8.3. Ejercicios

Ejercicio 8.12 *Demuestra la igualdad* (8.3).

Ejercicio 8.13 *Sea X un espacio métrico. Prueba que, si $Z \subset Y \subset X$ y Z es denso en X, entonces Y es denso en X.*

Ejercicio 8.14 *Prueba que, si $\phi : X \to Y$ es continua y suprayectiva y A es denso en X, entonces $\phi(A)$ es denso en Y.*

Ejercicio 8.15 *Prueba que el conjunto*

$$\mathbb{Q}^n := \{(q_1, ..., q_n) \in \mathbb{R}^n : q_k \in \mathbb{Q} \quad \forall k = 1, ..., n\}$$

es denso en $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 8.16 *Sea $\mathbb{Q}^\infty$ el conjunto de todas las sucesiones $(q_1, ..., q_k, 0, 0, ...)$ de números racionales tales que sólo un número finito de sus términos es distinto de cero. Prueba que $\mathbb{Q}^\infty$ es denso en ℓ_p para todo $p \in [1, \infty)$.*

Ejercicio 8.17 *Sea $\mathbb{Q}\,[t]$ el conjunto de todos los polinomios*

$$q\,(t) = q_0 + q_1 t + \cdots + q_n t^n, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \; q_i \in \mathbb{Q},$$

con coeficientes racionales. Prueba que

$$\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}\,[a, b] := \{q\,|_{[a.b]} \colon q \in \mathbb{Q}\,[t]\}$$

es denso en $\mathcal{C}^0[a, b]$.

Ejercicio 8.18 *Se dice que un conjunto A es* ***a lo más numerable*** *si existe una función inyectiva $i : A \to \mathbb{N}$.*
(a) Prueba que el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es a lo más numerable.
(b) Prueba que Prueba que el conjunto de todas las sucesiones (b_k) tales que $b_k \in \{0, 1\}$ no es a lo más numerable.
(c) Prueba que $\mathbb{R}$ no es a lo más numerable. (Sugerencia: Usa el hecho de que todo número real tiene una representación binaria.)

Ejercicio 8.19 *Un espacio métrico X se llama* ***separable*** *si contiene un subconjunto a lo más numerable que es denso en X. Demuestra las siguientes afirmaciones.*
(a) Ningún subconjunto propio de un espacio métrico discreto X_{disc} es denso en X_{disc}.
(b) Un espacio métrico discreto X_{disc} es separable si y sólo si X_{disc} es a lo más numerable.

Ejercicio 8.20 *Investiga si los siguientes espacios métricos son o no separables.*
(a) $\mathbb{R}^n_p$ *con* $p \in [1, \infty]$.
(b) ℓ_p *con* $p \in [1, \infty]$.
(c) $\mathcal{C}^0_p[a, b]$ *con* $p \in [1, \infty]$.
(d) $\mathcal{C}^0_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Ejercicio 8.21 *Prueba que todo espacio métrico compacto X es separable.* (Sugerencia: Para cada $k \in \mathbb{N}$, toma un conjunto finito de bolas de radio $\frac{1}{k}$ cuya unión es X. Considera el conjunto de centros de todas esas bolas.)

Ejercicio 8.22 *Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$. Denotemos por $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ al conjunto de todas las funciones $f : \Omega \to \mathbb{R}$ que tienen derivadas parciales de todos los órdenes en Ω y dichas derivadas son continuas en la cerradura de Ω. Prueba que $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ es denso en $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$.* (Sugerencia: Usa el Corolario 8.11 y el Ejercicio 8.13.)

Ejercicio 8.23 *Sea $f \in \mathcal{C}^0[0, 1]$ tal que*

$$\int_0^1 f(x)x^n dx = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Prueba que

$$\int_0^1 f^2(x)dx = 0$$

y concluye que $f(x) = 0$ para todo $x \in [0, 1]$.

Ejercicio 8.24 *Sea $\mathbb{S}^1 = \{(\cos\theta, \sin\theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ el círculo unitario en $\mathbb{R}^2$. Prueba que cualquier función continua $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ es el límite uniforme de funciones de la forma*

$$\varphi(\cos\theta, \sin\theta) = a_0 + a_1 \cos\theta + b_1 \sin\theta + \cdots + a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta$$

con $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Ejercicio 8.25 *Sean X y Y espacios métricos compactos. Prueba que cualquier función continua $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ es el límite uniforme de funciones de la forma*

$$\varphi(x, y) = f_1(x)g_1(y) + \cdots + f_n(x)g_n(y),$$

con $f_1, ..., f_n \in \mathcal{C}^0(X)$, $g_1, ..., g_n \in \mathcal{C}^0(Y)$ y $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 8.26 *Investiga lo que es una $\mathbb{R}$-álgebra con unidad y prueba que, para cualquier espacio métrico X, el espacio $\mathcal{C}^0(X)$ es una $\mathbb{R}$-álgebra con unidad.*

Ejercicio 8.27 *Sea $\mathcal{A}$ un subespacio vectorial de $\mathcal{C}^0(X)$. Prueba que $\overline{\mathcal{A}}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{C}^0(X)$.* (Sugerencia: Usa el Ejercicio 3.49.)

Parte II

Diferenciabilidad

Capítulo 9

Diferenciabilidad

La idea básica del Cálculo Diferencial consiste en aproximar localmente a una función por una función lineal. La derivada de una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ en un punto x_0 de $\mathbb{R}^n$ es la función lineal $f'(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ que mejor aproxima a f en dicho punto.

Esta noción se extiende de manera natural a espacios de Banach con la siguiente precaución: una función lineal entre espacios de Banach de dimensión infinita no es necesariamente continua. La derivada de una función $\varphi : X \to Y$ entre espacios de Banach en un punto x_0 de X es la función *lineal y continua* $\varphi'(x_0)$ que mejor aproxima a φ en dicho punto. La continuidad de $\varphi'(x_0)$ juega un papel esencial en la demostración de propiedades importantes de la derivada, como que toda función diferenciable es continua, o la regla de la cadena. El papel de la continuidad queda oculto cuando consideramos funciones entre espacios euclidianos, ya que toda función lineal entre espacios de dimensión finita es automáticamente continua.

En este capítulo introduciremos el concepto de derivada para funciones entre espacios de Banach y estudiaremos sus propiedades fundamentales. Este concepto tiene aplicaciones importantes. Por ejemplo, las soluciones de muchas ecuaciones en derivadas parciales son puntos críticos de una función diferenciable definida en un espacio de funciones.

Pero además, estudiar el concepto de derivada en esta generalidad no hace más difíciles las demostraciones de los resultados del Cálculo Diferencial que ya conocemos, el teorema del valor medio o la fórmula de Taylor. Al contrario, nos permite poner de relieve los aspectos fundamentales que intervienen en ellos, y obtener una mayor claridad y profundidad en su comprensión.

9.1. El espacio de funciones lineales y continuas

Empezamos con un breve estudio del espacio de funciones lineales y continuas entre espacios de Banach.

Sean $V = (V, \|\cdot\|_V)$ y $W = (W, \|\cdot\|_W)$ espacios de Banach. El conjunto

$$\mathcal{L}(V,W) := \{T : V \to W : T \text{ es lineal y continua}\}$$

es un espacio vectorial con las operaciones dadas por

$$(T_1 + T_2)v := T_1 v + T_2 v, \qquad (\lambda T_1)v := \lambda T_1 v,$$

donde $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V,W)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $v \in V$. La continuidad de una función lineal está caracterizada como sigue.

Proposición 9.1 *Sea $T : V \to W$ una función lineal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
(i) T *es continua.*
(ii) T *es continua en* 0.
(iii) Existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\|Tv\|_W \leq c\,\|v\|_V$ *para todo $v \in V$.*
(iv) T *es Lipschitz continua.*

Demostración: Las implicaciones *(i)⇒(ii)* y *(iv)⇒(i)* son evidentes. Demostremos las otras dos.
(ii)⇒(iii): Si T es continua en 0 existe $\delta > 0$ tal que

$$\|Tv\|_W < 1 \quad \text{si} \;\; \|v\|_V < \delta.$$

En consecuencia,

$$\|Tv\|_W = \frac{2}{\delta}\,\|v\|_V \left\| T\left(\frac{\delta}{2}\frac{v}{\|v\|_V}\right)\right\|_W < \frac{2}{\delta}\,\|v\|_V \qquad \forall v \in V.$$

Esto demuestra *(iii)*.
(iii)⇒(iv): Si existe $c > 0$ tal que $\|Tv\|_W \leq c\,\|v\|_V$ para todo $v \in V$, entonces

$$\|Tv_1 - Tv_2\|_W = \|T(v_1 - v_2)\|_W \leq c\,\|v_1 - v_2\|_V \qquad \forall v_1, v_2 \in V.$$

Esto prueba que T es Lipschitz continua. ■

Definimos

$$\|T\|_{\mathcal{L}(V,W)} := \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{\|Tv\|_W}{\|v\|_V} \qquad \forall T \in \mathcal{L}(V,W). \tag{9.1}$$

La afirmación *(iii)* de la Proposición 9.1 asegura que $\|T\|_{\mathcal{L}(V,W)} < \infty$. Es sencillo comprobar que ésta es una norma en $\mathcal{L}(V,W)$ [Ejercicio 9.32]. Observa que

$$\|Tv\|_W \leq \|T\|_{\mathcal{L}(V,W)} \|v\|_V \qquad \forall v \in V. \tag{9.2}$$

Usaremos con frecuencia esta desigualdad.

Proposición 9.2 *$\mathcal{L}(V,W)$ con la norma definida en* (9.1) *es un espacio de Banach.*

Demostración: Sean (T_k) una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}(V,W)$ y $\varepsilon > 0$. Entonces existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|T_k - T_j\|_{\mathcal{L}(V,W)} < \varepsilon \quad \text{si} \;\; j,k \geq k_0,$$

es decir,

$$\|T_k v - T_j v\|_W < \varepsilon \|v\|_V \quad \text{si} \;\; j,k \geq k_0, \;\; \forall v \in V. \tag{9.3}$$

Por tanto, para cada $v \in V$, la sucesión $(T_k v)$ es de Cauchy en W y, como W es un espacio de Banach, existe $Tv \in W$ tal que

$$T_k v \to Tv \qquad \text{en} \;\; W.$$

Probaremos ahora que $T \in \mathcal{L}(V,W)$. Sean $v,w \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Se tiene que

$$\begin{aligned} T(\lambda v + \mu w) &= \lim_{k\to\infty} T_k(\lambda v + \mu w) = \lim_{k\to\infty} (\lambda T_k v + \mu T_k w) \\ &= \lambda \lim_{k\to\infty} T_k v + \mu \lim_{k\to\infty} T_k w = \lambda Tv + \mu Tw. \end{aligned}$$

Esto prueba que T es lineal. Por otra parte, haciendo tender $k \to \infty$ en la desigualdad (9.3) obtenemos

$$\|Tv - T_j v\|_W \leq \varepsilon \|v\|_V \quad \text{si} \;\; j \geq k_0, \;\; \forall v \in V. \tag{9.4}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \|Tv\|_W &\leq \|Tv - T_{k_0} v\|_W + \|T_{k_0} v\|_W \\ &\leq \varepsilon \|v\|_V + \|T_{k_0}\|_{\mathcal{L}(V,W)} \|v\|_V \\ &\leq \left[\varepsilon + \|T_{k_0}\|_{\mathcal{L}(V,W)}\right] \|v\|_V \qquad \forall v \in V. \end{aligned}$$

De la Proposición 9.1 se sigue que T es continua.
Finalmente, la desigualdad (9.4) implica que

$$\frac{\|Tv - T_j v\|_W}{\|v\|_V} \leq \varepsilon \quad \text{si} \;\; j \geq k_0, \;\; \forall v \in V,$$

Por tanto,

$$\|T - T_j\|_{\mathcal{L}(V,W)} \leq \varepsilon \quad \text{si} \;\; j \geq k_0.$$

Esto prueba que $T_j \to T$ en $\mathcal{L}(V,W)$. En consecuencia, $\mathcal{L}(V,W)$ es un espacio de Banach. ■

9.2. Diferenciabilidad

Para definir diferenciabilidad requerimos generalizar la noción de límite.

Definición 9.3 *Sean X, Y espacios métricos, A un subconjunto de X, $f : A \to Y$ una función, $x_0 \in \overline{A}$ y $y_0 \in Y$. Decimos que*

$$y_0 = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

si, dada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d_Y(f(x), y_0) < \varepsilon \qquad \forall x \in A \text{ con } d_X(x, x_0) < \delta.$$

Nota que f no necesariamente está definida en x_0, pero x_0 tiene que estar en la cerradura del dominio de f.

Sean V y W espacios de Banach y Ω un subconjunto abierto de V. La noción de derivada de una función entre espacios euclidianos se extiende a funciones entre espacios de Banach como sigue.

Definición 9.4 *Una función $\varphi : \Omega \to W$ es **(Fréchet-)diferenciable en el punto** $u_0 \in \Omega$ si existe $T \in \mathcal{L}(V, W)$ tal que*

$$\lim_{v \to 0} \frac{\|\varphi(u_0 + v) - \varphi(u_0) - Tv\|_W}{\|v\|_V} = 0. \tag{9.5}$$

*T se llama **la derivada (de Fréchet) de φ en** u_0 y se denota*

$$\varphi'(u_0) := T, \qquad \text{o bien} \qquad D\varphi(u_0) := T.$$

La condición (9.5) se expresa como sigue: Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para todo $v \in V$ con $\|v\|_V < \delta$, se cumple que

$$u_0 + v \in \Omega \qquad \text{y} \qquad \|\varphi(u_0 + v) - \varphi(u_0) - \varphi'(u_0)v\|_W < \varepsilon \|v\|_V .$$

Intuitivamente, esto significa que en una vecindad pequeña de u_0 la función φ se parece mucho a la función $\varphi(u_0) + \varphi'(u_0)$. Se parece tanto, que la norma de la diferencia entre ambas funciones $\|\varphi(u_0 + v) - (\varphi(u_0) + \varphi'(u_0)v)\|_W$ resulta despreciable respecto a la norma de v cuando $v \to 0$.

La siguiente proposición garantiza que la derivada está bien definida.

Proposición 9.5 *Si φ es diferenciable en u_0, la función $T \in \mathcal{L}(V, W)$ que cumple* (9.5) *es única.*

Demostración: Supongamos que $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V,W)$ cumplen (9.5). Entonces, dada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|\varphi(u_0+v) - \varphi(u_0) - T_i v\|_W < \frac{\varepsilon}{2}\|v\|_V \quad \text{ si } \|v\|_V < \delta, \quad i = 1, 2.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \|T_1 v - T_2 v\|_W &\leq \|T_1 v - \varphi(u_0+v) + \varphi(u_0)\|_W + \|\varphi(u_0+v) - \varphi(u_0) - T_2 v\|_W \\ &< \varepsilon \|v\|_V \qquad \text{si } \|v\|_V < \delta. \end{aligned}$$

Si $\|v\|_V \geq \delta$, escogemos $\lambda \in (0,1)$ tal que $\|\lambda v\|_V < \delta$. Entonces

$$\|T_1 v - T_2 v\|_W = \frac{1}{\lambda}\|T_1(\lambda v) - T_2(\lambda v)\|_W < \frac{\varepsilon}{\lambda}\|\lambda v\|_V = \varepsilon \|v\|_V.$$

En consecuencia,

$$\|T_1 v - T_2 v\|_W < \varepsilon \|v\|_V \qquad \forall v \in V.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitraria, necesariamente $T_1 v = T_2 v$. ■

Definición 9.6 *Decimos que $\varphi : \Omega \to W$ es* ***(Fréchet-)diferenciable en*** *Ω si lo es en cada punto $u \in \Omega$. La función*

$$\varphi' : \Omega \to \mathcal{L}(V,W), \qquad u \mapsto \varphi'(u),$$

se llama la ***derivada (de Fréchet) de*** *φ,. La denotaremos también por $D\varphi : \Omega \to \mathcal{L}(V,W)$.*

Usualmente diremos que $\varphi : \Omega \to W$ es diferenciable en vez de decir que es Fréchet-diferenciable y hablaremos de su derivada para referirnos a su derivada de Fréchet. Es inmediato comprobar lo siguiente.

