Elementos de Topología General

Fidel Casarrubias Segura

Ángel Tamariz Mascarúa

Contenido

Introducción vii

Capítulo 1. Espacios topológicos 1
1. Espacios métricos 3
2. Espacios topológicos 7
3. Comparación de topologías 9
4. Conjuntos cerrados 12
5. Bases, subbases y bases locales 13
6. Subespacios 20
7. Generación de topologías a partir de subcolecciones del conjunto potencia de X 23
Ejercicios 29

Capítulo 2. La cerradura, el interior y otros operadores 41
1. El derivado y la cerradura de un conjunto 42
2. El interior de un conjunto E 47
3. Construcción de topologías a partir de operadores 53
4. Subconjuntos densos, perfectos, densos en ninguna parte y fronterizos 57
Ejercicios 61

Capítulo 3. Funciones continuas y propiedades ligadas a la numerabilidad 71
1. Continuidad y Homemorfismos 71
2. Espacios separables, primero numerables y segundo numerables 84
3. Subespacios e imágenes continuas de espacios segundo numerables, separables y primero numerables 88
4. Convergencia de sucesiones 90
5. Filtros y convergencia 95

Ejercicios 104

Capítulo 4. Construcción de espacios topológicos a partir de espacios dados 113
1. Topologías débiles inducidas por funciones 113
2. Producto de dos espacios topológicos 117
3. Producto de una familia arbitraria de espacios topológicos 121
4. Topologías fuertes definidas por funciones 125
5. Los cocientes de un espacio topológico 128
Ejercicios 136

Capítulo 5. Axiomas de separación 147
1. Espacios T_0, T_1 y T_2 147
2. Espacios regulares 159
Ejercicios 166

Capítulo 6. Espacios normales y completamente regulares 175
1. Espacios normales 175
2. Espacios completamente regulares 181
3. El Lema de Urysohn y los Teoremas de Tietze y de Tychonoff 187
Ejercicios 198

Capítulo 7. Espacios compactos 207
1. Espacios compactos 208
2. Producto de espacios compactos 214
3. Espacios localmente compactos 218
4. Espacios topológicos numerablemente compactos y espacios Lindelöf 223
5. Compactaciones 230
6. La compactación de Stone-Čech 236
Ejercicios 239

Capítulo 8. Espacios conexos y disconexos 255
1. Espacios conexos 255
2. Espacios localmente conexos 266
3. Espacios conexos por trayectoria 271
4. Continuos 278
5. Espacios hereditariamente disconexos, totalmente disconexos y 0-dimensionales 288

Ejercicios 295

Apéndice A. Tópicos de teoría de conjuntos 305
1. Conjuntos 305
2. Producto cartesiano de dos conjuntos 308
3. Relaciones 309
4. Funciones 313
5. Cardinalidad 315
6. Axioma de Elección 322
7. Producto cartesiano y aritmética de números cardinales 327
8. Números Ordinales 332
Ejercicios 341

Bibliografía 353

Tabla de símbolos 357

Índice 361

Introducción

En la matemática actual los conceptos topológicos están presentes en todas sus áreas y hoy en día sería impensable concebir un matemático que desconociera los elementos más básicos de la Topología.

Actualmente, la Topología es dividida en varias subáreas como lo son la Topología Conjuntista, la Topología Geométrica, la Topología Diferencial, la Topología Algebraica, etc. La razón de ello es la gran gama de métodos propios y la gran diversidad de aplicaciones que poseen cada una de ellas. Sin embargo, todas estas subáreas conservan una parte en común a la que se le suele llamar Topología General.

A pesar de que el término Topología General no es muy preciso y su significado varía según quien lo utiliza, es de consenso incluir como elementos de la Topología General tanto el estudio de los espacios métricos y sus generalizaciones — en particular, los espacios paracompactos — como el análisis de conceptos tan fundamentales en matemáticas como son la compacidad y la conexidad.

Nosotros, además, hemos incluido algunos elementos sobre estructuras topológico algebraicas como los espacios de funciones continuas y los grupos topológicos, y también algunas aplicaciones sencillas que la lógica y la teoría de conjuntos, la combinatoria infinita y la teoría de los números cardinales han aportado al crecimiento de la Topología.

Con este libro pretendemos proporcionar al lector los elementos básicos de esta cada vez más importante área de las matemáticas, introduciendolo al mundo de los espacios topológicos abstractos y de sus objetos y relaciones elementales (conjuntos abiertos, cerrados, funciones continuas, límites de sucesiones), familiarizandolo con ejemplos tanto geométricos (subespacios de $\mathbb{R}^n$) como conjuntistas (espacios definidos por relaciones de orden) y algebraicos (espacios de funciones continuas y grupos topológicos), motivandolo a aprender y ejercitarse en las técnicas básicas. Incluimos en el texto los conceptos y un primer estudio de algunas de las clases de espacios topológicos fundamentales como son los espacios Tychonoff, normales, compactos y conexos, y las construcciones básicas del cociente y el producto de espacios.

El libro está dividido en tres partes. La primera, presentada en los capítulos 1 y 2, trata los temas elementales de conjuntos abiertos, bases y operador de Kuratowski; en esta primera parte se dan ejemplos sencillos y demostraciones detalladas. Una segunda parte la constituyen los capítulos 3, 4 y 5 que estudian funciones continuas, construcción de espacios a partir de espacios dados, y primeros axiomas de separación, con ejemplos y técnicas más complicados que aquellos presentados en los capítulos 1 y 2. Finalmente, en los capítulos 6, 7 y 8 se colocán los resultados fundamentales; se analizan los espacios Tychonoff, compactos y conexos. Los materiales en estos últimos capítulos son complejos y requieren de un buen grado de asimilación de los primeros capítulos para ser comprendidos. Además, incluimos un apéndice en donde enumeramos algunas de las relaciones, nociones y resultados básicos de la Teoría de Conjuntos que se emplean a lo largo de la obra. En las secciones llamadas *Ejercicios* se incluyen desde problemas que simplemente pretenden aumentar las habilidades del lector relacionadas con los conceptos y técnicas presentadas en el libro, hasta problemas que proporcionan información adicional relevante, y que tienen un grado de complejidad importante.

En el centro de la obra hemos colocado varios de los teoremas esenciales de la Topología General como son el Teorema de Tychonoff sobre la compacidad del producto de espacios compactos, el Lema de Urysohn que proclama la equivalencia entre la normalidad y la normalidad completa o funcional, y el teorema de inmersión de Tychonoff que garantiza que la clase de los espacios Tychonoff coincide, esencialmente, con la clase de todos los subespacios de los cubos de Tychonoff $[0,1]^\alpha$.

