Notas de Espacios de Funciones Continuas

Fidel Casarrubias Segura
Fernando Hernández Hernández
Angel Tamariz Mascarúa

Contenido

CAPíTULO 1

Topologías “naturales” en $C(X)$

1. Topología de la Convergencia Puntual

Dados dos espacios topológicos X y Y, sobre el conjunto Y^X de todas las funciones de X en Y, podemos considerar la topología producto o topología de Tychonoff que se caracteriza como la mínima topología que hace continua a cualquier proyección $\pi_x : Y^X \to Y$. Note que las proyecciones π_x son funciones abiertas. Además, una función $f : Z \to Y^X$ es continua si y sólo si la composición $\pi_x \circ f$ lo es, para cada $x \in X$.

Nuestros principales objetos de estudio serán los conjuntos

$$C(X, Y) = \{f \in Y^X \,:\, f \text{ es una función continua}\}$$

equipados con la topología heredada de Y^X, a la cual se suele llamar *topología de la convergencia puntual*; en general, denotaremos por $C_p(X, Y)$ a los espacios así obtenidos, pero en el caso en que $Y = \mathbb{R}$ escribiremos simplemente $C_p(X)$. El resultado siguiente justifica la terminología empleada (Ejercicio 1.12).

1.1. Proposición. Sea $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una red en $C_p(X, Y)$. Entonces, $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge a f en $C_p(X, Y)$ si y sólo si $(f_\lambda(x))_{\lambda\in\Lambda}$ converge a $f(x)$, para cada $x \in X$.

Dado un espacio Z es conveniente tener una descripción precisa de una base para su topología; en el caso de los espacios $C_p(X, Y)$ esto se logra considerando bases para la topología de los espacios contradominio Y.

Para cada subconjunto finito $\{x_1, \dots, x_n\}$ de X y cada colección finita de abiertos $\{B_1, \dots, B_n\}$ en Y, denotaremos por

$$\widetilde{W}(x_1, \dots, x_n; B_1, \dots, B_n)$$

al conjunto $\pi_{x_1}^{-1}(B_1) \cap \pi_{x_2}^{-1}(B_2) \cap \cdots \cap \pi_{x_n}^{-1}(B_n)$; es decir, al conjunto de funciones $f \in Y^X$ tales que $f(x_i) \in B_i$, para cada $i = 1, \dots, n$. Como es sabido, la familia de todos los conjuntos de este tipo es una base para la topología producto en Y^X. Por lo tanto, la familia de todos los conjuntos

$$W(x_1,\dots,x_n;B_1,\dots,B_n)=\widetilde{W}(x_1,\dots,x_n;B_1,\dots,B_n)\cap C(X,Y)$$

es una base para la topología en $C_p(X,Y)$. De hecho, como ya hemos mencionado, para tener una buena descripción de la topología de los espacios $C_p(X,Y)$ no es necesario considerar a todos los abiertos del espacio Y.

1.2. PROPOSICIÓN. *Sean $\mathcal{B}$ una base de la topología de Y, y $\mathcal{B}_Y(y)$ una base local de vecindades, para cada $y\in Y$. Entonces:*
(a) *La familia*

$$\{\widetilde{W}(x_1,\dots,x_n;B_1,\dots,B_n)\,:\,n\in\mathbb{N},x_i\in X,B_i\in\mathcal{B}\}$$

es una base para la topología producto en Y^X; de donde, la familia

$$\{W(x_1,\dots,x_n;B_1,\dots,B_n)\,:\,n\in\mathbb{N},x_i\in X,B_i\in\mathcal{B}\}$$

es una base para la topología en $C_p(X,Y)$
(b) *Para cada $f\in Y^X$, la familia de todos los conjuntos de la forma*

$$\widetilde{W}(f;x_1,\dots,x_n;B_1,\dots,B_n)=\{g\in Y^X\,:\,g(x_i)\in B_i,\ i=1,\dots,n\}$$

en donde $n\in\mathbb{N}$, $x_i\in X$, $B_i\in\mathcal{B}_Y(f(x_i))$, para cada $i=1,\dots,n$, es una base local de $f\in Y^X$; de donde, los conjuntos

$$W(f;x_1,\dots,x_n;B_1,\dots,B_n)=\{g\in C(X,Y)\,:\,g(x_i)\in B_i,\ i=1,\dots,n\}$$

constituyen una base local de f en $C_p(X,Y)$.

En el caso particular en que Y sea un espacio metrizable, es conveniente tomar como bases locales en Y a las colecciones de ϵ-bolas abiertas. Por lo tanto, cuando Y es un espacio metrizable, los conjuntos

$$\widetilde{W}(f;x_1,\dots,x_n;\epsilon)=\{g\in Y^X\,:\,d(f(x_i),g(x_i))<\epsilon,\quad i=1,\dots,n\}$$

forman una base local de f en Y^X (donde d es una métrica que define la topología de Y). Al considerar intersecciones de este tipo de subconjuntos de Y^X con el conjunto $C(X,Y)$, nuevamente generamos bases locales en $C_p(X,Y)$.

Por otra parte, observe que de la proposición anterior resultan las siguientes desigualdades para el peso y el caracter[1] de los espacios $C_p(X,Y)$,

$$w(C_p(X,Y))\le|X|\cdot w(Y)\ \text{ y }\ \chi(C_p(X,Y))\le|X|\cdot\chi(Y)\tag{1}$$

[1]Para las definiciones y propiedades básicas de funciones cardinales véase el apéndice A

Al tener presentes estas relaciones es natural preguntarse si pueden garantizarse las igualdades, o bien, bajo qué condiciones se dan éstas. Cuando Y es el espacio de los números reales, el peso y el caracter de los espacios $C_p(X,Y)$ son iguales al cardinal del espacio dominio X.

1.3. TEOREMA. *Para cualquier espacio infinito* X,

$$|X| = w(C_p(X)) = \chi(C_p(X))$$

DEMOSTRACIÓN: Dado que $\chi(C_p(X)) \leq w(C_p(X)) \leq w(\mathbb{R}^X) \leq |X| \cdot w(\mathbb{R})$, bastará demostrar que $|X| \leq \chi(C_p(X))$. Supongamos lo contrario: esto es, supongamos que $\chi(C_p(X)) < |X|$. Sea $\mathcal{A}$ una base local de $\mathbf{0}$ en $C_p(X)$ de cardinalidad estrictamente menor que el cardinal de X. Podemos suponer que los elementos de $\mathcal{A}$ son de la forma $W(\mathbf{0}; x_1, \ldots, x_n; \epsilon)$, con $x_1, \ldots, x_n$ en X. Para cada $W(\mathbf{0}; x_1, \ldots, x_n; \epsilon) \in \mathcal{A}$, sean

$$K(W) = \{x_1, \ldots, x_n\} \text{ y } Y = \bigcup\{K(W) : W \in \mathcal{A}\}$$

Entonces $|Y| < |X|$; sea $x^* \in X \setminus Y$. Consideremos ahora la vecindad $W(\mathbf{0}; x^*; 1)$ de $\mathbf{0}$ en $C_p(X)$. Sea $V = W(\mathbf{0}; x_1, \ldots, x_n; \epsilon)$ un elemento arbitrario en $\mathcal{A}$. Como $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq Y$, $x^* \neq x_i$ para cada $i = 1, \ldots, n$, y dado que X es un espacio de Tychonoff, podemos elegir una función $g \in C_p(X)$ tal que: $g(x_i) = 0$, para cada $i = 1, \ldots, n$, y $g(x^*) = 1$. Entonces se tiene que $g \in V \setminus W(\mathbf{0}; x^*; 1)$. Por lo tanto, $V \nsubseteq W(\mathbf{0}; x^*; 1)$, lo cual contradice el hecho de que $\mathcal{A}$ sea una base local de $\mathbf{0} \in C_p(X)$. $\square$

La caracterización de la metrizabilidad y de los axiomas de numerabilidad en los espacios $C_p(X)$ es un corolario inmediato al teorema anterior. El hecho notable de este resultado es que estas propiedades topológicas son caracterizadas en términos de una propiedad puramente conjuntista de los espacios dominios.

1.4. COROLARIO. *Para cualquier espacio* X*, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) $|X| \leq \aleph_0$.

(b) $C_p(X)$ *es un espacio primero numerable.*

(c) $C_p(X)$ *es un espacio segundo numerable.*

(d) $C_p(X)$ *es un espacio metrizable. metrizabilidadmetrizabilidadde* $C_p(X)$

Así por ejemplo los espacios $C_p(\mathbb{N})$ y $C_p(\mathbb{Q})$ son metrizables separables, mientras que $C_p(\mathbb{R})$ no es metrizable.

El Teorema 1.3 será de utilidad para obtener condiciones bajo las cuales se den las igualdades en (1); pero será también necesario poner de relieve dos hechos importantes en la teoría de los espacios $C_p(X,Y)$.

En primer lugar, el espacio Y puede ser considerado un subespacio cerrado del espacio $C_p(X,Y)$.

1.5. PROPOSICIÓN. *Sea $\xi_Y : Y \to C_p(X,Y)$ la función que a cada $y \in Y$ le asigna la función constante $c_y : X \to Y$ con valor y. Entonces ξ_Y es un encaje cerrado.*

DEMOSTRACIÓN: Claramente ξ_Y es una función inyectiva. Sea $y \in Y$, y

$$W = W(x_1, \ldots, x_n; B_1, \ldots, B_n)$$

un abierto básico en $C_p(X,Y)$ tal que $\xi_Y(y) \in W$. Entonces $y = c_y(x_i) \in B_i$, para cada $i = 1, \ldots, n$. Sea $B = \cap_{i=1}^n B_i$; entonces $y \in B$ y $\xi_Y(B) \subseteq W$. De donde, ξ_Y es continua en $y \in Y$. Es fácil ver que para $B \subseteq Y$ abierto

$$\xi_Y(B) = \bigcup \{W(x, B) : x \in X\} \cap \xi_Y(Y)$$

con lo cual, ξ_Y es un encaje.

Ahora, si $f \in C_p(X,Y) \setminus \xi_Y(Y)$ entonces existen x_1 y x_2 en X, con $x_1 \neq x_2$, tales que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Sean U_1 y U_2 abiertos ajenos en Y que satisfacen $f(x_i) \in U_i$, para $i = 1, 2$. Entonces $f \in W(x_1, x_2; U_1, U_2) \subseteq C_p(X,Y) \setminus \xi_Y(Y)$. □

Esta última proposición, y el hecho de que las funciones cardinales cardinales w y χ son monótonas, permite concluir que para cualesquiera espacios X y Y,

$$w(Y) \leq w(C_p(X,Y)) \quad \text{y} \quad \chi(Y) \leq \chi(C_p(X,Y)).$$

El segundo hecho importante lo constituye el siguiente resultado.

1.6. PROPOSICIÓN. *Si Y está encajado en Z, entonces $C_p(X,Y)$ es homeomorfo a un subespacio de $C_p(X,Z)$. Además, $C_p(X,Y)$ es subespacio cerrado en $C_p(X,Z)$ si Y está encajado en forma cerrada en el espacio Z.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $i : Y \to Z$ un encaje. Sea $\xi : C_p(X,Y) \to C_p(X,Z)$ la función dada por $\xi(f) = i \circ f$. Claramente ξ es una función bien definida, y la inyectividad de i implica la de ξ. Sea $f \in C_p(X,Y)$, y sea $W = W(x_1, \ldots, x_n; C_1, \ldots, C_n)$ un abierto básico en $C_p(X,Z)$ tal que $\xi(f) \in W$. Para cada $k = 1, \ldots, n$, sean $B_k = i^{-1}(C_k)$. Entonces

$$f \in W(x_1, \ldots, x_n; B_1, \ldots, B_n)$$

y $\xi(W(x_1,\ldots,x_n;B_1,\ldots,B_n)) \subseteq W(x_1,\ldots,x_n;C_1,\ldots,C_n)$. El verificar que ξ es una función abierta sobre su imagen se deja para el lector.

Ahora, supóngase que i es un encaje cerrado. Sea $h \in C_p(X,Z) \setminus \xi(C_p(X,Y))$. Entonces existe $x_0 \in X$ tal que $h(x_0) \in Z \setminus i(Y)$; sea $C \subseteq Z$ abierto tal que $h(x_0) \in C \subseteq Z \setminus i(Y)$. Entonces $h \in W(x_0;C) \subseteq C_p(X,Z) \setminus C_p(X,Y)$. De donde, ξ es un encaje cerrado. □

Con estos resultados, la demostración de la siguiente proposición es fácil de establecer; en ésta se enuncian condiciones suficientes bajo las cuales se obtienen las igualdades en (1). Antes, recordemos que una *trayectoria no trivialtrayectoria no trivialtrayectoria no trivial* en un espacio X es una función continua $\phi : [0,1] \to X$ tal que $\phi(0) \neq \phi(1)$. En un espacio Hausdorff X, la existencia de una trayectoria no trivial implica la existencia de un subconjunto homeomorfo a $\mathbb{R}$ [**W**, pag. 222].

1.7. PROPOSICIÓN. *pesopesode* $C_p(X,Y)$ *caractercarácterde* $C_p(X,Y)$ *Sea X un espacio infinito cualquiera, y sea Y un espacio que contiene una trayectoria no trivial, entonces:*

$$w(C_p(X,Y)) = |X| \cdot w(Y) \ \ y \ \ \chi(C_p(X,Y)) = |X| \cdot \chi(Y)$$

DEMOSTRACIÓN: Dado que Y contiene una trayectoria no trivial, $C_p(X)$ es homeomorfo a un subespacio del espacio $C_p(X,Y)$; la monotonía de la función cardinal w implica que $|X| = w(C_p(X)) \leq w(C_p(X,Y))$. Así mismo, dado que Y es homeomorfo a un subespacio de $C_p(X,Y)$, $w(Y) \leq w(C_p(X,Y))$. Por lo cual, $|X| \cdot w(Y) \leq w(C_p(X,Y))$. Con la desigualdad de (1) tenemos que $w(C_p(X,Y)) = |X| \cdot w(Y)$.
Análogamente se demuestra la igualdad referente a $\chi(C_p(X,Y))$. □

Esta última proposición permite concluir resultados interesantes. Primeramente, para espacios topológicos X y Y, tales que Y contiene una trayectoria no trivial, se tiene que:

(a) $C_p(X,Y)$ es primero numerable si y sólo si $|X| \leq \aleph_0$ y Y primero numerable.
(b) $C_p(X,Y)$ es segundo numerable si y sólo si $|X| \leq \aleph_0$ y Y segundo numerable.

Esto último nos capacita para exhibir ejemplos de espacios X y Y tales que $C_p(X,Y)$ es primero numerable pero no segundo numerable. Bastará considerar, por ejemplo, $X = \mathbb{N}$ y $Y = [0,\omega_1) \times [0,1)$, donde $[0,\omega_1)$ tiene la topología del orden y Y la topología generada por el orden lexicográfico (ver Ejercicio 1.1.4).

La Proposición 1.7 también permite responder en forma negativa a la siguiente cuestión: ¿Existen espacios X y Z tales que $C_p(X, C_p(Z))$ es primero numerable pero no segundo numerable?. En efecto, sean X y Z espacios topológicos cualesquiera; dado que $\mathbb{R}$ puede ser considerado un subespacio (de hecho, subespacio cerrado) de $C_p(Z)$, $w(C_p(X, C_p(Z))) = |X| \cdot w(C_p(Z)) = |X| \cdot |Z| = |X| \cdot \chi(C_p(Z)) = \chi(C_p(X, C_p(Z)))$. De donde, para espacios de funciones del tipo $C_p(X, C_p(Z))$, las propiedades topológicas: primero numerable, segundo numerable y metrizabilidad, son equivalentes; y están caracterizadas por la cardinalidad de los espacios X y Z.

1.8. COROLARIO. *Para cualesquiera espacios X y Z, las siguientes propiedades son equivalentes:*
(a) $|X| \cdot |Z| \leq \aleph_0$.
(b) $C_p(X, C_p(Z))$ *es primero numerable.*
(c) $C_p(X, C_p(Z))$ *es segundo numerable.*
(d) $C_p(X, C_p(Z))$ *es metrizable.*

Por otra parte, es importante hacer notar que la condición “Y contiene una trayectoria no trivial” es esencial para la demostración de la Proposición 1.7. En efecto, considérese a los espacios $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$; debido a que la conexidad se preserva bajo imagenes continuas, las únicas funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{Q}$ lo son las funciones constantes, de donde, $C_p(\mathbb{R}, \mathbb{Q})$ es homeomorfo a $\mathbb{Q}$. Así,

$$w(C_p(\mathbb{R}, \mathbb{Q})) = w(\mathbb{Q}) = \aleph_0 < \aleph_0 \cdot 2^{\aleph_0} = w(\mathbb{Q}) \cdot |\mathbb{R}|$$

$$\chi(C_p(\mathbb{R}, \mathbb{Q})) = \chi(\mathbb{Q}) = \aleph_0 < \aleph_0 \cdot 2^{\aleph_0} = \chi(\mathbb{Q}) \cdot |\mathbb{R}|$$

Observe que esta misma argumentación (la referente a la conexidad) demuestra que si Y es un espacio topológico totalmente disconexo y X es un espacio con un número finito de componentes conexas, digamos n, entonces el espacio $C_p(X, Y)$ es homeomorfo a Y^n. La generalización de esto último al caso en que la familia de componentes conexas de X es infinita requiere de una hipótesis adicional, ya que es posible construir espacios topológicos X y Y de tal forma que la familia $\mathcal{C}$ de componentes conexas de X sea infinita, con Y totalmente disconexo, pero para los cuales $C_p(X, Y)$ no es homeomorfo a $Y^{\mathcal{C}}$; por ejemplo, considérese como X al compacto $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ y como el espacio Y al espacio discreto $D(\aleph_0)$ de cardinalidad $\aleph_0$, dado que los únicos subconjuntos compactos en un espacio discreto son los subconjuntos finitos,

$$\aleph_0 = |C_p(X, Y)| < \aleph_0^{\aleph_0} = |Y^{\mathcal{C}}|,$$

de donde, $C_p(X, Y)$ no puede ser homeomorfo a $Y^{\mathcal{C}}$.

Si examinamos detalladamente el anterior ejemplo podemos notar, a diferencia del caso finito, que el hecho que impide a $C_p(X,Y)$ ser homeomorfo a $Y^{\mathcal{C}}$, es que la familia de componentes conexas de X no es una familia de subconjuntos de X localmente finita (el lector podrá comprobar esto último analizando el comportamiento del punto $0 \in X$); de hecho, no es difícil demostrar que para espacios Y totalmente disconexos son equivalentes el que $C_p(X,Y)$ sea homeomorfo a $Y^{\mathcal{C}}$ y el que la familia $\mathcal{C}$ de componentes conexas del espacio X sea una familia de subconjuntos de X localmente finita (ver Ejercicio 1.1.7).

Esta última equivalencia es una herramienta útil para la construcción de espacios X y Y, para los cuales, las dos desigualdades plasmadas en (1) son desigualdades estrictas; sólo basta considerar espacios topológicos X y Y con las siguientes características: Y un espacio totalmente disconexo, la familia $\mathcal{C}$ de componentes conexas de X debe ser una familia localmente finita, y además, la cardinalidad de X debe exceder tanto al cardinal de la familia $\mathcal{C}$ así como al peso del espacio Y.

Por otra parte, es notorio el comportamiento de los espacios de funciones $C_p(X,Y)$ como subespacio de los espacios producto Y^X, para espacios topológicos X y Y construidos con el espíritu de los anteriores párrafos. Note, por ejemplo, que estos espacios resultan ser siempre subespacios cerrados en los espacios Y^X. Esto motiva una vertiente de análisis en la teoría de los espacios de funciones; ésta línea de estudio nace al considerar la siguiente pregunta básica: ¿Qué propiedades topológicas inherentes a subespacios satisface $C_p(X,Y)$ respecto de Y^X?.

En futuras secciones abordaremos el análisis concerniente a preguntas como: ¿Cuándo es $C_p(X,Y)$ un subespacio cerrado de Y^X? y ¿Bajo que condiciones en los espacios soportes X y Y es el espacio $C_p(X,Y)$ compacto?, así como también, el análisis de la normalidad de los espacios de funciones continuas; finalizaremos esta sección estudiando a estos espacios en la línea marcada por la cuestión: ¿Cuándo es el espacio $C_p(X,Y)$ un subespacio denso del espacio Y^X?.

El problema de determinar condiciones sobre los espacios soportes, que caractericen a la densidad de $C_p(X,Y)$ en Y^X no es un problema trivial. De hecho, en su artículo [**?**], D. J. Lutzer y R. A. McCoy indican que el que $C_p(X,Y)$ sea un subespacio denso de Y^X es equivalente a que la familia de funciones $C(X,Y)$ separe puntos del espacio X (Se dice que una familia $\mathcal{F}$ de funciones de un espacio topológico X en un conjunto Y *separa puntos*familiafamiliaque separa puntos del espacio X, si para cada par de puntos distintos x_1, x_2 en X

existe una función $f \in \mathcal{F}$ para la cual $f(x_1) \neq f(x_2)$); así, el problema se puede traducir en determinar condiciones sobre los espacios X y Y que caractericen al hecho de que $C(X,Y)$ sea una familia de funciones separadora de puntos del espacio X. Por ahora nos conformaremos con enunciar una condición suficiente sobre el espacio Y que implica la densidad de $C_p(X,Y)$ en Y^X. Antes de establecer este resultado enunciamos una proposición que muestra que en el caso en que Y sea el espacio de los números reales, la propiedad de ser de Tychonoff de un espacio X implica la densidad de $C_p(X)$ en $\mathbb{R}^X$.

1.9. TEOREMA. *densidaddensidaddde $C_p(X)$ Para cualquier espacio X, $C_p(X)$ es denso en $\mathbb{R}^X$.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $f \in \mathbb{R}^X$, $x_1, ..., x_n \in X$ y $\epsilon > 0$. Consideremos al abierto básico $\widetilde{W} = \widetilde{W}(f; x_1, ..., x_n; \epsilon)$ de $\mathbb{R}^X$. Como X es Tychonoff, existe una función continua $g : X \to \mathbb{R}$ tal que $g(x_i) = f(x_i)$, para cada $i = 1, \ldots, n$. Tenemos entonces que $g \in \widetilde{W} \cap C_p(X)$. □

La generalización de esta última proposición a espacios de la forma $C_p(X,Y)$ requiere, además de que el espacio X sea de Tychonoff, la posibilidad de poder "conectar" cualesquiera dos puntos de Y por medio de una trayectoria.

1.10. PROPOSICIÓN. *densidaddensidaddde $C_p(X,Y)$ Si Y es conexo por trayectorias, entonces $C_p(X,Y)$ es denso en Y^X*

DEMOSTRACIÓN: Consideremos una función cualquiera $g \in Y^X$ y una vecindad básica $\widetilde{W} = \widetilde{W}(g; x_1, \ldots x_n; B_1, \ldots, B_n)$ de g en Y^X. Podemos hallar, para $i = 1, \ldots, n-1$, trayectorias $\sigma_i : [0,1] \to Y$ tales que $\sigma_i(0) = g(x_i)$ y $\sigma_i(1) = g(x_{i+1})$. Entonces $\sigma : [0,n] \to Y$ definida por $\sigma(t) = \sigma_i(t)$ si $i \leq t \leq i+1$, es una función continua. Por ser X un espacio de Tychonoff, existe una funcion continua $f : X \to [0,n]$ tal que $f(x_i) = i$. La función $f \circ \sigma$ es entonces un elemento de $\widetilde{W} \cap C_p(X,Y)$. □

El recíproco de esta proposición no es cierto, vease Ejercicio 1.1.6d.

(1). Demuestre la Proposición 1.2.
(2). Sea $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una red en $C_p(X,Y)$. Demuestre que: $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge a f en $C_p(X,Y)$ si y sólo si $(f_\lambda(x))_{\lambda\in\Lambda}$ converge a $f(x)$ para cada $x \in X$.
(3). metrizabilidadmetrizabilidaddde $C_p(X,Y)$ Sean X, Y espacios, con Y conteniendo una trayectoria no trivial. Demuestre que $C_p(X,Y)$ es metrizable si y sólo si X es numerable y Y es metrizable.

(4). Sea $Y = [0, \omega_1) \times [0, 1)$ con el orden lexicográfico, $(\alpha_1, t_1) < (\alpha_2, t_2)$ siempre que $\alpha_1 < \alpha_2$ o bien $\alpha_1 = \alpha_2$ y $t_1 < t_2$. El conjunto Y con la topología inducida por este orden se llama *línea larga*. Aumentando el punto ω_1 a Y y asumiendo que $x < \omega_1$ para todo $x \in Y$, obtenemos un conjunto linealmente ordenado Y^∞; el conjunto Y^∞ con la topología inducida por el orden lineal antes definido se llama *segmento largo.*

(a) Muestre que la línea larga es un espacio primero numerable, pero no segundo numerable.

(b) Muestre que el segmento largo es la compactación de Stone-Čech de la línea larga.

(c) Pruebe que para cualquier $x_0 \in Y$, el subespacio $M = \{x \in Y : x \leq x_0\}$ es homeomorfo al intervalo $[0, 1]$. (Sugerencia: Sea Q el conjunto de todos los números racionales en el intervalo $(0, 1)$. Muestre que los elementos de Q y los de $M \cap ([0, \omega_1) \times Q)$ pueden ser ordenados en sucesiones $r_1,\ r_2, \ldots$ y $s_1,\ s_2, \ldots$ de tal manera que $r_i < r_j$ si y sólo si $s_i < s_j$; verifique que la fórmula $f(r_i) = s_i$ define una función continua $f : Q \to M$ que puede extenderse a $[0, 1]$.)

(d) Un espacio es *Čech-completo*espacioespacioČech-completo si es un conjunto del tipo G_δ en su compactación de Stone-Čech. Un espacio es *localmente Čech-completo*espacioespaciolocalmente Čech-completo si cualquier punto $x \in X$ tiene una vecindad Čech-completa. Muestre que el espacio obtenido apartir de la línea larga removiendo todos los puntos de la forma $(\alpha, 0)$, donde α es un número ordinal no límite, es localmente Čech-completo pero no Čech-completo.