Ejemplo 9.7 *Si $\varphi : \Omega \to W$ es constante, entonces es diferenciable en Ω y $\varphi'(u) = 0 \in \mathcal{L}(V,W)$ para todo $u \in \Omega$.*

Ejemplo 9.8 *Toda función $T \in \mathcal{L}(V,W)$ es diferenciable en V y $T'(u) = T$ para todo $u \in V$, ya que*

$$T(u+v) - Tu - Tv = 0 \qquad \forall u, v \in V.$$

Ejemplo 9.9 *La función $\varphi : \ell_2 \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(x) := \|x\|_{\ell_2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$ es diferenciable en ℓ_2 y*

$$\varphi'(x)y = 2\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \qquad \forall x, y \in \ell_2.$$

Demostración: Observa que

$$\|x+y\|_{\ell_2}^2 = \|x\|_{\ell_2}^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k + \|y\|_{\ell_2}^2 \qquad \forall x, y \in \ell_2.$$

Por tanto,

$$\frac{|\varphi(x+y) - \varphi(x) - 2\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k|}{\|y\|_{\ell_2}} = \|y\|_{\ell_2} \to 0 \quad \text{cuando } y \to 0.$$

Para cada $x \in \ell_2$, la función $T : \ell_2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$Ty := 2\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$$

es evidentemente lineal. De la desigualdad de Hölder para series (ver Ejercicio 2.41) se sigue que

$$|Ty| = 2\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k\right| \leq 2\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq 2\|x\|_{\ell_2}\|y\|_{\ell_2}.$$

En consecuencia, $T : \ell_2 \to \mathbb{R}$ es continua (ver Proposición 9.1). Esto prueba que φ es diferenciable en ℓ_2 y que $\varphi'(x) = T$. ■

Proposición 9.10 *Si φ es diferenciable en u_0, entonces φ es continua en u_0.*

Demostración: Si φ es diferenciable en u_0, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\|\varphi(u) - \varphi(u_0) - \varphi'(u_0)(u-u_0)\|_W < \|u-u_0\|_V \quad \text{si} \quad \|u-u_0\|_V < \delta_1.$$

Como $\varphi'(u_0) \in \mathcal{L}(V,W)$, usando la desigualdad (9.2) obtenemos

$$\begin{aligned}
\|\varphi(u) - \varphi(u_0)\|_W &\leq \|\varphi(u) - \varphi(u_0) - \varphi'(u_0)(u-u_0)\|_W + \|\varphi'(u_0)(u-u_0)\|_W \\
&< \|u-u_0\|_V + \|\varphi'(u_0)\|_{\mathcal{L}(V,W)}\|u-u_0\|_V \\
&= \left[1 + \|\varphi'(u_0)\|_{\mathcal{L}(V,W)}\right]\|u-u_0\|_V \qquad \text{si} \quad \|u-u_0\|_V < \delta_1.
\end{aligned}$$

Dada $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta := \min\left\{\delta_1, \varepsilon\left[1 + \|\varphi'(u_0)\|_{\mathcal{L}(V,W)}\right]^{-1}\right\}$. Entonces,

$$\|\varphi(u) - \varphi(u_0)\|_W < \varepsilon \quad \text{si} \quad \|u-u_0\|_V < \delta.$$

Esto prueba que φ es continua en u_0. ■

Proposición 9.11 (Linealidad de la derivada) *Si $\varphi, \psi : \Omega \to W$ son diferenciables en u_0 y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda\varphi + \mu\psi$ es diferenciable en u_0 y*

$$(\lambda\varphi + \mu\psi)'(u_0) = \lambda\varphi'(u_0) + \mu\psi'(u_0).$$

Demostración: La demostración es un ejercicio sencillo [Ejercicio 9.35]. ■

Proposición 9.12 (Regla de la cadena) *Sean $\Omega \subset V$, $\tilde{\Omega} \subset W$ subconjuntos abiertos. Si $\varphi : \Omega \to W$ es diferenciable en u_0, $\varphi(v) \in \tilde{\Omega}$ para todo $v \in \Omega$ y $\psi : \tilde{\Omega} \to Z$ es diferenciable en $v_0 := \varphi(u_0)$, entonces $\psi \circ \varphi : \Omega \to Z$ es diferenciable en u_0 y*

$$(\psi \circ \varphi)'(u_0) = \psi'(v_0) \circ \varphi'(u_0).$$

Demostración: Para $v \in V$ y $w \in W$ tales que $u_0 + v \in \Omega$ y $v_0 + w \in \tilde{\Omega}$, definimos

$$\begin{aligned} o_1(v) &:= \varphi(u_0 + v) - \varphi(u_0) - \varphi'(u_0)v, \\ o_2(w) &:= \psi(v_0 + w) - \psi(v_0) - \psi'(v_0)w. \end{aligned}$$

Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} (\psi \circ \varphi)(u_0 + v) &= \psi(\varphi(u_0 + v)) \\ &= \psi(\varphi(u_0) + \varphi'(u_0)v + o_1(v)) \\ &= \psi(v_0) + \psi'(v_0)(\varphi'(u_0)v + o_1(v)) + o_2(\varphi'(u_0)v + o_1(v)) \\ &= (\psi \circ \varphi)(u_0) + [\psi'(v_0) \circ \varphi'(u_0)]\, v + o_3(v), \end{aligned}$$

donde

$$o_3(v) := \psi'(v_0)o_1(v) + o_2(\varphi'(u_0)v + o_1(v)).$$

Demostraremos ahora que

$$\lim_{v \to 0} \frac{\|o_3(v)\|_Z}{\|v\|_V} = 0. \tag{9.6}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Denotemos por

$$c_1 := \|\varphi'(u_0)\|_{\mathcal{L}(V,W)} + 1, \qquad c_2 := \|\psi'(u_0)\|_{\mathcal{L}(W,Z)} + 1,$$

$$\varepsilon_1 := \min\left\{\frac{\varepsilon}{2c_2}, 1\right\}, \qquad \varepsilon_2 := \frac{\varepsilon}{2c_1}.$$

Existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que

$$\begin{aligned} \|o_1(v)\|_W &< \varepsilon_1 \|v\|_V \qquad \text{si } \|v\|_V < \delta_1, \\ \|o_2(w)\|_Z &< \varepsilon_2 \|w\|_W \qquad \text{si } \|w\|_W < \delta_2. \end{aligned}$$

Sea $\delta_3 := \min\{\delta_1, \frac{\delta_2}{c_1}\}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \|\varphi'(u_0)v + o_1(v)\|_W &\leq \|\varphi'(u_0)v\|_W + \|o_1(v)\|_W \\ &< \|\varphi'(u_0)\|_{\mathcal{L}(V,W)} \|v\|_V + \varepsilon_1 \|v\|_V \leq c_1 \|v\|_V \qquad \text{si } \|v\|_V < \delta_1. \end{aligned}$$

Por tanto, $\|\varphi'(u_0)v + o_1(v)\|_W < \delta_2$ si $\|v\|_V < \delta_3$ y, en consecuencia,

$$\begin{aligned} \|o_2(\varphi'(u_0)v + o_1(v))\|_Z &< \varepsilon_2 \|\varphi'(u_0)v + o_1(v)\|_W \\ &< \varepsilon_2 c_1 \|v\|_V \leq \frac{\varepsilon}{2} \|v\|_V \qquad \text{si } \|v\|_V < \delta_3. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \|\psi'(v_0)o_1(v)\|_Z &\leq \|\psi'(v_0)\|_{\mathcal{L}(W,Z)} \|o_1(v)\|_W \\ &< c_2\varepsilon_1 \|v\|_V \leq \frac{\varepsilon}{2} \|v\|_V \qquad \text{si } \|v\|_V < \delta_1. \end{aligned}$$

Concluímos que

$$\|o_3(v)\|_Z < \varepsilon \|v\|_V \qquad \text{si } \|v\|_V < \delta_3.$$

Esto prueba (9.6) y concluye la demostración de la proposición. ■

9.3. El teorema del valor medio

Una función lineal $T : \mathbb{R} \to V$ está totalmente determinada por su valor en 1, ya que

$$T(t) = T(t1) = tT(1) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

La función

$$\iota : \mathcal{L}(\mathbb{R}, V) \to V, \qquad \iota(T) := T(1), \tag{9.7}$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales. Además, es una isometría, ya que

$$\|T\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R},V)} := \sup_{\substack{t \in \mathbb{R} \\ t \neq 0}} \frac{\|T(t)\|_V}{|t|} = \sup_{\substack{t \in \mathbb{R} \\ t \neq 0}} \left\| \frac{tT(1)}{t} \right\|_V = \|T(1)\|_V \qquad \forall T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, V).$$

Esta isometría nos permite identificar a $\mathcal{L}(\mathbb{R}, V)$ con V.

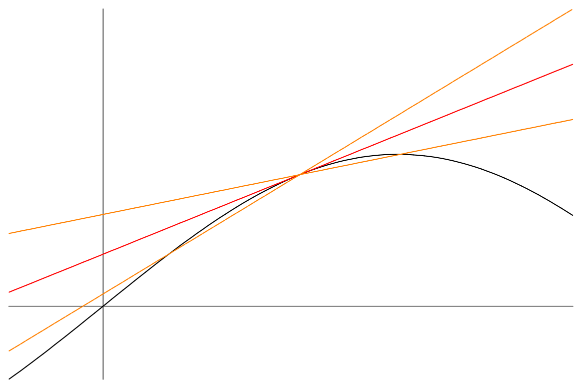
Si $\sigma : (a, b) \to V$ es diferenciable en un punto t_0 de (a, b), identificaremos en lo sucesivo a la transformación lineal $\sigma'(t_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, V)$ con su valor en 1, y escribiremos simplemente $\sigma'(t_0)$ en vez $\sigma'(t_0)(1)$. Se tiene entonces que

$$\lim_{t \to 0} \left\| \frac{\sigma(t + t_0) - \sigma(t_0)}{t} - \sigma'(t_0) \right\|_V = \lim_{t \to 0} \frac{\|\sigma(t + t_0) - \sigma(t_0) - t\sigma'(t_0)\|_V}{|t|} = 0.$$

Es decir,

$$\sigma'(t_0) = \lim_{t\to 0} \frac{\sigma(t+t_0) - \sigma(t_0)}{t} \in V.$$

Esto nos permite interpretar a $\sigma'(t_0)$ como la velocidad de la trayectoria $\sigma : (a,b) \to V$ en el tiempo t_0. Si $V = \mathbb{R}$ entonces $\sigma'(t_0) \in \mathbb{R}$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de σ en el punto $(t_0, \sigma(t_0))$.



Si $\sigma : (a,b) \to \Omega \subset V$ es diferenciable en $t_0 \in (a,b)$ y $\varphi : \Omega \to W$ es diferenciable en $u_0 := \sigma(t_0)$, la regla de la cadena dice que

$$(\varphi \circ \sigma)'(t) = \varphi'(u_0)(\sigma'(t)) \qquad \forall t \in (a,b), \tag{9.8}$$

es decir, la derivada de la trayectoria $\varphi\circ\sigma$ en t es el valor de la función $\varphi'(u_0) \in \mathcal{L}(V,W)$ en el vector $\sigma'(t) \in V$.

Uno de los resultados más útiles en Análisis es el teorema del valor medio. Para funciones reales de variable real éste se expresa como una igualdad: Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b) entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$. El problema con esta formulación clásica es que no existe una igualdad semejante para funciones con valores vectoriales. Por otra parte, esta igualdad esconde el hecho de que en realidad no sabemos quién es c, lo único que sabemos es que se trata de algún punto en (a,b). Para fines prácticos, lo importante es tener una cota para $|f'(c)|$. Es decir, la verdadera naturaleza del teorema del valor medio se obtiene al expresarlo como una desigualdad.

Teorema 9.13 (del valor medio) *Sea $\sigma : [a,b] \to V$ una función continua. Si σ es diferenciable en todo punto $t \in (a,b)$ y si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\|\sigma'(t)\|_V \leq M \qquad \forall t \in (a,b), \tag{9.9}$$

entonces

$$\|\sigma(b) - \sigma(a)\|_V \leq M(b-a).$$

Demostración: Probaremos que, para toda $\varepsilon > 0$, se cumple que

$$\|\sigma(b) - \sigma(a)\|_V \leq M(b-a) + \varepsilon(b-a) + \varepsilon. \tag{9.10}$$

Esto implica que $\|\sigma(b) - \sigma(a)\|_V \leq M(b-a)$.
Sea $\varepsilon > 0$. Consideremos el conjunto

$$S := \{t \in [a,b] : \|\sigma(t) - \sigma(a)\|_V \leq M(t-a) + \varepsilon(t-a) + \varepsilon\}.$$

Como σ es continua en a existe $\gamma > 0$ tal que

$$\|\sigma(s) - \sigma(a)\|_V \leq \varepsilon \qquad \forall s \in [a, a+\gamma].$$

Por tanto, $a + \gamma \in S$. Sea $c := \sup S$. Observa que $c \in S$ y $a + \gamma \leq c \leq b$. Queremos probar que $c = b$.
Argumentando por contradicción, supongamos que $c < b$. Entonces σ es diferenciable en c y, en consecuencia, existe $\delta \in (0, \min\{c-a, b-c\})$ tal que

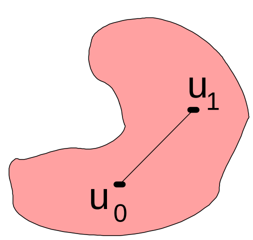
$$\|\sigma(s) - \sigma(c) - \sigma'(c)(s-c)\|_V < \varepsilon\,|s-c| \qquad \text{si} \quad |s-c| < \delta.$$

Por tanto, si $s \in (c, c+\delta)$, usando (9.9) obtenemos

$$\begin{aligned}
\|\sigma(s) - \sigma(a)\|_V &\leq \|\sigma(s) - \sigma(c)\|_V + \|\sigma(c) - \sigma(a)\|_V \\
&\leq \|\sigma(s) - \sigma(c) - \sigma'(c)(s-c)\|_V + \|\sigma'(c)(s-c)\|_V + \|\sigma(c) - \sigma(a)\|_V \\
&< \varepsilon(s-c) + \|\sigma'(c)\|_V\,(s-c) + M(c-a) + \varepsilon(c-a) + \varepsilon \\
&\leq M(s-a) + \varepsilon(s-a) + \varepsilon, \qquad (9.11)
\end{aligned}$$

lo que contradice que $c = \sup S$. En consecuencia, $c = b$. Esto demuestra (9.10). ■

El teorema anterior nos permite acotar la diferencia entre dos valores de una función diferenciable $\varphi : \Omega \to W$ cuando su derivada está acotada en el segmento que une a los puntos correspondientes.



Un modo de garantizar esto último es pidiendo que la derivada sea continua en Ω, lo que nos lleva a introducir el siguiente concepto.

Definición 9.14 *Sea Ω abierto en V. Una función $\varphi : \Omega \to W$ es **de clase** $\mathcal{C}^1$ (o **continuamente diferenciable**) **en** Ω si es diferenciable en Ω y su derivada*

$$\varphi' : \Omega \to \mathcal{L}(V,W)$$

es continua.

Las funciones de los Ejemplos 9.7 y 9.8 son de clase $\mathcal{C}^1$ ya que en ambos casos la derivada es una función constante de V a $\mathcal{L}(V,W)$. Veamos que la función del Ejemplo 9.9 también es de clase $\mathcal{C}^1$.

Ejemplo 9.15 *La función $\varphi : \ell_2 \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(x) := \|x\|_{\ell_2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$ es de clase $\mathcal{C}^1$ en ℓ_2.*

Demostración: En el Ejemplo 9.9 vimos que φ es diferenciable y su derivada es la función $\varphi' : \ell_2 \to \mathcal{L}(\ell_2, \mathbb{R})$ dada por

$$\varphi'(x)y = 2\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k,$$

donde $x = (x_k)$, $y = (y_k) \in \ell_2$. Para probar que φ' es continua observemos que, si $z = (z_k) \in \ell_2$, aplicando la desigualdad de Hölder para series (ver Ejercicio 2.41) obtenemos

$$|\varphi'(z)y - \varphi'(x)y| = 2\left|\sum_{k=1}^{\infty}(z_k - x_k)y_k\right| \leq 2\|z-x\|_{\ell_2}\|y\|_{\ell_2}.$$

Por tanto,

$$\|\varphi'(z) - \varphi'(x)\|_{\mathcal{L}(\ell_2,\mathbb{R})} = \sup_{\substack{y\in\ell_2\\ y\neq 0}} \frac{|\varphi'(z)y - \varphi'(x)y|}{\|y\|_{\ell_2}} \leq 2\|z-x\|_{\ell_2}.$$

Esto prueba que φ' es Lipschitz continua. ■

Como consecuencia del teorema del valor medio obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 9.16 *Si Ω es abierto en V, $\varphi : \Omega \to W$ es de clase $\mathcal{C}^1$ en Ω y $u_0, u_1 \in \Omega$ son tales que $u_t := (1-t)u_0 + tu_1 \in \Omega$ para toda $t \in [0,1]$, entonces*

$$\sup_{t\in[0,1]} \|\varphi'(u_t)\|_{\mathcal{L}(V,W)} < \infty$$

y

$$\|\varphi(u_1) - \varphi(u_0)\|_W \leq \sup_{t\in[0,1]} \|\varphi'(u_t)\|_{\mathcal{L}(V,W)} \|u_1 - u_0\|_V.$$

Demostración: Sea $\alpha : [0,1] \to \Omega$ la función $\alpha(t) := u_t = u_0 + t(u_1 - u_0)$. Esta función es diferenciable en $(0,1)$ y su derivada está dada por $\alpha'(t) = u_1 - u_0$. La composición $\sigma := \varphi \circ \alpha : [0,1] \to W$ es continua en $[0,1]$. Por la regla de la cadena (9.8), σ es diferenciable en $(0,1)$ y

$$\sigma'(t) = \varphi'(u_t)(u_1 - u_0).$$

Se tiene entonces que

$$\left\|\sigma'(t)\right\|_W \leq \left\|\varphi'(u_t)\right\|_{\mathcal{L}(V,W)} \left\|u_1 - u_0\right\|_V \qquad \forall t \in (0,1). \tag{9.12}$$

Ahora bien, la función que a cada $t \in [0,1]$ le asocia el valor $\left\|\varphi'(u_t)\right\|_{\mathcal{L}(V,W)} \in \mathbb{R}$ es una función continua, ya que es la composición de las funciones continuas

$$[0,1] \xrightarrow{\alpha} \Omega \xrightarrow{\varphi'} \mathcal{L}(V,W) \xrightarrow{\|\cdot\|_{\mathcal{L}(V,W)}} \mathbb{R}.$$

Como $[0,1]$ es compacto, concluímos que

$$M := \sup_{t\in[0,1]} \left\|\varphi'(u_t)\right\|_{\mathcal{L}(V,W)} < \infty.$$

De la desigualdad (9.12) se sigue que

$$\sup_{t\in[0,1]} \left\|\sigma'(t)\right\|_W \leq M \left\|u_1 - u_0\right\|_V \qquad \forall t \in (0,1),$$

y aplicando el Teorema 9.13 obtenemos que

$$\left\|\varphi(u_1) - \varphi(u_0)\right\|_W = \left\|\sigma(1) - \sigma(0)\right\|_W \leq M \left\|u_1 - u_0\right\|_V,$$

como afirma el enunciado. ■

Usaremos a menudo la siguiente consecuencia sencilla del corolario anterior.