Todos estos temas los presentamos presuponiendo que el lector está familiarizado con los números reales, sus operaciones de suma y producto y su relación de orden. Además consideramos que el lector tiene conocimientos básicos de Calculo Diferencial e Integral, que ha trabajado con sucesiones e inducción matemática, y que conoce los elementos básicos de la Teoría de Conjuntos.

Esta obra fue elaborada a partir de varios materiales que han servido a los autores como notas en sus cursos de este tema en la Facultad de

Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México, e intenta presentar los materiales clásicos de los cursos introductorios de esta materia acompañados por figuras ilustrativas y con una suficiente cantidad de ejemplos tanto elementales como de trascendencia.

El lector puede completar lo expuesto aquí, con la consulta de los siguientes textos: [26], [30], [60], [61] y [68]. También recomendamos las lecturas [9], [10] y [31] que presentan de manera más extensa algunos de los materiales expuestos en este libro.

Los autores
México, D.F.
Enero de 2015

Capítulo 1

Espacios topológicos

En matemáticas se trabaja frecuentemente con la idea de proximidad. Los conceptos de límite de una sucesión y de continuidad de una función son nociones de esta índole. Por ejemplo, la idea de la convergencia de una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a un punto z en $\mathbb{R}^m$ se refiere a que el punto x_n está muy cerca de z cuando n es suficientemente grande. Esto lo denotamos con el símbolo $x_n \to z$, y significa que para cada número real positivo ϵ, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $e(z, x_n) < \epsilon$ para todo $n \geqslant n_0$. Aquí e denota la distancia euclidiana en $\mathbb{R}^m$, la cual está definida por

$$e(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i - y_i)^2}\ ,$$

cuando $x = (x_1, ..., x_m)$ y $y = (y_1, ..., y_m)$. De manera semejante, una función $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ es continua en un punto z si para cada punto x cercano a z, su imagen $f(x)$ bajo f es próxima a $f(z)$; es decir, para cada $\epsilon > 0$ existe un real positivo δ tal que $e(f(x), f(z)) < \epsilon$ cuando $e(x, z) < \delta$.

Otro concepto que está también basado en la idea de cercanía es el de la convergencia uniforme: una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones definidas en $[0, 1]$ y con valores reales, converge uniformemente a una función f (en símbolos, $f_n \rightrightarrows f$) si para cada número natural n suficientemente grande, las gráficas de f_n y de f son muy parecidas y están muy próximas una de la otra (véase la figura 1). Más formalmente: para cada $\epsilon > 0$ podemos encontrar un número natural n_0 tal que $e(f_n(x), f(x)) < \epsilon$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y todo $n \geqslant n_0$.

En los espacios euclidianos $\mathbb{R}^m$ conocemos ya un algoritmo que nos permite determinar cuándo dos puntos están próximos. En efecto, x_0 es vecino o cercano a y en $\mathbb{R}^m$ si $e(x_0, y)$ es un número real muy pequeño.

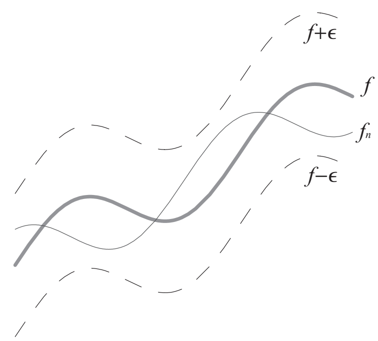

Figura 1. Convergencia uniforme.

En forma general, si x_0 es un punto en $\mathbb{R}^m$ y F es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^m$, entonces x_0 está próximo a F si $\inf\{e(x_0, x) : x \in F\}$ es un número real pequeño.

Podemos traducir estas ideas que deciden proximidad entre puntos y conjuntos en $\mathbb{R}^m$, utilizando subconjuntos especiales de $\mathbb{R}^m$. Veamos como: para $x \in \mathbb{R}^m$ y $r \in \mathbb{R}^+$, denotaremos con $B(x, r)$ al conjunto $\{y \in \mathbb{R}^m : e(x, y) < r\}$. Definamos $\mathcal{B} = \{B(x, r) : x \in \mathbb{R}^m \text{ y } r \in \mathbb{R}^+\}$.

Obsérvese ahora que la idea de cercanía entre x_0 y x en $\mathbb{R}^m$ que expresamos en términos de su distancia, es equivalente a decir $x \in B(x_0, r)$ y r es un número positivo muy cercano al cero.

También podemos decidir cuándo una función $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ es continua en un punto x_0 haciendo uso de colecciones como $\mathcal{B}$. En efecto, f es continua en x_0 si para cada $r \in \mathbb{R}^+$, por muy pequeño que sea, podemos encontrar un $s \in \mathbb{R}^+$ tal que $f(B(x_0, s)) \subseteq B(f(x_0), r)$. Concluimos pues que una colección de subconjuntos de $\mathbb{R}^m$, como es $\mathcal{B}$, nos permite hablar de cercanía entre puntos y subconjuntos de $\mathbb{R}^m$ y de continuidad de funciones.

En la siguiente sección definiremos formalmente las nociones de distancia o métrica y de espacio métrico, mencionaremos algunos ejemplos, introduciremos los conjuntos abiertos en espacios métricos y utilizaremos estos conjuntos para definir convergencia de sucesiones y funciones continuas en esta clase de espacios. En las secciones subsiguientes generalizaremos, tomando en cuenta nuestra experiencia con espacios euclidianos y métricos, el concepto de cercanía usando colecciones de subconjuntos.

1. Espacios métricos

Una *métrica o distancia* en un conjunto X no vacío es una función $d : X\times X \to \mathbb{R}^+\cup\{0\}$ que satisface los siguientes axiomas para cualesquiera $x, y, z \in X$:

(i) $d(x, y) = 0$ si, y sólo si, $x = y$,
(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ (simetría), y
(iii) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ (*desigualdad del triángulo*),

en donde $\mathbb{R}^+$ es el conjunto de números reales estríctamente mayores que 0.

1.1. Ejemplos.

(a) La función e con dominio $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ y valores en $\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ definida por $e(x, y) = |x - y|$ es una métrica en $\mathbb{R}$; y, de manera más general, en $\mathbb{R}^m$ la función

$$e((x_1, ..., x_m), (y_1, ..., y_m)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i - y_i)^2}$$

es una métrica en $\mathbb{R}^m$ llamada *métrica euclidiana* (o *métrica usual*).