(e) Demuestre que $C_p(\mathbb{N}, Y)$ es un espacio primero numerable pero no segundo numerable.

(5). Un subconjunto D de un espacio X es G_δ-*denso* si cada conjunto del tipo G_δ en X intersecta a D. Un espacio X es *a-discreto* si cada subconjunto numerable A es discreto y cualquier función $f \in \mathbb{R}^A$ tiene una extensión continua a X. Pruebe que $C_p(X)$ es G_δ denso en $\mathbb{R}^X$ si y sólo si X es a-discreto.

(6). (a) Sea Y un espacio no conexo. Si $C_p(X, Y)$ es denso en Y^X, entonces X es totalmente disconexo.

(b) Si X es cero-dimensional (y T_1), entonces X es totalmente disconexo.

(c) Si X es cero-dimensional (y T_1), entonces $C_p(X, Y)$ es denso en Y^X.

(d) Dar un ejemplo de un espacio (Tychonoff) X totalmente disconexo tal que $C_p(X, Y)$ no es denso en Y^X para algún espacio Y.

(7). Demuestre que las siguientes proposiciones son equivalentes:
(a) X es suma topológica de subespacios conexos.
(b) Cada componente conexa de X es un conjunto abierto.
(c) La familia $\mathcal{C}$ de componentes conexas de X es una familia (de subonjuntos de X) localmente finita.
(d) Para cualquier espacio totalmente disconexo Y, se tiene que $C_p(X, Y)$ es homeomorfo a $Y^{\mathcal{C}}$.

(8). Sea X un espacio topológico. Una π-base (*pseudobase*) pseudobasepseudobase es una familia $\mathcal{B}$ de subconjuntos abiertos no vacíos de X tal que para cada abierto A de X, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq A$. Definimos el π-*peso* pipesoπ-peso de X como $\pi w(X) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B}$ es una π-base de $X\}$. Una familia $\mathcal{B}$ de subconjuntos abiertos no vacíos de X es una π-*base local de* X en x, si para cada vecindad V de x, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq V$. Definimos el π-*carácter del espacio* X *en el punto* x como $\pi\chi(X, x) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B}$ es una π-base local de $x\}$ y el π-*carácter* de X como $\pi\chi(X) = \sup\{\pi\chi(X, x) : x \in X\}$. picaracter$\pi$-caracter Demuestre que para cualquier espacio infinito se cumple que

$$\pi w(C_p(X)) = \pi\chi(C_p(X)) = \chi(C_p(X)) = |X|.$$

(9). Demuestre que no hay una metrica d sobre $C_p(I, I)$ con la propiedad de que $\lim d(f, f_n) = 0$ si y sólo si $f = \lim f_n$ con respecto a la topología de la convergencia puntual. (Sugerencia [**?**]: supóngase que existe una metrica d sobre $C_p(I, I)$ con la propiedad anterior. Para cualquier $x \in I$ y $n \in \mathbb{N}$, sea

$$d_n(x) = \sup\left\{f(x) : f \in C_p(I, I) \text{ y } d(f, \mathbf{0}) < \frac{1}{n}\right\},$$

y verifique que $\lim d_n(x) = 0$ para cualquier $x \in X$. Observe que para un natural n_0 existe una sucesión $x_1,\ x_2, \ldots$ de puntos de I y una sucesión $U_1,\ U_2, \ldots$ de conjuntos abiertos de I tales que $d_{n_0}(x_i) < 1$ y $x_i \in U_i$ para $i \in \mathbb{N}$ y $U_i \cap U_j = \emptyset$ siempre que $i \neq j$. Para $i \in \mathbb{N}$ seleccione funciones continuas $f_i : I \to I$ tales que $f_i(I \setminus U_i) = \{0\}$ y $f(x_i) = 1$, y considere luego la sucesión $f_1,\ f_2, \ldots$.)

2. Funciones naturales y el encaje canónico de X en $C_{p,2}(X)$

Algunas construcciones que cotidianamente se hacen en la categoría $\mathcal{T}$ de espacios de Tychonoff, y funciones continuas entre ellos, definen lo que desde el punto de vista de la teoría de categorías es conocido como funtores. Através de esta sección haremos uso del lenguaje categórico con el único afan de evidenciar que éstas son construcciones universales, esto es, son construcciones que resultan válidas en otras categorías además de la de espacios de Tychonoff.

La primera construcción que estudiaremos es aquella basada en la composición funciones a derecha; como veremos, ésta nos permitirá asociar a cada espacio de Tychonoff un funtor covariante con dominio y contradominio la categoría $\mathcal{T}$.

Consideremos un espacio de Tychonoff X. Si $f : Y \to Z$ es una función continua, entonces f determina una función entre los espacios de funciones continuas $C_p(X,Y)$ y $C_p(X,Z)$, a saber, la función

$$f_* : C_p(X,Y) \to C_p(X,Z)$$

dada por $f_*(h) = f \circ h$ $(h \in C_p(X,Y))$.

Es interesante observar que f_* es un morfismo en la categoría $\mathcal{T}$; es decir, una función continua. En efecto, si $h \in C_p(X,Y)$ y $\widetilde{W} = W(x_1,\ldots,x_n;C_1,\ldots,C_n)$ es un abierto básico en $C_p(X,Z)$ que contiene a $f \circ h$, entonces el abierto

$$W = W(x_1,\ldots,x_n; f^{-1}(C_1), f^{-1}(C_2),\ldots,f^{-1}(C_n))$$

contiene a h y es tal que $f_*(W) \subseteq \widetilde{W}$.

Observe también que si $id_Y : Y \to Y$ es la función identidad definida sobre el espacio Y, y $f : Y \to Z$ y $g : Z \to W$ son funciones continuas, entonces $(id_Y)_* = id_{C_p(X,Y)}$ y $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$. Así entonces, la transición de f a f_* define una función de la clase de funciones continuas entre espacios de Tychonoff a sí misma; y las anteriores igualdades muestran que esta función es un funtor covariante.

1.11. Proposición. *Para cada espacio de Tychonoff X, la función*

$$(\ )_* : \mathcal{M}or(\mathcal{T}) \to \mathcal{M}or(\mathcal{T})$$

cuya regla de asociación está dada por $(\ )_*(f) = f_*$, es un funtor covariante de la categoría $\mathcal{T}$ a la misma categoría $\mathcal{T}$.

Una rápida examinación a la construcción anterior revela que ésta puede ser dualizada utilizando la composición de funciones al lado izquierdo. Es pertinente aclarar que el proceso así concebido no genera funtores covariantes, si no que determina funtores contravariantes.

Consideremos un espacio topológico Y. Cada función continua

$$f : X \to Z$$

induce una función entre los espacios de funciones $C_p(Z, Y)$ y $C_p(X, Y)$, a saber, la función

$$f^* : C_p(Z, Y) \to C_p(X, Y),$$

dada por $f^*(h) = h \circ f$ $(h \in C_p(Z, Y))$.

Como ya hemos indicado, para cada espacio de Tychonoff Y, la función que asocia a cada f con f^* es una función cuyo dominio y contradominio lo es la clase de todas las funciones continuas entre espacios de Tychonoff; además esta función tiene la propiedad de preservar identidades e inviertir las composiciones.

1.12. Proposición. *Para cada espacio de Tychonoff Y, la función*

$$(\ )^* : \mathcal{M}or(\mathcal{T}) \to \mathcal{M}or(\mathcal{T})$$

dada por $(\ )^*(f) = f^*$, es un funtor contravariante de la categoría $\mathcal{T}$ a la categoría $\mathcal{T}$.

Demostración: Sólo demostraremos que si $f : X \to Z$ es una función continua, entonces $f^* : C_p(Z, Y) \to C_p(X, Y)$ es una función continua; dejamos las demás comprobaciones como ejercicio al lector. Sean $h \in C_p(Z, Y)$ y $\widetilde{W} = W(x_1, \dots, x_n; B_1, \dots, B_n)$ un abierto básico en $C_p(X, Y)$ que contiene a $f^*(h)$. Consideremos al abierto $W = W(f(x_1), \dots, f(x_n); B_1, \dots, B_n)$ de $C_p(Z, Y)$. Entonces $h \in W$, y además, $f^*(W) \subseteq \widetilde{W}$. Efectivamente, dado que $f^*(h) \in \widetilde{W}$, $h(f(x_i)) = (h \circ f)(x_i) = f^*(h)(x_i) \in B_i$ para cada $i = 1, \dots, n$. Ahora, si $\psi \in f^*(W)$ podemos elegir $k \in W$ de tal manera que $\psi = f^*(k)$. Entonces $\psi(x_i) = k(f(x_i)) \in B_i$, para cada $i = 1, \dots, n$. $\square$

Observe que la proposición 1.6 muestra una propiedad importante que poseen los funtores $(\ )_*$. Si escribimos el enunciado de 1.6 en términos de estos funtores, entonces se tiene el siguiente resultado: Para cada espacio de Tychonoff X, el funtor $(\ )_*$ asociado al espacio topológico X envia encajes (cerrados) en encajes (cerrados). Esto último sigiere investigar el comportamiento de los funtores $(\ )^*$ al ser aplicados a encajes. Con este espíritu, notemos primeramente que si $i : X \to Z$ es un encaje, y Y un espacio de Tychonoff fijo, entonces la función $i^* : C_p(Z, Y) \to C_p(X, Y)$ es, en esencia, la función que asocia a cada función continua $h : Z \to Y$ con su restricción al subespacio $i(X)$ de Z. Note también que si Y es el espacio de los números reales $\mathbb{R}$ e $i : X \to Z$ es una función inclusión, entonces la propiedad de ser un espacio de Tychonoff de Z implica el que $i^*(C_p(Z))$ sea un subespacio denso de $C_p(X)$. En efecto, si $W(g; x_1, \ldots, x_n; \epsilon)$ es una vecindad canónica de g en $C_p(X)$, podemos elegir una función f en $C_p(Z)$ de tal manera que $f(x_i) = g(x_i)$, para cada $i = 1, \ldots, n$.

Este último resultado (el referente a densidad) puede ser generalizado al caso en que el espacio Y es conexo por trayectorias.

1.13. PROPOSICIÓN.
Si Y es un espacio conexo por trayectorias e $i : X \to Z$ es un encaje, entonces $i^*(C_p(Z, Y))$ es un subespacio denso de $C_p(X, Y)$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $W = W(x_1, \ldots, x_n; B_1, \ldots, B_n)$ un abierto canónico de $C_p(X, Y)$. Consideremos el abierto $\widetilde{W} = \widetilde{W}(i(x_1), i(x_2), \ldots, i(x_n); B_1, \ldots, B_n)$ de Y^Z.
Dado que $C_p(Z, Y)$ es denso en Y^Z, podemos elegir $f \in C_p(Z, Y) \cap \widetilde{W}$. Entonces f es una función en $C_p(Z, Y)$ para la cual $i^*(f) \in W$. □

Es costumbre denotar por π_X a la función $i^* : C_p(Z) \to C_p(X)$ cada vez que $i : X \to Z$ sea una función inclusión y por $C_p(Y|X)$ a $\pi_Y(C_p(X))$; la proposición que enseguida enunciamos engloba algunas propiedades de las funciones π_X, llamadas *funciones restricción.*

1.14. PROPOSICIÓN. *Sea X un subespacio de un espacio Z.*
(a) *$C_p(X|Z)$ es un subespacio denso de $C_p(X)$.*
(b) *Si X es cerrado en Z entonces $\pi_X : C_p(Z) \to C_p(X)$ es abierta a su imagen.*
(c) *Si X está $\mathcal{C}$-encajado en Z, entonces $\pi_X : C_p(Z) \to C_p(X)$ es sobreyectiva.*
(d) *Si X es un subespacio denso de Z, entonces $\pi_X : C_p(Z) \to C_p(X)$ es una condensación (esto es, una función continua y biyectiva) a su imagen.*

DEMOSTRACIÓN: (a) Consideremos $f \in C_p(Z)$, y sea $W = W(f; z_1, \ldots, z_n; \epsilon)$ una vecindad básica cualquiera de f en $C_p(Z)$. No es difícil demostrar que si $\{z_1, \ldots, z_n\} \subseteq X$ entonces $\pi_X(W) = W(\pi(f); z_1, \ldots, z_n; \epsilon) \cap \pi_X(C_p(Z))$. Supongamos entonces que existe $l \in \mathbb{N}$, con $1 \leq l < n$, tal que: $\{z_1, \ldots, z_l\} \subseteq X$ y $\{z_{l+1}, \ldots, z_n\} \subseteq Z \setminus X$. En este caso se tiene que $\pi_X(W) = W(\pi_X(f); z_1, \ldots, z_l; \epsilon) \cap \pi_X(C_p(Z))$. Efectivamente, si g es un elemento de $\pi_X(W)$ entonces existe $h \in W$ tal que $h|_X = \pi_X(h) = g$. Ahora, dado que Z es de Tychonoff, $X \subseteq Z$ es cerrado y $\{z_{l+1}, \ldots, z_n\} \subseteq Z \setminus X$, podemos elegir una función continua $\psi : Z \to \mathbb{R}$ de tal manera que: $\psi(X) = \{0\}$ y $\psi(z_j) = f(z_j) - h(z_j)$, para cada $j = l + 1, \ldots, n$. Entonces $\psi + h$ es una función en $C_p(Z)$ que tiene las siguientes dos propiedades:

$$\pi_X(h+\psi) \in W(\pi_X(f); z_1, \ldots, z_l; \epsilon) \text{ y } \pi_X(h+\psi) = g.$$

Así entonces, $g \in W(\pi_X(f); z_1, \ldots, z_l; \epsilon) \cap \pi_X(C_p(Z))$. Por lo tanto, $\pi_X(W) \subseteq W(\pi_X(f); z_1, \ldots, z_l; \epsilon) \cap \pi_X(C_p(Z))$. Dejamos al lector comprobar la contensión contraria.

Observese, por otra parte, que el inciso (b) es una consecuencia inmediata de la propia definición de cuándo X está $\mathcal{C}$-encajado en el espacio Z. Así mismo, note que para demostrar el inciso (c), basta mostrar que la función π_X es inyectiva. Con este propósito en mente, sean f_1 y f_2 en $C_p(Z)$, tales que $f_1 \neq f_2$. Elijamos $z_0 \in Z$ para el cual $f_1(z_0) \neq f_2(z_0)$; entonces el conjunto

$$A = f_1^{-1}((f_1(z_0) - r, f_1(z_0) + r)) \cap f_2^{-1}((f_2(z_0) - r, f_2(z_0) + r)),$$

donde $r = \frac{|f_1(z_0) - f_2(z_0)|}{2}$, es un subconjunto abierto y no vacío de Z. Dado que X es denso en Z, podemos elegir $x_0 \in X \cap A$. Por la forma de haber definido al conjunto A, necesariamente $f_1(x_0) \neq f_2(x_0)$; de donde, $\pi_X(f_1) \neq \pi_X(f_2)$. □

El lector ha de recordar que la idea que permitió cencebir a los funtores $(\ )^*$ fue la de dualizar la construcción que dió a luz a los funtores $(\ )_*$; debido a esto y a que las funciones continuas sobreyectivas son, desde el punto de vista de la teoría de categorías, los morfismos duales a los encajes topológicos, cabe esperar que los funtores $(\ )^*$ transformen en encajes a las funciones continuas que son sobreyectivas. Esto puede ser demostrado fácilmente si se traslada “mutatis mutandis” la demostración de la afirmacion correspondiente para uno de los dos funtores que enseguida estableceremos (ver proposición 1.16).

Consideremos un conjunto X. Si $g : Y \to Z$ es una función continua entre espacios de Tychonoff entonces g define una función entre los espacios topológicos Y^X y Z^X, a saber, la función

$$g_\sharp : Y^X \to Z^X$$

dada por $g_\sharp(h) = g \circ h$ $(h \in Y^X)$. Obsérvese si $id_Y : Y \to Y$ es la función identidad definida sobre el espacio Y y $f : Y \to Z$ y $g : Z \to W$ son funciones continuas, entonces: $(id_Y)_\sharp = id_{Y^X}$ y $(g \circ f)_\sharp = g_\sharp \circ f_\sharp$.

Por otra parte, si Y un espacio topológico fijo y $f : X \to Z$ una función entre conjuntos, entonces f tiene asociada una función entre los espacios topológicos Y^Z y Y^X,

$$f^\sharp : Y^Z \to Y^X,$$

cuya regla de correspondencia es $f^\sharp(h) = h \circ f$ ($f \in Y^Z$). Nótese que en este caso $(id_X)^\sharp = id_{Y^X}$ y $(g \circ f)^\sharp = f^\sharp \circ g^\sharp$, donde $id_X : X \to X$ es la función identidad sobre el conjunto X y $f : X \to Z$ y $g : Z \to W$ son funciones entre conjuntos.

La proposición que ahora sigue muestra que, para cada elección de las funciones f y g, las funciones inducidas $f^\sharp$ y $g_\sharp$ son morfismos en la categoría de espacios de Tychonoff. Con esto se establece que para cada conjunto X y cada espacio de Tychonoff Y, las funciones

$$(\ )_\sharp : \mathcal{M}or(\mathcal{T}) \to \mathcal{M}or(\mathcal{T}) \text{ y } (\ )^\sharp : \mathcal{M}or(\mathcal{C}onj) \to \mathcal{M}or(\mathcal{T})$$

cuyas reglas de asociación están dadas por: $(\ )_\sharp(g) = g_\sharp$ y $(\ )^\sharp(f) = f^\sharp$, definen respectivamente un funtor covariante con dominio y contradominio la categoría $\mathcal{T}$, y un funtor contravariante con dominio la categoría de todos los conjuntos $\mathcal{C}onj$, y cuyo contradominio lo es la categoría de espacios de Tychonoff $\mathcal{T}$.

1.15. PROPOSICIÓN.
(a) *Si Y es un espacio topológico, y $f : X \to Z$ es una función entre conjuntos, entonces $f^\sharp : Y^Z \to Y^X$ es una función continua.*
(b) *Si X es un conjunto, y $g : Y \to Z$ es una función continua, entonces la función $g_\sharp : Y^X \to Z^X$ es continua.*

DEMOSTRACIÓN:
(a) Si $\phi \in Y^X$, y $W = W(x_1, \ldots, x_n; B_1, \ldots, B_n)$ es un abierto básico en Y^X que contiene a $f^\sharp(\phi)$, entonces

$$\widetilde{W} = W(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n); B_1, \ldots, B_n)$$

es un abierto en Y^Z que contiene a ϕ y tal que $f^\sharp(\widetilde{W}) \subseteq W$.
(b) Sea $\phi \in Y^X$. Sea $W = W(x_1, \ldots, x_n; C_1, \ldots, C_n)$ un abierto básico de Z^X que contiene a $g_\sharp(\phi)$. Entonces

$$\widetilde{W} = W(x_1, \ldots, x_n; g^{-1}(C_1), g^{-1}(C_2), \ldots, g^{-1}(C_n))$$

es un abierto en Z^X, contiene a ϕ y además $g_\sharp(\widetilde{W}) \subseteq W$. $\square$

Los funtores que han sido establecidos poseen propiedades interesantes, la siguiente proposición narra dos de ellas.

1.16. PROPOSICIÓN.
(a) *Si $f : X \to Z$ es una función sobreyectiva entre conjuntos, entonces*

$$f^\sharp : Y^Z \to Y^X$$

es un encaje cerrado.
(b) *Si $g : Y \to Z$ es un encaje (cerrado) entonces*

$$g_\sharp : Y^X \to Z^X$$

es un encaje (cerrado).

Demostración:

(a) Claramente, la sobreyectividad de la función f implica la inyectividad de la función $f^\sharp$. Por la proposición anterior, bastará demostrar que la función $f^\sharp$ es abierta a su imagen y que $f^\sharp(Y^Z)$ es un subespacio cerrado de Y^X.

Sea $W = W(z_1, \ldots, z_n; B_1, \ldots, B_n)$ un abierto básico en Y^Z. Sea $\psi \in f^\sharp(W)$ arbitrario. Elijamos $x_i \in f^{-1}(z_i)$, para cada $i = 1, \ldots, n$. Entonces

$$\psi \in W(x_1, \ldots, x_n; B_1, \ldots, B_n) \cap f^\sharp(Y^Z) \subseteq f^\sharp(W)$$

Ahora, dado que $f^\sharp(Y^Z) = \{\psi \in Y^X : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \psi(x_1) = \psi(x_2)\}$, si $\psi \in Y^X \setminus f^\sharp(Y^Z)$ entonces existen x_1 y x_2 en X tales que $f(x_1) = f(x_2)$ y $\psi(x_1) \neq \psi(x_2)$. Sean U_1 y U_2 abiertos ajenos en Y que contienen a $\psi(x_1)$ y a $\psi(x_2)$, respectivamente. Entonces

$$\psi \in W(x_1, x_2; U_1, U_2) \subseteq Y^X \setminus f^\sharp(Y^Z).$$

De donde, $f^\sharp(Y^Z)$ es cerrado en Y^X.

(b) Claramente $g_\sharp$ es inyectiva. Por 1.15 inciso (b), $g_\sharp$ es continua; de donde, para demostrar que $g_\sharp$ es un encaje, bastará mostrar que $g_\sharp$ es una función abierta a su imagen.

Sea $W = W(x_1, \ldots, x_n; B_1, \ldots, B_n)$ un abierto básico en Y^X ; y sea $\psi \in g_\sharp(W)$. Dado que $g : Y \to Z$ es un encaje, $g(B_i)$ es un abierto en $g(Y)$, para cada $i = 1, \ldots, n$. De donde, existen abiertos $C_1, \ldots, C_n$ en Z tales que $g(B_i) = C_i \cap g(Y)$, para $i = 1, \ldots, n$. Entonces,

$$\psi \in W(x_1, \ldots, x_n; C_1, \ldots, C_n) \cap g_\sharp(Y^X) \subseteq g_\sharp(W).$$

Supongamos ahora que $g : Y \to Z$ es un encaje cerrado. Sea $\psi \in Z^X \setminus g_\sharp(Y^X)$. Entonces, para cada $h \in Y^X$, $g \circ h \neq \psi$. De donde, existe $x_0 \in X$ tal que $\psi(x_0) \in Z \setminus g(Y)$. Sea C un abierto en Z tal que $\psi(x_0) \in C \subseteq Z \setminus g(Y)$. Entonces se tiene que

$$\psi \in W(x_0; C) \subseteq Z^X \setminus g_\sharp(Y^X).$$

□

Como hemos ya indicado en páginas anteriores, la demostración del inciso (a) en la anterior proposición en esencia demuestra el siguiente resultado: Dado un espacio de Tychonoff Y, si $f : X \to Z$ es una función continua sobreyectiva entonces $f^* : C_p(Z, Y) \to C_p(X, Y)$ es un encaje.

Es interesante observar ahora que si $f : X \to Z$ es una función cociente (esto es, una identificación) entonces

$$f^* : C_p(Z, Y) \to C_p(X, Y)$$

es un encaje cerrado.

Algunas otras propiedades de los funtores $(\ )^\sharp$ son establecidas en la proposición que enseguida enunciamos, y en el corolario a ésta.

1.17. PROPOSICIÓN. *Sean X un conjunto no vacío, y Y y Z espacios topológicos. Si $f : X \to Y$ y $g : X \to Z$ funciones entre conjuntos que son sobreyectivas, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(a) $f^\sharp(C(Y)) \subseteq g^\sharp(C(Z))$;

(b) *Existe una función continua h que hace conmutativo el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & Y \\ & Z \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $h : Z \to Y$ es una función continua que hace conmutar al anterior diagrama. Si $\phi \in f^\sharp(C(Y))$, existe $\psi \in C(Y)$ tal que $\phi = \psi \circ f$. Entonces tenemos que $h^\sharp(\psi) = \psi \circ h \in C(Z)$ puesto que h es una función continua. Pero $g^\sharp(h^\sharp(\psi)) = h^\sharp(\psi) \circ g = \psi \circ h \circ g = \psi \circ f = \phi$; de donde, $\phi \in g^\sharp(C(Z))$.

Supóngase ahora que $f^\sharp(C(Y)) \subseteq g^\sharp(C(Z))$. Entonces:

si $x \in X$, $A \subseteq X$, y $g(x) \in \mathrm{cl} g(A)$, entonces $f(x) \in \mathrm{cl} f(A)$.

En efecto: Supongamos que $f(x) \notin \mathrm{cl} f(A)$. Entonces existe $\phi \in C(Y)$ tal que $\phi(f(x)) = 1$ y $\phi(\mathrm{cl} f(A)) = \{0\}$. De donde, $f^\sharp(\phi)(x) = 1$ y $f^\sharp(\phi)(A) = \{0\}$. Por hipótesis, existe $\psi \in C(Z)$ tal que $g^\sharp(\psi) = f^\sharp(\phi)$. Para tal ψ se tiene entonces que $\psi(g(x)) = g^\sharp(\psi)(x) = 1$ y $\psi(g(A)) = g^\sharp(\psi)(A) = \{0\}$; pero esto último contradice la continuidad de ψ.

Observe ahora que si $y \in X$ entonces $g^{-1}(g(y)) \subseteq f^{-1}(f(y))$. Efectivamente, elijamos $x \in g^{-1}(g(y))$ y sea $A = \{y\}$. Claramente se tiene que $g(x) = g(y) \in g(A)$. Por la afirmación anterior, $f(x) \in \mathrm{cl} f(A) = \mathrm{cl} f(\{y\}) = \{f(y)\}$. De donde, $f(x) = f(y)$. Así, $g^{-1}(g(y)) \subseteq f^{-1}(f(y))$.

Considérese ahora a la función $h : Z \to Y$ dada por $h(z) = f(g^{-1}(z))$ $(z \in Z)$. Note que la buena definición de h ha sido establecida en la anterior afirmación. Además, por la construcción de esta función, se tiene que $h \circ g = f \circ g^{-1} \circ g = f$. Resta entonces demostrar que h es una función continua.