Corolario 9.17 *Si Ω es abierto en V, $\varphi : \Omega \to W$ es de clase $\mathcal{C}^1$ en Ω y $u_0, u_1 \in \Omega$ son tales que $u_t := (1-t)u_0 + tu_1 \in \Omega$ para toda $t \in [0,1]$ entonces, para todo $u \in \Omega$,*

$$\sup_{t\in[0,1]} \left\|\varphi'(u_t) - \varphi'(u)\right\|_{\mathcal{L}(V,W)} < \infty \qquad y$$

$$\left\|\varphi(u_1) - \varphi(u_0) - \varphi'(u)(u_1 - u_0)\right\|_W \leq \sup_{t\in[0,1]} \left\|\varphi'(u_t) - \varphi'(u)\right\|_{\mathcal{L}(V,W)} \left\|u_1 - u_0\right\|_V.$$

Demostración: Sea $\psi := \varphi - \varphi'(u)$. Entonces $\psi'(v) = \varphi'(v) - \varphi'(u)$ para toda $v \in \Omega$. Aplicando el corolario anterior obtenemos que

$$\begin{aligned} \left\| \varphi(u_1) - \varphi(u_0) - \varphi'(u)(u_1 - u_0) \right\|_W &= \left\| \psi(u_1) - \psi(u_0) \right\|_W \\ &\leq \sup_{t\in[0,1]} \left\| \psi'(u_t) \right\|_{\mathcal{L}(V,W)} \left\| u_1 - u_0 \right\|_V \\ &= \sup_{t\in[0,1]} \left\| \varphi'(u_t) - \varphi'(u) \right\|_{\mathcal{L}(V,W)} \left\| u_1 - u_0 \right\|_V , \end{aligned}$$

como afirma el enunciado. ■

9.4. Un criterio de diferenciabilidad

Si $\varphi : \Omega \to W$ es diferenciable en un punto u_0 de Ω y $v \in V$ entonces, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$u_0 + tv \in \Omega \quad \text{ y } \quad \left\| \varphi(u_0 + tv) - \varphi(u_0) - \varphi'(u_0)(tv) \right\|_W < \varepsilon \left\| tv \right\|_V \qquad \forall t \in (-\delta, \delta).$$

Dividiendo ambos lados de la desigualdad entre $|t|$ obtenemos que

$$\left\| \frac{\varphi(u_0 + tv) - \varphi(u_0)}{t} - \varphi'(u_0)v \right\|_W < \varepsilon \left\| v \right\|_V \qquad \text{si } \ 0 < |t| < \delta.$$

Es decir,

$$\varphi'(u_0)v = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(u_0 + tv) - \varphi(u_0)}{t} \qquad \forall v \in V.$$

De este modo obtenemos una condición necesaria para que φ sea diferenciable en u_0. En primer lugar, para cada $v \in V$ debe existir el límite

$$\lim_{t\to 0} \frac{\varphi(u_0 + tv) - \varphi(u_0)}{t}. \tag{9.13}$$

Además, la función $\mathcal{G}\varphi(u_0) : V \to W$ dada por

$$\mathcal{G}\varphi(u_0)v := \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(u_0 + tv) - \varphi(u_0)}{t} \tag{9.14}$$

debe ser lineal y continua. Esto da lugar al siguiente concepto.

Definición 9.18 *Una función $\varphi : \Omega \to W$ es* ***Gâteaux-diferenciable en el punto*** *$u_0 \in \Omega$ si, para cada $v \in V$, existe el límite* (9.13) *y la función $\mathcal{G}\varphi(u_0)$ definida en* (9.14)

pertenece a $\mathcal{L}(V,W)$*.*
φ *es* ***Gâteaux-diferenciable en*** Ω *si lo es en todo punto* $u \in \Omega$*. La función*

$$\mathcal{G}\varphi : \Omega \to \mathcal{L}(V,W), \qquad u \mapsto \mathcal{G}\varphi(u),$$

se llama la ***derivada de Gâteaux de*** φ*.*

Cabe señalar que la existencia del límite

$$\lim_{t \to 0} \frac{\varphi(u_0 + tv) - \varphi(u_0)}{t}$$

para toda $v \in V$ no basta para garantizar que $\mathcal{G}\varphi(u_0) \in \mathcal{L}(V,W)$ [Ejercicio 9.39].

La discución anterior asegura que, si φ es diferenciable en u_0, entonces φ es Gâteaux-diferenciable en u_0 y

$$\mathcal{G}\varphi(u_0) = \varphi'(u_0).$$

El recíproco no es cierto en general.

Ejemplo 9.19 *La función* $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\varphi(x,y) := \begin{cases} \frac{x^3y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

es Gâteaux-diferenciable en $\mathbb{R}^2$ *pero no es diferenciable en* $(0,0)$*.*

La demostración es sencilla y se incluye como ejercicio [Ejercicio 9.40].

Sin embargo, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 9.20 $\varphi : \Omega \to W$ *es de clase* $\mathcal{C}^1$ *en* Ω *si y sólo si* φ *es Gâteaux-diferenciable en* Ω *y su derivada de Gâteaux* $\mathcal{G}\varphi : \Omega \to \mathcal{L}(V,W)$ *es continua. En tal caso,* $\varphi' = \mathcal{G}\varphi$*.*

Demostración: Ya demostramos que, si φ es diferenciable en u_0, entonces φ es Gâteaux-diferenciable en u_0 y $\mathcal{G}\varphi(u_0) = \varphi'(u_0)$. En consecuencia, si φ es de clase $\mathcal{C}^1$ en Ω, $\mathcal{G}\varphi = \varphi'$ es continua.
Supongamos ahora que φ es Gâteaux-diferenciable en Ω y $\mathcal{G}\varphi : \Omega \to \mathcal{L}(V,W)$ es continua. Sean $u_0 \in \Omega$, $v \in V$ y $\varepsilon > 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que $u_0 + v \in \Omega$ y

$$\|\mathcal{G}\varphi(u_0 + v) - \mathcal{G}\varphi(u_0)\|_{\mathcal{L}(V,W)} < \varepsilon \quad \text{si} \quad \|v\|_V < \delta. \tag{9.15}$$

Para cada $v \in V$ con $\|v\|_V < \delta$ definimos $\sigma_v : [0,1] \to W$ como

$$\sigma_v(t) := \varphi(u_0 + tv) - \varphi(u_0) - \mathcal{G}\varphi(u_0)(tv).$$

Entonces σ_v es diferenciable en $(0,1)$ y su derivada es

$$\begin{aligned}
\sigma_v'(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sigma_v(t+h)-\sigma_v(t)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\varphi(u_0+tv+hv)-\varphi(u_0+tv)-\mathcal{G}\varphi(u_0)(hv)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\varphi(u_0+tv+hv)-\varphi(u_0+tv)}{h}-\mathcal{G}\varphi(u_0)v \\
&= \mathcal{G}\varphi(u_0+tv)v-\mathcal{G}\varphi(u_0)v.
\end{aligned}$$

Se sigue de (9.15) que

$$\begin{aligned}
\|\sigma_v'(t)\|_W &\leq \|\mathcal{G}\varphi(u_0+tv)-\mathcal{G}\varphi(u_0)\|_{\mathcal{L}(V,W)}\|v\|_V \\
&< \varepsilon\|v\|_V \qquad \forall t\in(0,1).
\end{aligned}$$

Por el teorema del valor medio (Teorema 9.13),

$$\begin{aligned}
\|\varphi(u_0+v)-\varphi(u_0)-\mathcal{G}\varphi(u_0)v\|_W &= \|\sigma_v(1)-\sigma_v(0)\|_W \\
&\leq \varepsilon\|v\|_V \qquad \text{si} \quad \|v\|_V<\delta.
\end{aligned}$$

Esto prueba que φ es diferenciable en u_0 y $\varphi'(u_0)=\mathcal{G}\varphi(u_0)$. Como $\mathcal{G}\varphi$ es continua, φ es de clase $\mathcal{C}^1$ en Ω. ■

El teorema anterior proporciona un criterio muy útil para verificar la diferenciabilidad de una función y calcular su derivada. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 9.21 *Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^1$. La función $\varphi:\mathcal{C}^0[a,b]\to\mathbb{R}$ dada por*

$$\varphi(u):=\int_a^b f(u(t))dt$$

es de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathcal{C}^0[a,b]$ y su derivada es

$$\varphi'(u)v:=\int_a^b f'(u(t))v(t)dt.$$

Demostración: Probaremos primero que φ es Gâteaux-diferenciable. Sean $u,v\in\mathcal{C}^0[a,b]$, $v\neq 0$, y $\varepsilon>0$. Denotemos por

$$M:=\|u\|_\infty+\|v\|_\infty \quad \text{y} \quad \tilde{\varepsilon}:=\frac{\varepsilon}{(b-a)\|v\|_\infty}.$$

Como f' es uniformemente continua en $[-M, M]$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|f'(x) - f'(y)| < \tilde{\varepsilon} \qquad \forall x, y \in [-M, M] \text{ con } |x - y| < \delta.$$

Del teorema del valor medio (ver Corolario 9.17) y la desigualdad anterior se sigue que, si $x, x + hz \in [-M, M]$, $|hz| < \delta$ y $s \in [0, 1]$, entonces

$$|f(x + hz) - f(x) - f'(x)hz)| \leq \sup_{s\in[0,1]} |f'(x + shz) - f'(x)| \, |hz| < \tilde{\varepsilon} \, |hz| \, . \tag{9.16}$$

Observa que

$$|u(t) + hv(t)| \leq \|u\|_\infty + \|v\|_\infty =: M \qquad \forall t \in [a, b], \;\; h \in [0, 1].$$

Por tanto, podemos aplicar la desigualdad (9.16) con $x := u(t)$, $z := v(t)$ y $0 < |h| < \text{mín}\{1, \frac{\delta}{\|v\|_\infty}\}$ para obtener

$$\left| \frac{f(u(t) + hv(t)) - f(u(t))}{h} - f'(u(t))v(t) \right| < \tilde{\varepsilon} \, |v(t)| \leq \frac{\varepsilon}{b - a} \qquad \forall t \in [a, b].$$

En consecuencia, si $0 < |h| < \text{mín}\{1, \frac{\delta}{\|v\|_\infty}\}$, entonces

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varphi(u + hv) - \varphi(u)}{h} - \int_a^b f'(u(t))v(t)dt \right| \\ \leq \;\; & \int_a^b \left| \frac{f(u(t) + hv(t)) - f(u(t))}{h} - f'(u(t))v(t) \right| dt < \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto prueba que

$$\int_a^b f'(u(t))v(t)dt = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(u + hv) - \varphi(u)}{h} =: \mathcal{G}\varphi(u)v.$$

La función $\mathcal{G}\varphi(u) : \mathcal{C}^0[a, b] \to \mathbb{R}$ es claramente lineal y, como

$$|\mathcal{G}\varphi(u)v| \leq \left(\int_a^b f'(u(t))dt \right) \|v\|_\infty \qquad \forall v \in \mathcal{C}^0[a, b],$$

la Proposición 9.1 asegura que $\mathcal{G}\varphi(u)$ es continua. Por tanto, φ es Gâteaux-diferenciable en u para todo $u \in \mathcal{C}^0[a, b]$.
Probaremos ahora que $\mathcal{G}\varphi : \mathcal{C}^0[a, b] \to \mathcal{L}(\mathcal{C}^0[a, b], \mathbb{R})$ es continua. Sean $u_0 \in \mathcal{C}^0[a, b]$ y $\varepsilon > 0$. Denotemos por $M_0 := \|u_0\|_\infty + 1$. Como f' es uniformemente continua en $[-M_0, M_0]$, existe $\delta \in (0, 1)$ tal que

$$|f'(x) - f'(y)| < \frac{\varepsilon}{(b - a)} \qquad \forall x, y \in [-M_0, M_0] \text{ con } |x - y| < \delta.$$

Observa que, si $\|u - u_0\|_\infty < \delta$, entonces

$$|u(t)| \leq \|u\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty + \|u - u_0\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty + \delta < M_0 \qquad \forall t \in [a,b].$$

Por tanto,

$$|\mathcal{G}\varphi(u)v - \mathcal{G}\varphi(u_0)v| \leq \int_a^b |f'(u(t)) - f'(u_0(t))|\,|v(t)|\,dt < \varepsilon \|v\|_\infty .$$

En consecuencia,

$$\|\mathcal{G}\varphi(u) - \mathcal{G}\varphi(u_0)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{C}^0[a,b],\mathbb{R})} = \sup_{\substack{v\in\mathcal{C}^0[a,b]\\ v\neq 0}} \frac{|\mathcal{G}\varphi(u)v - \mathcal{G}\varphi(u_0)v|}{\|v\|_\infty} < \varepsilon \qquad \text{si } \|u - u_0\|_\infty < \delta.$$

Esto prueba que $\mathcal{G}\varphi : \mathcal{C}^0[a,b] \to \mathcal{L}(\mathcal{C}^0[a,b],\mathbb{R})$ es continua.
Del Teorema 9.20 se sigue que φ es de clase $\mathcal{C}^1$ y que $\varphi' = \mathcal{G}\varphi$. ■

9.5. Derivadas parciales

Sean $V_1, ..., V_n, W$ espacios de Banach. El producto cartesiano $V_1 \times \cdots \times V_n$ con la norma

$$\|(v_1, ..., v_n)\|_{V_1\times\cdots\times V_n} := \max_{j=1,\dots,n} \|v_j\|_{V_j}$$

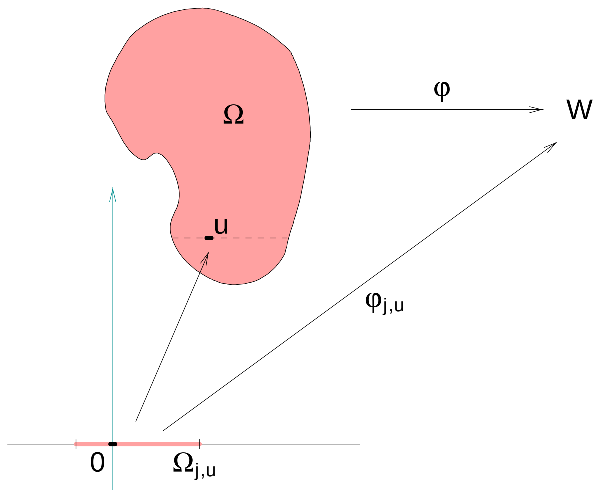
es un espacio de Banach (ver Ejercicio 5.37). La inclusión en el j-ésimo factor,

$$\iota_j : V_j \to V_1 \times \cdots \times V_n, \qquad \iota_j(v) := (0, ..., 0, \underbrace{v}_{j\text{-ésimo}}, 0, ..., 0),$$

es una función lineal y una isometría. Si Ω es abierto en $V := V_1 \times \cdots \times V_n$ y $u \in \Omega$, entonces

$$\Omega_{j,u} := \{v \in V_j : u + \iota_j v \in \Omega\}$$

es un abierto de V_j que contiene a 0.



Definición 9.22 *Una función $\varphi : \Omega \to W$ es **diferenciable respecto a** V_j **en** u si la función*

$$\varphi_{j,u} : \Omega_{j,u} \to W, \qquad \varphi_{j,u}(v) := \varphi(u + \iota_j v),$$

es diferenciable en 0. *La **derivada parcial de** φ **respecto a** V_j **en** u se define como*

$$\partial_{V_j}\varphi(u) := \varphi'_{j,u}(0) \in \mathcal{L}(V_j, W).$$

*La función φ es **diferenciable respecto a** V_j **en** Ω si lo es en todo punto $u \in \Omega$, y **la derivada parcial de** φ **respecto a** V_j en Ω es la función*

$$\partial_{V_j}\varphi : \Omega \to \mathcal{L}(V_j, W), \qquad u \mapsto \partial_{V_j}\varphi(u).$$

Si $\varphi : \Omega \to W$ es diferenciable en u entonces, por la regla de la cadena, φ es diferenciable respecto a V_j en u y

$$\partial_{V_j}\varphi(u) = \varphi'(u) \circ \iota_j, \qquad j = 1, ..., n.$$

Es decir, $\partial_{V_j}\varphi(u)$ es la restricción de $\varphi'(u)$ al factor V_j. Nota que $v = \sum_{j=1}^n \iota_j v_j$ si $v = (v_1, ..., v_n)$. En consecuencia,

$$\varphi'(u)v = \sum_{j=1}^{n} \partial_{V_j}\varphi(u)v_j, \qquad j = 1, ..., n. \tag{9.17}$$

Los siguientes ejemplos relacionan estos conceptos con los que ya conocemos de Cálculo.

Ejemplo 9.23 *Si* Ω *es abierto en* $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ *y* $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ *es diferenciable en* x*, entonces* $\partial_{V_j}\varphi(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$*. Como en la* Sección 9.3*, identificamos a la función lineal* $\partial_{V_j}\varphi(x)$ *con su valor en* 1*. Esta es la* j***-ésima derivada parcial de*** φ *que conocemos de Cálculo, a la que se suele denotar*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \in \mathbb{R}.$$

El ***gradiente de*** φ ***en*** x *es el vector*

$$\nabla\varphi(x) := \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x), ..., \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x)\right) \in \mathbb{R}^n.$$

La fórmula (9.17) *se escribe entonces como*

$$\varphi'(x)y = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x)y_j = \nabla\varphi(x) \cdot y,$$

donde $\nabla\varphi(x) \cdot y$ *denota al producto escalar usual de* $\nabla\varphi(x)$ *y* y*.*

Ejemplo 9.24 *Si* Ω *es abierto en* $\mathbb{R}^n$ *y* $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_m) : \Omega \to \mathbb{R}^m$ *es diferenciable en* x*, entonces la* j*-ésima componente* φ_j *de* φ *es la composición* $\varphi_j := \pi_j \circ \varphi$ *donde*

$$\pi_j : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, \qquad \pi_j(z_1, ..., z_m) := z_j,$$

es la j*-ésima proyección. Como* π_j *es lineal, aplicando la regla de la cadena se tiene que*

$$\varphi_j'(x) = \pi_j \circ \varphi'(x),$$

es decir, $\varphi_j'(x)$ *es la* j*-ésima componente de* $\varphi'(x)$*. Por tanto,*

$$\begin{aligned} \varphi'(x)y &= (\varphi_1'(x)y, ..., \varphi_m'(x)y) \\ &= (\nabla\varphi_1(x) \cdot y, ..., \nabla\varphi_m(x) \cdot y), \end{aligned}$$

es decir, $\varphi'(x)$ *es la función lineal dada por la matriz*

$$\varphi'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

que se llama la ***matriz jacobiana d****e* φ ***en*** x*.*

No es cierto, en general, que si φ es diferenciable respecto a toda variable en u entonces φ es diferenciable en u [Ejercicio 9.40]. Pero lo es si se cumple además que $\partial_{V_j}\varphi$ es continua en Ω para toda $j = 1, ..., n$.

Teorema 9.25 *Sean Ω abierto en $V_1 \times \cdots \times V_n$. Una función $\varphi : \Omega \to W$ es de clase $\mathcal{C}^1$ en Ω si y sólo si φ es diferenciable respecto a V_j en Ω y sus derivadas parciales*

$$\partial_{V_j}\varphi : \Omega \to \mathcal{L}(V_j, W)$$

son continuas en Ω para todo $j = 1, ..., n$.