(b) Para cualquier conjunto X no vacío, la función $\xi : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definida como

$$\xi(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

es una distancia, como se puede verificar fácilmente. Esta métrica es la llamada *métrica discreta* sobre X (véase el ejercicio (2) en 1.B).

Si X es un conjunto y d es una función distancia en X, entonces a la pareja (X, d) le llamaremos *espacio métrico*. Así, las parejas $(\mathbb{R}^m, e)$ y (X, ξ) son espacios métricos.

Los espacios métricos constituyeron la primera clase de espacios abstractos a la cual varias nociones y resultados relacionados a espacios euclidianos, pudieron ser generalizadas. Los espacios métricos fueron introducidos y estudiados por M. Fréchet en 1906 [29].

Dado un espacio métrico (X, d) es posible considerar una colección de subconjuntos que tienen particular importancia: para cada $x \in X$ y cada número real positivo r, tomamos el conjunto

$$B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}.$$

A este conjunto le llamaremos *bola abierta con centro en x y de radio r* (véase la figura 2). A partir de las bolas abiertas en (X,d) definimos lo siguiente:

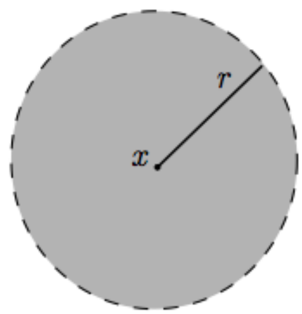

FIGURA 2. Bola abierta con centro en x y radio r.

1.2. DEFINICIÓN. Un subconjunto A de un espacio métrico (X,d) es *abierto* si para cada $x \in A$ existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subseteq A$.

Denotaremos con $\mathcal{T}_d$ a la colección de subconjuntos abiertos de (X,d). Esta colección cumple las siguientes propiedades.

1.3. TEOREMA. *Para un espacio métrico (X,d), la colección $\mathcal{T}_d$ satisface:*

(1) *los subconjuntos $\emptyset$ y X pertenecen a $\mathcal{T}_d$;*
(2) *la intersección de dos elementos en $\mathcal{T}_d$ pertenece a $\mathcal{T}_d$; y*
(3) *la unión de cualquier colección de subconjuntos abiertos en (X,d) es también un elemento de $\mathcal{T}_d$.*

DEMOSTRACIÓN. (1) El conjunto $\emptyset$ es abierto ya que no contiene ningún punto. Además $X = \bigcup_{x \in X} B(x,1)$.

Verifiquemos ahora que en efecto $\mathcal{T}_d$ satisface (2): sean E_1 y E_2 dos elementos en $\mathcal{T}_d$. En el caso en que $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, el resultado se sigue de (1). En caso contrario, para cada $x \in E_1 \cap E_2$, existen $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+$ tales que $B(x,r_1) \subseteq E_1$ y $B(x,r_2) \subseteq E_2$. Ahora, sea r_x igual al mínimo entre r_1 y r_2. Resulta que $B(x,r_x) \subseteq E_1 \cap E_2$.

(3) Sea $\mathcal{A}$ una colección de elementos en $\mathcal{T}_d$ y sea $x \in \bigcup \mathcal{A}$. Existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A$. Como A es abierto, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq A \subseteq \bigcup \mathcal{A}$. Como x fue elegido arbitrariamente concluimos que $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{T}_d$. ⊠

1.4. Definiciones.

(1) Una *sucesión en un conjunto* X es una función de $\mathbb{N}$ en X. La sucesión $n \mapsto x_n$ será representada por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
(2) Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos en un espacio métrico (X, d) *converge* a un punto $z \in X$ si para cada $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(z, x_n) < \epsilon$ para cualquier $n \geqslant n_0$.
(3) Una función $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ entre espacios métricos es continua en un punto $z \in X$ si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\rho(f(z), f(x)) < \epsilon$ cuando $d(z, x) < \delta$.
(4) Una función $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ entre espacios métricos es continua en X, o simplemente continua, si f es continua en cada punto x de X.

Podemos expresar los conceptos de convergencia de sucesiones en espacios métricos y de función continua entre espacios métricos usando exclusivamente la noción de conjunto abierto como vemos en los siguientes teoremas.

1.5. Teorema. *Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en (X, d) converge a $z \in X$ si y sólo si para cada subconjunto abierto A de (X, d) que contiene a z, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in A$ para cualquier $n \geqslant n_0$.*

Demostración. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a z y A es un abierto de (X, d) que contiene a z, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $B(z, \epsilon) \subseteq A$. Por definición de convergencia, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(z, x_n) < \epsilon$ para cualquier $n \geqslant n_0$. Por lo tanto, $x_n \in B(z, \epsilon) \subseteq A$ para cualquier $n \geqslant n_0$.

Ahora demostremos el inverso. Sea ϵ un número estrictamente mayor que 0. La bola $B(z, \epsilon)$ es un conjunto abierto que contiene a z. Por hipótesis, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B(z, \epsilon)$ para cualquier $n \geqslant n_0$. Pero esto quiere decir que $d(z, x_n) < \epsilon$ para cualquier $n \geqslant n_0$. ⊠

1.6. Teorema. *Una función $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ es continua en el punto $z \in X$ si y sólo si para cada subconjunto abierto A de (Y, ρ) que contiene al punto $f(z)$, existe un subconjunto abierto B de (X, d) que contiene a z tal que $f[B] \subseteq A$.*

Demostración. Sea $f : (X,d) \to (Y,\rho)$ continua en el punto $z \in X$ y sea A un conjunto abierto de (Y,ρ) que contiene al punto $f(z)$. Entonces, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(f(z),\epsilon) \subseteq A$. Por la continuidad de f en z, existe $\delta > 0$ tal que si $d(x,z) < \delta$, entonces $\rho(f(x), f(z)) < \epsilon$. Así, $B = B(z,\delta)$ satisface $f[B] \subseteq A$.

Ahora supongamos que para cada abierto A que contiene a $f(z)$ podemos encontrar un abierto B que contiene a z tal que $f[B] \subseteq A$. Sea ϵ un número real estrictamente mayor que 0, y sea $A = B(f(z),\epsilon)$. Por hipótesis, existe un abierto B tal que $z \in B$ y $f[B] \subseteq A$. Por la definición de conjunto abierto, existe $\delta > 0$ tal que $B(z,\delta) \subseteq B$. Por lo tanto, si $d(x,z) < \delta$, entonces $\rho(f(x), f(z)) < \epsilon$. Es decir, f es continua en z. $\boxtimes$

Estos últimos teoremas muestran la importancia de los conjuntos abiertos en un espacio métrico, y las propiedades de los conjuntos abiertos mostradas en el teorema 1.3 serán la base para dar la definición de espacio topológico en la siguiente sección.