Para este fin, sean $B \subseteq Z$ y $z \in Z$, con $z \in \mathrm{cl}B$. Defínase $A = g^{-1}(B)$, y sea $x \in g^{-1}(z)$ arbitrario. Entonces $g(x) = z \in \mathrm{cl}B = \mathrm{cl}g(A)$. Por la primera de nuestras afirmaciones, $f(x) \in \mathrm{cl}f(A)$, esto es, $h(g(x)) \in \mathrm{cl}h(g(A))$. Pero $g(A) = B$ y $g(x) = z$. Entonces, $h(z) \in \mathrm{cl}h(B)$. De donde, la continuidad de h. □

1.18. COROLARIO. *Sean X y Y espacios topológicos, y sea $f : X \to Y$ una función sobreyectiva, entonces:*
(a) *f es continua si y sólo si $f^\sharp(C(Y)) \subseteq C(X)$.*
(b) *Si f es una función cociente, entonces $f^\sharp(C(Y))$ es un subespacio cerrado de $C_p(X)$.*
(c) *f es una condensación si y sólo si $f^\sharp(C(Y))$ es un subespacio denso de $C_p(X)$.*
(d) *f es un homeomorfismo si y sólo si $f^\sharp(C(Y)) = C_p(X)$.*

DEMOSTRACIÓN: (a) Tómese $Z = X$ y $g = id_X$ en la proposición anterior.

(b) Sea $\psi \in C_p(X)$ tal que $\psi \in cl(f^\sharp(C(Y)))$. Considérese la función $h : Y \to \mathbb{R}$ definida por lo siguiente: Si $y \in Y$, elíjase $x \in f^{-1}(\{y\})$, entonces $h(y) = \psi(x)$. Ciertamente en este instante es necesario pergeñar algunas líneas acerca de la buena definición, como función, de h. Antes de abocarnos a esta tarea, nótese que por la forma de haber definido a h, si h resulta ser una función entonces h satisface $\psi = h \circ f = f^\sharp(h)$; además, esta última igualdad, junto con la continuidad de ψ y el que f sea una función cociente, implican la continuidad de h. Así, para establecer el resultado, únicamente hay que mostrar que h es una función bien definida.

Con esto en mente, observe que si ϕ está en $f^\sharp(C(Y))$ entonces ϕ debe ser constante en cada fibra $f^{-1}(\{y\})$ $(y \in Y)$. Y esto, junto con el hecho de que ψ es un elemento de la cerradura de $f^\sharp(C(Y))$ en $C_p(X)$, implican que ψ debe ser también constante en cada conjunto $f^{-1}(\{y\})$. Esto último implica fácilmente la buena defición de h.

(c) Supongamos que f es una condensación. Sean $\phi \in C_p(X)$ y $W(\phi; x_1, \ldots, x_n; \epsilon)$ una vecindad básica de ϕ en $C_p(X)$. Sin perdida de generalidad, podemos suponer que $n \geq 2$. Dado que f es una función inyectiva, $y_1 = f(x_1), \ldots, y_n = f(x_n)$ son elementos de Y distintos entre sí. Ahora, como Y es de Tychonoff, existe $\psi : Y \to \mathbb{R}$ continua tal que $\psi(y_i) = \phi(x_i)$, para cada $i = 1, \ldots, n$. Entonces $f^\sharp(\psi) \in f^\sharp(C(Y)) \cap W(\phi; x_1, \ldots, x_n; \epsilon)$. De donde, $f^\sharp(C(Y))$ es denso en $C_p(X)$.

Supóngase ahora que $f^\sharp(C(Y))$ es un subconjunto denso de $C_p(X)$. Si f no es inyectiva, podemos elegir x_1 y x_2 en X, con $x_1 \neq x_2$, tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Pero entonces, para cada elemento $\psi \in f^\sharp(C(Y))$ se tiene que $\psi(x_1) = \psi(x_2)$. Ahora bien, dado que $x_1 \neq x_2$, existe $\phi \in C_p(X)$ tal que $\phi(x_1) = 1$ y $\phi(x_2) = 0$. Consideremos ahora al conjunto $W(\phi; x_1, x_2; \frac{1}{2})$. Este conjunto es una vecindad de ψ en $C_p(X)$ para la cual $W(\phi; x_1, x_2; \frac{1}{2}) \cap f^\sharp(C(Y)) = \emptyset$; pero esto contradice el que $f^\sharp(C(Y))$ sea un subconjunto denso de $C_p(X)$. Así, necesariamente f es una función inyectiva; y con esto, una condensación.

(d) Claramente, si f es un homeomorfismo entonces $f^\sharp(C(Y)) = C(X)$.

Supongamos que $f^\sharp(C(Y)) = C(X)$. Por los anteriores incisos, basta demostrar que f es una función cerrada. Supongamos lo contrario; esto es, supongamos que existe un subconjunto cerrado F de X para el cual $cl_Y(f(F)) \setminus f(F) \neq \emptyset$. Elijamos $y \in cl_Y(f(F)) \setminus f(F)$ y $x \in f^{-1}(\{y\})$. Como $x \notin F$, existe $\phi : X \to \mathbb{R}$ continua tal que $\phi(F) = \{0\}$ y $\phi(x) = 1$. Finalmente, obsérvese que esto último implica que si $\psi \in \mathbb{R}^Y$ es tal que $\phi = f^\sharp(\psi)$, entonces ψ no puede ser una función continua (pues $\psi(f(F)) = \phi(F) = \{0\}$, $\psi(y) = 1$ y $y \in cl_Y(f(F))$). De donde, $\phi \notin f^\sharp(C(Y))$; lo cual es una contradicción. □

Dado que los espacios de Tychonoff son homeomorfos a subespacios de productos de rectas reales, todo espacio de Tychonoff X puede ser interpretado como un conjunto de funciones reales continuas equipado con la topología de la convergencia puntual (X es homeomorfo a un subespacio de $C_p(D(w(X)))$, en donde $D(w(X))$ es el espacio discreto de cardinalidad $w(X)$).

Finalizaremos esta sección mostrando que todo espacio de Tychonoff X puede también ser interpretado como un conjunto de funciones continuas de valores reales con dominio de definición el espacio de funciones $C_p(X)$.

Dados un conjunto X, un espacio topológico Y, y una subfamilia $\mathcal{F}$ de Y^X, la *evaluación* de la familia $\mathcal{F}$ en el punto $x \in X$ es la función

$$e_x : \mathcal{F} \to Y$$

dada por $e_x(f) = f(x)$ $(f \in \mathcal{F})$. La función $\psi_{\mathcal{F}} : X \to Y^{\mathcal{F}}$ definida por medio de $\psi_{\mathcal{F}}(x) = e_x$ $(x \in X)$, es llamada *la evaluación canónica asociada a la familia* $\mathcal{F}$. Si dotamos a $\mathcal{F}$ con la topología de subespacio respecto a Y^X, cada función e_x es una función continua. De donde, si $\mathcal{F}$ es un subespacio de Y^X entonces $\psi_{\mathcal{F}}(X) = \{e_x : x \in X\}$ es un subconjunto de $C_p(\mathcal{F}, Y)$.

1.19. PROPOSICIÓN. *Para cada espacio X y cada subespacio $\mathcal{F}$ de $C_p(X)$, $\psi_{\mathcal{F}} : X \to C_p(\mathcal{F})$ es una función continua.*

Demostración: Sea $x \in X$ arbitrario. Sea $W = W(e_x; f_1, \ldots, f_n; \epsilon)$ una vecindad básica de $\psi_{\mathcal{F}}(x) = e_x$ en $C_p(\mathcal{F})$. Dado que cada f_i es una función continua de X en $\mathbb{R}$,

$$\psi_{\mathcal{F}}^{-1}(W) = \cap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(f_i(x) - \epsilon, f_i(x) + \epsilon).$$

es una abierto en X que contiene a x. De donde, la continuidad de $\psi_{\mathcal{F}}$. □

Se dice que una familia $\mathcal{F}$ de funciones de un espacio topológico X en un conjunto Y *separa puntos* del espacio X, si para cada par de puntos distintos x_1, x_2 en X existe una función $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Una familia de funciones $\mathcal{F} \subseteq C(X, Y)$ es *regular* si para cada $x \in X$ y cada $A \subseteq X$, con $x \notin \mathrm{cl}(A)$, existe una función $f \in \mathcal{F}$ para la cual $f(x) \notin \mathrm{cl}(f(A))$. Note que toda familia regular es una familia que separa puntos y que la propiedad de ser de Tychonoff de un espacio X implica la regularidad de las familias de funciones continuas $C(X)$ y $C^*(X) = \{f \in C(X) : f(X) \subseteq \mathbb{R} \text{ es acotado}\}$.

1.20. Proposición. *Para cada conjunto X y cada subfamilia $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^X$, la familia $\psi_{\mathcal{F}}(X) \subseteq \mathbb{R}^{\mathcal{F}}$ es una familia que separa puntos de $\mathcal{F}$.*

Demostración: Si f_1 y f_2 puntos distintos en $\mathcal{F}$, entonces existe $x_0 \in X$ tal que $f_1(x_0) \neq f_2(x_0)$. La función $e_{x_0} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ es tal que $e_{x_0}(f_1) \neq e_{x_0}(f_2)$. □

1.21. Proposición. *Sea $\mathcal{F}$ un subespacio de $\mathbb{R}^X$.*
(a) *Si $\mathcal{F}$ es una familia de funciones continuas que separa puntos de X entonces la función*

$$\psi_{\mathcal{F}} : X \to C_p(\mathcal{F})$$

es una una condensación a su imagen.
(b) *Si $\mathcal{F}$ es una familia regular, entonces $\psi_{\mathcal{F}} : X \to C_p(\mathcal{F})$ es un encaje.*

Demostración: (a) Para establecer la afirmación bastará demostrar que $\psi_{\mathcal{F}}$ es inyectiva. Sean x_1, x_2 en X tales que $x_1 \neq x_2$. Dado que $\mathcal{F}$ es una familia que separa puntos del espacio X, existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x_0) \neq f(x_1)$. De donde, $\psi_{\mathcal{F}}(x_1) \neq \psi_{\mathcal{F}}(x_2)$. Por lo tanto, $\psi_{\mathcal{F}}$ es inyectiva.

(b) Dado que $\mathcal{F}$ separa puntos del espacio X (pues es regular),

$$\psi_{\mathcal{F}} : X \to C_p(\mathcal{F})$$

es continua y biyectiva a su imagen. De donde, resta demostrar que $\psi_{\mathcal{F}}^{-1} : \psi_{\mathcal{F}}(X) \to X$ es continua.

Sea $y \in \psi_{\mathcal{F}}(X)$. Sea U un abierto en X que contiene a $x = \psi^{-1}(y)$. Dado que $x \notin X \setminus U$, existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x) \notin \mathrm{cl} f(X \setminus U)$. Sea $\epsilon > 0$ tal que $(f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon) \cap f(X \setminus U) = \emptyset$. Entonces

$W(y; f; \epsilon) \cap \psi_{\mathcal{F}}(X)$ es una vecindad de y en $\psi_{\mathcal{F}}(X)$ para la cual $\psi_{\mathcal{F}}^{-1}(W(y; f; \epsilon) \cap \psi_{\mathcal{F}}(X)) \subseteq U$. De donde, la continuidad de $\psi_{\mathcal{F}}^{-1}$. □

1.22. COROLARIO. *Sea X un espacio de Tychonoff. X es homeomorfo a un subespacio del espacio de funciones $C_p(C_p(X))$ y a un subespacio del espacio de funciones $C_p(C_p^*(X))$.*

(1). ([**E**, pag.105]) **Topología de la convergencia uniforme en** $C(X)$.

Considérese la función $\widetilde{\ } : \mathcal{P}(C(X)) \to \mathcal{P}(C(X))$ cuya regla de asociación está dada por lo siguiente:

Si $A \subseteq C(X)$ y $f \in C(X)$, entonces $f \in \widetilde{A}$ siempre que exista $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en A tal que $\{f_n\}_n$ converge uniformemente a f

Demuestre que la función $\widetilde{\ }$ define un operador cerradura sobre el conjunto $C(X)$, esto es, demuestre que $\widetilde{\ }$ tiene las siguientes propiedades cuatro propiedades:

(a) $\widetilde{\emptyset} = \emptyset$ (b) $A \subseteq \widetilde{A}$ (c) $\widetilde{A \cup B} = \widetilde{A} \cup \widetilde{B}$ (d) $\widetilde{\widetilde{A}} = \widetilde{A}$

Considere al espacio topológico $(C(X), \tau)$ que se obtiene al dotar al conjunto $C(X)$ con la topología τ generada por el anterior operador cerradura. Demuestre que si $f \in C(X)$ entonces la familia de conjuntos de la forma

$$\begin{aligned} U_i(f) &= \{g \in C(X) : \text{ existe } 0 < a < \frac{1}{i} \\ &\quad \text{tal que } |f(x) - g(x)| < a \text{ para toda } x \in X\} \end{aligned}$$

($i \in \mathbb{N}$) es una base local de vecindades para f en $C(X)$. La topología en $C(X)$ así generada recibe el nombre de *topología de la convergencia uniforme*.

(a) Demuestre que, para cualquier espacio topológico X, $C(X, [0,1])$ es un subespacio cerrado de $C(X)$ en la topología de la convergencia uniforme.
(b) Demuestre que, para cualquier espacio topológico X, la topología de la convergencia uniforme en $C(X)$ es más fina que la topología de la convergencia puntual.
(c) Demuestre que no es cierto en general que la topología de la convergencia puntual y de la convergencia uniforme coinciden en un espacio de la forma $C(X)$.

(Sugerencia: Considere al conjunto $C(\mathbb{N})$. Demuestre que la función constante cero con dominio el espacio $\mathbb{N}$ y contradominio el espacio $\mathbb{R}$ pertenece a la cerradura del conjunto

$$A = \{g \in C(\mathbb{N}) : f(\mathbb{N}) \subseteq \{0,1\} \text{ y } |f^{-1}(\{0\})| < \aleph_0\}$$

en la topología de la convergencia puntual pero no en la topología de la convergencia uniforme).

(2). Sea $f : X \to Y$ definida de un conjunto X en un espacio topológico Y. Se dice que f es una función *casi-sobreyectiva* si $f[X]$ es un subespacio denso de Y. Demuestre que si $f : X \to Y$ es una función continua, entonces $f^* : C(Y) \to C(X)$ es inyectiva si y sólo si f es casi sobreyectiva y que $f^* : C(Y) \to C(X)$ es una función casi sobreyectiva si y sólo si f es inyectiva.

(3). **Funciones inducidas y la topología de la convergencia uniforme**.

(a) Demuestre que para cualquier función continua $f : X \to Y$, la función inducida por f

$$f^* : C(Y) \to C(X),$$

es una función continua cuando a $C(X)$ y a $C(Y)$ se les dota con la topología de la convergencia uniforme.

(b) ¿Es cierto que si X, Y y Z son espacios topológicos, y $g : Y \to Z$ es una función continua entonces la función

$$f_* : C(X,Y) \to C(X,Z)$$

es una función continua cuando se considera la topología de la convergencia uniforme en los conjuntos $C(X,Y)$ y $C(X,Z)$? (ver [**E**, Ejemplo 4.2.14])

(c) Demuestre que si $f : X \to Y$ es una función continua sobreyectiva, entonces la función inducida por f

$$f^* : C(Y) \to C(X),$$

es un encaje topológico cuando a $C(X)$ y a $C(Y)$ se les considera con la topología de la convergencia uniforme.

(d) ¿Si $f : X \to Y$ es una función cociente, es entonces

$$f^* : C(Y) \to C(X),$$

un encaje topológico cerrado, cuando se considera a la topología de la convergencia uniforme en los conjuntos $C(X)$ y $C(Y)$?

(4). Sean X y Y espacios topológicos. Si $f \in C(X,Y)$, denotaremos por $\Gamma(f)$ a la gráfica de f (un subconjunto de $X \times Y$).

(a) Para cada subconjunto abierto G de $X \times Y$, sea

$$\mathcal{F}_G = \{f \in C(X,Y) : \Gamma(f) \subseteq G\}$$

Demuestre que la colección $\{\mathcal{F}_G : G \subseteq X \times Y \text{ es abierto }\}$ es una base para una topología en $C(X,Y)$. La topología así generada recibe el nombre de *Topología de la gráfica* en $C(X,Y)$; y $C_\gamma(X,Y)$ es el espacio que se obtiene al dotar al conjunto $C(X,Y)$ con esta topología.

(b) Demuestre que si X es un espacio compacto, entonces para cualesquiera espacios Y y Z, la función composición

$$\Sigma : C_\gamma(X,Y) \times C_\gamma(Y,Z) \to C_\gamma(X,Z)$$

es una función continua.

(c) Demuestre que para cada $g \in C(Y,Z)$, la función inducida

$$g_* : C_\gamma(X,Y) \to C_\gamma(X,Z)$$

es una función continua. Demuestre además que si g es un encaje topológico, entonces g_* es también un encaje topológico.

(d) Sea $\mathbb{R}_\mathcal{L}$ la línea de Sorgenfrey. Demuestre que la función inducida la función identidad $id : \mathbb{R}_\mathcal{L} \to \mathbb{R}$

$$id^* : C_\gamma(\mathbb{R}) \to C_\gamma(\mathbb{R}_\mathcal{L})$$

no es una función continua.

3. Estructuras Algebraicas en $C(X)$ y conexidad

Aprovechando la estructura algebraica de $\mathbb{R}$, de manera natural podemos dotar a $\mathbb{R}^X$ de una suma, una multiplicación y una multiplicación por escalares; definiendo para cada $x \in X$ y cada $r \in \mathbb{R}$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f\,g)(x) = f(x) \cdot g(x) \tag{2}$$

$$(r\,f)(x) = r \cdot f(x).$$

Con estas operaciones, $\mathbb{R}^X$ resulta ser un álgebra sobre el campo de los números reales. Más aún, puesto que $\mathbb{R}$ es un campo topológico y las operaciones en $\mathbb{R}^X$ han sido definidas de manera puntual, resulta que al aplicar dichas operaciones a funciones continuas obtenemos funciones continuas; es decir, $C(X)$ es un subálgebra de $\mathbb{R}^X$. En ocasiones resaltaremos la estructura de $C(X)$ como grupo, anillo o espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Las operaciones así definidas tienen otra relación con la topología en $\mathbb{R}^X$, son funciones continuas. Al componer la suma con cualquier proyección $\pi_x : \mathbb{R}^X \to \mathbb{R}$ se obtiene una función continua como se puede apreciar en el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^X \times \mathbb{R}^X \arrow[r, "+"] \arrow[d, "\pi_x \times \pi_x"'] & \mathbb{R}^X \arrow[d, "\pi_x"] \\
\mathbb{R} \times \mathbb{R} \arrow[r, "+"'] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

Un argumento similar permite deducir que la multiplicación en $\mathbb{R}^X$ y la multiplicación por escalar también son funciones continuas. Así, obtenemos lo siguiente.

1.23. TEOREMA. *Con las operaciones definidas en (2), $\mathbb{R}^X$ es un álgebra topológica. En particular, $C_p(X)$ es un álgebra topológica.*

Observe que en realidad nuestros razonamientos no dependieron del conjunto particular de los números reales; para establecer el teorema precedente únicamente nos bastaron la estructura algebraica de $\mathbb{R}$ y la continuidad de sus operaciones algebraicas, por ello se tienen generalizaciones obvias cuando consideramos cualquier álgebra, grupo, anillo o espacio vectorial topológico Y. Nuevamente $C_p(X, Y)$ se convierte en álgebra topológica, grupo topológico, anillo topológico o espacio vectorial topológico (ver Ejercicio 1.2.1). La formulación de las siguientes proposiciones, se hará en términos de álgebras topológicas, por ser el caso más general, pero evidentemente son válidas para el caso particular de grupos, anillos o espacios vectoriales topológicos.

Si tenemos una familia de álgebras topológicas $\{Y_\alpha : \alpha \in A\}$, entonces el producto cartesiano $Y = \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$ también tiene una estructura de álgebra topológica si definimos las operaciones en Y coordenada a coordenada (producto directo) y equipamos a Y con la topología producto (ver Ejercicio 1.2.2). Por otra parte, diremos que dos álgebras topológicas Y y Z (o bien, grupos, anillos o espacios vectoriales topológicos) son *topológicamente isomorfas* algebrasalgebrastopológicamente isomorfas isomorfismoisomorfismotopológico si existe un homeomorfismo $h : Y \to Z$ que es a la vez un isomorfismo; o sea, que preserva la estructura algebraica.

1.24. PROPOSICIÓN. *Sea $Y = \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$, entonces:*

(a) *El espacio* $C_p(X,Y)$ *es homeomorfo al espacio* $\prod_{\alpha\in A} C_p(X,Y_\alpha)$.
(b) *Si además cada* Y_α *es un álgebra topológica, entonces* $C_p(X,Y)$ *es topológicamente isomorfa a* $\prod_{\alpha\in A} C_p(X,Y_\alpha)$.

Demostración: Sea

$$H : \left(\prod_{\alpha\in A} Y_\alpha\right)^X \to \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha^X$$

la función tal que a $f \in \left(\prod_{\alpha\in A} Y_\alpha\right)^X$ le asigna $H(f) \in \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha^X$, la cual es la función definida por medio de

$$H(f)(\alpha)(x) = f(x)(\alpha).$$

H es un homeomorfismo. Además,

$$H(C_p(X, \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha)) = \prod_{\alpha\in A} C_p(X,Y_\alpha).$$

De donde, $C_p(X,Y)$ es homeomorfo a $\prod_{\alpha\in A} C_p(X,Y_\alpha)$.

Para establecer el inciso (b), únicamente basta demostrar que la función H también preserva las operaciones algebraicas.

Consideremos funciones cualesquiera $f,g,h \in C_p(X, \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha)$ y un escalar arbitrario $r \in \mathbb{R}$. Sean $\alpha \in A$ y $x \in X$ elementos cualesquiera, entonces

$$\begin{aligned}
H(rf+gh)(\alpha)(x) &= (rf+gh)(x)(\alpha)\\
&= ((rf)(x)+(gh)(x))(\alpha)\\
&= (rf(x)+g(x)h(x))(\alpha)\\
&= rf(x)(\alpha)+g(x)(\alpha)h(x)(\alpha)\\
&= rH(f)(\alpha)(x)+H(g)(\alpha)(x)\,H(h)(\alpha)(x).
\end{aligned}$$

De donde, $H(rf+gh) = rH(f)+H(g)H(h)$. □

1.25. Proposición. *Sea* $X = \sum_{\alpha\in A} X_\alpha$ *la suma topológica de los espacios* X_α, *y sea* Y *un espacio cualquiera. Entonces:*

(a) *El espacio* $C_p(X,Y)$ *es homeomorfo a* $\prod_{\alpha\in A} C_p(X_\alpha,Y)$.

(b) *Si* Y *es una álgebra topológica, entonces* $C_p(X,Y)$ *es topológicamente isomorfa a* $\prod_{\alpha\in A} C_p(X_\alpha,Y)$.

Demostración: Para cada $\alpha \in A$, denotemos por i_α a la función inclusión de X_α en X, y sea $h_\alpha : Y^X \to Y^{X_\alpha}$ tal que: $h_\alpha(f) = f\circ i_\alpha$.

Dejamos al lector comprobar que la funciones h_α son continuas.

Consideremos ahora la función $H : Y^X \to \prod_{\alpha\in A} Y^{X_\alpha}$, donde

$$H(f)(\alpha)(x) = f\circ i_\alpha(x)$$

para cada $f \in Y^X$. Esta función es una biyección, y puesto que $\pi_\alpha \circ H = h_\alpha$, para cada $\alpha \in A$, concluimos que H es continua.

Por otra parte, sea

$$\widetilde{W} = \widetilde{W}(x_1, \ldots, x_n; B_1, \ldots, B_n).$$

un básico canónico en Y^X. Entonces, si denotamos por $\widetilde{W}_{\alpha_i}$ a los conjuntos $\widetilde{W}(x_i; B_i) \subseteq Y^{X_{\alpha_i}}$, donde $x_i \in X_{\alpha_i}$, se tiene que $H(\widetilde{W}) = \bigcap_{i=1}^n \pi_{\alpha_i}^{-1}(\widetilde{W}_{\alpha_i})$. En efecto, si $f \in \widetilde{W}$, y si $1 \leq i \leq n$, entonces

$$\pi_{\alpha_i}(H(f))(x_i) = g \circ i_{\alpha_i}(x_i) = g(x_i) \in B_i,$$

de donde $H(f) \in \bigcap_{i=1}^n \pi_{\alpha_i}^{-1}(\widetilde{W}_{\alpha_i})$. Ahora, si g es elegido en $\bigcap_{i=1}^n \pi_{\alpha_i}^{-1}(\widetilde{W}_{\alpha_i})$ entonces, dado que H es sobreyectiva, existe $f \in Y^X$ tal que $H(f) = g$. De aquí que

$$f(x_i) = f \circ i_{\alpha_i}(x_i) = H(f)(\alpha_i)(x_i) = f(\alpha_i)(x_i) \in B_i;$$

es decir, $f \in \widetilde{W}$. Por lo tanto, $H(\widetilde{W}) = \bigcap_{i=1}^n \pi_{\alpha_i}^{-1}(\widetilde{W}_{\alpha_i})$. De donde, H es una función abierta.

Finalmente, dado que las inclusiones i_α son funciones continuas se tiene que $H(C_p(X, Y)) \subseteq \prod_{\alpha \in A} C_p(X_\alpha, Y)$; y si $g \in \prod_{\alpha \in A} C_p(X_\alpha, Y)$, la sobreyectividad de la función H, permite argumentar la existencia de una función $f \in Y^X$ tal que $H(f) = g$. Pero como para esta función se tiene que: $f \circ i_\alpha = \pi_\alpha \circ g$, para cada $\alpha \in A$, f es continua. De donde, $\prod_{\alpha \in A} C_p(X_\alpha, Y) \subseteq H(C_p(X, Y))$. Por lo tanto,

$$\prod_{\alpha \in A} C_p(X, Y_\alpha) = H(C_p(X, Y)).$$

Dejamos al lector verificar que H preserva las operaciones algebraicas, estableciendo con esto el inciso (b). □

La siguiente proposición es análoga a la Proposición 1.6; su demostración es similar y por lo tanto la omitimos.