Demostración: Ya vimos que, si $\varphi : \Omega \to W$ es diferenciable en u, entonces φ es diferenciable respecto a V_j en u y $\partial_{V_j}\varphi(u) = \varphi'(u) \circ \iota_j$. Por tanto, $\partial_{V_j}\varphi$ es continua si φ es de clase $\mathcal{C}^1$ en Ω.
Supongamos ahora que φ es diferenciable respecto a todo V_j en Ω y que sus derivadas parciales son continuas en Ω. Basta considerar el caso $n = 2$. Por simplicidad denotaremos $\partial_j\varphi := \partial_{V_j}\varphi$. Sean $u = (u_1, u_2) \in \Omega$ y $\varepsilon > 0$. Como φ es diferenciable respecto a V_1 en u y $\partial_2\varphi$ es continua en u, existe $\delta > 0$ tal que

$$u + v \in \Omega \quad \text{si } v = (v_1, v_2) \in V_1 \times V_2 \ \text{ y } \ \|v\|_{V_1 \times V_2} := \text{máx}\{\|v_1\|_{V_1}, \|v_2\|_{V_2}\} < \delta,$$

$$\begin{aligned} \|\varphi(u + \iota_1 v_1) - \varphi(u) - \partial_1\varphi(u)v_1\|_W &< \frac{\varepsilon}{4}\|v_1\|_{V_1} \qquad \text{si } \|v_1\|_{V_1} < \delta, \qquad (9.18) \\ \|\partial_2\varphi(u + v) - \partial_2\varphi(u)\|_{\mathcal{L}(V_2,W)} &< \frac{\varepsilon}{4} \qquad \text{si } \|v\|_{V_1 \times V_2} < \delta. \end{aligned}$$

La segunda desigualdad implica que

$$\begin{aligned} \|\partial_2\varphi(u + \iota_1 v_1)v_2 - \partial_2\varphi(u)v_2\|_W &\leq \|\partial_2\varphi(u + \iota_1 v_1) - \partial_2\varphi(u)\|_{\mathcal{L}(V_2,W)} \|v_2\|_{V_2} \\ &< \frac{\varepsilon}{4}\|v_2\|_{V_2} \qquad \text{si } \|v_1\|_{V_1} < \delta, \qquad (9.19) \end{aligned}$$

y también que

$$\begin{aligned} & \|\partial_2\varphi(u + \iota_1 v_1 + t\iota_2 v_2) - \partial_2\varphi(u + \iota_1 v_1)\|_{\mathcal{L}(V_2,W)} \\ \leq\ & \|\partial_2\varphi(u + \iota_1 v_1 + t\iota_2 v_2) - \partial_2\varphi(u)\|_{\mathcal{L}(V_2,W)} + \|\partial_2\varphi(u) - \partial_2\varphi(u + \iota_1 v_1)\|_{\mathcal{L}(V_2,W)} \\ <\ & \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{si } \|v\|_{V_1 \times V_2} < \delta \ \text{ y } \ t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

De esta última desigualdad y el Corolario 9.17 se sigue que

$$\begin{aligned} & \|\varphi(u + v) - \varphi(u + \iota_1 v_1) - \partial_2\varphi(u + \iota_1 v_1)v_2\|_W \\ \leq\ & \sup_{t\in[0,1]} \|\partial_2\varphi(u + \iota_1 v_1 + t\iota_2 v_2) - \partial_2\varphi(u + \iota_1 v_1)\|_{\mathcal{L}(V_2,W)} \|v_2\|_{V_2} \\ <\ & \frac{\varepsilon}{2}\|v_2\|_{V_2} \qquad \text{si } \|v\|_{V_1 \times V_2} < \delta. \qquad (9.20) \end{aligned}$$

Finalmente, de las desigualdades (9.18), (9.19) y (9.20) obtenemos

$$\begin{aligned}
& \|\varphi(u+v)-\varphi(u)-\partial_1\varphi(u)v_1-\partial_2\varphi(u)v_2\| \\
\leq\ & \|\varphi(u+v)-\varphi(u+\iota_1 v_1)-\partial_2\varphi(u+\iota_1 v_1)v_2\|+\|\partial_2\varphi(u+\iota_1 v_1)v_2-\partial_2\varphi(u)v_2\| \\
& +\|\varphi(u+\iota_1 v_1)-\varphi(u)-\partial_1\varphi(u)v_1\| \\
\leq\ & \varepsilon\|v\|_{V_1\times V_2} \qquad \text{si } \|v\|_{V_1\times V_2}<\delta.
\end{aligned}$$

Esto prueba que φ es diferenciable en u y $\varphi'(u)v=\partial_1\varphi(u)v_1+\partial_2\varphi(u)v_2$. Por tanto, φ es de clase $\mathcal{C}^1$ en Ω. ■

9.6. Derivadas de orden superior

Sean V y W espacios de Banach y Ω un subconjunto abierto de V. Si $\varphi:\Omega\to W$ es diferenciable en Ω, su derivada φ' es una función que toma valores en el espacio de Banach $\mathcal{L}(V,W)$. Si $\varphi':\Omega\to\mathcal{L}(V,W)$ es, a su vez, diferenciable en Ω decimos que φ es **dos veces diferenciable en** Ω. La derivada de φ' se llama **la segunda derivada de** φ **en** Ω y se denota por

$$D^2\varphi:\Omega\to\mathcal{L}(V,\mathcal{L}(V,W)).$$

Veremos a continuación que el espacio $\mathcal{L}(V,\mathcal{L}(V,W))$ tiene una representación sencilla como el espacio de funciones bilineales y continuas $V\times V\to W$.

En general, si $V_1,...,V_k,W$ son espacios de Banach, una función $F:V_1\times\cdots\times V_k\to W$ es k-**multilineal** si es lineal en cada variable, es decir, si para cada $j\in\{1,...,k\}$ y $u_i\in V_i$, $i\neq j$, la función

$$V_j\to W,\qquad v\longmapsto F(u_1,...,u_{j-1},v,u_{j+1},...u_m)$$

es lineal. Si $k=2$ se dice que F es **bilineal**. Denotamos por

$$\mathcal{L}(V_1,...,V_k;W):=\{F:V_1\times\cdots\times V_k\to W : F \text{ es } k\text{-multilineal y continua}\}.$$

Si $V_1=\cdots=V_k=V$ escribimos simplemente

$$\mathcal{L}_k(V,W):=\mathcal{L}(\underbrace{V,...,V}_{k\text{ veces}};W).$$

Como en el caso $k=1$ se tiene el siguiente resultado.

Proposición 9.26 *Si $F : V_1 \times \cdots \times V_k \to W$ es k-multilineal, entonces F es continua si y sólo si existe $C \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\|F(v)\|_W \leq C\,\|v_1\|_{V_1} \cdots \|v_k\|_{V_k} \qquad \forall v = (v_1, ..., v_k) \in V_1 \times \cdots \times V_k. \tag{9.21}$$

Demostración: Si F es continua, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|F(v)\|_W < 1 \quad \text{ si } \|v\|_{V_1 \times \cdots \times V_k} := \max_{j=1,\dots,k} \|v_j\|_{V_j} < \delta.$$

Por tanto, para todo $v = (v_1, ..., v_k) \in V_1 \times \cdots \times V_k$,

$$\frac{\delta^k}{2^k \|v_1\|_{V_1} \cdots \|v_k\|_{V_k}} \|F(v)\|_W = \left\| F\left(\frac{\delta}{2}\left(\frac{v_1}{\|v_1\|_{V_1}}, \dots, \frac{v_k}{\|v_k\|_{V_k}}\right)\right)\right\|_W < 1.$$

En consecuencia,

$$\|F(v)\|_W \leq \frac{2^k}{\delta^k} \|v_1\|_{V_1} \cdots \|v_k\|_{V_k} \qquad \forall v = (v_1, ..., v_k) \in V_1 \times \cdots \times V_k.$$

Inversamente, si $F : V_1 \times \cdots \times V_k \to W$ es k-multilineal y se cumple (9.21), entonces la Proposición 9.1 asegura que F es continua en la j-ésima variable para cada $j = 1, \dots, k$. En consecuencia, F es continua. ■

Para $F \in \mathcal{L}(V_1, ..., V_k; W)$ definimos

$$\|F\|_{\mathcal{L}(V_1,\dots,V_k;W)} := \sup_{\substack{v_j \in V_j \smallsetminus \{0\} \\ j=1,\dots,k}} \frac{\|F(v_1, ..., v_k)\|_W}{\|v_1\|_{V_1} \cdots \|v_k\|_{V_k}}. \tag{9.22}$$

Esta es una norma en $\mathcal{L}(V_1, ..., V_k; W)$, que coincide con la definida en (9.1) cuando $k = 1$.

Es fácil comprobar que la identidad

$$(\hat{F} v_1) v_2 = F(v_1, v_2), \qquad v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2,$$

define una biyección

$$\mathcal{L}(V_1, V_2; W) \to \mathcal{L}(V_1, \mathcal{L}(V_2, W)), \qquad F \longmapsto \hat{F}, \tag{9.23}$$

y que ésta es lineal y es una isometría, es decir,

$$\|F\|_{\mathcal{L}(V_1,V_2;W)} = \left\|\hat{F}\right\|_{\mathcal{L}(V_1,\mathcal{L}(V_2,W))}$$

[Ejercicio 9.51]. Inductivamente, obtenemos isomorfismos lineales

$$\mathcal{L}(V_1,...,V_k;W) \cong \mathcal{L}(V_1,\mathcal{L}(V_1,...,V_{k-1};W)) \cong \mathcal{L}(V_1,\cdots\mathcal{L}(V_{k-1},\mathcal{L}(V_k,W))\cdots)$$

que son además isometrías. En consecuencia, $\mathcal{L}(V_1,...,V_k;W)$ es un espacio de Banach.

La biyección (9.23) nos permite interpretar a la segunda derivada de $\varphi:\Omega\to W$ como una función

$$D^2\varphi:\Omega\to\mathcal{L}_2(V,W).$$

Más aún, como ocurre en espacios euclidianos, la segunda derivada en cada punto es una función bilineal simétrica.

Proposición 9.27 *Si $\varphi:\Omega\to W$ es dos veces diferenciable en Ω entonces, para cada $u\in\Omega$, la función $D^2\varphi(u)\in\mathcal{L}_2(V,W)$ es simétrica, es decir,*

$$D^2\varphi(u)(v_1,v_2)=D^2\varphi(u)(v_2,v_1)\qquad\forall v_1,v_2\in V.$$

Demostración: Sean $u\in\Omega$ y $\varepsilon>0$. Como φ es dos veces diferenciable en u existe $\delta>0$ tal que $u+v\in\Omega$ y

$$\left\|\varphi'(u+v)-\varphi'(u)-D^2\varphi(u)v\right\|_{\mathcal{L}(V,W)}<\varepsilon\left\|v\right\|_V\qquad\text{si }\left\|v\right\|_V<2\delta. \tag{9.24}$$

Sean $v,w\in V$ tales que $\|v\|_V<\delta$ y $\|w\|_V<\delta$. Definimos $\sigma:[0,1]\to W$ como

$$\sigma(t):=\varphi(u+tv+w)-\varphi(u+tv).$$

Entonces

$$\begin{aligned}\sigma'(t)-\left(D^2\varphi(u)w\right)v &= \left[\varphi'(u+tv+w)v-\varphi(u)v-D^2\varphi(u)(tv+w)v\right]\\ &\quad-\left[\varphi'(u+tv)v-\varphi(u)v-D^2\varphi(u)(tv)v\right].\end{aligned}$$

Aplicando (9.24) obtenemos

$$\begin{aligned}\left\|\sigma'(t)-\left(D^2\varphi(u)w\right)v\right\|_W &\leq \left\|\varphi'(u+tv+w)-\varphi'(u)-D^2\varphi(u)(tv+w)\right\|_{\mathcal{L}(V,W)}\left\|v\right\|_V\\ &\quad+\left\|\varphi'(u+tv)-\varphi'(u)-D^2\varphi(u)(tv)\right\|_{\mathcal{L}(V,W)}\left\|v\right\|_V\\ &< 2\varepsilon\left(\left\|v\right\|_V+\left\|w\right\|_V\right)\left\|v\right\|_V\qquad\forall t\in[0,1].\end{aligned}$$

El Corolario 9.17 y la desigualdad anterior implican que

$$\begin{aligned}\left\|\sigma(1)-\sigma(0)-\left(D^2\varphi(u)w\right)v\right\|_W &\leq \left\|\sigma(1)-\sigma(0)-\sigma'(0)\right\|_W+\left\|\sigma'(0)-\left(D^2\varphi(u)w\right)v\right\|_W\\ &\leq \sup_{t\in[0,1]}\left\|\sigma'(t)-\sigma'(0)\right\|_W+\left\|\sigma'(0)-\left(D^2\varphi(u)w\right)v\right\|_W\\ &\leq 3\sup_{t\in[0,1]}\left\|\sigma'(t)-\left(D^2\varphi(u)w\right)v\right\|_W\\ &\leq 6\varepsilon\left(\left\|v\right\|_V+\left\|w\right\|_V\right)\left\|v\right\|_V.\end{aligned}$$

Observa que $\sigma(1)-\sigma(0)=\varphi(u+v+w)-\varphi(u+v)-\varphi(u+w)+\varphi(u)$ es simétrica en v y w, por lo que intercambiando los papeles de v y w en la desigualdad anterior obtenemos

$$\left\|\sigma(1)-\sigma(0)-\left(D^2\varphi(u)v\right)w\right\|_W\leq 6\varepsilon\left(\|v\|_V+\|w\|_V\right)\|w\|_V\,.$$

En consecuencia,

$$\left\|\left(D^2\varphi(u)v\right)w-\left(D^2\varphi(u)w\right)v\right\|_W\leq 6\varepsilon\left(\|v\|_V+\|w\|_V\right)^2\qquad\text{si }\max\{\|v\|_V\,,\|w\|_V\}<\delta.$$

Si $v,w\in V$ son arbitrarios, escogemos $\lambda\in(0,1]$ tal que $\|\lambda v\|_V<\delta$ y $\|\lambda w\|_V<\delta$. Entonces

$$\begin{aligned}\left\|\left(D^2\varphi(u)v\right)w-\left(D^2\varphi(u)w\right)v\right\|_W &= \frac{1}{\lambda^2}\left\|\left(D^2\varphi(u)\,(\lambda v)\right)(\lambda w)-\left(D^2\varphi(u)\,(\lambda w)\right)(\lambda v)\right\|_W\\ &\leq \frac{1}{\lambda^2}6\varepsilon\left(\|\lambda v\|_V+\|\lambda w\|_V\right)^2=6\varepsilon\left(\|v\|_V+\|w\|_V\right)^2.\end{aligned}$$

Así pues,

$$\left\|\left(D^2\varphi(u)v\right)w-\left(D^2\varphi(u)w\right)v\right\|_W\leq 6\varepsilon\left(\|v\|_V+\|w\|_V\right)^2\qquad\forall v,w\in V.$$

Como $\varepsilon>0$ es arbitraria, concluímos que $(D^2\varphi(u)v)\,w=(D^2\varphi(u)w)\,v$ para todos $v,w\in V$. ■

Definimos las derivadas de orden superior de φ inductivamente como sigue.

Definición 9.28 *Sea $k\in\mathbb{N}$, $k\geq 2$. Una función $\varphi:\Omega\to W$ es **k-veces diferenciable en** Ω si φ es $(k-1)$-veces diferenciable en Ω y su derivada de orden $k-1$, $D^{k-1}\varphi:\Omega\to\mathcal{L}_{k-1}(V,W)$, es diferenciable en Ω. La derivada de $D^{k-1}\varphi$ se llama la **derivada de orden** k **de** φ y se denota*

$$D^k\varphi:\Omega\to\mathcal{L}(V,\mathcal{L}_{k-1}(V,W))\cong\mathcal{L}_k(V,W).$$

*Si $D^k\varphi$ es continua en Ω decimos que φ **es de clase $\mathcal{C}^k$ en** Ω.*
*Si $D^j\varphi$ admite una extensión continua a la cerradura $\overline{\Omega}$ de Ω para cada $j=0,1,\ldots,k$, donde $D^0\varphi:=\varphi$, decimos que φ **es de clase $\mathcal{C}^k$ en** $\overline{\Omega}$.*
*Finalmente, si φ es de clase $\mathcal{C}^k$ en Ω (resp. en $\overline{\Omega}$) para todo $k\in\mathbb{N}$, decimos que φ **es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en** Ω (resp. en $\overline{\Omega}$).*

En caso de que exista una extensión continua de $D^j\varphi$ a la cerradura de Ω, la denotaremos también por $D^j\varphi$.

Si V y W son espacios de Banach, Ω es un subconjunto abierto de V y $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^k(\Omega, W) &: = \{\varphi : \Omega \to W : \varphi \text{ es de clase } \mathcal{C}^k \text{ en } \Omega\}, \\ \mathcal{C}^k(\overline{\Omega}, W) &: = \{\varphi : \overline{\Omega} \to W : \varphi \text{ es de clase } \mathcal{C}^k \text{ en } \overline{\Omega}\}. \end{aligned}$$

Si $W = \mathbb{R}$ escribiremos simplemente

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^k(\Omega) &: = \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}), \\ \mathcal{C}^k(\overline{\Omega}) &: = \mathcal{C}^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Argumentando por inducción a partir de la Proposición 9.27 se obtiene el siguiente resultado. Dejamos los detalles al lector [Ejercicio 9.52].

Proposición 9.29 *Si $\varphi : \Omega \to W$ es k-veces diferenciable entonces, para todo $u \in \Omega$, la k-ésima derivada de φ en u es simétrica, es decir,*

$$D^k\varphi(u)(v_1, \ldots, v_k) = D^k\varphi(u)(v_{\tau(1)}, \ldots, v_{\tau(k)})$$

para cualesquiera $v_1, \ldots, v_k \in V$ y cualquier permutación $\tau : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, k\}$.

9.7. La fórmula de Taylor

Si φ es diferenciable en u_0 entonces

$$\varphi(u_0 + v) = \varphi(u_0) + \varphi'(u_0)v + r_1(v)$$

donde $\lim_{v\to 0} \frac{\|r_1(v)\|_W}{\|v\|_V} = 0$. Es decir, cerca de u_0, φ es la suma de una función constante más una función lineal salvo por un término que tiende a cero más rápidamente que $\|v\|_V$. La fórmula de Taylor generaliza esta afirmación. Asegura que si φ es de clase $\mathcal{C}^k$ en u_0 entonces, cerca de ese punto, φ es una suma de funciones j-multilineales, $j = 0, \ldots, k$, salvo por un término que tiende a cero más rápidamente que $\|v\|_V^k$.