1.7. Ejemplo. Terminamos esta sección dando un ejemplo de espacio métrico más complejo que involucra al conjunto $C(I)$ de las funciones continuas con valores reales definidas sobre el intervalo unitario cerrado $I = [0,1]$. Este conjunto tiene propiedades muy interesantes. Por ejemplo, si f y g pertenecen a $C(I)$, entonces la funcion $f + g$ definida como

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

también es un elemento de $C(I)$. Lo mismo se puede decir de la función $\lambda \cdot f$, en donde $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f \in C(I)$, definida por $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$. Además, si $f \in C(I)$ entonces $\sup\{f(x) : x \in I\}$ es un número real. Así, podemos definir la función $d_\infty : C(I) \times C(I) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dada por

$$d_\infty(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in I\}.$$

Resulta que d_∞ es una métrica en $C(I)$. En efecto, demostremos que d_∞ satisface la desigualdad del triángulo (es fácil verificar que d_∞ cumple las restantes condiciones que caracterizan a una métrica). Sean f, g y h tres funciones en $C(I)$. Para cada $x \in [0,1]$ se cumple que

$$|f(x) - h(x)| \leqslant |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}|f(x)-h(x)| &\leqslant \sup\{|f(y)-g(y)|+|g(y)-h(y)| : y\in[0,1]\}\\ &\leqslant \sup\{|f(y)-g(y)| : y\in[0,1]\}+\\ &\quad \sup\{|g(y)-h(y)| : y\in[0,1]\}=\\ &\quad d_\infty(f,g)+d_\infty(g,h).\end{aligned}$$

Esto implica que

$$d_\infty(f,h)=\sup\{|f(y)-h(y)| : y\in[0,1]\}\leqslant d_\infty(f,g)+d_\infty(g,h).$$

Se suele denotar por $L^\infty(C(I))$, o como $C_u(I)$, al espacio métrico $(C(I),d_\infty)$.

2. Espacios topológicos

Daremos el nombre de topología en un conjunto dado X, a una colección de subconjuntos de X que tenga ciertas características que nos permitan medir de alguna manera la cercanía o lejanía de los objetos que pertenecen a X con respecto a un subconjunto fijo $E\subseteq X$. Por ejemplo, deseamos determinar cuándo un punto $x\in X$ se encuentra “adherido” o “pegado” a E, o cuándo un subconjunto A de X está “lejos” de E. Para determinar las propiedades de una tal colección de subconjuntos usaremos nuestra experiencia con espacios métricos obtenida a partir de lo tratado en la introducción de este capítulo y en la sección anterior.

1.8. Definiciones.

(1) Una *topología* en un conjunto X es una familia $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X que satisface las siguientes condiciones:
   (A1) el conjunto vacío $\emptyset$ y X pertenecen a $\mathcal{T}$,
   (A2) si $A,B\in\mathcal{T}$, entonces $A\cap B\in\mathcal{T}$, y
   (A3) si $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{T}$, entonces $\bigcup\mathcal{A}\in\mathcal{T}$.

(2) Si $\mathcal{T}$ es una topología en X, a la pareja $(X,\mathcal{T})$ le llamaremos *espacio topológico*, y los elementos que pertenecen a $\mathcal{T}$ reciben el nombre de *subconjuntos abiertos* de X.

Obsérvese que la condición (A2) en 1.8 inciso (1) implica, usando un proceso inductivo, que la intersección de cualquier subcolección finita de elementos en $\mathcal{T}$, también es un elemento en $\mathcal{T}$ (demuéstrese).

Los primeros intentos por definir estructuras topológicas se deben a M. Fréchet y a F. Riesz entre los años 1906 y 1908. La primera definición satisfactoria al respecto fue dada por F. Hausdorff en 1914 [33] en términos de sistemas de vecindades, de manera semejante a lo expresado en la proposición 1.30 que se presenta más adelante.

1.9. Ejemplos.

(1) Sea $X = \{a, b, c\}$. La colección $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\}$ es una topología en X. ¿Es posible construir en este conjunto X una topología diferente a $\mathcal{T}$? (véase el ejercicio (1) en 1.B).

(2) Para cualquier conjunto X, la colección $\mathcal{P}(X)$ de todos sus posibles subconjuntos satisface los axiomas que definen una topología. A ésta le llamaremos *topología discreta en* X, y a la pareja $(X, \mathcal{P}(X))$ *espacio discreto* X.

(3) También es fácil verificar que la colección $\{\emptyset, X\}$ es una topología en un conjunto dado X. A ésta le llamamos *topología indiscreta en* X, y $(X, \{\emptyset, X\})$ es un *espacio indiscreto*.

(4) La colección $\mathcal{T}_0 = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$ es una topología para el conjunto $X = \{0, 1\}$. La pareja $\mathcal{S} = (\{0, 1\}, \mathcal{T}_0)$ es llamado *espacio de Sierpiński*.

(5) Ahora describiremos la *topología cofinita*. Sea X un conjunto cualquiera y

$$\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{E \subseteq X : \ X \setminus E \text{ es finito } \}.$$

De las fórmulas de De Morgan se desprende que $\mathcal{T}$ es una topología en X. En efecto, la condición (A1) en la definición 1.8.1, se satisface trivialmente. Ahora, si A y B son elementos no vacíos en $\mathcal{T}$, entonces $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$ es un conjunto finito ya que es la unión de dos conjuntos finitos; por lo tanto, $A \cap B \in \mathcal{T}$. Por último tenemos que si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}$, o bien $\mathcal{A} \subseteq \{\emptyset\}$, en cuyo caso $\bigcup \mathcal{A} = \emptyset \in \mathcal{T}$, o bien existe un elemento no vacío $A_0 \in \mathcal{A}$, y entonces $X \setminus \bigcup \mathcal{A} = \bigcap \{X \setminus A : A \in \mathcal{A}\} \subseteq X \setminus A_0$. Como $X \setminus A_0$ es finito, así también lo es $X \setminus \bigcup \mathcal{A}$, y por lo tanto $\bigcup \mathcal{A}$ pertenece a $\mathcal{T}$. ¿A qué es igual la topología cofinita en un conjunto finito X?