1.26. PROPOSICIÓN. *Si Z es un álgebra topológica y Y es una subálgebra de Z, entonces $C_p(X, Y)$ es un subálgebra topológica de $C_p(X, Z)$.*

Terminaremos esta sección estudiando la conexidad de los espacios $C_p(X, Y)$ cuando Y es un espacio vectorial topológico real o complejo. Empecemos por recordar algunas definiciones.

Dos funciones continuas $f, g \in C_p(X, Y)$ son *homotópicas* si existe una función continua $H : X \times I \to Y$ tal que, para cada $x \in X$, $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$. A la función H se le llama *homotopía* entre f y g. Un espacio X es *contráctil* espacioespaciocontráctil si existe una homotopía entre la función identidad $Id : X \to X$ y alguna función constante; en tal caso la homotopía recibe el nombre de *contracción*contraccioncontracción. Un espacio X es *homogeneo* si para cualesquiera x, $y \in X$, existe un homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $h(x) = y$. Obsérvese que cualquier grupo topológico G es un espacio homogeneo, ya que las *traslaciones* traslaciontraslación $T_x : G \to G$ son homeomorfismos ($T_x(g) = g + x$). En particular, los espacios vectoriales topológicos son espacios homogeneos.

Por otra parte, un espacio vectorial topológico se dice *localmente convexo* espacioespaciolocalmente convexo si cada vecindad del elemento cero (y por lo tanto, de cualquier elemento) contiene una vecindad convexa V; es decir, si para cada elemento z existe una vecindad V de él, tal que: $tx + (1-t)y \in V$, para cada x, $y \in V$ y cada $t \in (0, 1)$.

Si Y es un espacio vectorial topológico, entonces Y es contráctil, pues la función que a cada $(y, t) \in Y \times I$ le asigna $ty \in Y$ es una contracción. De esto último, se infiere que $C_p(X, Y)$ es un espacio contráctil siempre que Y sea un espacio vectorial topológico. Es bien sabido que todo espacio contráctil es conexo por trayectorias, y por lo tanto, conexo (ver Ejercicio 1.2.3).

1.27. PROPOSICIÓN. *Para cualquier espacio X y cualquier espacio vectorial topológico Y, $C_p(X, Y)$ es un espacio homogeneo, contráctil y conexo por trayectorias.*

Esta proposición pone de manifiesto que al ser contráctiles los espacios $C_p(X)$, éstos son espacios "muy conexos". Se conocen ejemplos de espacios contráctiles que no son localmente conexos [**W**, pag. 225]; pero este no es el caso para los espacios $C_p(X)$. De hecho, estos espacios satisfacen una propiedad más fuerte que la conexidad local por trayectorias.

1.28. PROPOSICIÓN. *Para cualquier espacio X, $C_p(X)$ es localmente convexo.*

DEMOSTRACIÓN: Cualquier vecindad $W = W(\mathbf{0}; x_1, \ldots, x_n; \epsilon)$ es una vecindad convexa de la función constante cero $\mathbf{0} \in C_p(X)$. En efecto, si $f, g \in W$ y $0 < t < 1$, entonces

$$|tf(x_i) + (1-t)g(x_i)| \leq t\,|f(x_i)| + (1-t)\,|g(x_i)| < t\epsilon + (1-t)\epsilon = \epsilon.$$

□

(1). Demuestre que si Y es un álgebra topológica, entonces Y^X es también un álgebra topológica y que $C_p(X, Y)$ es un subálgebra topológica de Y^X.

(2). Demuestre que si $\{Y_\alpha : \alpha \in A\}$ es una familia de álgebras topológicas, entonces equipando a $Y = \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$ con la topología producto y definiendo operaciones coordenada a coordenada, se tiene que Y es también un álgebra topológica.

(3). Demuestre que cualquier espacio contráctil es un espacio conexo por trayectorias.

(4). Demuestre que X es conexo si y sólo si lo únicos elementos idempotentes en $C_p(X)$ son $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}$.

(5). Para cualquier espacio X, $C_p(X)$ tiene un orden (parcial) natural definiendo $f \leq g$ si y sólo si $f(x) \leq g(x)$ para cada $x \in X$. Demuestre que cualquier homomorfismo entre dos anillos $C(X)$ y $C(Y)$ preserva el orden.

(6). (a) Sea $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de espacios topológicos. Demuestre que para cualquier espacio topológico X, la función producto

$$H : C_\gamma(X, \prod_{\alpha\in I} Y_\alpha) \to \Pi_{\alpha\in I} C_\gamma(X, Y_\alpha)$$

es una función continua. Demuestre además que si $|I| < \aleph_0$, entonces H es un homeomorfismo.

(b) Sean Y un espacio topológico y $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de espacios topológicos. Demuestre que la función

$$H : C_\gamma(\Sigma_{\alpha\in I} X_\alpha, Y) \to \Pi_{\alpha\in I} C_\gamma(X_\alpha, Y)$$

dada por lo siguiente: $H(f)(\beta)(x) = f(i_\beta(x))$, donde

$$i_\beta : X_\beta \to \Sigma_{\alpha\in I} X_\alpha$$

es la función inclusión y $x \in X_\beta$, es una función continua. Demuestre además que H es un homeomorfismo si $|I| < \aleph_0$.

4. ¿Por qué Espacios Tychonoff?

Ian Stewart nos habla de un hombre curioso que desarrolló una teoría matemática de la brocha gorda de pintar. “Para plantear las ecuaciones de manera que pudiera resolverlas, tuvo que suponer que las cerdas eran planos semi-infinitos. La teoría no añadió nada nuevo al arte de la pintura de la brocha gorda y fue de escaso interés para los matemáticos, porque deliberadamente se escogieron ecuaciones que pudieran resolverse por métodos conocidos”.

El lector curioso (y el que no lo sea tanto) tal vez se habrá ya cuestionado... ¿Por qué la hipótesis general de elegir siempre espacios de Tychonoff?. Hasta este instante no se ha fundamentado la inclusión de esta hipótesis, y es en este momento que nace la idea de argumentar al respecto. En primer lugar la clase de espacios de

Tychonoff es una clase lo suficientemente grande como para contener a los espacios topológicos interesantes, y a la vez es lo suficientemente restrictiva como para no degenerar en una "teoría sin sentido" como lo es la teoría de la "brocha gorda de pintar".

Pero por otra parte, resulta que dado un espacio topológico X (no necesariamente, un espacio de Tychonoff) siempre existe un espacio Tychonoff Z tal que las álgebras topológicas $C_p(X)$ y $C_p(Z)$ son topológicamente homeomorfas. Esta sección está dedicada a mostrar esto último.

1.29. PROPOSICIÓN. *Para cualquier espacio topológico X y cualquier espacio Tychonoff Y, existe un espacio Tychonoff Z tal que $C_p(X,Y)$ es homeomorfo a $C_p(Z,Y)$. Además, si Y es un álgebra topológica, entonces $C_p(X,Y)$ es topológicamente isomorfa a $C_p(Z,Y)$.*

DEMOSTRACIÓN: Pongamos $x_1 \equiv x_2$ si y sólo si $f(x_1) = f(x_2)$ para cualquier $f \in C(X,Y)$. Claramente $\equiv$ es una relación de equivalencia.

Sea Z el conjunto de todas las clases de equivalencia módulo $\equiv$.

Denotemos por π a la proyección canónica de X en Z; es decir, para cada $x \in X$, $\pi(x)$ es la clase de equivalencia a la que pertence x.

Sea $\mathcal{F} = \left\{g \in Y^Z : g \circ \pi \in C(X,Y)\right\}$ y consideremos en Z la topología débil inducida por la familia $\mathcal{F}$; claramente $\mathcal{F} \subseteq C(Z,Y)$ y

$$\pi : X \to Z$$

es continua. Por otra parte, si $h \in C(Z,Y)$ entonces $h \circ \pi \in C(X,Y)$, luego $\mathcal{F} = C(Z,Y)$.

Sea $\pi^{\#} : C_p(Z,Y) \to C_p(X,Y)$ definida como $\pi^{\#}(h) = h \circ \pi$. Por lo anterior, tenemos que $\pi^{\#}$ es una función sobreyectiva. Aún más, si $g_1, g_2 \in C_p(Z,Y)$ con $g_1 \neq g_2$, entonces existe $z \in Z$ tal que $g_1(z) \neq g_2(z)$. Tomando $x \in z$, se obtiene $\pi^{\#}(g_1)(x) \neq \pi^{\#}(g_2)(x)$. Luego $\pi^{\#}(g_1) \neq \pi^{\#}(g_2)$, y resulta que $\pi^{\#}$ es biyectiva.

Ahora bien, dado que

$$\pi^{\#}(W(g; z_1, \ldots, z_n; B_1, \ldots, B_n)) = W(\pi^{\#}(g); x_1, \ldots, x_n; B_1, \ldots, B_n),$$

donde $\pi(x_i) = z_i$ para cada $i = 1, \ldots, n$, tenemos que $\pi^{\#}$ es una función continua y abierta. Por lo tanto, el espacio $C_p(Z,Y)$ es homeomorfo a $C_p(X,Y)$.

Por otro lado, es evidente que si $z_1 \neq z_2$ entonces existe $g \in C_p(Z,Y)$ de tal manera que $g(z_1) \neq g(z_2)$. Esto demuestra que Z es un espacio de Hausdorff.

Ahora bien, si τ la topología débil inducida por $\mathcal{F}$ sobre Z, y τ' la topología débil inducida sobre Z por $C(Z)$, mostraremos que Z es un espacio de Tychonoff demostrando que $\tau = \tau'$ [**?**, pag. 163].

Claramente se tiene que $\tau' \subseteq \tau$. Ahora, puesto que τ es la mínima topología que hace continua a cada función en $\mathcal{F}$, para ver que $\tau \subseteq \tau'$, basta demostrar que cada función $g : Z \to Y$ en $\mathcal{F}$ es continua con la topología τ'. Pero dado que Y es un espacio de Tychonoff, probar la continuidad de g se reduce a demostrar la continuidad de $f \circ g$ para cada $f \in C(Y)$. Sabemos que $C(Z, \tau) \subseteq C(Z, \tau')$, ya que τ' es la mínima topología que hace continua a cada función en $C(Z, \tau)$, y además, $f \circ g \in C(Z, \tau)$; es decir, $f \circ g : Z \to \mathbb{R}$ es continua con la topología τ', lo que se deseaba establecer. Así $\tau \subseteq \tau'$, y por lo tanto, Z es un espacio de Tychonoff.

Es fácil demostrar que $\pi^{\#}$ también es un isomorfismo entre álgebras en el caso de que Y sea un álgebra topológica. $\square$

La construcción del espacio Z que aparece en la demostración anterior es en cierto sentido (que se verá después de la Proposición 1.31), similar a la construcción de un espacio cociente. Es sabido que el cociente de un espacio completamente regular no necesariamente es un espacio de la misma clase; a continuación definiremos la topología $\mathbb{R}$-cociente que puede considerarse como un caso especial de la topología cociente, donde el espacio resultante es completamente regular.

1.30. Definición. topologiatopología$\mathbb{R}$-cociente Sea $f : X \to Y$ una función sobreyectiva de un espacio X sobre un conjunto Y. Sea $\mathcal{F} = \{g \in \mathbb{R}^Y : f^{\#}(g) \in C(X)\}$. La topología débil en Y inducida por la familia $\mathcal{F}$ se llama topología $\mathbb{R}$-cociente generada por la función f. A la función f se le llama función $\mathbb{R}$-cociente. funcionfunción$\mathbb{R}$-cociente

Puesto que la topología $\mathbb{R}$-cociente es inducida por una familia contenida en $\mathbb{R}^Y$, ésta resulta ser una topología completamente regular. Desgraciadamente, la topología $\mathbb{R}$-cociente no es en general de Tychonoff; por ejemplo, si $X = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\mathbb{R} \times \{1\})$ como subespacio de $\mathbb{R}^2$, y Y es el espacio cociente obtenido a partir de X al identificar cada punto de la forma $(x, 0)$ con $(x, 1)$ (donde $x \neq 0$), la topología $\mathbb{R}$-cociente generada por la proyección canónica no es Hausdorff. Una condición necesaria y suficiente para que la topología $\mathbb{R}$-cociente sea Tychonoff es que la familia $\mathcal{F}$ separe puntos del espacio Y. Esto último se satisface cuando, por ejemplo, al equipar al conjunto Y con la topología $\mathbb{R}$-cociente generada por la función f, la función f resulta ser una función abierta y cerrada. Usando la notación de la definición anterior, las siguientes afirmaciones se verifican.

1.31. Proposición. *Sea τ^* la topología $\mathbb{R}$-cociente sobre Y generada por la función f.*

(a) *La familia*

$$\mathcal{B} = \left\{g^{-1}(U) : g \in \mathcal{F},\ \ U \text{ es abierto en } \mathbb{R}\right\}$$

es una subbase para la topología τ^*.
(b) *Si τ es una topología arbitraria sobre Y tal que $f : X \to (Y, \tau)$ es continua, y para la cual $\mathcal{F} \subseteq C(Y, \tau)$, entonces $\mathcal{F} = C(Y, \tau)$.*
(c) *Para el espacio (Y, τ^*) se tiene que $\mathcal{F} = C(Y, \tau^*)$; más aún, τ^* es la única topología completamente regular sobre Y para la cual $\mathcal{F} = C(Y, \tau^*)$.*
(d) *τ^* es la más fuerte de todas las topologías completamente regulares sobre Y, relativas a las cuales f es continua.*

Demostración: (a) Se sigue de la definición de τ^*.
(b) Si $f : X \to (Y, \tau)$ es continua y $g \in C((Y, \tau))$, entonces $g \in \mathcal{Y}$ y además $g \circ f \in C_p(X)$. Por definicnión de la familia $\mathcal{F}$, $f \in \mathcal{F}$.
(c) Con facilidad se demuestra que $f : X \to (Y, \tau^*)$ es continua. Del inciso (b) se sigue que $\mathcal{F} = C(Y, \tau^*)$. Ahora, si τ es alguna topología completamente regular para la cual $\mathcal{F} = C(Y, \tau)$, entonces τ es la topología débil inducida por $\mathcal{F}$. Así $\tau = \tau^*$.
(d) Si $\tau \supseteq \tau^*$ es una topología completamente regular de tal manera que $f : X \to (Y, \tau)$ es continua, entonces claramente $\mathcal{F} \subseteq C(Y, \tau)$; aplicando (b) deducimos que $\mathcal{F} = C(Y, \tau)$. Sin embargo, las topologías τ y τ^* son completamente regular, por lo tanto $\tau = \tau^*$.
$\square$

La parte (d) de esta última proposición explica el porqué τ^* se llama topología $\mathbb{R}$-cociente. Recuérdese que la topología cociente es la más fuerte de las topologías (no necesariamente, completamente regulares) sobre Y relativas a la cual f es continua. Observe también que de la parte (c) resulta que en el caso de que $Y = \mathbb{R}$ y f sea la proyección canónica π de X en el espacio Z de la Proposición 1.29, la topología $\mathbb{R}$-cociente en Z generada por π es precisamente la topología de Z según la construcción de la demostración en la Proposición 1.29.

1.32. Definición. funcionfunciónfuncionalmente cerrada Una función $f : X \to Y$ de un espacio X sobre un espacio Y se llama funcionalmente cerrada si $f^{\#}(C(Y))$ es un subconjunto cerrado de $C_p(X)$

Este último concepto nos permite caracterizar a las funciones $\mathbb{R}$-cociente.

1.33. Proposición. *Una funcion f de un espacio X sobre un espacio completamente regular Y es una función $\mathbb{R}$-cociente si y sólo si f es funcionalmente cerrada.*

Demostración: Supongamos que $f : X \to Y$ es funcionalmente cerrada. Como el conjunto $C(Y)$ es denso en $\mathbb{R}^Y$ y $f^{\#}$ es una función continua, tenemos que $f^{\#}(C(Y))$ es denso en $f^{\#}(\mathbb{R}^Y)$ y además $f^{\#}(C(Y)) \subseteq C(X)$. Entonces

$$f^{\#}(C(Y)) \subseteq C(X) \cap f^{\#}(\mathbb{R}^Y) = f^{\#}(\mathcal{F})$$

y $f^{\#}(C(Y))$ es denso en $f^{\#}(\mathcal{F})$. Como $f^{\#}$ es funcionalmente cerrada, $f^{\#}(C(Y))$ es un subconjunto cerrado de $C_p(X)$; así $f^{\#}(C(Y)) = f^{\#}(\mathcal{F})$. Pero $f^{\#}$ es una función inyectiva; de donde, $C(Y) = \mathcal{F}$. De la Proposición 1.31(c), dado que Y es completamente regular, la topología de Y es la topología $\mathbb{R}$-cociente generada por f. Ahora si f es una función $\mathbb{R}$-cociente. Por la Proposición 1.31(c), $C(Y) = \mathcal{F}$; por lo tanto, $f^{\#}(C(Y)) = f^{\#}(\mathcal{F})$ es un subconjunto cerrado de $C_p(X)$, pues $f^{\#}(\mathbb{R}^Y)$ es cerrado en $\mathbb{R}^X$. □

Una de las principales líneas de estudio en la teoría de espacios de funciones consiste en la busqueda de relaciones entre propiedades del espacio $C_p(X,Y)$ y propiedades topológicas de los espacios soporte X y Y. Una manera de hallar dichas relaciones consiste en agregar alguna estructura adicional al espacio $C_p(X,Y)$ (ver por ejemplo el Ejercicio 1.2.4). Sabemos que en el caso en que Y es un grupo, un anillo, un espacio vectorial topológico, o más generalmente cuando Y es un álgebra topológica, el espacio $C_p(X,Y)$ tiene una estructura del mismo tipo. Estudiando las propiedades algebraicas de $C_p(X,Y)$ se pueden dar magnificos ejemplos de las relaciones que guardan las propiedades de $C_p(X,Y)$ y las de los espacios soporte. Sin embargo, cuando se pretende estudiar desde el punto de vista algebraico a los espacios de funciones, resulta muy conveniente fijar a Y como el espacio de los números reales. El cuestinamiento natural a esto último es el por qué el álgebra $C(X)$ es seleccionada como instrumento para el estudio de propiedades topológicas de X y por qué la exclusión del álgebra $C(X,\mathbb{C})$, o más generalmente, de álgebras $C(X,Y)$ donde Y puede ser cualquier álgebra topológica. Estas preguntas fueron planteadas y resueltas por E. Hewitt en el segundo apéndice de [**?**]. La respuesta de Hewitt hewittHewitt, E. es que la limitación a campos topológicos F ofrece considerables ventajas para la caracterización de las unidades del álgebra $C(X,F)$. Además, los campos topológicos usados deben ser conexos y localmente compactos para asegurar cantidades razonables de funciones continuas cuando se consideran espacios conexos y espacios compactos, respectivamente. Hewitt afirma que por un célebre teorema de Pontrjagin [**?**] estos requerimientos nos limitan a considerar a $\mathbb{R}$, a $\mathbb{C}$ o a $\mathbb{J}$ el campo (no conmutativo) de los cuaterniones y establece el siguiente teorema.

1.34. Teorema. *Sean X y Y espacios. Las siguientes propiedades son equivalentes:*
(a) $C(X, \mathbb{R})$ *es algebraicamente isomorfo a* $C(Y, \mathbb{R})$.
(b) $C(X, \mathbb{C})$ *es algebraicamente isomorfo a* $C(Y, \mathbb{C})$.
(c) $C(X, \mathbb{J})$ *es algebraicamente isomorfo a* $C(Y, \mathbb{J})$.

Una función f en $C(X, \mathbb{R})$ (respectivamente en $C(X, \mathbb{C})$, $C(X, \mathbb{J})$) se llama *acotada* funcionfunciónacotada si $f(X)$ es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$ (respectivamente de $\mathbb{C}$ considerado como $\mathbb{R}^2$ o de $\mathbb{J}$ considerado como $\mathbb{R}^4$); el conjunto de funciones acotadas de X en $\mathbb{R}$ se denota por $C^*(X, \mathbb{R})$ (respectivamente $C^*(X, \mathbb{C})$, $C^*(X, \mathbb{J})$). Estos conjuntos son cerrados bajo las operaciones algebraicas, lo que los convierte en subálgebras que poseen gran información acerca del espacio X.

1.35. Teorema. *Sean X, Y espacios. Las siguientes propiedades son equivalentes:*
(a) $C^*(X)$ *es algebraicamente isomorfo a* $C^*(Y)$.
(b) $C^*(X, \mathbb{C})$ *es algebraicamente isomorfo a* $C^*(Y, \mathbb{C})$.
(c) $C^*(X, \mathbb{J})$ *es algebraicamente isomorfo a* $C^*(Y, \mathbb{J})$.

(1). Demuestre que los isomorfismos entre dos álgebras $C(X)$ y $C(Y)$ envian funciones acotadas en funciones acotadas. Concluya que, X es pseudocompacto si, y sólo si, $C(X)$ es isomorfo como álgebra a $C^*(X)$.
(2). ¿Si $C(X)$ y $C(Y)$ son isomorfos como anillos, entonces son isomorfos como álgebras?.
(3). Si $f : X \to Y$ es una función sobreyectiva de un espacio X sobre un conjunto Y, pruebe que existe exactamente una topología completamente regular sobre Y para la cual $f^{\#}(C(Y))$ es un subconjunto cerrado de $C_p(X)$. ¿Cuál es esta topología?.
(4). Defina un espacio regular Z que contenga puntos a y b con la propiedad de que $f(a) = f(b)$ para cualquier $f \in C(X)$. A este tipo de puntos se les llama *puntos gemelos*puntospuntosgemelos.
  (a) Defina un espacio regular X tal que $|X| > 1$ y cualquier función continua $f : X \to \mathbb{R}$ es constante. (Sugerencia [**?**]: sean Z un espacio regular con puntos gemelos a y b; S un conjunto con $|S| = |Z|$ y sean $Y = \sum_{s \in S}(X \times \{s\})$, $A = \{(a, s) : s \in S\}$ y $B = \{(b, s) : s \in S\}$. Tome una biyección arbitraria $g : A \to Y \setminus (A \cup B)$ y considere el espacio cociente $X = Y/E$, donde E es la relacion de equivalencia correspondiendo a la descomposición de Y

consistente del conjunto B y los conjuntos con dos puntos $\{(a,s), g(a,s)\}$ para $s \in S$.)

(b) Para cualquier espacio Y que satisfaga el axioma de separación T_1, defina un espacio regular X tal que $|X| > 1$ y cualquier función continua $f : X \to Y$ es constante. (Sugerencia [**?**]: Defina primero un espacio regular Z con puntos a y b tales que $f(a) = f(b)$ para cualquier $f \in C(Z,Y)$ y entonces proceda como en la sugerencia de (a)).

(c) Deducir apartir de (b) que no existe un espacio Y, T_1, con la propiedad de que cualquier espacio regular es encajable en una potencia de Y.

(5). (a) Demuestre que si $f : X \to Y$ es una sobreyección continua, abierta y cerrada, y $g \in C^*(X)$, entonces $h : Y \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(y) = \sup\{g(x) : f(x) = y\}$$

es una función continua.

(b) Muestre que si $f : X \to Y$ es una sobreyección continua, abierta y cerrada, entonces la topología $\mathbb{R}$-cociente sobre Y generada por f es una topología de Tychonoff.

5. Propiedades del tipo compacidad en Espacios de Funciones Continuas, I

Dado que $\mathbb{R}$ es un subespacio cerrado de cualquier espacio $C_p(X)$ (Proposición 1.5), estos espacios de funciones continuas no pueden ser espacios numerablemente compactos; de donde, no son espacios compactos. Esta vicisitud ha generado una línea de estudio en la teoría de espacios de funciones continuas, que consiste en el análisis de propiedades “cercanas” a la compacidad en espacios $C_p(X,Y)$. Esta sección esta dedicada a un primer análisis en este sentido, así como al análisis de los subconjuntos compactos de estos espacios.

Una propiedad topológica $\mathcal{P}$ se dice *débilmente hereditaria* propiedadpropiedaddébilmente hereditraria si cualquier subespacio cerrado de un espacio que satisface $\mathcal{P}$ también satisface $\mathcal{P}$; esto es, una propiedad topológica es débilmente hereditaria si es hereditaria bajo subespacios cerrados. Claramente toda propiedad hereditaria es una propiedad débilmente hereditaria. La proposición siguiente es una consecuencia inmediata de la Proposición 1.5.

1.36. PROPOSICIÓN. *Sea $\mathcal{P}$ una propiedad débilmente hereditaria. Entonces, $C_p(X,Y)$ no satisface $\mathcal{P}$ si Y no satisface $\mathcal{P}$.*

Aunque esta proposición no nos capacita para responder a la pregunta: ¿Cuándo es $C_p(X,Y)$ un espacio compacto?, su importancia radica en que nos proporciona una condición necesaria para que los espacios de funciones continuas satisfagan propiedades topológicas débilmente hereditarias (como lo es la compacidad): *Para que $C_p(X,Y)$ satisfaga una propiedad topológica débilmente hereditaria, necesariamente Y debe satisfacer esta propiedad.* De esto se concluye que, para cualquier espacio topológico X, los espacios $C_p(X)$ y $C_p(X,\mathbb{R}^{\aleph_\alpha})$ no son espacios numerablemente compactos; y por lo cual, nunca son espacios compactos. Así mismo, los espacios $C_p(Z,T_\infty)$ no satisfacen el axioma de normalidad (T_∞ denota a la Plancha "borrada" de Tychonoff), ni los espacios $C_p(Z,\mathbb{P})$ pueden ser espacios localmente compactos ($\mathbb{P}$ es el espacio de los números irracionales); también se deduce de esta proposición que los espacios de funciones $C_p(Z,\mathbb{R}_{\mathcal{L}}\times\mathbb{R}_{\mathcal{L}})$ no son espacios de Lindelöf ($\mathbb{R}_{\mathcal{L}}$ denota a la línea de Sorgenfrey) y que los espacios $C_p(Z,\mathbb{R}^{\aleph_1})$ no pueden ser espacios metrizables.

Ciertamente nuestro análisis de la compacidad de los espacios de funciones $C_p(X,Y)$ es, hasta el momento, parcial. De hecho como veremos hasta después del Proposición 1.42, la respuesta general a esta cuestión acerca de compacidad esta estrechamente ligada a la respuesta a la pregunta: ¿Cuándo es $C_p(X,Y)$ un subespacio cerrado de Y^X?.