El teorema que veremos a continuación es una extensión a espacios de Banach del teorema de Taylor para funciones reales de variable real que estudiamos en Cálculo. Usaremos ese resultado para demostrar éste, por lo que te sugerimos que revises su demostración [Ejercicio 9.54].

Teorema 9.30 (Taylor) *Si V es un espacio de Banach, Ω es un subconjunto abierto de V, $u_0 \in \Omega$ y $v \in V$ satisfacen que $u_0 + tv \in \Omega$ para todo $t \in [0, 1]$, y $\varphi \in \mathcal{C}^{k+1}(\Omega, \mathbb{R})$, entonces existe $\theta \in (0, 1)$ tal que*

$$\begin{aligned} \varphi(u_0 + v) &= \varphi(u_0) + D\varphi(u_0)v + \frac{1}{2}D^2\varphi(u_0)(v, v) + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{k!}D^k\varphi(u_0)(\underbrace{v, \ldots, v}_{k \text{ veces}}) + \frac{1}{(k+1)!}D^{k+1}\varphi(u_0 + \theta v)(\underbrace{v, \ldots, v}_{k+1 \text{ veces}}). \end{aligned}$$

Demostración: La función real de variable real $f(t) := \varphi(u_0 + tv)$ está definida en algún intervalo abierto que contiene a $[0, 1]$, es de clase $\mathcal{C}^{k+1}$ en dicho intervalo y

$$D^j f(t) = D^j\varphi(u_0 + tv)(\underbrace{v, \ldots, v}_{j \text{ veces}}), \qquad j = 1, ..., k + 1. \tag{9.25}$$

En efecto, por la regla de la cadena, $Df(t) = D\varphi(u_0 + tv)v$. Argumentando por inducción, si $D^{j-1}f(t) = D^{j-1}\varphi(u_0 + tv)(v, \ldots, v)$ para algún $j = 2, ..., k + 1$, entonces $D^{j-1}f = \mathcal{E}\circ(D^{j-1}\varphi)\circ\sigma$ donde $\sigma(t) := u_0+tv$ y $\mathcal{E}$ es la función que a cada $F \in \mathcal{L}_{j-1}(V, \mathbb{R})$ le asocia el valor $F(v, \ldots, v) \in \mathbb{R}$. Observa que $\mathcal{E}$ es lineal y continua [Ejercicio 9.50]. Entonces, por la regla de la cadena,

$$D^j f(t) = \left(D^j\varphi(u_0 + tv)v\right)(\underbrace{v, \ldots, v}_{j-1 \text{ veces}}),$$

que corresponde a la función (9.25) bajo la isometría (9.23).
Aplicando el teorema de Taylor para funciones de variable real [Ejercicio 9.54] a la función f, concluímos que existe $\theta \in (0, 1)$ tal que

$$\begin{aligned} \varphi(u_0 + v) &= f(1) = f(0) + Df(0) + \frac{1}{2}D^2 f(0) + \cdots + \frac{1}{k!}D^k f(0) + \frac{1}{(k+1)!}D^{k+1}f(\theta) \\ &= \varphi(u_0) + D\varphi(u_0)v + \frac{1}{2}D^2\varphi(u_0)(v, v) + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{k!}D^k\varphi(u_0)(\underbrace{v, \ldots, v}_{k \text{ veces}}) + \frac{1}{(k+1)!}D^{k+1}\varphi(u_0 + \theta v)(\underbrace{v, \ldots, v}_{k+1 \text{ veces}}). \end{aligned}$$

Esta es la identidad deseada. ■

Corolario 9.31 (Fórmula de Taylor) *Si V es un espacio de Banach, Ω es un subconjunto abierto de V, $u_0 \in \Omega$ y $\varphi \in \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R})$, entonces la función*

$$r_k(v) := \varphi(u_0 + v) - \varphi(u_0) - D\varphi(u_0)v - \cdots - \frac{1}{k!}D^k\varphi(u_0)(\underbrace{v, \ldots, v}_{k \text{ veces}})$$

está definida en una vecindad de 0 en V y satisface

$$\lim_{v\to 0} \frac{r_k(v)}{\|v\|_V^k} = 0.$$

Demostración: Sea $\delta > 0$ tal que $B_V(u_0, \delta) \subset \Omega$. Aplicando el Teorema 9.30 con k en vez de $k+1$ obtenemos que, para cada $v \in B_V(0, \delta)$, existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned} \varphi(u_0 + v) &= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} D^j\varphi(u_0)(v, \ldots, v) + \frac{1}{k!} D^k\varphi(u_0 + \theta v)(v, \ldots, v) \\ &= \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} D^j\varphi(u_0)(v, \ldots, v) + r_k(v). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$r_k(v) = \frac{1}{k!}\left(D^k\varphi(u_0 + \theta v) - D^k\varphi(u_0)\right)(v, \ldots, v).$$

De la definición (9.22) de la norma en $\mathcal{L}_k(V, \mathbb{R})$ se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{|r_k(v)|}{\|v\|_V^k} &\leq \frac{1}{k!} \frac{\left|\left(D^k\varphi(u_0 + \theta v) - D^k\varphi(u_0)\right)(v, \ldots, v)\right|}{\|v\|_V^k} \\ &\leq \frac{1}{k!} \left\|D^k\varphi(u_0 + \theta v) - D^k\varphi(u_0)\right\|_{\mathcal{L}_k(V,\mathbb{R})} \end{aligned}$$

y, dado que $D^k\varphi : \Omega \to \mathcal{L}_k(V, \mathbb{R})$ es continua en u_0, concluímos que $\lim_{v\to 0} \frac{r_k(v)}{\|v\|_V^k} = 0$. ■

La función

$$P_k(v) := \varphi(u_0) + D\varphi(u_0)v + \cdots + \frac{1}{k!} D^k\varphi(u_0)(\underbrace{v, \ldots, v}_{k \text{ veces}})$$

se llama la **expansión de Taylor de grado k de φ alrededor de u_0**.

9.8. Ejercicios

Ejercicio 9.32 *Prueba que*

$$\|T\|_{\mathcal{L}(V,W)} := \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{\|Tv\|_W}{\|v\|_V}$$

es una norma en $\mathcal{L}(V, W)$.

Ejercicio 9.33 *Prueba que, para todo $T \in \mathcal{L}(V, W)$,*

$$\|T\|_{\mathcal{L}(V,W)} = \sup_{v \in \bar{B}_V(0,1)} \|Tv\|_W = \sup_{v \in S_V(0,1)} \|Tv\|_W.$$

donde $\bar{B}_V(0,1) := \{v \in V : \|v\|_V \leq 1\}$ y $S_V(0,1) := \{v \in V : \|v\|_V = 1\}$.

Ejercicio 9.34 *Sean V, W, Z espacios de Banach, $T_1 \in \mathcal{L}(V,W)$ y $T_2 \in \mathcal{L}(W,Z)$. Prueba que*
$$\|T_2 \circ T_1\|_{\mathcal{L}(V,Z)} \leq \|T_2\|_{\mathcal{L}(W,Z)} \|T_1\|_{\mathcal{L}(V,W)}.$$

Ejercicio 9.35 *Prueba que, si $\varphi, \psi : \Omega \to W$ son diferenciables en u_0, entonces $\lambda\varphi + \mu\psi$ es diferenciable en u_0 y*

$$(\lambda\varphi + \mu\psi)'(u_0) = \lambda\varphi'(u_0) + \mu\psi'(u_0).$$

Ejercicio 9.36 *Sean V_1, V_2 espacios de Banach, $(u_1, u_2) \in V_1 \times V_2$. Prueba que las funciones*

$$\begin{aligned} \iota_{1,u_2} &: V_1 \to V_1 \times V_2, \qquad \iota_{1,u_2}(v_1) := (v_1, u_2), \\ \iota_{2,u_1} &: V_2 \to V_1 \times V_2, \qquad \iota_{2,u_1}(v_2) := (u_1, v_2), \end{aligned}$$

son diferenciables y calcula su derivada.

Ejercicio 9.37 *Prueba que la función $\varphi : \mathcal{C}^0([0,1], V) \to V \times V$ dada por*

$$\varphi(\sigma) := (\sigma(0), \sigma(1))$$

es diferenciable y calcula su derivada.

Ejercicio 9.38 *Un subconjunto A de un espacio métrico X es* ***conexo*** *si para cualesquiera $a_1, a_2 \in A$ existe una trayectoria de a_1 a a_2 en A.*
Prueba que, si Ω es un subconjunto abierto y conexo de un espacio de Banach V, $\varphi : \Omega \to W$ es diferenciable en Ω y $\varphi'(u) = 0$ para todo $u \in \Omega$, entonces φ es constante en Ω. (Sugerencia: Usa el teorema del valor medio.)

Ejercicio 9.39 *Sea $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\varphi(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Prueba que, para todos $(x_0, y_0), (x, y) \in \mathbb{R}^2$, existe

$$\lim_{t \to 0} \frac{\varphi(x_0 + tx, y_0 + ty) - \varphi(x_0, y_0)}{t} =: \psi_{(x_0,y_0)}(x,y),$$

pero $\psi_{(0,0)}$ no es lineal. Concluye que φ no es Gâteaux-diferenciable en $(0,0)$.

Ejercicio 9.40 *Prueba que la función* $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\varphi(x,y) := \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^4+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

es Gâteaux-diferenciable en $\mathbb{R}^2$ *pero no es diferenciable en* $(0,0)$.

Ejercicio 9.41 *Sean* V_1, V_2, W *espacios de Banach,* Ω *abierto en* $V_1 \times V_2$, $u \in \Omega$ *y* $\varphi : \Omega \to W$. *Investiga si las siguientes afirmaciones son válidas en general.*
(a) Si φ *es Gâteaux-diferenciable en* u, *entonces* φ *es diferenciable respecto a* V_1 *y a* V_2 *en* u.
(b) Si φ *es diferenciable respecto a* V_1 *y a* V_2 *en* u, *entonces* φ *es Gâteaux-diferenciable en* u.

Ejercicio 9.42 *Considera las funciones* $f_1, f_2, f_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *dadas por*

$$f_1(x) := \|x\|_1\,, \qquad f_2(x) := \|x\|_2\,, \qquad f_\infty(x) := \|x\|_\infty\,.$$

Investiga en qué puntos son diferenciables y calcula su derivada en dichos puntos.

Ejercicio 9.43 *Considera la función*

$$\|\cdot\|_1 : \ell_1 \to \mathbb{R}, \qquad \|x\|_1 := \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|\,.$$

(a) Prueba que $\|\cdot\|_1$ *es Gâteaux-diferenciable en* $x = (x_k)$ *si y sólo si* $x_k \neq 0$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$. *Calcula, en este caso, su derivada de Gâteaux.*
(b) Prueba que $\|\cdot\|_1$ *no es Fréchet-diferenciable en ningún punto.*

Ejercicio 9.44 *Sea* $f \in \mathcal{C}^0[a,b]$. *Prueba que la función* $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\varphi(s) := \int_s^b f(t)dt$$

es de clase $\mathcal{C}^1$ *y su derivada es* $\varphi'(s) = -f(s)$.

Ejercicio 9.45 *Sea* $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función continua, cuya derivada parcial respecto a la segunda variable existe y es continua en* $[a,b] \times \mathbb{R}$.
(a) Prueba que la función $\varphi : \mathcal{C}^0[a,b] \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\varphi(u) := \int_a^b f(s,u(s))ds$$

es de clase $\mathcal{C}^1$ *y su derivada está dada por*

$$\varphi'(u)v = \int_a^b \partial_2 f(s, u(s))v(s)ds,$$

donde $\partial_2 f$ *denota a la derivada parcial de* f *respecto a la segunda variable.*
(a) Prueba que la función $\Phi : \mathcal{C}^0[a,b] \to \mathcal{C}^0[a,b]$ *dada por*

$$\Phi(u)(t) := \int_a^t f(s, u(s))ds$$

es de clase $\mathcal{C}^1$ *y su derivada está dada por*

$$\left(\Phi'(u)v\right)(t) = \int_a^t \partial_2 f(s, u(s))v(s)ds.$$

Ejercicio 9.46 *(a) Prueba que toda función* $T \in \mathcal{L}(V, W)$ *es de clase* $\mathcal{C}^\infty$ *y calcula su derivada de orden* k *para todo* $k \in \mathbb{N}$.
(b) Prueba que toda función $F \in \mathcal{L}_2(V_1, V_2; W)$ *es de clase* $\mathcal{C}^\infty$ *y calcula su derivada de orden* k *para todo* $k \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 9.47 *Sea* $F \in \mathcal{L}_2(V, \mathbb{R})$. *Si* F *es simétrica, es decir, si* $F(v_1, v_2) = F(v_2, v_1)$ *para cualesquiera* $v_1, v_2 \in V$, *prueba que la función*

$$Q : V \to \mathbb{R}, \qquad Q(v) = \frac{1}{2}F(v, v),$$

es de clase $\mathcal{C}^\infty$ *y calcula todas sus derivadas.*

Ejercicio 9.48 *Prueba que la función* $\varphi : \mathcal{C}^0[0,1] \to \mathcal{C}^0[0,1]$ *dada por* $\varphi(u) := u^2$ *es de clase* $\mathcal{C}^\infty$ *y calcula todas sus derivadas.*

Ejercicio 9.49 *Sea* $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función continua y simétrica. Prueba que la función* $\varphi : \mathcal{C}^0[a,b] \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\varphi(u) := \int_a^b \int_a^b K(x, y)u(x)u(y)dxdy$$

es de clase $\mathcal{C}^\infty$ *y calcula todas sus derivadas.*

Ejercicio 9.50 *Sean* $V_1, ..., V_n, W$ *espacios de Banach y* $v_j \in V_j$. *Prueba que la función*

$$\mathcal{E} : \mathcal{L}(V_1, ..., V_n; W) \to W, \qquad \mathcal{E}(F) := F(v_1, \ldots, v_n),$$

es lineal y continua.

Ejercicio 9.51 *Prueba que la función*

$$\mathcal{L}(V_1, V_2; W) \to \mathcal{L}(V_1, \mathcal{L}(V_2, W)), \qquad F \longmapsto \hat{F},$$

donde

$$(\hat{F}v_1)v_2 = F(v_1, v_2), \qquad v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2,$$

está bien definida (es decir, $\hat{F} \in \mathcal{L}(V_1, \mathcal{L}(V_2, W))$ *si* $F \in \mathcal{L}(V_1, V_2; W)$*), es lineal, es biyectiva y es una isometría (es decir,* $\|F\|_{\mathcal{L}(V_1,V_2;W)} = \left\|\hat{F}\right\|_{\mathcal{L}(V_1,\mathcal{L}(V_2,W))}$ *para toda* $F \in \mathcal{L}(V_1, V_2; W)$*).*

Ejercicio 9.52 *Prueba que, si* $\varphi : \Omega \to W$ *es* k*-veces diferenciable entonces, para todo* $u \in \Omega$*, la* k*-ésima derivada de* φ *en* u *es simétrica, es decir,*

$$D^k\varphi(u)(v_1, \ldots, v_k) = D^k\varphi(u)(v_{\tau(1)}, \ldots, v_{\tau(k)})$$

para cualesquiera $v_1, \ldots, v_k \in V$ *y cualquier permutación* $\tau : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, k\}$*.*

Ejercicio 9.53 *Sean* $V_1, ..., V_n, W$ *espacios de Banach,* Ω *un subconjunto abierto de* $V := V_1 \times \cdots \times V_n$ *y* $\varphi : \Omega \to W$*.*
(a) Prueba que si φ *es de clase* $\mathcal{C}^2$ *entonces existen las derivadas parciales*

$$\partial_{V_j}\partial_{V_i}\varphi(u) := \partial_{V_j}\left(\partial_{V_i}\varphi\right)(u) \in \mathcal{L}(V_j, \mathcal{L}(V_i, W)) \cong \mathcal{L}(V_j, V_i; W)$$

para todos $u \in \Omega$*,* $i, j = 1, \ldots, n$*, y se cumple que*

$$D^2\varphi(u)(v, w) = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{V_j}\partial_{V_i}\varphi(u)(v_j, w_i)$$

para todos $v = (v_1, \ldots, v_n), w = (w_1, \ldots, w_n) \in V$*.*
(b) Prueba que si φ *es de clase* $\mathcal{C}^2$ *entonces* $\partial_{V_j}\partial_{V_i}\varphi(u) = \partial_{V_i}\partial_{V_j}\varphi(u)$ *para todos* $u \in \Omega$*,* $i, j = 1, \ldots, n$*.*
(c) Prueba que si existen las derivadas parciales $\partial_{V_j}\partial_{V_i}\varphi : \Omega \to \mathcal{L}(V_j, V_i; W)$ *y son continuas para todos* $i, j = 1, \ldots, n$*. entonces* φ *es de clase* $\mathcal{C}^2$*.*
(d) Formula y demuestra los resultados análogos para φ *de clase* $\mathcal{C}^k$*,* $k \geq 2$*.*

Ejercicio 9.54 (Teorema de Taylor para funciones de variable real) *Si* $f \in \mathcal{C}^{k+1}(a, b)$ *y* $0 \in (a, b)$ *entonces para todo* $t \in (a, b)$ *entonces existe un punto* $\theta \in (0, 1)$ *tal que*

$$f(t) = f(0) + Df(0)t + \frac{1}{2}D^2f(0)t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}D^kf(0)t^k + \frac{1}{(k+1)!}D^{k+1}f(\theta t)t^{k+1}.$$

Ejercicio 9.55 *Sea* $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \neq 0\}$. *Calcula la expansión de Taylor de grado* 2 *de la función* $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\varphi(x,y) := \frac{x-y}{x+y}$$

alrededor de $(1,1)$.