(6) Dado un espacio métrico (X, d), el teorema 1.3 nos garantiza que la colección $\mathcal{T}_d = \{\emptyset\} \cup \{E \subseteq X : E$ es unión de bolas abiertas$\}$ es una topología en X que llamaremos *topología en* X *inducida por la métrica* d.

En el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ hay una topología de particular importancia; aquella determinada por la métrica euclidiana $e(x, y) =$

$|x-y|$. Las bolas abiertas en $(\mathbb{R}, e)$ coinciden con los intervalos abiertos $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$, con $a < b$. En efecto, $(a,b) = B(x,r)$ en donde $x = \frac{a+b}{2}$ y $r = \frac{|a-b|}{2}$. De esta manera la *topología euclidiana* en $\mathbb{R}$ es

$$\mathcal{T}_e = \{E \subseteq \mathbb{R} : E \text{ es la unión de algunos intervalos abiertos}\} \cup \{\emptyset\}.$$

En general, la topología euclidiana o usual en $\mathbb{R}^m$ está definida por la métrica euclidiana definida en la sección anterior. La bola abierta $B(x,r)$ es el conjunto

$$\{y \in \mathbb{R}^m : \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_m-y_m)^2} < r\}$$

en donde $x = (x_1, ..., x_m)$ y $y = (y_1, ..., y_m)$, y un subconjunto E de $\mathbb{R}^m$ pertenece a la topología $\mathcal{T}_e$ si para cada $x \in E$ existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $B(x,r) \subseteq E$.

Antes de terminar esta sección daremos otro ejemplo de espacio topológico.

1.10. Ejemplo. Tomemos en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ la subcolección

$$\mathcal{T} = \{A \subseteq \mathbb{N} : n \in A \Rightarrow \text{ todo divisor de } n \text{ está en } A\}.$$

Vamos ahora a demostrar que $\mathcal{T}$ es una topología en $\mathbb{N}$.

(1) El conjunto $\emptyset$ pertenece a $\mathcal{T}$ ya que "$n \in \emptyset \Rightarrow$ todo divisor de n pertenece a $\emptyset$" es una proposición verdadera. Además, obviamente, $\mathbb{N} \in \mathcal{T}$.
(2) Sean A y B elementos de $\mathcal{T}$, y sea $n \in A \cap B$. Si m es un divisor de n, entonces, como $n \in A$, m también pertenece a A. Pero lo mismo se puede decir respecto de B; así, resulta que $m \in A \cap B$. Por lo tanto, $A \cap B \in \mathcal{T}$.
(3) Sea $\mathcal{A}$ una subcolección arbitraria de $\mathcal{T}$, y tomemos $n \in \bigcup \mathcal{A}$. Puesto que $n \in A$ para alguna $A \in \mathcal{A}$, todo divisor de n pertenece a A. Es decir, todo divisor de n pertenece a $\bigcup \mathcal{A}$. Por lo tanto, $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{T}$.

3. Comparación de topologías

Dado un conjunto X, siempre es posible definir alguna topología en él. Por ejemplo, podemos considerar la topología discreta o la indiscreta. En el caso en que X posea más de un elemento, la colección de posibles topologías en X consta de más de un elemento. En efecto, en este caso la topología discreta y la indiscreta difieren. Denotemos por $\tau(X)$ al conjunto

$$\{\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X) : \mathcal{T} \text{ es una topología en } X\}.$$

Podemos considerar en $\tau(X)$ el orden parcial definido por la inclusión: $\mathcal{T}_1 \leqslant \mathcal{T}_2 \Leftrightarrow \mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. En este caso diremos que $\mathcal{T}_2$ *es más fina que* $\mathcal{T}_1$ o que $\mathcal{T}_1$ *es más gruesa que* $\mathcal{T}_2$.

1.11. Ejemplos.

(1) Si $\mathcal{T}_1$ es la topología discreta en X y $\mathcal{T}_0$ es la indiscreta, entonces para cualquier otra topología $\mathcal{T}$ en X se cumple que $\mathcal{T}_0 \leqslant \mathcal{T} \leqslant \mathcal{T}_1$. Es decir $\mathcal{T}_1$ es el elemento máximo en $\tau(X)$ y $\mathcal{T}_0$ el mínimo en $\tau(X)$, cualquiera que sea X.

(2) Si $\mathcal{T}$ es la topología cofinita en $\mathbb{R}$, entonces la topología usual $\mathcal{T}_e$ es más fina que $\mathcal{T}$. En verdad, si $A \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ entonces $\mathbb{R} \setminus A$ es un conjunto finito, digamos $\{x_1, ..., x_n\}$. Para cada $x \in A$ tomamos $r_x = \text{mín}\{|x - x_i| : 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Resulta entonces que el intervalo abierto $(x - r_x, x + r_x)$ está contenido en A y por lo tanto $A = \bigcup\{(x - r_x, x + r_x) : x \in A\}$; es decir, A pertenece a $\mathcal{T}_e$. Es claro también que estas dos topologías no coinciden: $(0, 1) \in \mathcal{T}_e \setminus \mathcal{T}$. En forma análoga se puede demostrar que la topología cofinita definida en cualquier espacio métrico (X, d) es más gruesa que la topología $\mathcal{T}_d$ definida por la métrica. Cuando X es un conjunto finito, entonces la topología cofinita y la topología discreta coinciden. Demuestre que si d es una métrica en un conjunto finito X, entonces la topología $\mathcal{T}_d$ en X definida por d, es la topología discreta.

(3) Sea $X = \{a, b, c\}$. Se puede verificar fácilmente que las colecciones $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, X\}$, $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$ y $\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ son tres topologías diferentes en X (véase el ejercicio 1.B.(1)).

Resulta claro que $\mathcal{T}_3 \leqslant \mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_3 \leqslant \mathcal{T}_2$, pero $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ no están relacionadas en el conjunto parcialmente ordenado $(\tau(X), \subseteq)$ (véase la figura 3).

Ahora veremos un ejemplo importante en donde se muestra un método para modificar una topología dada con la idea de generar una topología más fina. Esta técnica fue descrita por primera vez por R H Bing y O. Hanner en 1951 ([13],[35]), y empleada en 1963 por E. Michael

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{P}(X) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathcal{T}_1 \arrow[dr] & & \mathcal{T}_2 \arrow[dl] \\
 & \mathcal{T}_3 \arrow[d] & \\
 & \{\emptyset, X\} &
\end{tikzcd}
$$

FIGURA 3. Topologías incomparables.