Ahora análizaremos a los espacios de funciones respecto a otra propiedad importante cercana a la compacidad. Un espacio X se dice *pseudocompacto* espacioespaciopseudocompacto si toda función continua de valores reales y con dominio X es acotada y X es *realcompacto* espacioespaciorealcompacto si es homeomorfo a un subespacio cerrado de algún producto de rectas reales. Es sabido que un espacio topológico es compacto si, y sólo si, es pseudocompacto y realcompacto [**E**, pag. 214]. Como los espacios de funciones $C_p(X)$ nunca son espacios compactos, es natural cuestionarse si pueden ser espacios pseudocompactos o espacios realcompactos. La siguiente proposición da respuesta a la primera de estas preguntas.

1.37. PROPOSICIÓN. *Para cualquier espacio X, $C_p(X)$ no es un espacio pseudocompacto.*

DEMOSTRACIÓN: Consideremos cualquier $x\in X$. Sea $e_x : C_p(X)\to\mathbb{R}$ la función dada por $e_x(f)=f(x)$ para cada $f\in C_p(X)$. Esta función es continua pues es la restricción de la proyección π_x al subespacio $C_p(X)$. Además es no acotada ya que, para cada $n\in\mathbb{N}$, $e_x(\mathbf{n})=n$. $\square$

Para el caso general sólo se tiene una condición necesaria para la pseudocompacidad de los espacios $C_p(X,Y)$. Si $C_p(X,Y)$ es un espacio pseudocompacto necesariamente Y debe ser pseudocompacto. En efecto, si Y no es pseudocompacto, entonces existe $f \in C_p(Y)$ no acotada. Sea $x_0 \in X$. La función

$$f \circ e_{x_0} : C_p(X,Y) \to \mathbb{R}$$

resulta ser continua y no acotada. Ahora, la condición “Y pseudocompacto” no es suficiente para implicar la pseudocompacidad del espacio $C_p(X,Y)$; Gillman gillmanGillman, L. y Jerison jerisonJerison, M. presentaron en 9.15 de [**?**] un ejemplo (debido a Novák novakNovák y Terasaka) terasakaTerasaka de un espacio pseudocompacto Y para el cual $Y \times Y$ no es pseudocompacto. Una línea importante de investigación en la teoría de los espacios $C_p(X)$ es la concerniente a cuándo alguna “semejanza” de $C_p(X)$ con $\mathbb{R}^X$ implica la discretez del espacio X, o alguna propiedad “semejante” a esta. Por ejemplo, si $C_p(X)$ coincide con $\mathbb{R}^X$ entonces X es un espacio discreto; también éste es el caso si $C_p(X)$ es un subespacio cerrado de $\mathbb{R}^X$. Estos hechos motivan preguntas acerca de la discretez del espacio dominio X cuando se supone “menos semejanza” del correspondiente espacio de funciones $C_p(X)$ respecto al producto topológico $\mathbb{R}^X$. En este contexto, las preguntas siguientes son interesantes: ¿Si $C_p(X)$ es del tipo F_σ en $\mathbb{R}^X$, es entonces X un espacio discreto?. Si suponemos que $C_p(X)$ es del tipo G_δ en $\mathbb{R}^X$, entonces ¿Es X un espacio discreto?. J. Dijkstra, T. Grillot, D. Lutzer y J. van Mill dijkstraDijkstra, J. grillotGrillot, T. lutzerLutzer, D. millMill, J. van demostraron en 1985 que la respuesta a ambas cuestiones es afirmativa. El resultado referente a cuándo es $C_p(X)$ un G_δ en $\mathbb{R}^X$ es útil para obtener la caracterización de la compacidad local para espacios de funciones de la forma $C_p(X)$.

1.38. Teorema ([**?**]). *Si $C_p(X)$ es un G_δ en $\mathbb{R}^X$, entonces X es un espacio discreto.*

Demostración: Sea $g \in \mathbb{R}^X$. Entonces T_g es un homeomorfismo y $Z = T_g(C_p(X))$ es un subespacio denso y G_δ de $\mathbb{R}^X$. Consecuentemente $Z \cap C_p(X)$ es la intersección de una familia numerable de subconjuntos densos y abiertos de $\mathbb{R}^X$. Sin embargo, $\mathbb{R}^X$ tiene la propiedad de Baire [**?**]; así $Z \cap C_p(X) \neq \emptyset$. Tomemos una función $h \in Z \cap C_p(X)$. Entonces $h \in Z$ implica, por la definición de Z, que $h = f + g$ para alguna $f \in C_p(X)$. Pero $h \in C_p(X)$, consecuentemente $g = h - f \in C_p(X)$; es decir, $C_p(X) = \mathbb{R}^X$. Por lo tanto, todas las funciones de X en $\mathbb{R}$ son continuas. Así X es discreto. □

1.39. COROLARIO. *$C_p(X)$ es localmente compacto si, y sólo si, X es finito.*

DEMOSTRACIÓN: Si $C_p(X)$ es localmente compacto, entonces es un subespacio abierto en $cl(C_p(X))$. Dado que $C_p(X)$ es denso en $\mathbb{R}^X$, lo anterior implica que $C_p(X)$ es abierto en $\mathbb{R}^X$ y así un G_δ. Por el teorema anterior, X es discreto. Entonces, $\mathbb{R}^X$ es un espacio localmente compacto. Por lo tanto, $|X| < \aleph_0$.

Claramente, si $|X| < \aleph_0$ entonces $C_p(X)$ es localmente compacto. □

La proposición que sigue generaliza el resultado anterior a espacios de funciones $C_p(X, Y)$, en el caso en que el espacio Y sea un grupo topológico.[2]

1.40. PROPOSICIÓN. *Sea Y un grupo topológico.*
(a) *Si para alguna vecindad $\widetilde{W} = \widetilde{W}(\mathbf{0}; x_1, \ldots, x_n; V)$ del elemento neutro $\mathbf{0} \in Y^X$ se tiene que $cl(\widetilde{W}) \cap C_p(X, Y)$ es un subconjunto cerrado en Y^X, entonces $C_p(X, Y)$ es cerrado en Y^X.*
(b) *Si además Y es conexo por trayectorias, entonces $C_p(X, Y) = Y^X$.*

DEMOSTRACIÓN: (a) Sean $f \in cl(C_p(X, Y))$ y $\{f_\lambda\}_{\lambda \in D}$ una red en $C_p(X, Y)$ tal que $f_\lambda \to f$ en Y^X. Puesto que $-f \in cl(C_p(X, Y))$, podemos elegir

$$g \in \widetilde{W}(-f; x_1, \ldots, x_n; U - f(x_1), \ldots, U - f(x_n)) \cap C_p(X, Y),$$

donde $U + U \subseteq V$. Existe $\lambda_0 \in D$ tal que para todo $\lambda \geq \lambda_0$ se tiene que

$$f_\lambda \in \widetilde{W}(f; x_1, \ldots, x_n; f(x_1) + U, \ldots, f(x_n) + U).$$

Además, dado que $g + f_\lambda \to g + f$ y $cl(\widetilde{W}) \cap C_p(X, Y)$ es cerrado en Y^X, obtenemos que $g + f \in cl(\widetilde{W}) \cap C_p(X, Y)$. Por lo tanto, $f = -g + (g + f)$ es un elemento de $C_p(X, Y)$.

1.41. COROLARIO. *Sea Y un grupo topológico conexo por trayectorias. Si $C_p(X, Y)$ es localmente compacto, entonces X es discreto y Y es localmente compacto. Más aún, si Y no es compacto, X es finito.*

Caracterizaremos ahora a los subconjuntos compactos de los espacios $C_p(X, Y)$, pera esto introduciremos la siguiente terminología: Una familia $F \subseteq C(X, Y)$ es *puntualmente acotado*

[2] Recuérdese que usamos notación aditiva, aunque los grupos no sean abelianos.

familiafamiliapuntualmente acotada en $x \in X$ si $\mathrm{cl}_Y\{f(x) : f \in F\}$ es compacto. Una familia es puntualmente acotada familiafamiliapuntualmente acotada si es puntualmente acotada en cada $x \in X$.

1.42. PROPOSICIÓN. *Sea Y un espacio Hausdorff.*
(a) *Un conjunto $K \subseteq C_p(X,Y)$ es compacto si, y sólo si, es cerrado en Y^X y puntualmente acotado.*
(b) *Si Y es compacto, entonces $K \subseteq C_p(X,Y)$ es compacto si, y sólo si, K es cerrado en Y^X.*

DEMOSTRACIÓN: (a) Si K es compacto en $C_p(X,Y)$ entonces K es un subconjunto compacto en Y^X. Como este último espacio es Hausdorff, K es cerrado en Y^X. Además, para cada $x \in X$, la función evaluación $e_x : K \to Y$ definida por $e_x(f) = f(x)$ es continua, por lo cual, $e_x(K) = \{f(x) : f \in K\} = cl_Y\{f(x) : f \in K\}$ es un compacto en Y. Si se satisfacen (i) y (ii), entonces el producto $M = \prod_{x\in X} cl\{f(x) : f \in K\}$ es un subespacio compacto de Y^X y contiene a K. Como K es cerrado en Y^X, lo es también en M; por lo tanto K es compacto.
(b) Es una consecuencia fácil de (a). □

Consideremos ahora a los espacios de funciones acotadas $C_p^*(X)$ y $C_p(X,[0,1])$. Como ya ha sido mencionado, estos espacios juegan un papel importante en la teoría de los espacios de funciones. Veremos a continuación algunas de las relaciones de éstos espacios con los espacios de funciones $C_p(X)$.

1.43. PROPOSICIÓN.
(a) *$C_p^*(X)$ es un subanillo topológico denso de $C_p(X)$.*
(b) *El espacio $C_p^*(X)$ es unión numerable de espacios homeomorfos a $C_p(X,[0,1])$.*
(c) *$C_p(X,[0,1])$ es un subespacio cerrado de $C_p^*(X)$.*
(d) *$C_p(X,[0,1])$ es compacto si y sólo si X es discreto.*
(e) *$C_p^*(X)$ no es compacto cualquiera que sea X, con X infinito.*
(f) *$C_p^*(X)$ es σ-compacto si y sólo si X es discreto.*

DEMOSTRACIÓN: (a) Para demostrar que $C_p^*(X)$ es denso en $C_p(X)$, tomemos $W = W(x_1,...,x_n; B_1,...,B_n)$ un abierto canónico en $C_p(X)$. Sean $y_1 \in B_1$, $y_2 \in B_2$,..., $y_n \in B_n$, y sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ tales que, para toda $1 \le i \le n$, $y_i \in [a,b]$. Como X es Tychonoff, existe una función continua $f : X \to [a,b]$ tal que $f(x_i) = y_i$, para cada i. Claramente, $f \in W \cap C_p^*(X)$.

(b) Para demostrar la afirmación, sólo obsérvese que

$$C_p^*(X) = \bigcup_{n\in\omega} C_p(X, [-n, n]),$$

y que cada $C_p(X, [-n, n])$ es homeomorfo a $C_p(X, [0, 1])$.

(c) Es una consecuencia de la Proposición 1.6.

(d) Si X es discreto, entonces $C_p(X, [0, 1]) = [0, 1]^X$ el cual es compacto. Además, por la Proposición 1.10, $C_p(X, [0, 1])$ es denso en $[0, 1]^X$. Por lo cual, si $C_p(X, [0, 1])$ es compacto, entonces $C_p(X, [0, 1]) = [0, 1]^X$. Es decir, cualquier función de X en $[0, 1]$ es continua. Esto sólo ocurre cuando X es discreto.

(e) Se sigue de (a).

(f) Ejercicio. □

Note que en la demostración del inciso (d) de la proposición anterior, sólo hicimos uso de la compacidad de $[0, 1]$ y de la densidad de $C_p(X, [0, 1])$ en $[0, 1]^X$. De tal forma que es factible generalizar: para un compacto K tal que $C_p(X, K)$ es denso en K^X se tiene que, $C_p(X, K)$ es compacto si y sólo si X es discreto.

Observe que la densidad de $C_p(X, K)$ en K^X es esencial en la afirmación anterior. En efecto, si $S = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, entonces $C_p(\mathbb{R}, S) \cong S$ es compacto, pero $\mathbb{R}$ no es discreto.

(1). Muestre por medio de ejemplos que un espacio $C_p(X, Y)$ puede no satisfecer las siguientes propiedades topológicas: ser hereditariamente normal, ser perfectamente normal, ser un espacio secuencial, ser un k-espacio, ser un espacio Fréchet-Urysohn, la propiedad de ser un espacio secuencialmente compacto, la de ser un espacio realcompacto, la de ser paracompacto, la propiedad de ser un espacio σ-compacto, ser colectivamente normal, ser Dieudonné-completo.

(2). Sea I el intervalo cerrado $[0, 1]$. ¿Cuál de los siguientes subespacios Y de $C_p(I, I)$ es compacto?
   (a) Sea $a, b \in I$ fijos y sea $Y = \{f \in C_p(I, I) : f(a) = b\}$.
   (b) $\{f \in C_p(I, I) : f$ es diferenciable y $|f'(x)| \leq 1\ \forall x \in I\}$.

(3). $C_p(X, S^1)$ (respectivamente $C_p(X, [0, 1])$) es localmente compacto si y sólo si X es discreto.

(4). Sea X un espacio infinito.
   (a) Demuestre que $\mathbb{R}$ se puede encajar como subespacio cerrado en cualquier subconjunto abierto de $C_p(X)$.
   (b) Sea $\mathcal{P}$ una propiedad hereditaria. Demuestre que $C_p(X)$ no satisface localmente la propiedad $\mathcal{P}$ si $\mathbb{R}$ no cumple esta propiedad.

(c) Caracterizar a los espacios Y tales que: para cualquier X, Y es homeomorfo a un subespacio cerrado de cualquier subconjunto abierto de $C_p(X,Y)$.

(5). [**MN**, pag. 94] $C_p(X)$ contiene un subconjunto denso del tipo G_δ de $\mathbb{R}^X$ si y sólo si X es discreto.

(6). $C_p(X)$ contiene un conjunto del tipo G_δ no vacío si y sólo si X es la suma de un espacio discreto y un espacio numerable.

(7). $C_p^*(X)$ es σ-pseudocompacto si y sólo si $C_p(X,I)$ es σ-pseudocompacto. (Sugerencia: para la función $\xi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$\xi(x)=\begin{cases} 0, & \text{si } x<0\\ x, & \text{si } 0\leq x\leq 1\\ 1, & \text{si } 1<x,\end{cases}$$

considere $\xi^{\#}$, y muestre que es una retracción.)

(8). Un familia $F\subseteq Y^X$ es *eventualmente continua* familiafamiliaeventualmente contiunua si para todo $x\in X$, cualquier $y\in Y$ y toda vecindad V de y, existen vecindades U de x y V' de y tal que $f(U)\subseteq V$ para cada $f\in F$ que satisface $f(x)\in V'$. Demuestre que:

(a) Cualquier elemento de una familia eventualmente continua es una función continua.

(b) Si $F\subseteq C(X,Y)$ es una familia eventualmente continua, entonces la clausura de F en Y^X es también una familia eventualmente continua, y por lo tanto es igual a la clausura de F en $C_p(X,Y)$.

(9). Sean X,Y y Z espacio. Definamos $E:Y^{X\times Z}\to(Y^Z)^X$ por $E(f)(x)(z)=f(x,z)$ para cada $f\in Y^{X\times Z}$. Muestre que:

(a) E es una biyección.

(b) $E(C(X\times Z,Y))\subseteq(C(Z,Y))^X$.

(c) Si Z es un espacio compacto, entonces para cada $f\in C(X\times Z,Y)$ se tiene que $E(f)(Z)$ es una familia eventualmente continua de $C(X,Y)$.

(d) Si $F\subseteq C_p(X,Y)$ es una familia eventualmente continua, entonces la evaluación canónica ψ_F asociada a la familia F es continua. Recíprocamente si $F\subseteq C_p(X,Y)$ es comacto y ψ_F es continua, entonces F es eventualmente continua.

(10). [**?**]Una familia F de $C(X,Y)$ es *simplemente eventualmente continua* familiafamiliasimplemente eventualmente continua si para cualquier $x\in X$, cada $y\in Y$, toda vecindad V de y y cualquier red $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ en F, existen vecindades U de x y V' de y tal que para cada $u\in U$ hay una subred (f_{λ_α}) de (f_λ) que tiene la propiedad de que o bien $(f_{\lambda_\alpha}(u))$ está eventualmente en V o $(f_{\lambda_\alpha}(u))$ no está eventualmente en V'. Demuestre que un subconjunto de $C_p(X,Y)$ es compacto si y sólo si es cerrado, puntualmente acotado y simplemente eventualmente continuo.

6. Topología de la Convergencia Uniforme

En las secciones anteriores iniciamos el análisis de los conjuntos $C(X,Y)$ considerados con la topología de la convergencia puntual. Existen otras topologías en $C(X,Y)$ que son de gran importancia; algunas de ellas han sido estudiadas con particular detenimiento por su pertinaz presencia en diversos marcos matemáticos. En esta sección dedicaremos nuestra atención a la *Topología de la Convergencia Uniforme* que en muchos sentidos contrasta con la topología de la convergencia puntual a causa de su finura. Por el momento nos limitaremos al caso en que Y es un espacio métrico, y en el Capítulo ... Sección ... veremos cómo es posible generalizar las ideas que aquí desarrollaremos.

Sea (Y,d) un espacio métrico. Para cada $f \in Y^X$ y cada $\epsilon > 0$, sea $B(f,\epsilon)$ la colección de funciones $g : X \to Y$ cuya gráfica $G_g \subset X \times Y$ no se separa de la gráfica de f en más de una cantidad $0 < \delta < \epsilon$; es decir,

$$B(f,\epsilon) = \{g \in C(X,Y) : \exists\ \delta < \epsilon, d(f(x),g(x)) < \delta\ \forall\ x \in X\}.$$

La colección $\mathcal{B} = \{B(f,\epsilon) : f \in Y^X,\ \epsilon > 0\}$ forma una base para una topología en Y^X. A esta topología en Y^X y a su restricción en $C(X,Y)$, la denotaremos, indistintamente, por τ_d, y designaremos por $C_d(X,Y)$ a la pareja $(C(X,Y),\tau_d)$. A τ_d le llamamos la *topología de la convergencia uniforme (con respecto a la métrica d)* TopologiaTopologíade la convergencia uniforme.

Como es usual, diremos que dos métricas en un espacio Y son *equivalentes* metrica(s)Métrica(s)equivalentes si inducen la misma topología; y una métrica d en un espacio (Y,τ) es *compatible*metrica(s)Métrica(s) compatible si la topología generada por d en Y coincide con la topología τ. Una métrica d en un espacio Y es *acotada*metrica(s)Métrica(s)acotada si existe un número natural n tal que $d(y,y') < n$ para cualesquiera dos puntos $y,y' \in Y$. Dada una métrica d en Y, la métrica $d^* : Y \times Y \to \mathbb{R}$ definida por $d^*(y,y') = \text{mín}\{1, d(y,y')\}$ es una métrica acotada en Y y equivalente a d. La métrica Euclideana en $\mathbb{R}$ la denotaremos como e.

Cuando tenemos un espacio métrico (Y, d) y d es acotada podemos definir la funcion

$$\widehat{d} : Y^X \times Y^X \to \mathbb{R}^+$$

como

$$\widehat{d}(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x)) : x \in X\} \tag{3}$$

Es posible probar que $\widehat{d}$ es una métrica en Y^X compatible con τ_d. Más aún, si d es una métrica en Y no necesariamente acotada, entonces $\widehat{d^*}$ también es una métrica en Y^X compatible con τ_d (Véase el Ejercicio...). Así obtenemos:

1.44. Proposición. *Si (Y, d) es un espacio métrico, entonces (Y^X, τ_d) (y por consiguiente $C_d(X, Y)$) es metrizable.*

Es importante notar que no toda métrica acotada y equivalente a una métrica d en un espacio (Y, d) induce la topología τ_d. Por ejemplo, consideremos $X = Y = \mathbb{R}$, y sea d la métrica definida por

$$d(x, y) = \mid \frac{x}{1 + |x|} - \frac{y}{1 + |y|} \mid .$$

La métrica d es equivalente a la métrica usual en $\mathbb{R}$ pero $\widehat{d}$ no induce la topología τ_e (véase el Ejercicio ...).

El siguiente resultado, cuya demostración dejamos al cuidado del lector, justifica el nombre de la topología τ_d.

1.45. Proposición. *Una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos en Y^X converge a f en (Y^X, τ_d) si y sólo si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f; es decir, para cada $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$ para todo $x \in X$ y para todo $n > n_0$.*

Ahora exhibiremos la relación que existe entre la convergencia puntual y la convergencia uniforme. Recordemos que en un espacio métrico (Z, d) una sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es d-Cauchy si para cada $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(z_n, z_m) < \epsilon$ cada vez que $n, m \geq n_0$.

1.46. Proposición. *Sea (Y, d) un espacio métrico. Una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en Y^X converge uniformemente a f si y sólo si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es $\widehat{d^*}$-Cauchy y converge puntualmente a f.*

Demostración: No es difícil probar la necesidad, de tal manera que nos abocaremos a probar la implicación contraria. Supongamos que $(f_n)_{n<\omega}$ es $\widehat{d^*}$-Cauchy y que converge puntualmente a f. Sea $\epsilon > 0$; por hipótesis, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\widehat{d^*}(f_n, f_m) < \epsilon/4$ si $n, m \geq n_0$. Sea $x \in X$ arbitrario. Como $(f_n)_{n<\omega}$ converge puntualmente a f, existe un entero positivo $n(x) \geq n_0$ tal que $d(f_n(x), f(x)) < \epsilon/4$ si $n \geq n(x)$. Por lo tanto, si $m \geq n_0$ se cumple que $d(f_m(x), f(x)) \leq d(f_m(x), f_{n(x)}(x)) + d(f_{n(x)}(x), f(x)) < \epsilon/2$. Es decir, $f_m \in B(f, \epsilon)$ si $m \geq n_0$. □

Una función f definida en un espacio X y con valores en un espacio métrico (Y, d) se dice que es *acotada*funcionfunciónacotada si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para cada dos puntos $x, y \in X$ se cumple que $d(f(x), f(y)) < n$. A la colección de funciones acotadas en $C(X, Y)$ con la topología de la convergencia uniforme lo denotaremos con el símbolo $C^*_d(X, Y)$. Naturalmente, si d es una métrica acotada en Y, entonces $C_d(X, Y) = C^*_d(X, Y)$.

Resulta que los subespacios $C_d(X, Y)$ y $C^*_d(X, Y)$ son cerrados en (Y^X, τ_d) como se prueba a continuación.

1.47. PROPOSICIÓN. *Si $(f_n)_{n<\omega}$ es una sucesión en $C_d(X, Y)$ (resp., en $C^*_d(X, Y)$) que converge en (Y^X, τ_d) a f, entonces f es continua (resp., es continua y acotada).*

DEMOSTRACIÓN: Sean $x_0 \in X$ y $\epsilon > 0$ arbitrarios. Como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(f(x), f_n(x)) < \epsilon/3$ para todo $n \geq n_0$ y para cualquier $x \in X$. Así, al tomar una vecindad V de x_0 que satisface $f_{n_0}(V) \subseteq B(f_{n_0}(x_0), \epsilon/3)$, obtenemos que, para cualquier $y \in V$,

$$d(f(x_0), f(y)) \leq$$

$$d(f(x_0), f_{n_0}(x_0)) + d(f_{n_0}(x_0), f_{n_0}(y)) + d(f_{n_0}(y), f(y)) < \epsilon.$$

Es decir, $f(V) \subseteq B(f(x_0), \epsilon)$.

Si además cada f_n es acotada, y $m \in \mathbb{N}$ es tal que $d(f(x), f_m(x)) < 1/2$ para toda $x \in X$, entonces para cada $z, y \in X$ se tiene que

$$d(f(z), f(y)) \leq d(f(z), f_m(z) + d(f_m(z), f_m(y)) + d(f_m(y), f(y)) \leq k+1$$

en donde k es un número natural mayor que la distancia entre cualquiera dos valores que tome f_m. Por lo cual concluimos que f es acotada. □

Si d es una métrica acotada en Y entonces la colección $\mathcal{C}$ de funciones constantes en $(Y^X, \widehat{d})$ es un espacio isométrico a (Y, d'). Además $\tau_p \subseteq \tau_d$, por lo cual $\mathcal{C}$ es cerrado en (Y^X, τ_d) y en $C_d(X, Y)$.

Como veremos a continuación, la completez del espacio $C_d(X, Y)$ depende de la misma propiedad en (Y, d).

1.48. PROPOSICIÓN. *Sea d una métrica acotada en Y. Entonces, los espacios $(C_d(X,Y),\widehat{d})$ y $(Y^X,\widehat{d})$ son completos si y sólo si (Y,d) es completo.*

DEMOSTRACIÓN: De lo expuesto en los párrafos anteriores es suficiente que probemos que $(Y^X,\widehat{d})$ es completo si Y lo es. Supongamos que $(f_n)_{n<\omega}$ es $\widehat{d}$-Cauchy en $(Y^X,\widehat{d})$. Entonces $(f_n(x))_{n<\omega}$ es d-Cauchy para cada $x \in X$. Por hipótesis, $(f_n(x))_{n<\omega}$ converge a un límite $f(x)$. Aplicando ahora la Proposición ... concluimos que f es el límite de $(f_n)_{n<\omega}$ en $(Y^X,\widehat{d})$. Por lo tanto $(Y^X,\widehat{d})$ es completo. $\square$

Ya mencionamos que $\tau_p \subseteq \tau_d$. Esta contensión es, en general, propia. Por ejemplo, consideremos en $C(\mathbb{N})$ al conjunto $A = \{f \in C(\mathbb{N}) : f(\mathbb{N}) \subseteq \{0,1\}$ y $|f^{-1}(0)| < \aleph_0\}$. Resulta que la función constante $\mathbf{0}$ es un elemento de $\mathrm{cl}_{C_p(\mathbb{N})}A$, pero $\mathbf{0} \notin \mathrm{cl}_{C_d(\mathbb{N})}A$, en donde d es la métrica usual en $\mathbb{R}$.