Ejercicio 9.56 *Utiliza una expansión de Taylor de la función* $\varphi(x,y) := \cos(x+y)$ *para calcular el siguiente límite:*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x+y)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Capítulo 10

El teorema de la función implícita

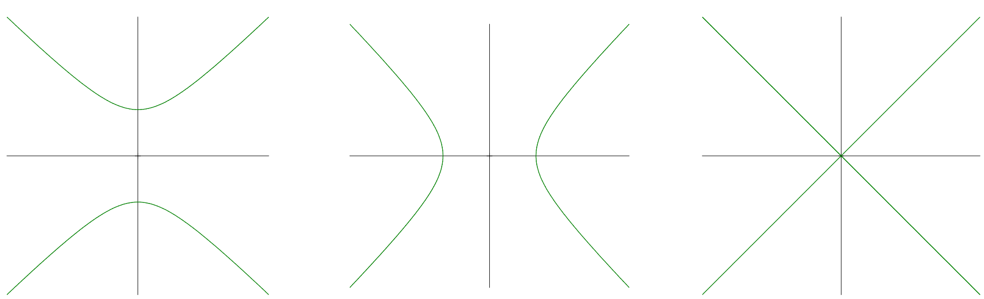
Sean $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^1$ definida en un abierto Ω de $\mathbb{R}^n$, y $c \in \mathbb{R}$. Queremos obtener información sobre la estructura del conjunto de soluciones $\xi \in \Omega$ de la ecuación

$$\varphi(\xi) = c, \tag{10.1}$$

al que denotaremos por

$$M := \{\xi \in \Omega : \varphi(\xi) = c\}.$$

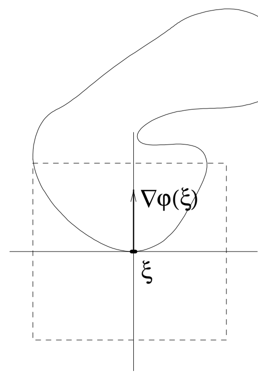
Veamos un ejemplo. Si $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es la función $\varphi(x, y) = x^2 - y^2$ entonces, para $c < 0$ el conjunto M tiene dos componentes: una de ellas es la gráfica de la función $x \mapsto \sqrt{x^2 - c}$ y la otra es la gráfica de $x \mapsto -\sqrt{x^2 - c}$. Análogamente, si $c > 0$ el conjunto M tiene dos componentes: la gráfica de la función $y \mapsto \sqrt{c + y^2}$ y la de la función $y \mapsto -\sqrt{c + y^2}$. En cambio, si $c = 0$ no existe ninguna vecindad de $(0, 0)$ en $\mathbb{R}^2$ cuya intersección con M sea la gráfica de alguna función.



$x^2 - y^2 = c < 0$ $\qquad$ $x^2 - y^2 = c > 0$ $\qquad$ $x^2 - y^2 = 0$

Nota que $\nabla\varphi(x, y) \neq (0, 0)$ si $(x, y) \neq (0, 0)$. En ese caso, la recta perpendicular a $\nabla\varphi(x, y)$ es tangente a M en el punto (x, y), es decir, M se parece a dicha recta en una vecindad del punto.

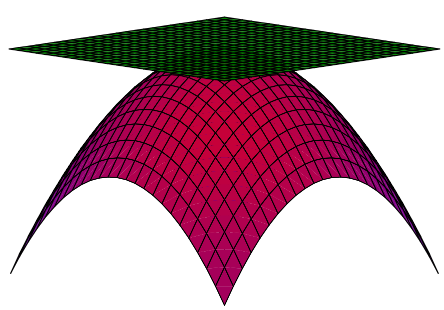
El teorema de la función implícita asegura que, en general, si $\xi \in M$ y $\nabla\varphi(\xi) \neq 0$ entonces, en una vecindad de ξ, M es la gráfica de una función cuyo dominio es un abierto en el subespacio de $\mathbb{R}^n$ ortogonal a $\nabla\varphi(\xi)$, y cuyo codominio es el espacio generado por $\nabla\varphi(\xi)$.



En particular, cerca de ξ, el conjunto de soluciones de la ecuación (10.1) se parece a $\mathbb{R}^{n-1}$.

Esto permite extender conceptos y resultados del Cálculo Diferencial a conjuntos M de soluciones de (10.1) que tienen la propiedad de que $\nabla\varphi(\xi) \neq 0$ para todo $\xi \in M$. Tales conjuntos son llamados *variedades*.

Las variedades aparecen con frecuencia en las aplicaciones como restricciones de una función $g : \Omega \to \mathbb{R}$ cuyos mínimos o máximos locales sobre dicha variedad interesa encontrar. El teorema de la función implícita proporciona un criterio sencillo para detectarlos: si $\xi \in M$ es un máximo o un mínimo local de g en M, entonces $\nabla g(\xi)$ es perpendicular al espacio tangente a M en ξ. Por ejemplo, si $g(x, y, z) := z$ es la función que a cada punto de $\mathbb{R}^3$ le asocia su altura respecto al plano xy, los máximos y mínimos locales de g sobre una superficie M en $\mathbb{R}^3$ tienen la propiedad de que el plano tangente a M en tales puntos es paralelo al plano xy.



Los resultados anteriores son válidos también en espacios de Banach y tienen aplicaciones importantes en ese contexto.

10.1. El teorema de la función implícita

Sean Y un espacio de Banach, Ω un subconjunto abierto de Y, $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^m$ una función de clase $\mathcal{C}^1$ y $c \in \mathbb{R}^m$. Nos interesa obtener información sobre la estructura del conjunto de soluciones $u \in \Omega$ de la ecuación

$$\varphi(u) = c, \tag{10.2}$$

al que denotaremos por

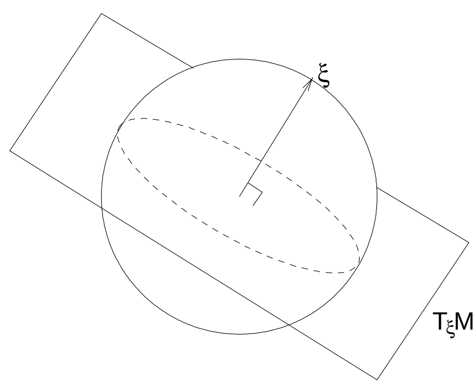
$$M := \{u \in \Omega : \varphi(u) = c\}.$$

Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 10.1 *Sea $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la función $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$. Si $c > 0$, el conjunto M es la esfera de radio $\sqrt{c}$ con centro en el origen. Ésta tiene la propiedad de que, localmente, se parece a $\mathbb{R}^{n-1}$ en el siguiente sentido: Para cada punto $\xi \in M$ existe un subespacio vectorial $T_\xi M$ de $\mathbb{R}^n$ de dimensión $n-1$, a saber*

$$T_\xi M := \{y \in \mathbb{R}^n : y \cdot \xi = 0\},$$

tal que, en una vecindad de ξ, el conjunto M es la gráfica de una función de clase $\mathcal{C}^\infty$ cuyo dominio es la bola unitaria abierta en $T_\xi M$ y cuyo codominio es el complemento ortogonal de $T_\xi M$.



Dicha función f está definida como sigue: Si $\{v_1, ..., v_{n-1}\}$ es una base ortonormal de $T_\xi M$ y $v = x_1 v_1 + \cdots + x_{n-1} v_{n-1}$ cumple que $\|v\| < 1$, entonces

$$f(v) := \left(\sqrt{1 - (x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2)}\right) \xi.$$

La gráfica de f resulta ser el conjunto $\{y \in M : y \cdot \xi > 0\}$, el cual es abierto en M y contiene a ξ.
Observa que $\nabla\varphi(\xi) = 2\xi$, por lo que $T_\xi M = \{y \in \mathbb{R}^n : y \cdot \nabla\varphi(\xi) = 0\}$.

Queremos obtener una condición suficiente para que el conjunto de soluciones de la ecuación (10.2) sea, localmente, la gráfica de una función. El siguiente concepto jugará un papel fundamental.

Definición 10.2 *Decimos que $c \in \mathbb{R}^m$ es un* ***valor regular de*** *$\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^m$ si $\varphi'(u) : Y \to \mathbb{R}^m$ es suprayectiva para todo $u \in M := \{w \in \Omega : \varphi(w) = c\}$.*
El subespacio vectorial

$$T_u M := \ker \varphi'(u) = \{v \in Y : \varphi'(u)v = 0\}$$

de Y se llama el ***espacio tangente a*** *M en el punto $u \in M$.*

Nota que, si $M = \emptyset$, entonces c es un valor regular de φ. Si c es un valor regular de φ y $M \neq \emptyset$, necesariamente $\dim Y \geq m$. Observa además que, dado que $\varphi'(u) : Y \to \mathbb{R}^m$ es continua, el espacio tangente $T_u M$ es un subespacio cerrado de Y y, por tanto, es un espacio de Banach.

Ejemplo 10.3 *Si Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}^1$ entonces c es un valor regular de φ si y sólo si $\nabla\varphi(\xi) \neq 0$ para cada $\xi \in M$. En este caso,*

$$T_\xi M = \{y \in \mathbb{R}^n : y \cdot \nabla\varphi(\xi) = 0\},$$

es decir, $T_\xi M$ es el subespacio ortogonal a $\nabla\varphi(\xi)$.

Este ejemplo incluye a la función $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$, considerada en el Ejemplo 10.1, y es un caso particular del siguiente ejemplo.

Ejemplo 10.4 *Si Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_m) : \Omega \to \mathbb{R}^m$ es de clase $\mathcal{C}^1$, $m < n$, entonces c es un valor regular de φ si y sólo si el conjunto*

$$\{\nabla\varphi_1(\xi), \ldots, \nabla\varphi_m(\xi)\}$$

es linealmente independiente para cada $\xi \in M$. En ese caso,

$$T_\xi M = \{y \in \mathbb{R}^n : y \cdot \nabla\varphi_j(\xi) = 0,\ j = 1, \ldots, m\}$$

es el complemento ortogonal del espacio generado por $\{\nabla\varphi_1(\xi), \ldots, \nabla\varphi_m(\xi)\}$.

Demostración: En efecto, $\varphi'(\xi)$ es la función lineal dada por la matriz jacobiana

$$\varphi'(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(\xi) & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}(\xi) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1}(\xi) & \cdots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n}(\xi) \end{pmatrix},$$

y ésta es suprayectiva si y sólo si la matriz tiene rango máximo, es decir, sí y sólo si sus renglones son linealmente independientes. ■

Si queremos expresar localmente a M como la gráfica de una función definida en un subconjunto abierto del espacio tangente, necesitamos primero expresar a Y como un producto de espacios de Banach de la forma $T_uM \times W_u$. Si $Y = \mathbb{R}^n$ podemos simplemente tomar a W_u como el complemento ortogonal de T_uM.

Desde un punto de vista puramente algebraico, todo subespacio V de un espacio vectorial Y tiene un espacio complementario, es decir, existe un subespacio W de Y tal que Y es linealmente isomorfo a $V \times W$. Sin embargo, si Y es de Banach y V es cerrado en Y, ni W es necesariamente cerrado en Y, ni Y es necesariamente homeomorfo a $V \times W$.

En el caso particular que estamos considerando se tiene el siguiente resultado.

Proposición 10.5 *Si Y es un espacio de Banach, $L \in \mathcal{L}(Y, \mathbb{R}^m)$ es suprayectiva y $V := \ker L$, entonces existe un subespacio vectorial cerrado W de Y tal que la restricción $L\mid_W : W \to \mathbb{R}^m$ de L a W es un isomorfismo y la función lineal*

$$\iota : V \times W \to Y, \qquad \iota(v, w) := v + w,$$

es un homeomorfismo.

Demostración: Sea $\{e_1, \ldots, e_m\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^m$. Escojemos $w_j \in Y$ tal que $Lw_j = e_j$, $j = 1, ..., m$, y denotamos por W al subespacio vectorial de Y generado por $\{w_1, \ldots, w_m\}$. La función lineal $S : \mathbb{R}^m \to Y$ dada por

$$S(x_1, ..., x_m) := x_1 w_1 + \cdots + x_m w_m$$

es también continua, ya que su dominio es de dimensión finita (Ejercicio 4.42). Además, cumple que $LSx = x$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$. En consecuencia, $y - SLy \in \ker L$ para todo $y \in Y$ y la función

$$\pi : Y \to V \times W, \qquad \pi(y) := (y - SLy, SLy),$$

es lineal y continua (Ejercicio 3.48). Claramente, ι es lineal y continua y $\iota \circ \pi = id_Y$. Observa que $SL(v+w) = SLw = w$ para todo $v \in V$, $w \in W$. Por tanto,

$$\pi(\iota(v,w)) = (v + w - SL(v+w), SL(v+w)) = (v,w),$$

es decir, $\pi \circ \iota = id_{V\times W}$. Esto prueba que ι es un homeomorfismo.
Para probar que W es cerrado en Y tomemos una sucesión (y_k) en W tal que $y_k \to y$ en Y. Como SL es continua, se tiene que $y_k = SLy_k \to SLy$. En consecuencia, $y = SLy \in W$. Esto prueba que W es cerrado en Y. ∎

Definición 10.6 *Una función lineal y biyectiva $T : V \to W$ entre dos espacios de Banach V y W que es además un homeomorfismo se llama un* ***isomorfismo de Banach****.*

De la Proposición 10.5 se desprende que, si c es un valor regular de φ entonces, para cada $u \in M$, existe un subespacio cerrado W_u de Y tal que la función

$$\iota : T_uM \times W_u \to Y, \qquad \iota(v,w) := v + w,$$

es un isomorfismo de Banach. El teorema de la función implicita, que enunciaremos a continuación, garantiza que M se puede expresar localmente como la gráfica de una función cuyo dominio es un abierto de T_uM y cuyo codominio es W_u.

Teorema 10.7 (de la función implícita) *Sean V, W, Z espacios de Banach, Ω un subconjunto abierto de $V \times W$, $(v_0, w_0) \in \Omega$ y $\varphi : \Omega \to Z$ una función de clase $\mathcal{C}^1$ en Ω. Si $\varphi(v_0, w_0) = c$ y $\partial_W\varphi(v_0, w_0) \in \mathcal{L}(W, Z)$ es un isomorfismo de Banach, entonces existen $\delta, \eta > 0$ tales que $B_V(v_0, \delta) \times B_W(w_0, \eta) \subset \Omega$ y una función $f : B_V(v_0, \delta) \to W$ de clase $\mathcal{C}^1$ con las siguientes propiedades:*
(I) El conjunto de soluciones $(v, w) \in B_V(v_0, \delta) \times B_W(w_0, \eta)$ de la ecuación

$$\varphi(v,w) = c$$

coincide con la gráfica de f,

$$\operatorname{graf}(f) := \{(v, f(v)) : v \in B_V(v_0, \delta)\}.$$

En particular, $f(v_0) = w_0$ y $f(v) \in B_W(w_0, \eta)$ para todo $v \in B_V(v_0, \delta)$.
(II) Para todo $v \in B_V(v_0, \delta)$ se cumple que $\partial_W\varphi(v, f(v))$ es un isomorfismo de Banach y

$$f'(v) = -\left[\partial_W\varphi(v, f(v))\right]^{-1} \circ \partial_V\varphi(v, f(v)).$$

Pospondremos la demostración de este teorema para la Sección 10.4 de este capítulo, y procederemos a presentar algunas consecuencias importantes.

La Proposición 10.5 asegura que, si $c \in \mathbb{R}^m$ es un valor regular de $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^m$, entonces para cada $u \in M$ existe un subespacio cerrado W_u de Y tal que la función

$$\iota : T_uM \times W_u \to Y, \qquad \iota(v, w) := v + w,$$

es un isomorfismo de Banach e, identificando a Y con $T_uM \times W_u$ mediante dicho isomorfismo, se obtiene que $\partial_{W_u}\varphi(u) \equiv \varphi'(u) \mid_{W_u}: W_u \to \mathbb{R}^m$ es un isomorfismo. Nota que W_u no es único. Para cualquier elección de W_u con las propiedades mencionadas se tiene el siguiente resultado, que es consecuencia inmediata del teorema de la función implícita.

Corolario 10.8 *Si $c \in \mathbb{R}^m$ es un valor regular de $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^m$ y $u = v_0 + w_0 \in M$ con $v_0 \in T_uM$ y $w_0 \in W_u$, entonces existen $\delta, \eta > 0$ y una función $f : B_{T_uM}(v_0, \delta) \to W_u$ de clase $\mathcal{C}^1$ tal que*

$$M \cap [B_{T_uM}(v_0, \delta) \times B_{W_u}(w_0, \eta)] = \{v + f(v) : v \in B_{T_uM}(v_0, \delta)\}.$$

Más aún, $\partial_{W_u}\varphi(v + f(v))$ es un isomorfismo y

$$f'(v) = -\left[\partial_{W_u}\varphi(v + f(v))\right]^{-1} \circ \partial_{T_uM}\varphi(v + f(v))$$

para cada $v \in B_{T_uM}(v_0, \delta)$.

Es importante hacer notar que, si la función φ del Teorema 10.7 y del Corolario 10.8 es de clase $\mathcal{C}^k$, entonces la función f también es de clase $\mathcal{C}^k$ [Ejercicio 10.23].

10.2. Extremos locales de funciones diferenciables con restricciones

Sean Ω un subconjunto abierto de un espacio de Banach Y, $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^m$ una función de clase $\mathcal{C}^1$, $c \in \mathbb{R}^m$ y $M := \{u \in \Omega : \varphi(u) = c\}$. El Corolario 10.8 permite caracterizar al espacio tangente como sigue.

Proposición 10.9 *Si c es un valor regular de φ entonces, para cada $u \in M$,*

$$T_uM = \{\sigma'(0) : \sigma \in \Gamma_u(M)\},$$

donde $\Gamma_u(M)$ es el conjunto de todas las funciones $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to Y$ de clase $\mathcal{C}^1$ tales que $\sigma(0) = u$ y $\sigma(t) \in M$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Demostración: Si $\sigma \in \Gamma_u(M)$ entonces $(\varphi \circ \sigma)(t) = c$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Por tanto, $(\varphi \circ \sigma)'(t) = 0$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. En particular, si $t = 0$, usando la regla de la cadena obtenemos

$$0 = (\varphi \circ \sigma)'(0) = \varphi'(u)\left(\sigma'(0)\right).$$

Esto prueba que $\sigma'(0) \in \ker \varphi'(u) =: T_u M$.
Inversamente, sea $v \in T_u M$. Si escribimos $u = v_0 + w_0$ con $v_0 \in T_u M$ y $w_0 \in W_u$, el Corolario 10.8 asegura que existen $\delta, \eta > 0$ y una función $f : B_{T_u M}(v_0, \delta) \to W_u$ de clase $\mathcal{C}^1$ tal que

$$M \cap [B_{T_u M}(v_0, \delta) \times B_{W_u}(w_0, \eta)] = \{v + f(v) : v \in B_{T_u M}(v_0, \delta)\}$$

y

$$f'(v_0) = -\left[\partial_{W_u}\varphi(u)\right]^{-1} \circ \partial_{T_u M}\varphi(u).$$

Escogemos $\varepsilon > 0$ tal que $v_0 + tv \in B_{T_u M}(x_0, \delta)$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ y definimos $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to Y$ como

$$\sigma(t) := v_0 + tv + f(v_0 + tv).$$

Claramente, $\sigma \in \Gamma_u(M)$. Como $v \in T_u M$ se tiene que $\partial_{T_u M}\varphi(u)v = \varphi'(u)v = 0$ y, en consecuencia,

$$f'(v_0)v = -\left[\partial_{W_u}\varphi(u)\right]^{-1}\left(\partial_{T_u M}\varphi(u)v\right) = 0.$$

Por tanto,

$$\sigma'(0) = v + f'(v_0)v = v.$$

Esto prueba que $T_u M \subset \{\sigma'(0) : \sigma \in \Gamma_u(M)\}$. ■

Así pues, $T_u M$ es el conjunto de velocidades en el punto u de todas las trayectorias continuamente diferenciables en M que pasan por u. Esto justifica llamarlo el espacio tangente a M en u. Nota que esta última caracterización no depende de la función φ.