[49] para resolver de manera efectiva algunos problemas de paracompacidad que trataremos más adelante.

1.12. EJEMPLO. Consideremos un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ y un subconjunto Y de X. Siempre podemos construir una topología más fina que $\mathcal{T}$ al considerar la colección

$$\mathcal{T}_Y = \{A \cup E : A \in \mathcal{T} \text{ y } E \subseteq Y\}.$$

Es claro que cualquier elemento $A \in \mathcal{T}$ pertenece a $\mathcal{T}_Y$ ya que $A = A \cup \emptyset$ y $\emptyset \subseteq Y$. Por lo tanto, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_Y$. En particular, $\emptyset$ y X también pertenecen a $\mathcal{T}_Y$. Resulta también que cualquier subconjunto E de Y pertenece a $\mathcal{T}_Y$ ya que $E = \emptyset \cup E$ y $\emptyset \in \mathcal{T}$.

Ahora bien, si $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$ y $E_1, E_2 \in \mathcal{P}(Y)$, entonces $(A_1 \cup E_1) \cap (A_2 \cup E_2) = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap E_2) \cup (E_1 \cap A_2) \cup (E_1 \cap E_2)$. Como $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$ y $(A_1 \cap E_2) \cup (E_1 \cap A_2) \cup (E_1 \cap E_2)$ es un subconjunto de Y, entonces $(A_1 \cup E_1) \cap (A_2 \cup E_2)$ pertenece a $\mathcal{T}_Y$.

Finalmente, supongamos que $\mathcal{A} = \{O_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ es una subcolección de $\mathcal{T}_Y$. Para cada $\alpha \in \Lambda$, O_α es de la forma $A_\alpha \cup E_\alpha$, en donde $A_\alpha \in \mathcal{T}$ y $E_\alpha \subseteq Y$. Resulta claro que $\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \cup \bigcup_{\alpha \in \Lambda} E_\alpha$, $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \in \mathcal{T}$ y $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} E_\alpha \subseteq Y$; por lo cual $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{T}_Y$.

De esta manera podemos concluir que $\mathcal{T}_Y$ es una topología en X más fina que $\mathcal{T}$. Es usual denotar al espacio $(X, \mathcal{T}_Y)$ con el símbolo X_Y. Al espacio particular $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{P}})$ en donde $\mathcal{T}$ es la topología usual en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{P}$ es el conjunto de los números irracionales, se le denomina *línea de Michael*.

4. Conjuntos cerrados

Recordemos que hemos llamado subconjunto abierto de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ a cada uno de los elementos en $\mathcal{T}$ y sólo a ellos. Ahora daremos un nombre a los conjuntos que son complemento de algún conjunto abierto.

1.13. Definición. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, y sea $E \subseteq X$. Decimos que E es un *subconjunto cerrado* de $(X, \mathcal{T})$ si $X \setminus E$ es abierto; es decir, si $X \setminus E \in \mathcal{T}$.

El siguiente resultado es una consecuencia de las definiciones 1.8 y 1.13 y de la proposición A.3.

1.14. Proposición. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y sea $\mathcal{F}$ la familia de subconjuntos cerrados de X. Entonces $\mathcal{F}$ satisface las siguientes propiedades.*

(C1) $\emptyset \in \mathcal{F}$ *y* $X \in \mathcal{F}$.
(C2) *Si* $n \in \mathbb{N}$ *y* $F_1, ..., F_n \in \mathcal{F}$, *entonces* $F_1 \cup \cdots \cup F_n \in \mathcal{F}$.
(C3) *Para cualquier* $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, *con* $\mathcal{G} \neq \emptyset$, *se cumple que* $\bigcap \mathcal{G} \in \mathcal{F}$.

Naturalmente, si $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ son dos topologías definidas en el conjunto X y $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$, entonces cualquier subconjunto cerrado de X con respecto a la topología $\mathcal{T}_1$ lo es también cuando consideramos la topología $\mathcal{T}_2$ (véase el ejercicio 1.D.(1)).

1.15. Ejemplos.

(1) Como el complemento de cualquier subconjunto de X es un subconjunto de X, entonces la familia de cerrados en el espacio discreto $(X, \mathcal{P}(X))$ es $\mathcal{P}(X)$. En cambio, si X posee la topología indiscreta, los únicos subconjuntos cerrados de X son $\emptyset$ y X.
(2) Si $\mathcal{T}$ es la topología cofinita en X, entonces es claro que $F \subseteq X$ es cerrado si y sólo si $F = X$ ó F es finito.
(3) Un subconjunto F de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ puede ser a la vez abierto y cerrado, como es el caso de cualquier subconjunto de X cuando $\mathcal{T}$ es la topología discreta. Incluso, para cualquier espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, tanto X como $\emptyset$ son, al mismo tiempo, cerrados y abiertos.
(4) Puede suceder también que un subconjunto de un espacio X no sea ni abierto ni cerrado. Este es el caso, por ejemplo, de cualquier subconjunto propio y no vacío del espacio indiscreto. Otro ejemplo en este sentido es el intervalo $(0, 1]$ en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$.

1.16. Ejemplo. En la sección 1 consideramos el conjunto de funciones continuas $C(I)$, y definimos en él la métrica d_∞. Podemos entonces considerar la topología $\mathcal{T}_\infty$ en $C(I)$ generada por d_∞, como se explicó en la sección 2. Una bola abierta en $(C(I), \mathcal{T}_\infty)$ es de la forma

$$B(f,r) = \{g \in C(I) : \sup\{|g(x) - f(x)| : x \in I\} < r\},$$

(ver figura 4).

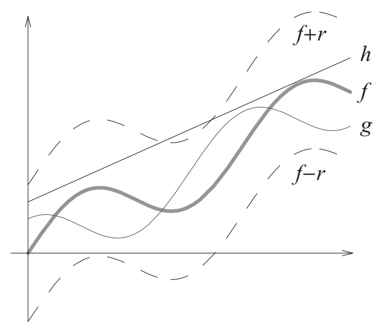

Figura 4. $g \in B(f,r)$ y $h \notin B(f,r)$

Para finalizar esta sección demostraremos que $C_0(I) = \{f \in C(I) : f(0) = 0\}$ es un subconjunto cerrado en $(C(I), \mathcal{T}_\infty)$. Para lograr nuestro objetivo, demostraremos que $C(I) \setminus C_0(I)$ es un elemento en $\mathcal{T}_\infty$; o en otras palabras, vamos a demostrar que para cada $g \in C(I) \setminus C_0(I)$ podemos encontrar un $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que $g \in B(g,\epsilon) \subseteq C(I) \setminus C_0(I)$ (véase el ejemplo 1.7).