La discusión sobre el peso del espacio $C_d(X,Y)$ la pospondremos hasta el Capítulo... (se pondrán cosas como los teoremas 4.2.4 y 4.2.5 pag 54 del Mc Coy, y los ejercicios 42A(2) y (3) y 42D del Willard). Las condiciones sobre compacidad en la topología de la convergencia uniforme no son comunes y nos limitaremos a determinarlas en la siguiente sección para espacios X compactos. Pasamos ahora a analizar la relación entre las operaciones del álgebra $C(X)$ y la topología de la convergencia uniforme.

La suma en $\mathbb{R}$ es una función uniformemente continua ya que

$$|(r+t)-(s+u)| \leq |r-s| + |t-u|$$

para cualesquiera $r,s,t,u \in \mathbb{R}$; de tal forma que $(C_e(X),+)$ es un grupo topológico. Pero otro es el panorama cuando consideramos el producto; en efecto, si r,s,t,u son números reales suficientemente grandes en valor absoluto, entonces $|r\cdot t - s\cdot u|$ puede ser también un número grande, aún si $|r-s|$ y $|t-u|$ son cantidades pequeñas. Es decir, el producto en $(\mathbb{R},e)$ no es una función uniformemente continua. Por lo tanto el producto y el producto por escalares en $C_e(X)$ no son operaciones continuas. Sin embargo, $C_e(X)$ contiene una subalgebra topológica.

1.49. PROPOSICIÓN. *El espacio $C_e^*(X)$ es un álgebra topológica localmente convexa.*

DEMOSTRACIÓN: Para probar la continuidad de la suma, producto y producto por escalares en $C_e^*(X)$ basta con demostrar que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

y $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones en $C_e^*(X)$ que convergen uniformemente a $f, g \in C_e^*(X)$ respectivamente, y si $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales que converge a λ en $\mathbb{R}$, entonces $(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(f_n \cdot g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\lambda_n \cdot f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergen uniformemente a $f+g$, $f \cdot g$ y $\lambda \cdot f$ respectivamente. Verifiquemos sólo el caso del producto. Sea $\epsilon > 0$ y sean M y m dos números reales tales que $f(x) \leq M$ y $g(x) \leq m$ para todo $x \in X$. Tomemos ahora un número natural n_0 tal que $|g(x) - g_n(x)| < \epsilon/2M$ y $|f(x) - f_n(x)| < M\epsilon/(\epsilon + 2Mm)$ para toda $n \geq n_0$ y para toda $x \in X$. Resulta entonces que

$$|f(x) \cdot g(x) - g_n(x) \cdot f_n(x)| \leq$$

$$|f(x)| \cdot |g(x) - g_n(x)| + |g_n(x)| \cdot |f(x) - f_n(x)| < \epsilon$$

para toda $n \geq n_0$ y para toda $x \in X$.

Para terminar la demostración del Teorema basta probar que para $f_0 \equiv \mathbf{0} \in C_e^*(X)$ su vecindad abierta $B(f_0;\epsilon)$ es convexa cualquiera que sea ϵ. En efecto, sean f y g dos elementos en $B(f_0;\epsilon)$, y sea $0 \leq \lambda \leq 1$. Entonces,

$$\hat{e}(\lambda \cdot f + (1-\lambda) \cdot g, f_0) = \sup_{x\in X}|\lambda f(x) + (1-\lambda)g(x)| \leq$$

$$\lambda \cdot \sup_{x\in X}|f(x)| + (1-\lambda) \cdot \sup_{x\in X}|g(x)| < \epsilon.$$

$\square$

(1). Para un espacio métrico (Y, d), y una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $C(X, Y)$, se cumplen las siguientes proposiciones:
  - (a) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a $f \in C(X, Y)$ si y sólo si $\lim_{n\to\infty} \widehat{d^*}(f, f_n) = 0$, en donde $d^*(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$; es decir, si y sólo si $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ en $(C(X, Y), \widehat{d^*})$.
  - (b) Sea e la métrica usual en $\mathbb{R}$. Entonces, $C_e(X) \cong (C(X), \widehat{e^*})$.

(2). Sea d una métrica acotada en Y y sea $F \subseteq Y$. Denotamos por d' a la métrica d restringida a $F \times F$. Demuestre que:
  - (a) la topología en $C(X, F)$ (resp., en F^X) heredada de $C_d(X, Y)$ (resp., de (Y^X, τ_d)) coincide con $\tau_{d'}$;
  - (b) si F es un subespacio cerrado de (Y, d), entonces $C(X, F)$ es un subespacio cerrado de $C_d(X, Y)$;
  - (c) si (F, d') es un subespacio completo de (Y, d), entonces la pareja $(C_{d'}(X, F), \widehat{d'})$ es un subespacio completo de $C_d(X, Y)$.

(3).
  - (a) Demuestre que para cualquier espacio X y cualquier espacio métrico (Y, d), la topología de la convergencia puntual

en Y^X está contenida en la topología de la convergencia uniforme.

(b) Sea (Y, d) un espacio métrico en donde d es una métrica acotada. Demuestre que $C_d(X, Y)$ contiene un subespacio cerrado isométrico a (Y, d).

(4). Demuestre que un espacio métrico (X, d) puede ser isométricamente encajado en $C_e^*(X)$. Concluya que $C^*(X)$ contiene una completación métrica de X. (Sugerencia. A cada $a \in X$ considere la función $f_a \in C^*(X)$ dada por $f_a(x) = d(x, a) - d(x, x_0)$, en donde x_0 es un punto fijo en X).

(5). Si e es la métrica usual en $\mathbb{R}$, entonces $\mathbf{0} \in \mathrm{cl}_{C_p(\mathbb{N})}A$ y $\mathbf{0} \notin \mathrm{cl}_{C_e(\mathbb{N})}A$, en donde

$$A = \{f \in C(\mathbb{N}) : f(\mathbb{N}) \subseteq \{0, 1\}, |f^{-1}(0)| < \aleph_0\}$$

.

(6). Sea $(Y,\ d)$ un espacio métrico. Si ρ es una métrica equivalente a la métrica d en Y, entonces no necesariamente se cumple que $C_\rho(X, Y) \cong C_d(X, Y)$. En efecto,

(a) sean ρ_1 y ρ_2 las métricas en $\mathbb{R}$ definidas por:

$$\rho_1(x, y) = \min\{1, |x - y|\} \text{y} \rho_2(x, y) = \rho(h(x), h(y)),$$

en donde $h : \mathbb{R} \to S^1 \backslash \{(0, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ es un homeomorfismo y ρ es la métrica usual en $\mathbb{R}^2$. Verifique que ρ_1 y ρ_2 son métricas acotadas y equivalentes en $\mathbb{R}$, y que $C_{\rho_1}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ no es homeomorfo a $C_{\rho_2}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ ([**E**, pag.262]);

(b) sea $d(x, y) =| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}$. Demuestra que $C_d(\mathbb{R}) \ncong C_e(\mathbb{R})$, y que d y e son equivalentes.

(7). Dos métricas d_1 y d_2 en un espacio Y son *uniformemente equivalentes* si para cualquier $\epsilon > 0$ existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que para cualesquiera $y, y' \in Y$ se cumple que $d_1(y, y') < \epsilon$ si $d_2(y, y') < \delta_2$ y $d_2(y, y') < \epsilon$ si $d_1(y, y') < \delta_1$.

(a) Observe que dos métricas uniformemente equivalentes son equivalentes, y que existen métricas equivalentes que no son uniformemente equivalentes.

(b) Si d_1 y d_2 son dos métricas uniformemente equivalentes en Y, entonces $\widehat{d_1^*}$ y $\widehat{d_2^*}$ son uniformemente equivalentes en $C(X, Y)$ cualquiera que sea X, y $C_{d_1}(X, Y) \cong C_{d_2}(X, Y)$.

(8). (a) Si X es un espacio compacto y d, ρ son métricas equivalentes en Y, entonces $\hat{d}$ y $\hat{\rho}$ inducen la misma topología en $C(X, Y)$.

(b) Si d es una métrica equivalente a la métrica usual e en $\mathbb{R}$, entonces $C_d^*(X) \cong C_e^*(X)$.

(9).

Sea (Y, d) un espacio métrico. Entonces,

(a) $C_d(X, Y)$ es un espacio discreto si y sólo si Y es discreto.
(b) Si X es un espacio finito, entonces $C_d(X, Y) = C_p(X, Y)$.
(c) Si Y es un espacio que contiene una trayectoria no trivial, y además, $C_d(X, Y) = C_p(X, Y)$, entonces X es finito.
(d) Suponga que Y es un espacio que contiene una trayectoria no trivial y que $C_d(X, Y) \cong C_p(X, Y)$, ¿Que se puede decir acerca del espacio X? ¿Es X un espacio finito?

(10). Sea d una métrica en Y. Entonces, la función evaluación $e : C_d(X, Y) \times X \to Y$ definida por $e(f, x) = f(x)$ es continua.

7. Topología Compacto-abierta

Sean X y Y dos espacios topológicos. Para cada $K \subseteq X$ y $V \subseteq Y$, denotaremos por

$$[K, V]$$

a la colección de funciones $f : X \to Y$ tales que $f(K)$ está contenido en V. La colección de conjuntos $[K, V]$ en donde $K \subseteq X$ es compacto y V es un subconjunto abierto de Y genera, como subbase, una topología τ_k en Y^X y en $C(X, Y)$. Esta topología es llamada *topología compacto-abierta*TopologiaTopologíacompacto-abierta. El espacio $C(X, Y)$ con esta topología es denotado por $C_k(X, Y)$. Obsérvese que la topología τ_p ha sido construida considerando como subbase a los elementos $[K, V]$ de la subbase de τ_k para los cuales K es finito, por lo cual, la topología τ_p está contenida en τ_k. En general $\tau_p \neq \tau_k$ como veremos más adelante. En la próxima sección se generalizará esta técnica para generar topologías en $C(X, Y)$.

La relación entre la topología compacto-abierta y la topología de la convergencia uniforme se muestra en la siguiente proposición; primero veamos algunos conceptos. Sea $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ una red en $C(X, Y)$, en donde (Y, d) es un espacio métrico; decimos que $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *converge uniformemente* a $f \in C(X, Y)$ en un subconjunto K de X si para cada $\epsilon > 0$ existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $d(f(x), f_\lambda(x)) < \epsilon$ para todo $\lambda > \lambda_0$ y para todo $x \in K$. Por otro lado, si $F \subseteq Y$ y $\epsilon > 0$, denotaremos por $B(F, \epsilon)$ a la colección de puntos $y \in Y$ cuya distancia a algún punto en F es menor que ϵ.

1.50. PROPOSICIÓN. *Sea (Y, d) un espacio métrico. La topología compacto-abierta en $C(X, Y)$ es la topología de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos compactos de X; es decir, una red $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ converge a f en $C_k(X, Y)$ si y sólo si $(f_\lambda|_K)_{\lambda \in \Lambda}$ converge uniformemente* *a $f|_K$ para cada compacto $K \subseteq X$. En particular, si X es un espacio compacto se cumple que $C_k(X,Y) \cong C_d(X,Y)$*

Demostración: Sea K un subconjunto compacto de X y sea $\epsilon > 0$. Como f es continua, $f(K)$ es compacto; por lo cual existe una colección finita $x_1, ..., x_n \in K$ tal que $f(K) \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq n} B(f(x_i), \epsilon/4)$. Sea $K_i = f^{-1}(clB(f(x_i), \epsilon/4)) \cap K$. El conjunto

$$A = \bigcap_{1 \leq i \leq n} [K_i, B(f(x_i),$$

$\epsilon/2)] es un básico canónico en \mathrm{C}_k(X,Y)$ que contiene a f. Por hipótesis, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que si $\lambda \geq \lambda_0$ entonces $f_\lambda \in A$. Ahora bien, si $x \in K_i$ y $\lambda \geq \lambda_0$, entonces

$$d(f_\lambda(x), f(x)) \leq d(f_\lambda(x), f(x_i)) + d(f(x_i), f(x)) \leq \epsilon/2 + \epsilon/4 < \epsilon.$$

Tomemos ahora un básico canónico $W = [K_1, U_1] \cap \cdots \cap [K_n, U_n]$ en $C_k(X,Y)$ que contiene a f. Para alguna $\epsilon > 0$, $B(f(K_i), \epsilon) \subseteq U_i$ para cada $1 \leq i \leq n$. Por hipótesis, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que si $\lambda \geq \lambda_0$, entonces $d(f_\lambda(x), f(x)) < \epsilon$ para cualesquiera $1 \leq i \leq n$ y $x \in K_i$. Por lo tanto, $f_\lambda(K_i) \subseteq U_i$ si $1 \leq i \leq n$ y $\lambda \geq \lambda_0$. Es decir, $f_\lambda \in W$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. □

Veamos ahora bajo que condiciones en X la topología compacto abierta coincide con la topología de la convergencia puntual.

1.51. Proposición.
Sea Y un espacio que contiene una trayectoria no trivial. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) $C_p(X,Y) = C_k(X,Y)$.
(b) *Cada compacto en X es finito.*
(c) *Para cualquier $U \subseteq X$ y cualquier subconjunto compacto K de X, $K \cap U$ es abierto en K.*

En particular, $C_p(X,Y) = C_k(X,Y)$ si X es discreto.

Demostración: Supongamos que $C_p(X,Y) = C_k(X,Y)$. Sea $t : [0,1] \to Y$ una función continua tal que $t(0) \neq t(1)$, y sea $V = Y \setminus \{t(1)\}$. Para cualquier compacto $K \subseteq X$, $\mathbf{t(0)} \in [K,V]$; podemos ahora encontrar un conjunto finito $x_1, ..., x_n$ de elementos en X, y abiertos $V_1, ..., V_n$ en Y tales que $\mathbf{t(0)} \in W = [x_1, V_1] \cap ... \cap [x_n, V_n] \subseteq [K,V]$. Se afirma que $K \subseteq F = \{x_1, ..., x_n\}$. En efecto, si $x \in K \setminus F$ entonces, como X es completamente regular, existe $\phi \in C(X,[0,1])$ tal que $\phi(F) = \{0\}$ y $\phi(x) = 1$. Entonces $t \circ \phi \in W \setminus [K,V]$, lo cual es una contradicción.

La equivalencia de las proposiciones (b) y (c) es fácil de establecer; así que dejamos la demostración de esta equivalencia y la de la implicación "(a) implica (b)", como ejercicios al lector. □

Dado que cualquier espacio X considerado aquí es un espacio Tychonoff, cada vez que tomemos una colección finita de subconjuntos compactos $K_1, ..., K_n$ de X y una colección $\{r_1, ..., r_n\}$ de puntos en $\mathbb{R}$, es posible encontrar una función continua $\phi : X \to \mathbb{R}$ tal que $\phi(K_i) = \{r_i\}$ para cada $1 \leq i \leq n$. Por lo tanto, y siguiendo una demostración análoga a la dada para el Teorema ..., obtenemos que el espacio $C_k(X, Y)$ es denso en (Y^X, τ_k) cuando Y es un espacio conexo por trayectorias.

Ahora nos ocuparemos en determinar cómo son los subconjuntos compactos en $C_k(X, Y)$ demostrando el famoso Teorema de Arzelá-Ascoli. Para esto introducimos el concepto de *equicontinuidad*.

1.52. Definición. Sea (Y, d) un espacio métrico. Un conjunto $\mathcal{F} \subseteq C(X, Y)$ es *equicontinuo en* FamiliaFamiliaequicontinua $x \in X$ si para cada $\epsilon > 0$ existe una vecindad U de x tal que $d(f(x), f(y)) < \epsilon$ para todo $y \in U$ y para todo $f \in \mathcal{F}$. Además, $\mathcal{F}$ es *equicontinuo en* $A \subseteq X$ si $\mathcal{F}$ es equicontinuo en cada $x \in A$.

1.53. Lema. *Si $\mathcal{F} \subseteq C(X, Y)$ es equicontinuo en $A \subseteq X$, entonces la cerradura de $\mathcal{F}$ en $C_p(X, Y)$ es también equicontinuo en A.*

Demostración: Sea $f \in cl_{C_p(X,Y)}\mathcal{F}$, y sea $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ una red en $\mathcal{F}$ que converge puntualmente a f. Para $x \in A$ y $\epsilon > 0$, existe un abierto U que contiene a x tal que $d(g(x), g(y)) < \epsilon/3$ para todo $y \in U$ y todo $g \in \mathcal{F}$. En particular, $d(f_\lambda(x), f_\lambda(y)) < \epsilon/3$ para toda λ y toda $y \in U$. Ahora bien, eligiendo una $\lambda \in \Lambda$ conveniente, obtenemos

$$d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f_\lambda(x)) + d(f_\lambda(x), f_\lambda(y)) + d(f_\lambda(y), f(y)) < \epsilon.$$

□

1.54. Proposición. *Sea (Y, d) un espacio métrico. Si $\mathcal{F} \subseteq C(X, Y)$ es equicontinuo, entonces $(\mathcal{F}, \tau_p) \cong (\mathcal{F}, \tau_k)$.*

Demostración: Es suficiente demostrar que cualquier red $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ en $\mathcal{F}$ que converge puntualmente a $f \in \mathcal{F}$, converge a f en $(\mathcal{F}, \tau_k)$. Sea K un subconjunto compacto de X y sea U un subconjunto abierto en Y. Supongamos que $f \in [K, U]$. Para cada $x \in K$, $f_\lambda(x) \to f(x)$, así que para algún $\lambda_x \in \Lambda$, $f_\lambda(x) \in U$ si $\lambda \geq \lambda_x$. Como $f(K)$ es un subconjunto compacto de U, existe $\epsilon > 0$ tal que todo punto que se encuentre a una distancia menor que ϵ de algún elemento de $f(K)$ pertenece a U. Por equicontinuidad, cada $x \in K$ tiene una vecindad U_x tal que $f_\lambda(U_x) \subseteq B(f_\lambda(x), \epsilon)$ para toda λ. Por lo cual, si

$\lambda \geq \lambda_x$, $f_\lambda(U_x) \subseteq \bigcup_{z\in K} B(f(z),\epsilon) \subseteq U$. Como K es compacto podemos encontrar puntos $x_1, ..., x_n \in K$ tales que $K \subseteq \bigcup_{1\leq i\leq n} U_{x_i}$. Sea $\lambda_0 \geq \lambda_{x_1}, ..., \lambda_{x_n}$. Entonces, para cada $x \in K$, $x \in U_{x_i}$ para alguna $i \in \{1, 2, ..., n\}$; así, para $\lambda \geq \lambda_0$, $f_\lambda(x) \in f_\lambda(U_{x_i}) \subseteq U$. Por lo tanto, $f_\lambda \in [K, U]$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Es decir, $f_\lambda \to f$ en $(\mathcal{F}, \tau_k)$. ■

Un espacio X es un k-*espacio*K-espacio$k$-espacio si su topología está determinada por sus subconjuntos compactos, esto es, $A \subseteq X$ es abierto si y sólo si $A \cap K$ es abierto en K para cada compacto K contenido en X. Cualquier espacio localmente compacto y cualquier espacio primero numerable es un k-espacio.

1.55. Teorema **(Arzelá-Ascoli)**. *TeoremaTeorema de Arzelá-Ascoli Sean X un k-espacio, (Y, d) un espacio métrico y $\mathcal{F} \subseteq C(X, Y)$. El conjunto $\mathcal{F}$ es compacto en $C_k(X, Y)$ si y sólo si*

(a) *$\mathcal{F}$ es cerrado en (Y^X, τ_p),*
(b) *$\mathrm{cl}_Y\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ es compacto para cualquier $x \in X$, y*
(c) *$\mathcal{F}$ es equicontinuo en cada subconjunto compacto de X.*

Demostración: Si $\mathcal{F}$ con la topología compacto-abierta es compacto, entonces el resultado (a) en el Ejercicio **??**, implica que se cumplen (a) y (b) del enunciado. Ahora sea K un subespacio compacto de X, y sea $\mathcal{F}_K = \{f|_K : f \in \mathcal{F}\}$. No es difícil demostrar que $\mathcal{F}_K$ es compacto en $C_k(K, Y)$. Vamos ahora a demostrar que $\mathcal{F}_K$ es equicontinuo.

Sea $x \in K$ y $\epsilon > 0$. Como K es regular, para cada $f \in \mathcal{F}_K$ existe una vecindad U_f de x para la cual $f(\mathrm{cl}_X U_f) \subseteq B(f(x), \epsilon/2)$. Por la compacidad de $\mathcal{F}_K$ podemos encontrar $f_1, ..., f_n$ tales que la colección de abiertos $[\mathrm{cl}_X U_{f_1}, B(f_1(x), \epsilon/2)], ..., [\mathrm{cl}_X U_{f_n}, B(f_n(x), \epsilon/2)]$ cubre a $\mathcal{F}_K$. Sea $U = U_{f_1} \cap ... \cap U_{f_n}$. Así, si $f \in \mathcal{F}_K$, entonces $f(U) \subseteq f(cl_X U_{f_i}) \subseteq B(f_i(x), \epsilon/2)$ para alguna i. Por lo tanto, $f(U) \subseteq B(f(x), \epsilon)$, es decir $\mathcal{F}_K$ es equicontinua en x.

Para demostrar la suficiencia basta probar que la topología puntual y la compacto-abierta coinciden en $\mathcal{F}$. Esto es cierto para $\mathcal{F}_K$ si $K \subseteq X$ es compacto (véase el ejercicio **??**). Ahora, si $[K, U]$ es un subbásico de τ_k, entonces $[K, U]_{\mathcal{F}_K} = \{f|_K : f \in [K, U]\} \in \tau_p$. Pero la función $r : C_p(X, Y) \to C_p(K, Y)$ definida por $r(f) = f|_K$ es continua. Por lo tanto $[K, U] \in \tau_p$. ■

Por el teorema anterior y lo tratado en la Sección ... obtenemos que, en el caso en que Y es conexo por trayectorias, $C_k(X, Y)$ es compacto si y sólo si X es discreto y Y es compacto (véase la Proposición ...).

Además, puesto que $\tau_p \subseteq \tau_k$, $C_k(X)$ no es pseudocompacto cualquiera que sea X.

Es oportuno mencionar aquí que la colección

$$\mathcal{F} = \{f_n : [0,1] \to \mathbb{R} : f_n(x) = nx(1-x)^n\}$$

es un subconjunto compacto de $C_p([0,1])$ pero no es compacto cuando se le considera como subespacio de $C_k([0,1])$ (Ejercicio...).

1.56. PROPOSICIÓN. *Si Y es un álgebra topológica sobre $\mathbb{R}$, entonces $C_k(X,Y)$ es un álgebra topológica sobre $\mathbb{R}$ localmente convexa, si se le considera con las operaciones suma, producto y producto por escalares definidas punto a punto.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $s : C_k(X,Y) \times C_k(X,Y) \to C_k(X,Y)$ la función $s(f,g) = f+g$, y $[K,W]$ un subbásico que contiene a $f+g$. Como la suma en $\mathbb{R}$ es continua, podemos encontrar para cada $x \in K$ vecindades $U(f(x))$ y $V(g(x))$ de $f(x)$ y $g(x)$ respectivamente tales que $U(f(x)) + V(g(x)) \subseteq W$, y, como f y g son continuas, existe una vecindad $U(x)$ de x tal que $f(U(x)) \subseteq U(f(x))$ y $g(U(x)) \subseteq V(g(x))$. Para cada $x \in K$ sea $V(x)$ una vecindad de x tal que $cl_X V(x) \subseteq U(x)$. Como K es compacto, podemos escoger puntos $x_1, ..., x_n \in K$ tales que $K \subseteq \bigcup_{1\leq i\leq n} V(x_i)$. Sea $K_i = K \cap cl_X V(x_i)$. Entonces $A = \bigcap_{1\leq i\leq n}[K_i, Uf(x_i))]$ y $B = \bigcap_{1\leq i\leq n}[K_i, V(g(x_i))]$ son vecindades de f y g respectivamente que satisfacen $A + B \subseteq [K,W]$. Con lo cual concluimos que la funció suma s es continua. La continuidad del producto y el producto por escalares se prueba de manera análoga.

Probemos ahora que $C_k(X,Y)$ es localmente convexo.

Como la colección de intervalos abiertos (a,b) es una base en $\mathbb{R}$, entonces la colección de conjuntos de la forma $[K,(a,b)]$ en donde K es un subconjunto compacto de X, forma una subbase de $C_k(X,Y)$. Como la intersección de una colección finita de conjuntos convexos es también convexo, y puesto que $[K,(a,b)]$ es convexo, entonces $C_k(X,Y)$ es localmente convexo. $\square$

Las Proposiciones 1.24 y 1.25 permanecen ciertas si consideramos la topología compacto-abierta en los espacios de funciones involucrados. La demostración de este enunciado puede obtenerse considerando las funciones naturales definidas en las demostraciones de las proposiciones ya mencionadas. En forma explícita:

1.57. PROPOSICIÓN. *Sea $Y = \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha$, entonces:*

(a) *El espacio $C_k(X,Y)$ es homeomorfo al espacio $\prod_{\alpha\in A} C_p(X,Y_\alpha)$.*
(b) *Si además cada Y_α es un álgebra topológica, entonces $C_k(X,Y)$ es topológicamente isomorfa a $\prod_{\alpha\in A} C_k(X,Y_\alpha)$.*

1.58. Proposición. *Sea $X = \sum_{\alpha\in A} X_\alpha$ la suma topológica libre de los espacios X_α, y sea Y un espacio arbitrario. Entonces:*

(a) *El espacio $C_k(X,Y)$ es homeomorfo a $\prod_{\alpha\in A} C_k(X_\alpha, Y)$.*
(b) *Si Y es un álgebra topológica, entonces $C_k(X,Y)$ es topológicamente isomorfa a $\prod_{\alpha\in A} C_k(X_\alpha, Y)$.*

En la Sección 1 de este capítulo se discutieron condiciones bajo las cuales espacios de la forma $C_p(X,Y)$ son metrizables, y se obtuvieron resultados sobre su caracter. Haremos ahora este análisis para el caso de $C_k(X,Y)$. Es pertinente recordar que $C_k(X,Y)$ es metrizable si X es compacto y Y es metrizable (véase el Teorema...).