Definición 10.10 *Un subconjunto M de un espacio de Banach Y se llama una* ***subvariedad de Y clase $\mathcal{C}^k$ y de codimensión*** *m si existen una función $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^m$ de clase $\mathcal{C}^k$ definida en un abierto Ω de Y que contiene a M y un valor regular $c \in \mathbb{R}^m$ de φ tales que $M = \{u \in \Omega : \varphi(u) = c\}$.*

Las subvariedades aparecen a menudo en las aplicaciones como restricciones de una función cuyos máximos y mínimos locales sobre la variedad interesa encontrar.

Definición 10.11 *Sea A un subconjunto de un espacio métrico X. Decimos que $\xi \in A$ es un* ***mínimo local*** *de $g : X \to \mathbb{R}$ en A si existe $\delta > 0$ tal que*

$$g(\xi) \leq g(x) \qquad \forall x \in A \cap B_X(\xi, \delta).$$

Decimos que $\xi \in A$ *es un* ***máximo local*** *de* $g : X \to \mathbb{R}$ *en* A *si existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$g(\xi) \geq g(x) \qquad \forall x \in A \cap B_X(\xi, \delta).$$

Los mínimos y máximos locales de una función en una variedad tienen la siguiente propiedad.

Proposición 10.12 *Sean* M *una subvariedad de un espacio de Banach* Y, Ω *un subconjunto abierto de* Y *que contiene a* M *y* $g : \Omega \to \mathbb{R}$ *una función de clase* $\mathcal{C}^1$. *Si* u *es un mínimo (máximo) local de* g *en* M, *entonces*

$$g'(u)v = 0 \qquad \forall v \in T_u M.$$

Demostración: Sean $v \in T_u M$ y $\sigma \in \Gamma_u(M)$, definida en $(-\varepsilon, \varepsilon)$, tal que $\sigma'(0) = v$. Si u es un mínimo (máximo) local de g en M, entonces 0 es un mínimo (máximo) local de $g \circ \sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$. Por tanto,

$$0 = (g \circ \sigma)'(0) = g'(u)\,(\sigma'(0)) = g'(u)v,$$

como afirma el enunciado. ■

Definición 10.13 *Sean* M *una subvariedad de un espacio de Banach* Y, Ω *un subconjunto abierto de* Y *que contiene a* M *y* $g : \Omega \to \mathbb{R}$ *una función de clase* $\mathcal{C}^1$. *Se dice que un punto* $u \in M$ *es un* ***punto crítico de*** g ***en*** M *si*

$$g'(u)v = 0 \qquad \forall v \in T_u M.$$

La Proposición 10.12 afirma que los máximos y mínimos locales son puntos críticos de g en M. Para $Y = \mathbb{R}^n$ podemos caracterizar a los puntos críticos del siguiente modo.

Teorema 10.14 (multiplicadores de Lagrange) *Sean* Ω *un abierto de* $\mathbb{R}^n$, $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_m) : \Omega \to \mathbb{R}^m$ *una función de clase* $\mathcal{C}^1$, $c \in \mathbb{R}^m$ *un valor regular de* φ *y* $M := \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) = c\}$. *Sea* $g : \Omega \to \mathbb{R}$ *una función de clase* $\mathcal{C}^1$. *Entonces* ξ *es un punto crítico de* g *en* M *si y sólo si existen* $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}$ *únicos tales que*

$$\nabla g(\xi) = \lambda_1 \nabla\varphi_1(\xi) + \cdots + \lambda_m \nabla\varphi_m(\xi).$$

Demostración: Por definición, ξ es un punto crítico de g en M si y sólo si $\nabla g(\xi)$ es ortogonal a $T_\xi M$. En el Ejemplo 10.4 vimos que $\{\nabla\varphi_1(\xi), \ldots, \nabla\varphi_m(\xi)\}$ es una base del complemento ortogonal de $T_\xi M$. En consecuencia, ξ es un punto crítico de g en M si y sólo si $\nabla g(\xi)$ se expresa de manera única como

$$\nabla g(\xi) = \lambda_1 \nabla\varphi_1(\xi) + \cdots + \lambda_m \nabla\varphi_m(\xi)$$

con $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}$. ■

Ejemplo 10.15 *Sea* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *la función* $g(x_1, ..., x_n) = x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2$*. Los puntos críticos de* g *en la esfera unitaria* $\mathbb{S}^{n-1}$ *son los puntos de la forma* $(\xi_1, ..., \xi_{n-1}, 0)$ *y* $(0, ..., 0, \pm 1)$*. Los primeros son máximos y los últimos son mínimos de* g *en* $\mathbb{S}^{n-1}$*.*

Demostración: Por el teorema anterior, $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$ es punto crítico de g en $\mathbb{S}^{n-1}$ si y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$2(\xi_1, ..., \xi_{n-1}, 0) = \nabla g(\xi) = \lambda \nabla \varphi(\xi) = \lambda 2(\xi_1, ..., \xi_n), \tag{10.3}$$

donde $\varphi(x_1, ..., x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$. Si $\xi_j \neq 0$ para algún $j = 1, ..., n-1$, entonces ξ satisface (10.3) si y sólo si $\lambda = 1$ y $\xi_n = 0$. Si $\xi_1 = \cdots = \xi_{n-1} = 0$, entonces $\xi_n = \pm 1$ y la igualdad (10.3) se cumple para $\lambda = 0$. Por tanto, los puntos críticos de g en $\mathbb{S}^{n-1}$ son los puntos de la forma $(\xi_1, ..., \xi_{n-1}, 0)$ y $(0, ..., 0, \pm 1)$. Para verificar si son máximos o mínimos basta observar que

$$g(\xi_1, ..., \xi_{n-1}, 0) = \frac{1}{2}, \qquad g(0, ..., 0, \pm 1) = 0,$$

y $0 \leq g(x) \leq \frac{1}{2}$ para todo $x \in \mathbb{S}^{n-1}$. ■

10.3. Homeomorfismos lineales

Consideremos el conjunto de isomorfismos de Banach de V a W al que denotaremos

$$\mathcal{H}(V, W) := \{T \in \mathcal{L}(V, W) : T \text{ es isomorfismo de Banach}\}.$$

Un elemento de $\mathcal{H}(V, W)$ es una función $T : V \to W$ lineal, continua y biyectiva, cuyo inverso es lineal y continuo.

Denotamos por TS a la composición $T \circ S$ y por

$$T^0 := id, \qquad T^k := \underbrace{T \circ \cdots \circ T}_{k \text{ veces}}.$$

En la demostración del teorema de la función implícita usaremos el siguiente resultado.

Proposición 10.16 *(a)* $\mathcal{H}(V, W)$ *es un subconjunto abierto de* $\mathcal{L}(V, W)$*.*
(b) La función

$$\Phi : \mathcal{H}(V, W) \to \mathcal{H}(W, V), \qquad \Phi(T) = T^{-1},$$

es diferenciable y su derivada en T_0 *es*

$$\Phi'(T_0)T = -T_0^{-1} T T_0^{-1}.$$

Demostración: *(a)* Si $V = W = \{0\}$ o si $\mathcal{H}(V,W) = \emptyset$, la afirmación es obvia. Supongamos pues que $\mathcal{H}(V,W) \neq \emptyset$ y que $V \neq \{0\}$ y $W \neq \{0\}$. En ese caso se tiene que $\|T\|_{\mathcal{L}(V,W)} > 0$ para toda $T \in \mathcal{H}(V,W)$.
Sea $T_0 \in \mathcal{H}(V,W)$. Probaremos que

$$B_{\mathcal{L}(V,W)}(T_0, c_0^{-1}) \subset \mathcal{H}(V,W),$$

donde $c_0 := \left\|T_0^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(W,V)}$.
Supongamos primero que $V = W$ y $T_0 = id$ es la identidad de V. Sea $S \in \mathcal{L}(V,V)$ tal que $\|S\|_{\mathcal{L}(V,V)} < 1$. Como $\left\|S^k\right\|_{\mathcal{L}(V,V)} \leq \|S\|_{\mathcal{L}(V,V)}^k$ (Ejercicio 9.34), se tiene que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\|S^k\right\|_{\mathcal{L}(V,V)} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|S\|_{\mathcal{L}(V,V)}^k = \frac{1}{1 - \|S\|_{\mathcal{L}(V,V)}}.$$

El Teorema 5.25 asegura entonces que la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k S^k \tag{10.4}$$

converge en $\mathcal{L}(V,V)$ y que

$$\left\|\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k S^k\right\|_{\mathcal{L}(V,V)} \leq \frac{1}{1 - \|S\|_{\mathcal{L}(V,V)}}. \tag{10.5}$$

Observa que

$$(id + S)\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k S^k\right) = id - (-1)^{n+1} S^{n+1} = \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k S^k\right)(id + S).$$

Como la serie (10.4) converge, la sucesión $(-1)^k S^k \to 0$ en $\mathcal{L}(V,V)$. Por tanto, haciendo tender $n \to \infty$ obtenemos

$$(id + S)\left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k S^k\right) = id = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k S^k\right)(id + S).$$

Esto prueba que $id + S \in \mathcal{H}(V,V)$ y que

$$(id + S)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k S^k \quad \text{si } \|S\|_{\mathcal{L}(V,V)} < 1. \tag{10.6}$$

Por tanto, $B_{\mathcal{L}(V,V)}(id, 1) \subset \mathcal{H}(V,V)$.
Consideremos ahora el caso general. Si $T_0 \in \mathcal{H}(V,W)$ y $T \in \mathcal{L}(V,W)$ es tal que

$\|T\|_{\mathcal{L}(V,W)} < c_0^{-1}$, entonces $\left\|T_0^{-1}T\right\|_{\mathcal{L}(V,V)} \leq \left\|T_0^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(V,V)} \|T\|_{\mathcal{L}(V,V)} < 1$ y, por el caso anterior, $id + T_0^{-1}T \in \mathcal{H}(V,V)$. En consecuencia,

$$T_0 + T = T_0(id + T_0^{-1}T) \in \mathcal{H}(V,W).$$

Esto prueba que $B_{\mathcal{L}(V,W)}(T_0, c_0^{-1}) \subset \mathcal{H}(V,W)$.

(b) Sean $T_0 \in \mathcal{H}(V,W)$ y $T \in \mathcal{L}(V,W)$ tal que $\|T\|_{\mathcal{L}(V,W)} < (2c_0)^{-1}$. Denotemos por $S := T_0^{-1}T$. Entonces $\|S\|_{\mathcal{L}(V,V)} < \frac{1}{2}$. Por tanto, $id + S \in \mathcal{H}(V,V)$ y

$$\left((id+S)^{-1} - id + S\right) T_0^{-1} = (T_0+T)^{-1} - T_0^{-1} + T_0^{-1}TT_0^{-1}.$$

Usando la fórmula (10.6) obtenemos

$$(id+S)^{-1} - id + S = \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k S^k = S^2 \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k S^k = S^2\,(id+S)^{-1}.$$

Aplicando la desigualdad (10.5) y el Ejercicio 9.34 concluímos que

$$\left\|(id+S)^{-1} - id + S\right\|_{\mathcal{L}(V,V)} \leq \frac{\|S\|^2_{\mathcal{L}(V,V)}}{1 - \|S\|_{\mathcal{L}(V,V)}}.$$

En consecuencia, como $\|S\|_{\mathcal{L}(V,V)} < \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}\left\|(T_0+T)^{-1} - T_0^{-1} + T_0^{-1}TT_0^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(W,V)} &\leq \frac{\|S\|^2_{\mathcal{L}(V,V)}}{1 - \|S\|_{\mathcal{L}(V,V)}} \left\|T_0^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(W,V)} \\ &\leq c_0^3 \frac{\|T\|^2_{\mathcal{L}(V,V)}}{1 - \|S\|_{\mathcal{L}(V,V)}} \leq 2c_0^3 \|T\|^2_{\mathcal{L}(V,W)}.\end{aligned}$$

Concluímos que

$$\lim_{T\to 0} \frac{\left\|(T_0+T)^{-1} - T_0^{-1} + T_0^{-1}TT_0^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(W,V)}}{\|T\|_{\mathcal{L}(V,W)}} = 0.$$

Esto prueba que Φ es diferenciable en T_0 y $\Phi'(T_0)T = T_0^{-1}TT_0^{-1}$. ∎

10.4. Demostración del teorema de la función implícita

Observa primero que basta probar el Teorema 10.7 para $c = 0$. En efecto, la función $\psi(v,w) := \varphi(v,w) - c$ cumple que $\psi(v_0,w_0) = 0$ si y sólo si $\varphi(v_0,w_0) = c$, y $\partial_W \psi(v,w) =$

$\partial_W \varphi(v,w)$ para todo $(v,w) \in \Omega$. Aplicando el teorema de la función implícita a ψ obtenemos una función $f : B_V(v_0,\delta) \to W$ de clase $\mathcal{C}^1$ que cumple *(i)*, *(iii)* y

$$\{(v,w) \in B_V(v_0,\delta) \times B_W(w_0,\eta) : \varphi(v,w) = c\} = \{(v, f(v)) : v \in B_V(v_0,\delta)\}.$$

En lo que resta de esta sección supondremos que V, W, Z son espacios de Banach, Ω es un subconjunto abierto de $V \times W$, $\varphi : \Omega \to Z$ es una función de clase $\mathcal{C}^1$ en Ω, y (v_0, w_0) es un punto de Ω tal que

$$\varphi(v_0,w_0) = 0 \qquad \text{y} \qquad T_0 := \partial_W \varphi(v_0,w_0) \in \mathcal{H}(W,Z).$$

Dado $(v,w) \in \Omega$, definimos

$$\psi_v(w) := w - T_0^{-1}\varphi(v,w).$$

Observa que

$$\varphi(v,w) = 0 \Longleftrightarrow T_0^{-1}\varphi(v,w) = 0 \Longleftrightarrow \psi_v(w) = w. \tag{10.7}$$

Esto sugiere usar el teorema de punto fijo de Banach para obtener soluciones de $\varphi(v,w) = 0$. Empezaremos demostrando el siguiente lema.

Lema 10.17 *Existen $\delta, \eta > 0$ tales que*
(i) $\bar{B}_V(v_0,\delta) \times \bar{B}_W(w_0,\eta) \subset \Omega$,
(ii) $\partial_W \varphi(v,w) \in \mathcal{H}(W,Z)$ *para todos* $v \in \bar{B}_V(v_0,\delta)$, $w \in \bar{B}_W(w_0,\eta)$,
(iii) $\|\psi_v(w) - w_0\| < \eta$ *para todos* $v \in \bar{B}_V(v_0,\delta)$, $w \in \bar{B}_W(w_0,\eta)$,
(iv) $\|\psi_v(w_1) - \psi_v(w_2)\|_W \leq \frac{3}{4}\|w_1 - w_2\|_W$ *para todos* $v \in \bar{B}_V(v_0,\delta)$, $w_1, w_2 \in \bar{B}_W(w_0,\eta)$.