Sea pues $g \in C(I) \setminus C_0(I)$. Como $g \notin C_0(I)$, entonces $g(0) \neq 0$. Tomamos $\epsilon = |g(0)|$. Si $h \in B(g,\epsilon)$, entonces $|h(0) - g(0)| < \epsilon$; por lo cual $h(0)$ no puede ser 0. Es decir, $B(g,\epsilon) \subseteq C(I) \setminus C_0(I)$. Por lo tanto, $C_0(I)$ es un subconjunto cerrado de $(C(I), \mathcal{T}_\infty)$.

5. Bases, subbases y bases locales

En general, los subconjuntos abiertos en un espacio $(X, \mathcal{T})$ son muy complicados y es difícil determinar su descripción formal. Por ejemplo, en el plano euclidiano $\mathbb{R}^2$, cualquier curva cerrada simple l determina un subconjunto abierto que está formado por la colección de puntos que se encuentran encerrados por la línea l excluyendo los puntos que pertenecen a l (véase la figura 5). Se puede uno imaginar curvas de este tipo de gran complejidad y por lo tanto subconjuntos abiertos en $\mathbb{R}^2$ cuya descripción es extremadamente complicada. Sin embargo, es posible encontrar en $\mathbb{R}^2$ alguna subcolección $\mathcal{B}$ de subconjuntos abiertos cuyos miembros tienen una estructura muy bien definida y la cual se presta para un fácil manejo, y que, además, nos proporciona toda la información topológica que contiene $\mathcal{T}$. Un ejemplo en este sentido es la colección de las bolas abiertas en el plano euclidiano.

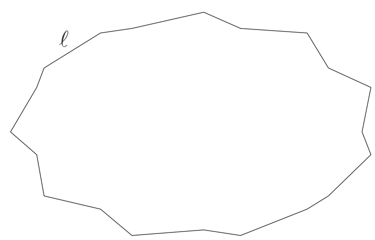

Figura 5. ℓ es una curva cerrada simple

Uno de los objetivos de esta sección es caracterizar a las subcolecciones de una topología $\mathcal{T}$ que contengan toda la información que posee $\mathcal{T}$; y en particular, daremos ejemplos de subcolecciones de este tipo cuyos elementos, además, tengan fácil descripción y su manejo nos permita obtener información del espacio $(X, \mathcal{T})$ con agilidad.

1.17. Definición. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Una subcolección $\mathcal{B}$ de $\mathcal{T}$ es una *base* para $\mathcal{T}$ si para cada elemento $A \in \mathcal{T}$ existe $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ tal que $A = \bigcup \mathcal{A}$.

Trivialmente, $\mathcal{T}$ misma es una base para $(X, \mathcal{T})$.

Para un espacio métrico (X, d), definimos en la sección 2 la topología $\mathcal{T}_d$ generada por la métrica d como la colección $\{\emptyset\} \cup \{E \subseteq X : E$ es la unión de bolas abiertas en $X\}$. Es decir, la colección de bolas abiertas en X, $\mathcal{B}_d = \{B(x, r) : x \in X$ y $r \in \mathbb{R}^+\}$, es una base de $(X, \mathcal{T}_d)$.

A continuación exhibiremos una característica bastante útil de las bases.

1.18. Proposición. *Una subcolección $\mathcal{B}$ de una topología $\mathcal{T}$ en X es una base de $\mathcal{T}$ si y sólo si para cada $A \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ y cada $x \in A$, existe $B \in \mathcal{B}$ con la propiedad $x \in B \subseteq A$.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{T}$, $A \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ y $x \in A$. Por definición, podemos encontrar $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ tal que $A = \bigcup \mathcal{A}$. Esto significa que para algún $B \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ se cumple que $x \in B \subseteq A$. Recíprocamente, sea $A \in \mathcal{T}$ no vacío. Para cada $x \in A$ podemos encontrar $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subseteq A$. Resulta entonces que $A = \bigcup \{B_x : x \in A\}$. ⊠

1.19. Ejemplos.

(1) La topología discreta $\mathcal{T}$ sobre cualquier conjunto X posee una base cuyos elementos son muy simples. En efecto, la colección $\{\{x\} : x \in X\}$ constituye una base para $\mathcal{T}$.

(2) Ya habíamos mencionado que para cada espacio métrico (X, d), la colección de bolas abiertas en X forma una base para la topología generada por d. Sin embargo, podemos exhibir una base aún más pequeña y manejable como $\mathcal{E}_d = \{B(x, 1/n) : x \in X \text{ y } n \in \mathbb{N}\}$. El lector puede verificar que $\mathcal{E}_d$ es una base para $\mathcal{T}_d$.

(3) Supongamos que $\widehat{x} = (x_0, y_0)$ es un punto en el plano $\mathbb{R}^2$ y que ϵ es un número real positivo. Consideremos la bola abierta $B(\widehat{x}, \epsilon)$. Haciendo algunos cálculos, podemos demostrar que el cuadrado $C(\widehat{x}, \epsilon) = \{(x, y) : \text{máx}\{|x - x_0|, |y - y_0|\} < \sqrt{\epsilon}/2\}$ contiene a $\widehat{x}$ y está incluido totalmente en $B(\widehat{x}, \epsilon)$ (véase la figura 6 y demuéstrese que cada conjunto de la forma $C(\widehat{x}, \epsilon)$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ considerado con su topología usual $\mathcal{T}_e$).

Por la proposición 1.18 podemos deducir que la colección de cuadrados de la forma $C(\widehat{x}, \epsilon)$ constituye una base para la topología $\mathcal{T}_e$. De manera más general, es posible probar que la colección de rectángulos abiertos de la forma

$$(a, b) \times (c, d) = \{(x, y) : a < x < b \ \text{ y } \ c < y < d\},$$

en donde a, b, c, d son números reales que satisfacen $a < b$ y $c < d$, también es una base para la topología $\mathcal{T}_e$ (ver ejercicio (3) en 1.E).