1.59. Definición. (1). Una colección $\mathcal{K}$ de subconjuntos compactos de un espacio X es una *k-cubierta*k-cubierta$k$-cubierta si cada subconjunto compacto de X está contenido en algún elemento de $\mathcal{K}$.

(2). Para cada espacio X definimos $\mathrm{ka}(X) = \min\{|\mathcal{K}| : \mathcal{K}$ es una k-cubierta de $X\}$.

(3). Un espacio X es *hemicompacto*hemicompactohemicompacto si $\mathrm{ka}(X) = \aleph_0$.

1.60. Proposición. *Sea $f \in C(X,Z)$. Entonces $f^\# : C_k(Z,Y) \to C_k(X,Y)$ es continua, y es un encaje si $\mathcal{K} = \{f(K) : K$ es un subconjunto compacto de $X\}$ es una k-cubierta en Z.*

Demostración: No es difícil demostrar que $f^\#$ es continua. Ahora bien, como $\mathcal{K}$ es una k-cubierta de Z, f es una función suprayectiva; por lo cual $f^\#$ es inyectiva. Demostremos pues que $f^\#$ es abierta en su imagen. Bastará para nuestros fines considerar sólo abiertos subbásicos en $C_k(Z,Y)$. Sea $g \in [K,V]$, en donde K es un subconjunto compacto de Z y V es abierto en Y. Por hipótesis, existe un subconjunto compacto W de X tal que $K \subseteq f(W)$. El compacto $M = W \cap f^{-1}(K)$ satisface: $K \subseteq f(M) \subseteq g^{-1}(V)$. Por lo tanto

$$f^\#(g) \in [M,V] \cap f^\#(C_k(Z,Y)) \subseteq f^\#([K,V]).$$

□

1.61. Teorema. (1). *Para cualquier espacio X, si Y contiene una trayectoria no trivial, entonces* $\mathrm{ka}(X) \le \chi(C_k(X,Y))$.

(2). *Si Y es metrizable, entonces $\chi(C_k(X,Y)) \le \mathrm{ka}(X)$.*

Demostración: (1) Sean $y_0, y_1 \in Y$ con $y_0 \neq y_1$, y sea $\phi : [0,1] \to Y$ una función continua tal que $\phi(0) = y_0$ y $\phi(1) = y_1$. Sea A una vecindad de y_0 que no contiene a y_1. Consideremos la función constante y_0, f_0. Si $[K_1, B_1] \cap ... \cap [K_n, B_n]$ es un abierto canónico que

contiene a f_0, entonces $f_0 \in [K_1 \cup ... \cup K_n, B_1 \cap ... \cap B_n]$; es decir, podemos considerar una base local $\mathcal{V}$ de f_0 de cardinalidad $\leq \chi C_k(X)$ cuyos elementos son de la forma $[K, B]$ con K subespacio compacto de X y B abierto en Y; digamos, $\mathcal{V} = \{[K_t, B_t] : t \in T\}$ y $|T| \leq \chi(C_k(X))$. Resulta que la colección $\mathcal{K} = \{K_t : t \in T\}$ es una k-cubierta de X. En efecto, supongamos lo contrario, esto es, sea K tal que para cada $t \in T$, $K \setminus K_t \neq \emptyset$. Puesto que $\mathcal{V}$ es una base local de f_0, existe $s \in T$ tal que $[K_s, B_s] \subseteq [K, A]$. Sea $a \in K \setminus K_s$ y sea $f \in C(X)$ tal que $f(a) = 1$ y $f[K_s] = \{0\}$. Tenemos entonces que $\phi \circ f \in [K_s, B_s] \setminus [K, A]$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\mathcal{K}$ es una k-cubierta de X, lo que significa que $ka(X) \leq \chi(C_k(X))$.
(2) Sea $\{K_t : t \in T\}$ una colección de subconjuntos compactos de X la cual forma una k-cubierta y tal que $|T| \leq ka(X)$. Sea $Z = \Sigma_{t \in T} K_t$ la suma topológica libre de los espacios K_t, y sea $p : Z \to X$ la proyección natural. Entonces $p^{\#} : C_k(X, Y) \to C_k(Z, Y)$ es un encaje. Además, para cada $t \in T$, $C_k(K_t, Y)$ es primero numerable pues es metrizable (Teorema...), por lo cual $\chi(C_k(X, Y)) \leq \chi(C_k(Z, Y)) = \chi(\prod\{C_k(K_t, Y) : t \in T\}) \leq |T| \leq ka(X)$ (véanse el Ejercicio ... y ... del apéndice). □

1.62. COROLARIO. *Si Y es un espacio metrizable que contiene una trayectoria no trivial, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(1). *$C_k(X, Y)$ es metrizable.*
(2). *$C_k(X, Y)$ es primero numerable.*
(3). *X es hemicompacto, es decir $ka(X) = \aleph_0$.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema anterior, basta que demostremos (3) $\Rightarrow$ (1). Para cumplir nuestro propósito repetimos los últimos razonamientos de la demostración del Teorema ... Sea $\{K_n : n \in \mathbb{N}\}$ una k-cubierta de X, y sea Y la suma topológica libre de los espacios K_n. Si $p : Y \to X$ es la proyección natural, entonces $p^{\#} : C_k(X) \to C_k(Y)$ es un encaje. Por otro lado, $C_k(Y) \cong \prod\{C_k(K_n) : n \in \mathbb{N}\}$, y cada factor es metrizable, lo cual termina la demostración. □

1.63. COROLARIO. *Si X es hemicompacto y Y es metrizable, entonces $C_k(X, Y)$ es metrizable.*

En el Capítulo... determinaremos el peso de los espacios $C_k(X, Y)$. Por el momento daremos un resultado parcial en este sentido.

1.64. PROPOSICIÓN. *Para un espacio localmente compacto X, el peso de $C_k(X, Y)$ no es mayor que $w(X) \cdot w(Y)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{B}$ una base para X cerrada bajo uniones finitas con $|\mathcal{B}| = w(X)$, y tal que la cerradura de cada uno de sus elementos es un compacto. Sea $\mathcal{D}$ una base de Y cerrada bajo uniones finitas con $|\mathcal{D}| = w(Y)$. La familia $\mathcal{E} = \{[\text{cl}B, V] : B \in \mathcal{B} \text{ y } V \in \mathcal{D}\}$ constituye una subbase para $C_k(X,Y)$. En efecto, si C es un subconjunto compacto en X, A es abierto en Y y $f \in C(X,Y)$ pertenece a $[C,A]$, entonces existe $B_0 \in \mathcal{B}$ que satisface $C \subseteq B_0 \subseteq \text{cl}_X B_0 \subseteq f^{-1}(A)$, y existe $W \in \mathcal{D}$ tal que $f(\text{cl}_X B_0) \subseteq W \subseteq A$. Por lo tanto, $f \in [\text{cl}_X B_0, W] \subseteq [C,A]$ y $[\text{cl}_X B_0, W] \in \mathcal{E}$. $\square$

Como consecuencia del resultado anterior, si X y Y son segundo numerables y X es localmente compacto, entonces $C_k(X,Y)$ es metrizable. Y claro, si además X es compacto y d es una métrica compatible en Y, entonces $C_d(X,Y)$ es separable.

(1). (a) Sea Y un espacio regular. Si F es un subespacio compacto en Y y U es un abierto que contiene a F, entonces existe un subconjunto abierto V de Y que satisface: $F \subseteq V \subseteq \text{cl}_Y V \subseteq U$.
  (b) Si Y es regular, entonces la cerradura de $[K,U]$ en $C_k(X,Y)$ está contenida en $[K, \text{cl}_Y U]$, en donde K es un subconjunto compacto de X y U es un subconjunto abierto de Y.
  (c) Si Y es regular, entonces $C_k(X,Y)$ es regular.
  (d) $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ con la topología compacto abierta no es un espacio regular.
  (e) Demuestre que si Y es completamente regular, entonces $C_k(X,Y)$ es completamente regular.

(2). Dado un espacio topológico (X,σ) podemos considerar la colección $\sigma_k = \{A \subseteq X : \text{para cada subconjunto compacto } K \text{ en } (X,\sigma),\ A \cap K \text{ es abierto en } K\}$. Resulta que σ_k es una topología para X. Denotaremos por X_k al espacio (X,σ_k). Se suele llamar a un espacio X *pseudofinito*pseudofinitopseudofinito si los únicos subconjuntos compactos en X son los finitos. Un espacio X es ω-*discreto*omega-discretoω-discreto si cada subconjunto numerable en X es cerrado. (Veremos en el Capítulo... Sección... como estos espacios están relacionados con la pseudocompacidad de los espacios $C_p(X,[0,1])$.) Demostrar lo siguiente.
  (a) $\sigma \subseteq \sigma_k$.
  (b) (X,σ_k) es un k-espacio.

(c) (X, σ) y (X, σ_k) tienen los mismos subconjuntos compactos e inducen la misma topología en cada uno de sus subconjuntos compactos.
(d) Cualquier espacio ω-discreto es pseudofinito.
(e) Las siguientes condiciones son equivalentes.
 (i) X es pseudofinito.
 (ii) X_k es discreto.
 (iii) Para cualquier espacio Y que contenga una trayectoria no trivial, $C_p(X, Y) = C_k(X, Y)$.
(f) Sean κ y λ dos números cardinales tales que $\aleph_0 < \lambda < \kappa$. Sea $D(\kappa)$ el espacio discreto de cardinalidad κ. Sea $X_{\kappa,\lambda} = D(\kappa) \cup \{p\}$ en donde $p \notin D(\kappa)$. La colección $\tau = \{A : A \subseteq D(\kappa)\} \cup \{\{p\} \cup B : |D(\kappa) \setminus B| \leq \lambda\}$ es una topología en $X_{\kappa,\lambda}$. El espacio $(X_{\kappa,\lambda}, \tau)$ no es discreto y $C_p(X_{\kappa,\lambda}) = C_k(X_{\kappa,\lambda})$. Más aún, $X_{\kappa,\lambda}$ es ω-discreto.
(g) Sea $\mathcal{F} \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, entonces $\mathbb{N} \cup \{\mathcal{F}\}$ es un espacio pseudofinito pero no es ω-discreto. En este caso tenemos también que $C_p(\mathbb{N} \cup \{\mathcal{F}\}) = C_k(\mathbb{N} \cup \{\mathcal{F}\})$.

(3). (a) Demuestre que cualquier espacio primero numerable hemicompacto es localmente compacto.
(b) Dé un ejemplo de un espacio numerable y hemicompacto que no es un k-espacio.
(c) Si X es segundo numerable, entonces X es hemicompacto si y sólo si X es localmente compacto.
(d) Observe que si X y Y son espacios segundo numerables, entonces $C_k(X, Y)$ es metrizable.
(e) Observe que todo espacio hemicompacto es σ-compacto, pero es posible encontrar un espacio σ-compacto que no es hemicompacto.

(4). Demuestre que para cualquier espacio localmente compacto X las siguientes condiciones son equivalentes:
(a) El espacio X es Lindelöf.
(b) El espacio X es hemicompacto.
(c) El espacio X es σ-compacto.
(d) Existe una cubierta compacta $\mathcal{C} = \{K_n : n \in \mathbb{N}\}$ de X tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $K_n \subseteq int K_{n+1}$.

(5). Dé un ejemplo de un espacio metrizable $C_k(X, Y)$ con X no hemicompacto.

(6). Demuestre que si X es un espacio Lindelöf y localmente compacto, entonces para cualquier espacio completamente metrizable Y, el espacio $C_k(X, Y)$ es completamente metrizable.

(7). El resultado del ejercicio anterior no se cumple si sólo pedimos como condición en X la hemicompacidad. En efecto, considere el espacio $X = \{p\} \cup \bigcup\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ en donde

(a) cada X_n es numerable,
(b) si $n \neq m$, entonces $X_n \cap X_m = \emptyset$, y
(c) $p \notin X_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Consideremos en X la topología definida como sigue: para cada $x \in \cup\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ el conjunto $\{x\}$ es abierto; y una vecindad de p es de la forma $\{p\} \cup \bigcup\{Y_n : n \in J\}$, en donde $J \subseteq \mathbb{N}$ es tal que $|\mathbb{N} \setminus J| < \aleph_0$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $|X_n \setminus Y_n| < \aleph_0$.

Demuestre que $C_k(X, [0,1])$ no es completamente metrizable. (Sugerencia. Considere la colección $\{f \in C_k(X, [0,1]) : f(X) \subseteq \{0,1\}$ y f es constante en cada $X_n\}$.

(8). Sea X un espacio hemicompacto, y sea $\mathcal{K} = \{K_n : n \in \mathbb{N}\}$ una k-cubierta de X. Sea (Y, d) un espacio métrico. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $f, g \in C_k(X, Y)$, sea

$$r_n = \sup\{d(f(x), g(x)) : x \in K_n\}.$$

Definimos

$$\rho(f, g) = \Sigma_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{r_n}{1 + r_n}.$$

Demuestre que ρ metriza a $C_k(X, Y)$.

(9). ¿Existe X no compacto (resp., no finito) y (Y, d) con una trayectoria no trivial tales que $C_k(X, Y) \cong C_d(X, Y)$ (resp., $(Y^X, \tau_k) \cong (Y^X, \tau_d)$?

Aquí se hablaría como ejercicio de las funciones dual, evaluación y restricción en $C_k(X)$ y de los teoremas en $C_k(X)$ análogos al 1.13 y 1.14 en la sección 2.

(10). Supongamos que $C_p(X)$ y $C_p(Y)$ son dos espacios homeomorfos que además como anillos son isomorfos. ¿ Existe, entonces, una función

$$h : C_p(X) \to C_p(Y)$$

que es a la vez un homeomorfismo y un isomorfismo ?

8. Topologías Conjunto-Abiertas

En la sección anterior hicimos notar que la topología de la convergencia puntual τ_p sobre $C(X, Y)$ podía obtenerse através de la familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos finitos de X e introducimos la topología compacto-abierta τ_k através de la familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos compactos de X; en ambos casos esto se logra recurriendo a la familia

$$\mathfrak{B}(\mathcal{A}) = \{[A, V] : A \in \mathcal{A}, \quad V \subseteq Y \text{ abierto}\},$$

considerándola como una subbase para generar dichas topologías. Una generalización de este procedimiento puede lograrse al considerar familias $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ como subbase, en donde $\mathcal{A}$ es alguna colección apropiada de subconjuntos de X. Este proceso nos genera una basta cantidad de topologías en $C(X,Y)$; sin embargo, nuestro interés es obtener topologías suficientemente finas en donde por lo menos se cumplan los axiomas de separación de Hausdorff y de regularidad completa.

1.65. DEFINICIÓN. redredred sobre X Una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de un espacio X se llama red sobre X si para cada $x \in X$ y cada vecindad V de x, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A \subseteq V$. Una red $\mathcal{A}$ sobre X se llama red cerrada (resp. compacta) si cada miembro de $\mathcal{A}$ es un conjunto cerrado (resp. compacto).

Una topología τ sobre $C(X,Y)$ se llama *topología conjunto-abierta*topologiatopologíaconjunto-abierta si existe alguna red $\mathcal{A}$ sobre X tal que la topología $\tau_{\mathcal{A}}$ generada usando como subbase a la familia $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ de conjuntos de la forma $[A,V]$, donde $A \in \mathcal{A}$, V es abierto en Y y

$$[A,V] = \{f \in C(X,Y) : \mathrm{cl}_Y(f(A)) \subseteq V\},$$

es precisamente la topología τ; en tal caso denotaremos por $C_{\mathcal{A}}(X,Y)$ al conjunto $C(X,Y)$ con la topología $\tau_{\mathcal{A}}$. Es fácil verificar que si $\mathcal{A}$ es cualquier red sobre X, entonces la topología de la convergencia puntual sobre $C(X,Y)$ es menos fina que la topología $\tau_{\mathcal{A}}$; por lo tanto, las topologías sobre $C(X,Y)$ generadas a partir de redes sobre el espacio X resultan ser topologías Hausdorff. Para asegurar el axioma de regularidad completa es necesaria una hipótesis adicional sobre la red $\mathcal{A}$. Primeramente observemos que para funciones continuas se cumple $f(\mathrm{cl}_X(A)) \subseteq \mathrm{cl}_Y(f(A))$; así que, será suficiente considerar de ahora en adelante únicamente redes cerradas; es decir, red significará, de ahora en adelante, red cerrada.

1.66. LEMA. *Sean $\mathcal{A}$ una red sobre X y $A \in \mathcal{A}$ compacto. Si $\phi(f) = \sup_{x\in A} f(x)$, para cada $f \in C_{\mathcal{A}}(X,[0,1])$, entonces $\phi : C_{\mathcal{A}}(X,[0,1]) \to [0,1]$ es una función continua.*

ProofDEMOSTRACIÓN: Mostraremos que para cada intervalo abierto (a,b) en $\mathbb{R}$, la imagen inversa $\phi^{-1}([0,1] \cap (a,b))$ es abierto en $C_{\mathcal{A}}(X,[0,1])$. Ya que A es compacto, $\sup_{x\in A} f(x) < b$ si y sólo si $f(x) < b$ para cada $x \in A$; entonces se tiene que

$$\phi^{-1}([0,1] \cap (a,b)) = (C_{\mathcal{A}}(X,[0,1]) \setminus [A,(-\infty,a]]) \cap [A,(-\infty,b)].$$

Pero $[A,(-\infty,a]]$ es un subconjunto cerrado de $C_{\mathcal{A}}(X,[0,1])$. QEDn

1.67. PROPOSICIÓN. *Si $\mathcal{A}$ es una red compacta sobre X, entonces el espacio $C_{\mathcal{A}}(X,Y)$ es de Tychonoff.*

ProofDEMOSTRACIÓN: Por los comentarios del párrafo anterior al lema, el espacio $C_{\mathcal{A}}(X,Y)$ es un espacio de Hausdorff. Consideremos un subbásico $[A,V]$ en $C(X,Y)$ y $f_0 \in [A,V]$ con $A \in \mathcal{A}$ y V un abierto en Y. Esto será suficiente para mostrar la regularidad completa ya que el mínimo de una cantidad finita de funciones continuas es continua. Como $f(A)$ es un subconjunto compacto y el espacio Y es Tychonoff, existe $\psi \in C(Y,[0,1])$ tal que $\psi(f(A)) = \{0\}$ y $\psi(Y \setminus V) = \{1\}$. Entonces $\phi \in C(C_{\mathcal{A}}(X,Y),[0,1])$ dada por

$$\phi(h) = \sup\{\psi(h(x)) : x \in A\},$$

para cada $h \in C_{\mathcal{A}}(X,Y)$, satisface que $\phi(f) = 0$ y $\phi(C_{\mathcal{A}}(X,Y) \setminus [A,V]) = \{1\}$. QED □

Algunas veces cuando se trabaja con espacios $C_{\mathcal{A}}(X,Y)$, es más conveniente trabajar con subconjuntos abiertos básicos en el espacio contradominio Y en lugar de utilizar subconjuntos abiertos arbitrarios. Desgraciadamente para obtener una simplificación adecuada es necesarios poner hipótesis adicionales a la red $\mathcal{A}$. Una red cerrada se llama *hereditariamente cerrada* redredhereditariamente cerrada si cualquier subconjunto cerrado de un miembro de $\mathcal{A}$ es también uno de sus elementos.

1.68. PROPOSICIÓN. *Sean $\mathcal{A}$ una red compacta y hereditariamente cerrada sobre X y $\mathcal{S}$ una subbase para la topología de Y. Entonces la familia*

$$\{[A,S] : A \in \mathcal{A}, \quad S \in \mathcal{S}\}$$

es una subbase para $C_{\mathcal{A}}(X,Y)$.

ProofDEMOSTRACIÓN: Sean $A \in \mathcal{A}$, V un abierto en Y y $f \in [A,V]$. Para cada $x \in A$ existe una subfamilia finita $\mathcal{S}_x$ de $\mathcal{S}$ tal que $f(x) \in \bigcap \mathcal{S}_x \subseteq V$, y existe una vecindad U_x de x en X tal que $\mathrm{cl}_X(U_x) \subseteq f^{-1}(\bigcap \mathcal{S}_x)$. Como A es compacto, existe $A' \subseteq A$ finito tal que $A \subseteq \bigcup\{U_x : x \in A'\}$. Entonces definimos

$$W = \bigcap\{[A \cap \mathrm{cl}_X(U_x), S] : x \in A',\ S \in \mathcal{S}_x\},$$

el cual claramente contiene a f. Para demostrar que $W \subseteq [A,V]$, sean $g \in W$ y $a \in A$. Entonces para algún $x \in A'$, se tiene que $a \in U_x$; así que $g(x) \in \bigcap \mathcal{S}_x \subseteq V$. QED □

Este resultado permite extender las topologías conjunto-abiertas a $\mathbb{R}^X$ de tal manera que $\mathbb{R}^X$ resulte ser un espacio Tychonoff y $C_{\mathcal{A}}(X)$ sea un subespacio denso de $\mathbb{R}^X$, como en el caso de $C_p(X)$. Denotemos por $\langle A, V\rangle$ al conjunto $\left\{f \in \mathbb{R}^X : \mathrm{cl}_{\mathbb{R}}(f(A)) \subseteq V\right\}$, donde A es un miembro de una red compacta hereditariamente cerrada sobre X y V es un intervalo abierto acotado (r, s) en $\mathbb{R}$. Abusando de la notación también denotaremos por $\tau_{\mathcal{A}}$ a la topología sobre $\mathbb{R}^X$ generada por la familia $\mathfrak{B}^*(\mathcal{A})$ de todos los conjuntos $\langle A, V\rangle$.

1.69. PROPOSICIÓN. *Si $\mathcal{A}$ es una red compacta hereditariamente cerrada sobre X, entonces la topología $\tau_{\mathcal{A}}$ sobre $\mathbb{R}^X$ es de Tychonoff.*

ProofDEMOSTRACIÓN: Únicamente necesitamos demostrar la regularidad completa. Consideremos un subbásico $[A, V]$ en $\mathbb{R}^X$ y $f_0 \in [A, V]$ con $A \in \mathcal{A}$ y $V = (r, s)$. Pongamos $t_0 = \inf f_0(A)$ y $t_1 = \sup f_0(A)$. Definamos $g \in C(\mathbb{R})$ por

$$g(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t_0 \leq t \leq t_1 \\ 1, & \text{si } t \leq r \text{ o } s \leq t \\ \dfrac{t - t_0}{r - t_0}, & \text{si } r < t < t_0 \\ \dfrac{t - t_1}{s - t_1}, & \text{si } t_1 < t < s. \end{cases}$$

Entonces defínase $\phi : \mathbb{R}^X \to \mathbb{R}$ por $\phi(f) = \sup g(f(A))$. Claramente $\phi(f_0) = 0$ y $\phi(Y^X \setminus \langle A, V\rangle) = \{1\}$; así que resta demostrar que ϕ es continua. Supóngase que $f \in \mathbb{R}^X$ y que $0 < a < \phi(f) < b < 1$. Obsérvese primero que $g^{-1}([0, b))$ es un intervalo abierto acotado; así $W = \langle A, g^{-1}([0, b))\rangle$ es una vecindad de f_0. Puesto que para cada $x \in A$, el conjunto $\langle \{x\}, g^{-1}([0, a])\rangle = \left\{f' \in \mathbb{R}^X : f'(x) \in g^{-1}([0, a])\right\}$ es el complemento de un conjunto abierto con la topología producto (y por lo tanto, el complemento de un conjunto abierto con la topología $\tau_{\mathcal{A}}$), resulta que éste es cerrado en $\mathbb{R}^X$. Entonces

$$C = \bigcap \left\{\left\langle \{x\}, g^{-1}([0, a])\right\rangle : x \in A\right\}$$

es cerrado en $\mathbb{R}^X$ y $W \setminus C$ es abierto. Además $f \in W \setminus C$ y si $f' \in W \setminus C$, entonces $a < \phi(f') < b$. Para los casos en que $0 \leq \phi(f) < b$ y $a < \phi(f) \leq 1$, los abiertos W y $\mathbb{R}^X \setminus C$, respectivamente, cumplen el requerimiento necesario para establecer la continuidad.QEDn

1.70. PROPOSICIÓN. *densidaddensidadde $C_{\mathcal{A}}(X)$ Sea $\mathcal{A}$ una red compacta hereditariamente cerrada sobre X. El espacio $C_{\mathcal{A}}(X)$ es un subespacio denso de $\mathbb{R}^X$.*

ProofDEMOSTRACIÓN: Sean $g \in \mathbb{R}^X$ y $B = \bigcap_{i=1}^n \langle A_i, V_i\rangle$ un conjunto abierto básico de $\mathbb{R}^X$ tal que $g \in B$. Para cada $1 \leq k \leq n$, sean $S(k, 1), \ldots, S(k, p(k))$ todos los posibles conjuntos de precisamente k

enteros positivos menores o iguales a n tales que $\bigcap\{A_j : j \in S(k,i)\} \neq \emptyset$ para todo $1 \leq i \leq p(k)$, si tales conjuntos existen. Si k es tal que no existen conjuntos $S(k,i)$, entonces $p(k) = 0$. Sea $m = \max\{1 \leq k \leq n : p(k) > 0\}$. Para cada $1 \leq k \leq m$ e $1 \leq i \leq p(k)$, sean

$$\begin{aligned} A(k,i) &= \bigcap\{A_j : j \in S(k,i)\} \\ V((k,i) &= \bigcap\{V_j : j \in S(k,i)\}. \end{aligned}$$

Note que cada $V(k,i)$ es un intervalo abierto.