Demostración: Sea $c_0 := \left\|T_0^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(Z,W)}$. Como $\mathcal{H}(W,Z)$ es abierto en $\mathcal{L}(W,Z)$ (Proposición 10.16), $\partial_W \varphi(v_0,w_0) \in \mathcal{H}(W,Z)$ y $\partial_W \varphi : \Omega \to \mathcal{L}(W,Z)$ es continua, existe $\eta > 0$ tal que $\bar{B}_V(v_0,\eta) \times \bar{B}_W(w_0,\eta) \subset \Omega$,

$$\partial_W \varphi(v,w) \in \mathcal{H}(W,Z) \qquad \forall (v,w) \in \bar{B}_V(v_0,\eta) \times \bar{B}_W(w_0,\eta), \tag{10.8}$$

y

$$\|\partial_W \varphi(v,w) - \partial_W \varphi(v_0,w_0)\|_{\mathcal{L}(W,Z)} < \frac{1}{4c_0} \qquad \forall (v,w) \in \bar{B}_V(v_0,\eta) \times \bar{B}_W(w_0,\eta). \tag{10.9}$$

Por otra parte, como $T_0^{-1}\varphi$ es continua, existe $\delta \in (0,\eta)$ tal que

$$\left\|T_0^{-1}\varphi(v,w_0) - T_0^{-1}\varphi(v_0,w_0)\right\|_W < \frac{\eta}{4} \qquad \forall v \in \bar{B}_V(v_0,\delta). \tag{10.10}$$

Sean $v \in \bar{B}_V(v_0,\delta)$, $w_1, w_2 \in \bar{B}_W(w_0,\eta)$. Entonces, $w_{t+1} := (1-t)w_1 + tw_2 \in \bar{B}_W(w_0,\eta)$ para todo $t \in [0,1]$. Del Corolario 9.17 y la desigualdad (10.9) se sigue que

$$\begin{aligned}
\|\psi_v(w_1) - \psi_v(w_2)\|_W &= \left\|T_0^{-1}T_0(w_1 - w_2) - T_0^{-1}\left(\varphi(v,w_1) - \varphi(v,w_2)\right)\right\|_W \\
&\leq c_0 \left\|\partial_W\varphi(v_0,w_0)(w_1 - w_2) - \varphi(v,w_1) + \varphi(v,w_2)\right\|_W \\
&\leq c_0 \left\|\partial_W\varphi(v_0,w_0)(w_1 - w_2) - \partial_W\varphi(v,w_0)(w_1 - w_2)\right\|_W \\
&\quad + c_0 \left\|\partial_W\varphi(v,w_0)(w_1 - w_2) - \varphi(v,w_1) + \varphi(v,w_2)\right\|_W \\
&\leq c_0 \left\|\partial_W\varphi(v,w_0) - \partial_W\varphi(v_0,w_0)\right\|_{\mathcal{L}(W,Z)} \|w_1 - w_2\|_W \\
&\quad + c_0 \sup_{t\in[0,1]} \left\|\partial_W\varphi(v,w_{t+1}) - \partial_W\varphi(v,w_0)\right\|_{\mathcal{L}(W,Z)} \|w_1 - w_2\|_W \\
&< \frac{3}{4}\|w_1 - w_2\|_W . \qquad (10.11)
\end{aligned}$$

En consecuencia, como $\psi_{v_0}(w_0) = w_0$, usando (10.10) obtenemos

$$\begin{aligned}
\|\psi_v(w) - w_0\|_W &\leq \|\psi_v(w) - \psi_v(w_0)\|_W + \left\|\psi_v(w_0) - \psi_{v_0}(w_0)\right\|_W \\
&= \|\psi_v(w) - \psi_v(w_0)\|_W + \left\|T_0^{-1}\varphi(v_0,w_0) - T_0^{-1}\varphi(v,w_0)\right\|_W \\
&< \frac{3}{4}\|w - w_0\|_W + \frac{\eta}{4} \\
&\leq \eta \qquad \forall v \in \bar{B}_V(v_0,\delta), w \in \bar{B}_W(w_0,\eta). \qquad (10.12)
\end{aligned}$$

Esto concluye la demostración. ■

Lema 10.18 *Para* $\delta, \eta > 0$ *como en el* Lema 10.17 *se cumple lo siguiente:*
(a) Para cada $v \in \bar{B}_V(v_0,\delta)$ *existe* $f(v) \in B_W(w_0,\eta)$ *tal que*

$$\varphi(v, f(v)) = 0,$$

y $f(v)$ *es el único elemento de* $\bar{B}_W(w_0,\eta)$ *con esta propiedad.*
(b) La función $f : B_V(v_0,\delta) \to W$ *es de clase* $\mathcal{C}^1$ *y*

$$f'(v) = -\left[\partial_W\varphi(v,f(v))\right]^{-1} \circ \partial_V\varphi(v,f(v)) \qquad \forall v \in B_V(v_0,\delta).$$

Demostración: *(a)* Sea $v \in \bar{B}_V(v_0,\delta)$. La propiedad *(iii)* del Lema 10.17 asegura que ψ_v es una función de $\bar{B}_W(w_0,\eta)$ en sí mismo. Como $\bar{B}_W(w_0,\eta)$ es cerrado y W es de Banach, $\bar{B}_W(w_0,\eta)$ es un espacio métrico completo. La propiedad *(iv)* del Lema 10.17 asegura que

$$\psi_v : \bar{B}_W(w_0,\eta) \to \bar{B}_W(w_0,\eta)$$

es una contracción. Por el teorema de punto fijo de Banach (Teorema 6.3) existe un único $f(v) \in \bar{B}_W(w_0, \eta)$ tal que

$$f(v) = \psi_v(f(v)).$$

La propiedad *(iii)* del Lema 10.17 asegura entonces que $f(v) = \psi_v(f(v)) \in B_W(w_0, \eta)$. De la observación (10.7) se sigue la afirmación *(a).*

Antes de probar la afirmación *(b)* probaremos que la función $f : B_V(v_0, \delta) \to W$ es continua.

Sean $v_1 \in B_V(v_0, \delta)$ y $\varepsilon > 0$. Como $\psi_v^k(f(v)) = f(v)$, la propiedad *(iv)* del Lema 10.17 asegura que

$$\left\|\psi_v^k(w_0) - f(v)\right\|_W \leq \left(\frac{3}{4}\right)^k \|w_0 - f(v)\|_W < \left(\frac{3}{4}\right)^k \eta \quad \forall v \in B_V(v_0, \delta).$$

Por tanto, existe $k_0 \in \mathbb{N}$, independiente de v, tal que

$$\left\|\psi_v^k(w_0) - f(v)\right\|_W < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall k \geq k_0, \quad \forall v \in B_V(v_0, \delta).$$

La función $v \mapsto \psi_v(w_0) = w_0 - T_0^{-1}\varphi(v, w_0)$ es continua en $B_V(v_0, \delta)$. Por tanto, existe $\gamma > 0$ tal que

$$\left\|\psi_v^{k_0}(w_0) - \psi_{v_1}^{k_0}(w_0)\right\|_W < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall v \in B_V(v_0, \delta) \cap B_V(v_1, \gamma).$$

Concluímos que

$$\begin{aligned} \|f(v) - f(v_1)\|_W &\leq \left\|f(v) - \psi_v^{k_0}(w_0)\right\|_W + \left\|\psi_v^{k_0}(w_0) - \psi_{v_1}^{k_0}(w_0)\right\|_W \\ &\quad + \left\|\psi_{v_1}^k(w_0) - f(v_1)\right\|_W \\ &< \varepsilon \qquad \forall v \in B_V(v_0, \delta) \cap B_V(v_1, \gamma). \end{aligned}$$

Esto demuestra que f es continua en $B_V(v_0, \delta)$.

(b) Sean $v, v_1 \in B_V(v_0, \delta)$ y $\varepsilon > 0$. Denotamos por

$$w := f(v), \qquad w_1 := f(v_1), \qquad T_1 := \partial_V\varphi(v_1, w_1), \qquad T_2 := \partial_W\varphi(v_1, w_1).$$

Se sigue de *(a)* que $\varphi(v_1, w_1) = 0 = \varphi(v, w)$ y, como φ es diferenciable en (v_1, w_1), se tiene que

$$\varphi(v, w) - \varphi(v_1, w_1) - \varphi'(v_1, w_1)(v - v_1, w - w_1) = -T_1(v - v_1) - T_2(w - w_1)$$

satisface

$$\lim_{(v,w)\to(v_1,w_1)} \frac{\|T_1(v - v_1) + T_2(w - w_1)\|_Z}{\|(v - v_1, w - w_1)\|_{V\times W}} = 0. \tag{10.13}$$

La propiedad *(ii)* del Lema 10.17 asegura que T_2 es un isomorfismo de Banach. Denotemos por

$$c_1 := \left\| T_2^{-1} T_1 \right\|_{\mathcal{L}(V,W)}, \qquad c_2 := \left\| T_2^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(Z,W)}, \qquad \theta := \frac{1}{2c_2} \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{c_1 + 1} \right\}.$$

Como f es continua, la afirmación (10.13) implica que existe $\rho > 0$ tal que

$$\| T_1(v - v_1) + T_2(w - w_1) \|_Z < \theta \left(\|v - v_1\|_V + \|w - w_1\|_W \right) \qquad \forall v \in B_V(v_1, \rho).$$

Por tanto, para todo $v \in B_V(v_1, \rho)$,

$$\begin{aligned} \left\| T_2^{-1} T_1(v - v_1) + w - w_1 \right\|_W &= \left\| T_2^{-1} T_1(v - v_1) + T_2^{-1} T_2(w - w_1) \right\|_W \\ &\leq c_2 \| T_1(v - v_1) + T_2(w - w_1) \|_Z \\ &< \theta c_2 \left(\|v - v_1\|_V + \|w - w_1\|_W \right) \end{aligned} \tag{10.14}$$

y, como $\theta c_2 \leq \frac{1}{2}$, obtenemos

$$\begin{aligned} \|w - w_1\|_W &\leq \left\| T_2^{-1} T_1(v - v_1) + w - w_1 \right\|_W + \left\| T_2^{-1} T_1(v - v_1) \right\|_W \\ &\leq \frac{1}{2} \|v - v_1\|_V + \frac{1}{2} \|w - w_1\|_W + c_1 \|v - v_1\|_V . \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\|w - w_1\|_W \leq (2c_1 + 1) \|v - v_1\|_V .$$

Combinando ésta con la desigualdad (10.14) obtenemos que

$$\begin{aligned} \left\| f(v) - f(v_1) + T_2^{-1} T_1(v - v_1) \right\|_W &= \left\| T_2^{-1} T_1(v - v_1) + w - w_1 \right\|_W \\ &< \theta c_2 (2c_1 + 2) \|v - v_1\|_V \\ &\leq \varepsilon \qquad \forall v \in B_V(v_1, \rho), \end{aligned}$$

lo cual demuestra que f es diferenciable en v_1 y que

$$f'(v_1) = - \left[\partial_W \varphi(v_1, w_1) \right]^{-1} \circ \partial_V \varphi(v_1, w_1)$$

para todo $v_1 \in B_V(v_0, \delta)$. Como φ es de clase $\mathcal{C}^1$ en Ω y la función $T \mapsto T^{-1}$ es continua en $\mathcal{H}(V, W)$ (Proposición 10.16) concluímos que f es de clase $\mathcal{C}^1$ en $B_V(v_0, \delta)$. ■

Demostración del Teorema 10.7: Sean $\delta, \eta > 0$ como en el Lema 10.17 y $f : B_V(v_0, \delta) \to W$ como en el Lema 10.18. Entonces $B_V(v_0, \delta) \times B_W(w_0, \eta) \subset \Omega$ y f es de clase $\mathcal{C}^1$. La afirmación *(a)* del Lema 10.18 asegura que

$$\{(v, w) \in B_V(v_0, \delta) \times B_W(w_0, \eta) : \varphi(v, w) = 0\} = \{(v, f(v)) : v \in B_V(v_0, \delta)\}.$$

Esta es la afirmacion *(I)* del Teorema 10.7. La afirmación *(II)* se sigue de las afirmaciones *(ii)* del Lema 10.17 y *(b)* del Lema 10.18. ■

A continuación daremos una aplicación importante del teorema de la función implícita.

10.5. Ejercicios

Ejercicio 10.19 *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $n \times (m+n)$ tal que el determinante*

$$\begin{vmatrix} a_{1,m+1} & \cdots & a_{1,m+n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,m+1} & \cdots & a_{n,m+n} \end{vmatrix}$$

es distinto de 0*. Prueba directamente (sin usar el teorema de la función implícita) que existe una única función $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tal que*

$$A(x_1, \ldots, x_m, L(x_1, \ldots, x_m)) = 0.$$

Ejercicio 10.20 *Identificamos al espacio $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ con el espacio $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ de matrices $A = (a_{ij})$ de $m \times n$ de la manera usual. El espacio $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, definido en la Sección 9.1, es vacío si $m \neq n$ y es el espacio de matrices cuyo determinante es distinto de* 0 *si $m = m$.*
(a) Prueba que las normas

$$\begin{aligned} \|A\|_p &:= \left(\sum_{i,j} |a_{ij}|^p\right)^{1/p}, \qquad p \in [1, \infty), \\ \|A\|_\infty &:= \max_{i,j} |a_{ij}|, \end{aligned}$$

son equivalentes a la norma $\|A\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)}$.
(b) Prueba que el determinante $\det : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *es una función continua y concluye que $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ es abierto en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.*
(c) Si $n \leq m$, el espacio de monomorfismos $\mathcal{M}ono(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ coincide con el espacio de matrices de $m \times n$ de rango n. Prueba que $\mathcal{M}ono(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ es abierto en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.
(d) Análogamente, si $n \geq m$, prueba que el espacio de epimorfismos $\mathcal{E}pi(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ es abierto en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Ejercicio 10.21 *Sea $F : \mathcal{L}(W, V) \times \mathcal{L}(W, V) \to \mathcal{L}(\mathcal{L}(V, W), \mathcal{L}(W, V))$ la función*

$$F(T_1, T_2)S := T_1 S T_2.$$

Prueba que F es bilineal y que

$$\|F(T_1, T_2)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{L}(V,W),\mathcal{L}(W,V))} \leq \|T_1\|_{\mathcal{L}(W,V)} \|T_2\|_{\mathcal{L}(W,V)}.$$

En consecuencia, F es continua.

Ejercicio 10.22 *Prueba que la función*

$$\Phi : \mathcal{H}(V,W) \to \mathcal{H}(W,V), \qquad \Phi(T) = T^{-1},$$

es de clase C^{∞}. (Sugerencia: Usa los Ejercicios 9.46 y 10.21.)

Ejercicio 10.23 *Demuestra que, si en el* Teorema 10.7 *la función* φ *es de clase* $\mathcal{C}^k$, *entonces la función* f *también es de clase* $\mathcal{C}^k$.

Ejercicio 10.24 (Teorema de la función inversa) *Sean* V, W *espacios de Banach,* Ω *un subconjunto abierto de* V, $\varphi : \Omega \to W$ *una función de clase* $\mathcal{C}^k$ *en* Ω *con* $1 \leq k \leq \infty$, *y* $v_0 \in \Omega$. *Prueba que, si* $\varphi'(v_0) \in \mathcal{L}(V,W)$ *es un isomorfismo de Banach, entonces existen un abierto* Ω' *de* W *y un abierto* Ω'' *de* V *tales que* $v_0 \in \Omega'' \subset \Omega$, $\varphi(\Omega'') = \Omega'$ *y la función*

$$\varphi\,|_{\Omega''} : \Omega'' \to \Omega'$$

es un homeomorfismo cuyo inverso $\psi := (\varphi\,|_{\Omega''})^{-1} : \Omega' \to \Omega''$ *es de clase* $\mathcal{C}^k$ *en* Ω' *y satisface*

$$\psi'(\varphi(v_0)) = (\varphi'(v_0))^{-1}.$$

(Sugerencia: Aplica el teorema de la función implícita a la función $\theta : W \times \Omega \to W$, $\theta(w,v) := \varphi(v) - w$.)

Ejercicio 10.25 *Considera la función* $\varphi : (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *dada por* $\varphi(r,\theta) := (r\cos\theta, r\mathrm{sen}\theta)$. *Demuestra las siguientes afirmaciones.*
(a) Para todo $(r,\theta) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}$ *existen un abierto* Ω' *de* $\mathbb{R}^2$ *y un abierto* Ω'' *de* $(0,\infty) \times \mathbb{R}$ *tales que* $(r,\theta) \in \Omega''$, $\varphi(\Omega'') = \Omega'$ *y la función*

$$\varphi\,|_{\Omega''} : \Omega'' \to \Omega'$$

es un homeomorfismo cuyo inverso $\psi := (\varphi\,|_{\Omega''})^{-1} : \Omega' \to \Omega''$ *es de clase* $\mathcal{C}^{\infty}$.
(b) La función $\varphi : (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *no es un homeomorfismo.*

Ejercicio 10.26 *Considera la función* $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dada por* $\varphi(x,y) := (x, \varphi_2(x,y))$ *donde*

$$\varphi_2(x,y) := \begin{cases} (x, y - x^2) & \text{si } x^2 \leq y, \\ (x, \frac{y^2 - x^2 y}{x^2}) & \text{si } 0 \leq y \leq x^2, \\ -\varphi_2(x,-y) & \text{si } y \leq 0. \end{cases}$$

Prueba que
(a) φ *es diferenciable en* $\mathbb{R}^2$,
(b) $\varphi'(0,0)$ *es la identidad de* $\mathbb{R}^2$,
(c) φ *no es de clase* $\mathcal{C}^1$ *en* $\mathbb{R}^2$,
(d) φ *no es inyectiva en ningún abierto* Ω *que contiene a* $(0,0)$.

Ejercicio 10.27 *Sean* Ω *un abierto de* $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in \Omega$ *y* $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^m$ *una función de clase* $\mathcal{C}^k$ *con* $1 \leq k \leq \infty$. *Demuestra las siguientes afirmaciones.*
(a) Si $\varphi'(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *es inyectiva, entonces existen un abierto* Ω' *de* $\mathbb{R}^n$ *y un abierto* Ω'' *de* $\mathbb{R}^m$ *tales que* $x_0 \in \Omega' \subset \Omega$ *y* $\varphi(\Omega') \in \Omega''$, *y una función* $\psi : \Omega'' \to \mathbb{R}^m$ *de clase* $\mathcal{C}^k$ *tal que*

$$\psi(\varphi(x_1, ..., x_n)) = (x_1, ..., x_n, 0, ..., 0) \qquad \forall (x_1, ..., x_n) \in \Omega'.$$

(b) Si $\varphi'(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *es suprayectiva, entonces existen un abierto* Ω' *de* $\mathbb{R}^n$ *y una función* $\eta : \Omega' \to \mathbb{R}^n$ *de clase* $\mathcal{C}^k$ *tales que* $x_0 \in \Omega'$, $\eta(x_0) = x_0$, $\eta(\Omega') \subset \Omega$ *y*

$$\varphi(\eta(x_1, ..., x_n)) = (x_1, ..., x_m) \qquad \forall (x_1, ..., x_n) \in \Omega'.$$

Ejercicio 10.28 *Encuentra los máximos y los mínimos locales de la función* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *dada por* $g(x_1, ..., x_n) := x_1 + \cdots + x_n$ *en la esfera unitaria* $\mathbb{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$.

Ejercicio 10.29 *Sea* T *el toro de revolución en* $\mathbb{R}^3$ *que se obtiene rotando el círculo*

$$S := \{(x, y, 0) : (x - a)^2 + y^2 = r^2\}, \qquad 0 < r < a,$$

alrededor del eje y.
(a) Encuentra los puntos críticos de la función $g(x, y, z) = z$ *en* T, *y di cuáles de ellos son máximos o mínimos locales de* g *en* T.
(b) Encuentra los puntos críticos de la función $h(x, y, z) = y$ *en* T, *y di cuáles de ellos son máximos o mínimos locales de* h *en* T.

Ejercicio 10.30 *Sean* Ω *un subconjunto abierto de un espacio de Banach* V, $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ *una función de clase* $\mathcal{C}^2$ *y* $u_0 \in \Omega$ *un punto crítico de* φ, *es decir,* $\varphi'(u_0)v = 0$ *para todo* $v \in V$. *Demuestra las siguientes afirmaciones.*
(a) Si existe $c > 0$ *tal que*

$$D^2\varphi(u_0)(v, v) \geq c \quad \forall v \in V \text{ con } \|v\| = 1,$$

entonces u_0 *es un mínimo local de* φ, *es decir, existe* $\delta > 0$ *tal que* $\varphi(u) \geq \varphi(u_0)$ *si* $\|u - u_0\| < \delta$.
(b) Si existe $c > 0$ *tal que*

$$D^2\varphi(u_0)(v, v) \leq c \quad \forall v \in V \text{ con } \|v\| = 1,$$

entonces u_0 *es un máximo local de* φ, *es decir, existe* $\delta > 0$ *tal que* $\varphi(u) \leq \varphi(u_0)$ *si* $\|u - u_0\| < \delta$. (Sugerencia: Usa el Teorema de Taylor.)

Índice alfabético