Para cada $1 \leq k \leq m$, sea $M(k)$ el conjunto de todos los enteros i tales que $1 \leq i \leq p(k)$ y tal que no existe $k' > k$ e $1 \leq i' \leq p(k')$ con $S(k,i) \subseteq S(k',i')$. Ahora $M(m) \neq \emptyset$, pero $M(k)$ puede ser vacío para $1 \leq k < m$. Para cada $1 \leq k \leq m$ tal que $M(k) \neq \emptyset$, y cada $i \in M(k)$ sea $a(k,i) \in A(k,i)$. Definamos

$$D(m) = \bigcup\{A(k,i) : 1 \leq k \leq m,\ M(k) \neq \emptyset,\ i \in M(k)\},$$

y observe que $\bigcup\{A(m,i) : 1 \leq i \leq p(m)\} \subseteq D(m)$. Entonces defina $f_m : D(m) \to \mathbb{R}$ por $f_m(x) = g(a(k,i))$ si $x \in A(k,i)$ para $1 \leq k \leq m$ e $i \in M(k)$. La función f_m es continua.

Defina $f \in C_{\mathcal{A}}(X)$ como sigue. Si $m = 1$, ya que $D(m)$ es unión ajena de subconjuntos compactos y X es Tychonoff, basta tomar a f como cualquier extensión continua de f_m a X. Si $m > 1$, entonces primero definamos una sucesión $\{f_m, \ldots, f_1\}$ por inducción. Supóngase que $1 \leq k < m$, $D(k+1) \subseteq X$ es compacto y $f_{k+1} : D(k+1) \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que

$$f_{k+1}(D(k+1) \cap A(k+1,i)) \subseteq V(k+1,i)$$

para $1 \leq i \leq p(k+1)$ y que para $k < m-1$, $D(k+2) \subseteq D(k+1)$ es compacto y $f_{k+1}|_{D(k+2)} = f_{k+2}$. Para definir $f_k : D(k) \to \mathbb{R}$, primero sea $D(k,1) = D(k+1) \cup A(k,1)$ y sea $f_{k,1} : D(k,1) \to \mathbb{R}$ una extensión continua de f_{k+1} tal que $f_{k,1}(A(k,1)) \subseteq V(k,1)$; tal extensión continua existe pues $D(k,1)$ es normal y $D(k+1)$ es cerrado en $D(k,1)$. Ahora sea $D(k,2) = D(k,1) \cup A(k,2)$ y sea $f_{k,2} : D(k,2) \to \mathbb{R}$ una extensión continua de $f_{k,1}$ tal que $f_{k,3}(A(k,2)) \subseteq V(k,2)$, existe por la misma razón que existe $f_{k,1}$. Continué encontrando extensiones continuas de esta manera hasta que $f_{k,p(k)} : D(k,p(k)) \to \mathbb{R}$ haya sido definida. Esto define nuestra sucesión $\{f_m, \ldots, f_1\}$. Finalmente sea f una extensión continua de f_1a X. Se sigue que $f \in B \cap C_{\mathcal{A}}(X)$ como se deseaba. QEDn

1.71. PROPOSICIÓN. *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos redes cerradas sobre X y Y un espacio que contiene una trayectoria no trivial $\sigma : I \to Y$. Si $\tau_{\mathcal{A}} \subseteq \tau_{\mathcal{B}}$,* *entonces cada miembro de $\mathcal{A}$ está contenido en una unión finita de miembros de $\mathcal{B}$.*

ProofDemostración: Consideremos la función constante $\sigma(\mathbf{0}) : X \to Y$ y sea $V = Y \setminus \{\sigma(1)\}$. Tomemos cualquier $A \in \mathcal{A}$. Entonces $[A, V]$ es una vecindad de $\sigma(\mathbf{0})$ con la topología $\tau_{\mathcal{A}}$; así que existen $B_i \in \mathcal{B}$ para cada $1 \leq i \leq n$, de tal manera que la una vecindad básica $W = [B_1, V] \cap \cdots \cap [B_n, V]$ de $\sigma(\mathbf{0})$ está contenida en $[A, V]$. Sea $B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ y supongamos que existe algún punto $x \in A \setminus B$. Como X es Tychonoff, existe $f \in C(X, [0,1])$ tal que $f(B) = \{0\}$ y $f(x) = 1$. Entonces $\sigma \circ f \in W$ mientras que $\sigma \circ f \notin [A, V]$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $A \subseteq B$.
QED □

En secciones anteriores cuando Y es un espacio métrico y $\mathcal{A}$ es la red sobre X de los conjuntos finitos o la de todos los conjuntos compactos, la convergencia de redes en $C_{\mathcal{A}}(X, Y)$ se caracteriza por la convergencia uniforme sobre los elementos de $\mathcal{A}$; es decir, convergencia uniforme sobre los conjuntos finitos, que no es otra que convergencia puntual, y convergencia uniforme sobre los subconjuntos compactos. Lo que se esperaría es que la convergencia de una red en $C_{\mathcal{A}}(X, Y)$ se caracterice por la convergencia uniforme de la red sobre los elementos de $\mathcal{A}$. El problema es que nuevamente para poder demostrar una de las implicaciones es necesario la hipótesis adicional de que los miembros de $\mathcal{A}$ son conjuntos compactos.

1.72. Proposición. *Sean $\mathcal{A}$ una red sobre X y Y un espacio métrico. Si $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es una red en $C_{\mathcal{A}}(X, Y)$ que converge a $f \in C(X, Y)$, entonces la red $(f_\lambda \mid_A)_{\lambda \in \Lambda}$ converge uniformemente a $f \mid_A$ para cada $A \in \mathcal{A}$. Si además $\mathcal{A}$ es una red compacta, entonces la implicación recíproca también se verifica.*

La demostración es de rutina (preferimos que la realice el lector). Pasaremos a estudiar el comportamiento de las funciones importantes entre los espacios de funciones. Empezaremos por formular la proposición análoga a la Proposición 1.5 para $C_{\mathcal{A}}(X, Y)$.

1.73. Proposición. *Si $\mathcal{A}$ es cualquier red sobre X, entonces la función $\xi_Y : Y \to C_{\mathcal{A}}(X, Y)$ que a cada $y \in Y$ le asigna la función constante $c_y : X \to Y$ es un encaje cerrado.*

ProofDemostración: Es suficiente mostrar que para cada $A \in \mathcal{A}$ y cada abierto V en Y, la imagen inversa $\xi_Y^{-1}([A, V])$ es precisamente V. Ahora, $y \in V$ si y sólo si $c_y \in [A, V]$ si y sólo si $y \in \xi_Y^{-1}([A, V])$.
QED □

Otro tipo de funciones son las funciones inducidas
$g_{\#} : C(X,Y) \to C(Z,Y)$ cuando $g : X \to Z$, y
$f^{\#} : C(Z,Y) \to C(X,Y)$ cuando $f : X \to Z$.

1.74. Proposición. *Si $g : Y \to Z$ es una función continua, entonces:*
(a) *$g_{\#} : C(X,Y) \to C(X,Z)$ es inyectiva si y sólo si g es inyectiva.*
(b) *Si $g_{\#} : C(X,Y) \to C(X,Z)$ es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva.*
(c) *Si $\mathcal{A}$ es una red sobre X, entonces $g_{\#} : C_{\mathcal{A}}(X,Y) \to C_{\mathcal{A}}(X,Y)$ es continua. Más aún, si g es un encaje también $g_{\#}$ lo es.*

1.75. Proposición. *Si $X \to Z$ es una función continua, entonces:*
(a) *$f^{\#} : C(Z,Y) \to C(X,Y)$ es inyectiva si y sólo si $f(X)$ es un subespacio denso de Z.*
(b) *Si $\mathcal{A}$ es una red sobre X y $f^{\#}(C(Z,Y))$ es un subespacio denso de $C_{\mathcal{A}}(X,Y)$, entonces f es inyectiva.*
(c) *Si $\mathcal{A}$ es una red compacta y f es inyectiva, entonces $f^{\#}(C(Z,\mathbb{R}))$ es un subespacio denso de $C_{\mathcal{A}}(X,\mathbb{R})$.*

Para el tratamiento de las propiedades de continuidad de $f^{\#}$ es útil introducir la siguiente terminología: si $f : X \to Z$ es una función, $\mathcal{A}$ es una red sobre X y $\mathcal{B}$ es una red sobre Z, decimos que $\mathcal{A}$ *puede f-aproximarse por* $\mathcal{B}$ redredque puede f-aproximarse si para cada $A \in \mathcal{A}$ y cada vecindad U de $f(A)$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $f(A) \subseteq B \subseteq U$. También decimos que $\mathcal{B}$ *puede f^{-1}-aproximarse por* $\mathcal{A}$ si para cada $B \in \mathcal{B}$ y cada vecindad V de B, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $B \subseteq f(A) \subseteq V$.

1.76. Proposición. *Sean $f : X \to Z$ una función continua, $\mathcal{A}$ una red sobre X y $\mathcal{B}$ una red compacta sobre Z.*
(a) *Si $\mathcal{A}$ puede f-aproximarse por $\mathcal{B}$, entonces $f^{\#} : C_{\mathcal{B}}(Z,Y) \to C_{\mathcal{A}}(X,Y)$ es continua.*
(b) *Si f es sobreyectiva y $\mathcal{B}$ puede f^{-1}-aproximarse por $\mathcal{A}$, entonces $f^{\#} : C_{\mathcal{B}}(Z,Y) \to C_{\mathcal{A}}(X,Y)$ es abierta sobre su imagen.*
(c) *Si f es sobreyectiva, $\mathcal{A}$ puede f-aproximarse por $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}$ puede f^{-1}-aproximarse por $\mathcal{A}$, entonces $f^{\#} : C_{\mathcal{B}}(Z,Y) \to C_{\mathcal{A}}(X,Y)$ es un encaje.*

ProofDemostración: (a) Supóngase que $f^{\#}(g) \in [A,V]$, donde $g \in C_{\mathcal{B}}(Z,Y)$, $A \in \mathcal{A}$ y V es un abierto en Y. Existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $f(A) \subseteq B \subseteq g^{-1}(V)$. Entonces $[B,V]$ es una vecindad de g en $C_{\mathcal{B}}(Z,Y)$ tal que $f^{\#}([B,V]) \subseteq [A,V]$.
(b) Como $f^{\#}$ es inyectiva por la Proposición 1.75(a), es suficiente usar un conjunto abierto subbásico en $C_{\mathcal{B}}(Z)$. Así sea $g \in [B,V]$, donde $B \in \mathcal{B}$ y V es abierto en Y. Podemos sustituir a V por un abierto V' en Y tal que $g(B) \subseteq V' \subseteq \mathrm{cl}_Y(V') \subseteq V$. Entonces existe

$A \in \mathcal{A}$ tal que $B \subseteq f(A) \subseteq g^{-1}(V')$; además para este A se tiene que $[A, V']$ es una vecindad de $f^{\#}(g)$ en $C_{\mathcal{A}}(X, Y)$. Para verificar que $[A, V'] \cap f^{\#}(C_{\mathcal{B}}(Z, Y)) \subseteq f^{\#}([B, V])$, sea $f^{\#}(g') \in [A, V']$ para algún $g' \in C_{\mathcal{B}}(Z, Y)$. Entonces

$$\mathrm{cl}_Y(g'(B)) \subseteq \mathrm{cl}_Y(g'(f(A))) \subseteq V.$$

(c) Se sigue de (a), (b) y la Proposición 1.75(a). QED □

Finalmente, sabemos que la evaluación $e_x : C_p(X, Y) \to Y$ dada por $e_x(f) = f(x)$ es continua y que $\tau_p \subseteq \tau_{\mathcal{A}}$ para cualquier red $\mathcal{A}$ sobre X; así entonces también la evaluación $e_x : C_{\mathcal{A}}(X, Y) \to Y$ es una función continua, la pregunta inmediata es ¿Cuándo X puede encajarse en un espacio de la forma $C_{\mathcal{B}}(C_{\mathcal{A}}(X))$? La respuesta la daremos a continuación, el lector tendrá la oportunidad de realizar la demostración.

1.77. Proposición. *Si $\mathcal{A}$ es una red sobre X y $\mathcal{B}$ es una red compacta sobre $C_{\mathcal{A}}(X)$, entonces la evaluación canónica $\psi : X \to C_{\mathcal{B}}(C_{\mathcal{A}}(X))$ asociada a la familia $C(X)$ que está dada por $\psi(x) = e_x$, es un encajamiento.*

¿Que podemos decir sobre estructuras algebraicas sobre los espacios $C_{\mathcal{A}}(X, Y)$, cuando Y posee estructura algebraica? Siempre que $\mathcal{A}$ sea una red compacta hereditariamente cerrada sobre X y Y sea un espacio vectorial topológico localmente convexo, entonces $C_{\mathcal{A}}(X, Y)$ es también un espacio vectorial topológico localmente convexo. Aquí formularemos lo referente al caso cuando Y es un grupo topológico, el caso más general y otras propiedades que fueron establecidas en la Sección 1.3 aparecerán en los ejercicios.

1.78. Proposición. *Si $\mathcal{A}$ es una red compacta hereditariamente cerrada sobre X y Y es un grupo topológico, entonces $C_{\mathcal{A}}(X, Y)$ es un grupo topológico.*

ProofDemostración: Sea $[A, V]$ una vecindad subbásica de $f - g$ en $C_{\mathcal{A}}(X, Y)$. Ya que Y es un grupo topológico, para cada $a \in A$ existen vecindades U_a y U'_a de a en Y tal que $U_a - U'_a \subseteq V$. Por otra parte como f y g son funciones continuas, existe una vecindad N_a de a en Y tal que $f(N_a) \subseteq U_a$ y $g(N_a) \subseteq U'_a$. Pero como A es compacto, existe $A' \subseteq A$ finito tal que $A \subseteq \bigcup \{N_a : a \in A'\}$. Sean

$$\begin{aligned} S &= \bigcap \{[A \cap \mathrm{cl}_Y(N_a), U_a] : a \in A'\} \\ T &= \bigcap \{[A \cap \mathrm{cl}_Y(N_a), U'_a] : a \in A'\}. \end{aligned}$$

Entonces $S - T \subseteq [A, V]$. QED □

Para terminar la sección veamos algo sobre compacidad. Primeramente, como en la Sección 1.5, en virtud de la Proposición 1.73, si el espacio $C_{\mathcal{A}}(X,Y)$ satisface una propiedad topológica débilmente hereditaria, necesariamente Y debe satisfacer esta propiedad. Por otra parte, con la técnica de la Proposición 1.37, deducimos que para que un espacio $C_{\mathcal{A}}(X,Y)$ sea pseudocompacto, necesariamente Y debe ser pseudocompacto. Por último veamos qué podemos decir de la compacidad local. La idea es generalizar el procedimiento realizado en la Proposición 1.40; sin embargo, $\mathbb{R}^X$ no necesariamente es un grupo topológico cuando se considera con la topología $\tau_{\mathcal{A}}$ (ver Ejercicio 12). Este inconveniente lo solucionaremos con ayuda de la Proposición 1.70 encontrando un subgrupo adecuado de $\mathbb{R}^X$. Sea

$$F_{\mathcal{A}}(X) = \left\{ f \in \mathbb{R}^X : \forall A \in \mathcal{A},\ f\mid_A \in C(A) \right\};$$

es decir, es el conjunto de todas las funciones de X en $\mathbb{R}$ que al restringirse a cada miembro A de la red $\mathcal{A}$ sobre X resultan ser funciones continuas de A en $\mathbb{R}$. Claramente $F_{\mathcal{A}}(X)$ es un subgrupo algebraico de $\mathbb{R}^X$. La ventaja de $F_{\mathcal{A}}(X)$ es que sí es un grupo topológico.

1.79. PROPOSICIÓN. *Si $\mathcal{A}$ una red compacta hereditariamente cerrada sobre X, entonces $F_{\mathcal{A}}(X)$ es un grupo topológico.*

ProofDEMOSTRACIÓN: Sean $f, g \in F_{\mathcal{A}}(X)$ y $\langle A, V\rangle$, con $A \in \mathcal{A}$ y V un intervalo abierto acotado, un subbásico tal que $f - g \in \langle A, V\rangle$. Como la operación de resta en $\mathbb{R}$ es continua y $f\mid_A,\ g\mid_A$ son funciones continuas de A en $\mathbb{R}$, podemos inferir la existencia de $\epsilon > 0$ tal que para cada $a \in A$,

$$(f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon) - (g(a)-\epsilon, g(a)+\epsilon) \subseteq V.$$

También por la continuidad de $f\mid_A$ y $g\mid_A$, existe una vecindad U_a de a en X tal que $f(U_a \cap A) \subseteq \left(f(a) - \frac{\epsilon}{3}, f(a) + \frac{\epsilon}{3}\right)$ y $g(U_a \cap A) \subseteq \left(g(a) - \frac{\epsilon}{3}, g(a) + \frac{\epsilon}{3}\right)$. Ya que A es compacto, existen $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq A$ y subconjuntos compactos $A_1, \ldots, A_n$ de A tales que $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ y $A_i \subseteq U_{a_i}$ para cada $1 \leq i \leq n$. Entonces $B_0 = \bigcap_{i=1}^n \langle A_i, (f(a_i)-\epsilon, f(a_i)+\epsilon)\rangle$ y $B_1 = \bigcap_{i=1}^n \langle A_i, (g(a_i)-\epsilon, g(a_i)+\epsilon)\rangle$ son vecindades de f y g, respectivamente. Además $B_0 - B_1 \subseteq \langle A, V\rangle$; en efecto, si $t \in \mathrm{cl}_{\mathbb{R}}\left((\widetilde{f} - \widetilde{g})(A)\right)$, para algunas $\widetilde{f} \in B_0$ y $\widetilde{g} \in B_1$, entonces existe $x \in A$ tal que $\widetilde{f}(x) - \widetilde{g}(x) - \frac{\epsilon}{3} < t < \widetilde{f}(x) - \widetilde{g}(x) + \frac{\epsilon}{3}$. Pero también existe $1 \leq i \leq n$ tal que $x \in A_i$, por lo que

$f(a_i) - g(a_i) - \frac{\epsilon}{3} < t < f(a_i) - g(a_i) + \frac{\epsilon}{3}$.; de donde se concluye que $t \in V$. QEDn

1.80. PROPOSICIÓN. *Sean $\mathcal{A}$ una red compacta hereditariamente cerrada sobre X. Si $C_{\mathcal{A}}(X)$ es un espacio localmente compacto entonces $F_{\mathcal{A}}(X) = C_{\mathcal{A}}(X)$.*

ProofDEMOSTRACIÓN: $C_{\mathcal{A}}(X)$ es un subgrupo topológico denso de $F_{\mathcal{A}}(X)$. La Proposición 1.40 puede ser modificada para el grupo topológico $F_{\mathcal{A}}(X)$, de donde se deduce el resultado. QED □

Cuando $\mathcal{A}$ es la red de todos los subconjuntos compactos de X, la proposición anterior nos dice que si $C_k(X)$ es un espacio localmente compacto, entonces una función $f : X \to \mathbb{R}$ es continua si y sólo si su restricción a cada subconjunto compacto es una función continua. Los espacios que cumplen la última propiedad se llaman $k_{\mathbb{R}}$-*espacios*; y entonces tenemos que si $C_k(X)$ es localmente compacto X debe ser un $k_{\mathbb{R}}$-espacio. Los espacios en los cuales la continuidad secuencial implica la continuidad son ejemplos de $k_{\mathbb{R}}$-espacios; esto es porque la continuidad sobre los subconjuntos compactos implica la continuidad sobre el conjunto compacto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ para cualquier $x_n \to x$. Así cualquier espacio primero numerable es un $k_{\mathbb{R}}$-espacio. Otra clase de $k_{\mathbb{R}}$-espacios son los k-espacios; en efecto, si X es un k-espacio y $f : X \to \mathbb{R}$ es una función la cual es continua sobre cada subconjunto compacto K de X, entonces para cualquier abierto V en $\mathbb{R}$, $f^{-1}(V) \cap K = f\,|_K^{-1}(V)$. Así $f^{-1}(V)$ es abierto en X y f es continua. Sin embargo, no cualquier $k_{\mathbb{R}}$-espacio es un k-espacio. Una conclusión más profunda sobre la compacidad local de $C_{\mathcal{A}}(X)$ puede obtenerse si consideramos a $C_{\mathcal{A}}(X)$ como un espacio vectorial y usamos el hecho de que un espacio vectorial topológico es localmente compacto si y sólo si es de dimensión finita [**?**, pag. 17].

1.81. PROPOSICIÓN. *Si $\mathcal{A}$ es una red compacta hereditariamente cerrada sobre X, entonces $C_{\mathcal{A}}(X)$ es localmente compacto sobre X si y sólo si X es finito.*

EJERCICIOS

(1). Demuestre la Proposición 1.72.
(2). Demuestre que si $\mathcal{A}$ es una red sobre X y $\mathcal{A}'$ es la familia de uniones finitas de elementos de $\mathcal{A}$, entonces $\mathcal{A}'$ es una red sobre X y $\tau_{\mathcal{A}} = \tau_{\mathcal{A}'}$.
(3). Demuestre la Proposición 1.74.
(4). Demuestre la Proposición 1.75.

(5). Dar una condición suficiente para que $f^{\#} : C(Y) \to C(X)$ sea sobreyectiva, cuando X sea un subespacio de Y y f el mapeo inclusión.

(6). Sean $f \in C(X,Y)$ y sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ redes compactas sobre X y Y, respectivamente. Demuestre que:
  (a) $f^{\#} : C_{\mathcal{B}}(Y) \to C_{\mathcal{A}}(X)$ es continua si y sólo si $\mathcal{B}$ puede f^{-1}-aproximarse por $\mathcal{A}$.
  (b) $f^{\#} : C_{\mathcal{B}}(Y) \to C_{\mathcal{A}}(X)$ es abierta sobre su imagen si y sólo si $f(X)$ es cerrado en Y y $\{B \cap f(X) : B \in \mathcal{B}\}$ puede f^{-1}-aproximarse por $\mathcal{A}$.

(7). Demuestre la Proposición 1.77.

(8). Sean $\mathcal{A}$ una red compacta hereditariamente cerrada sobre X y $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una familia de espacios. Demuestre que:
  (a) $C_{\mathcal{A}}(X, \prod_{\alpha\in\Lambda} Y_\alpha)$ es homeomorfo al $\prod_{\alpha\in\Lambda} C_{\mathcal{A}}(X, Y_\alpha)$.
  (b) Si además cada Y_α es un álgebra topológica, entonces el álgebra $C_{\mathcal{A}}(X, \prod_{\alpha\in\Lambda} Y_\alpha)$ es topológicamente isomorfa a el álgebra $\prod_{\alpha\in\Lambda} C_{\mathcal{A}}(X, Y_\alpha)$.

(9). Supóngase que para cada $\alpha \in \Lambda$, se tiene una red cerrada en un espacio X_α. Sea $\mathcal{B} = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} \mathcal{A}_\alpha$. Demuestre que:
  (a) $C_{\mathcal{B}}\left(\sum_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha, Y\right)$ es homeomorfo a $\prod_{\alpha\in\Lambda} C_{\mathcal{A}_\alpha}(X_\alpha, Y)$.
  (b) Si además Y es un álgebra topológica, $C_{\mathcal{B}}\left(\sum_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha, Y\right)$ es topológicamente isomorfa a $\prod_{\alpha\in\Lambda} C_{\mathcal{A}_\alpha}(X_\alpha, Y)$.

(10). Demuestre que si $\mathcal{A}$ es una red compacta hereditariamente cerrada sobre X y Y es un álgebra topológica, entonces $C_{\mathcal{A}}(X,Y)$ también es un álgebra topológica, y que si Y es un espacio vectorial topológico localmente convexo, entonces así es $C_{\mathcal{A}}(X,Y)$.

(11). Demuestre la Proposición 1.40 para $C_{\mathcal{A}}(X,Y)$ cuando $\mathcal{A}$ es una red compacta hereditariamente cerrada sobre X.

(12). [**?**] Para $f \in \mathbb{R}^X$, defina $\oplus_f : \mathbb{R}^X \to \mathbb{R}^X$ por $\oplus_f(g) = f+g$. Demuestre que si $\mathcal{A}$ es una red compacta hereditariamente cerrada sobre X, entonces las siguientes propiedades son equivalentes:
  (a) $\oplus_f$ es un homeomorfismo.
  (b) $\oplus_f$ es continua.
  (c) $f \in F_{\mathcal{A}}(X)$.

(13). [**?**, pag. 65]Sea J un conjunto no numerable. Demostrar que $\mathbb{N}^J$ con la topología producto es un $k_{\mathbb{R}}$-espacio pero no un k-espacio.

(14). Muestre que $F_{\mathcal{A}}(X)$ es un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{R}$, en el caso de que $\mathcal{A}$ sea una red compacta hereditariamente cerrada sobre X.

(15). Demuestre la Proposición 1.81 usando el resultado de espacios vectoriales topológicos.

Bibliografía

[A] A.V.Arkhangel'skii, *Topological Spaces Functions*, Kluwer Academic Publishers., 1989.

[A_1] A.V.Arkhangel'skii, *Continuous mappings, factorization theorems, and function spaces*, Trans. Moscow Math. Soc., (1985)

[CN] Comfort ; Negrepontis, *Chain Conditions in Topology*, Cambridge University Press, 1982.

[E] Engelking, R., *General Topology*, Sigma Series in Pure Mathematics, Vol. 6, Berlin:Helderman, 1989.

[J] Juhasz, I., *Cardinal Functions in Topology*, Math Centre Tracts 34, Math. Centrum, Amsterdam, 1971.

[J_1] Juhasz, I., *Cardinal Fucntions in Topology –Ten years Later*, Math Centre Tracts 123, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1983.

[K] Kamke,E., *Theory of Sets*, Dover Publications Inc.,1950.

[Ku] Kunen, K., Set Theory, an Introduction to Independent Proofs, North Holland Publ. Co. Amsterdam-New York, 1980.

[MI] Martínez García A. ; Ibarra Contreras M.,*Espacios Topológicos Linealmente Ordenados*, Tesis Profesional, Facultad de Ciencias, UNAM, México.

[MN] Robert A. McCoy ; Ibula Ntantu,*Topological Properties of Spaces of Continuous Functions*; Lectures Notes in Mathematics Vol.1315, Springer-Verlag, 1988.

[R] Rudin, M.E., *Lectures on set Theoretic Topology*, Regional conferences Series in Mathematics, 23, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1975.

[W] Willard,S., *General Topology*, Addison-Wesley Publishing Company, 1970.