(4) La topología $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, X\}$ en $X = \{a, b, c\}$ tiene cuatro posibles bases, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{T}_1$, $\mathcal{B}_2 = \mathcal{T}_1 \setminus \{\emptyset\}$, $\mathcal{B}_3 = \mathcal{T}_1 \setminus \{X\}$ y $\mathcal{B}_4 = \mathcal{T}_1 \setminus \{\emptyset, X\}$, como el lector podrá constatar. En cambio la topología $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$, también en X, tiene

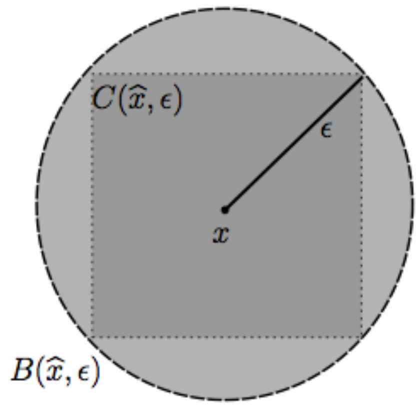

FIGURA 6. Cada bola $B(\widehat{x},\epsilon)$ contiene una caja $C(\widehat{x},\epsilon)$.

como bases: $\mathcal{B}_1 = \mathcal{T}_2$, $\mathcal{B}_2 = \mathcal{T}_2 \setminus \{\emptyset\}$, $\mathcal{B}_3 = \{\{a\},\{b\},X\}$ y $\mathcal{B}_4 = \mathcal{B}_3 \cup \{\emptyset\}$.

1.20. OBSERVACIÓN. Obsérvese que si $\mathcal{B}$ es una base de una topología $\mathcal{T}$ en X, entonces $\mathcal{B}$ debe cubrir a X (es decir, $\bigcup \mathcal{B} = X$) y para cada subcolección finita $B_1, ..., B_n \in \mathcal{B}$, si $x \in B_1 \cap \cdots \cap B_n$, entonces debe existir un elemento B de $\mathcal{B}$ que satisfaga $x \in B \subseteq B_1 \cap \cdots \cap B_n$.

1.21. DEFINICIÓN. Una subcolección $\mathcal{S}$ de una topología $\mathcal{T}$ en X es una *subbase* para $(X,\mathcal{T})$ si $\mathcal{B} = \{\bigcap \mathcal{A} : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{S} \text{ y } 0 < |\mathcal{A}| < \aleph_0\}$ es una base para $\mathcal{T}$. Es decir, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ es una subbase para $\mathcal{T}$ si, y sólo si, para cada $A \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ y cada $x \in A$ existe $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}$ finita no vacía tal que $x \in \bigcap \mathcal{A} \subseteq A$ (véase la proposición 1.18).

Es claro que la colección de intersecciones de subcolecciones finitas de una topología $\mathcal{T}$ generan a $\mathcal{T}$ como base, de tal manera que $\mathcal{T}$ es un ejemplo evidente de subbase de ella misma. También, usando la observación en 1.20 podemos con facilidad concluir que cada base de una topología $\mathcal{T}$, constituye una subbase de $\mathcal{T}$. En seguida damos otros ejemplos de familias de conjuntos que son subbases de alguna topología.

1.22. EJEMPLOS.

(1) Consideremos a la línea real con su topología usual $(\mathbb{R},\mathcal{T}_e)$. Ya mencionamos que la colección de intervalos abiertos (a,b) con $a < b$, forma una base de $\mathcal{T}_e$. Es claro, entonces, que la colección

$\mathcal{S}_e = \{(\leftarrow, a) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, \rightarrow) : a \in \mathbb{R}\}$ es una subbase para $\mathcal{T}_e$, en donde $(\leftarrow, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ y $(a, \rightarrow) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$. (véase la figura 7).

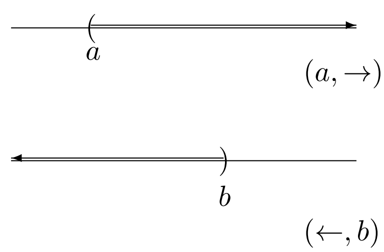

Figura 7. Los intervalos $(a, \rightarrow)$ y $(\leftarrow, a)$

(2) En el ejemplo 1.19 inciso (3), se comentó que la colección de rectángulos abiertos del tipo $\{(a, b) \times (c, d) : a < b \text{ y } c < d\}$ forma una base para la topología euclidiana $\mathcal{T}_e$ en $\mathbb{R}^2$. De tal manera que una subbase para esta topología es la colección $\mathcal{S}_e = \{(a, b) \times \mathbb{R} : a, b \in \mathbb{R} \text{ y } a < b\} \cup \{\mathbb{R} \times (c, d) : c, d \in \mathbb{R} \text{ y } c < d\}$ (véase la figura 8).

(3) Otro ejemplo de subbase para la topología euclidiana $\mathcal{T}_e$ en $\mathbb{R}^2$ lo constituye la colección de semiplanos $\mathcal{S}_e = \{(a, \rightarrow) \times \mathbb{R} : a \in \mathbb{R}\} \cup \{(\leftarrow, b) \times \mathbb{R} : b \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R} \times (c, \rightarrow) : c \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R} \times (\leftarrow, d) : d \in \mathbb{R}\}$.

El siguiente concepto es de gran utilidad para el análisis de las propiedades topológicas locales de un espacio.

1.23. Definiciones. Sea x un elemento del espacio topológico $(X, \mathcal{T})$. Un subconjunto V de X es *una vecindad de x en el espacio $(X, \mathcal{T})$* si podemos encontrar un $A \in \mathcal{T}$ que satisfaga $x \in A \subseteq V$. A la colección de vecindades de x en X le llamamos *sistema de vecindades del punto x (en $(X, \mathcal{T})$)* y lo denotamos por $\mathcal{V}(x)$.

Intuitivamente, el sistema de vecindades $\mathcal{V}(x)$ de un punto x determina el comportamiento de la topología alrededor del punto. Por otro lado, de la definición anterior se desprende que un subconjunto abierto no vacío es vecindad de cada uno de sus puntos.

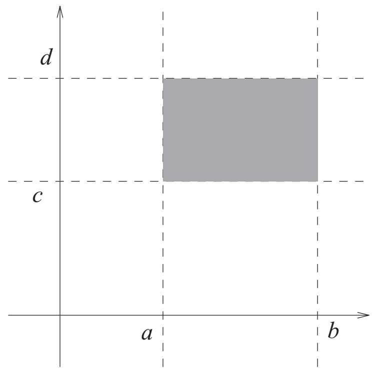

FIGURA 8. $(a,b) \times (c,d) = \big((a,b) \times \mathbb{R}\big) \cap \big(\mathbb{R} \times (c,d)\big)$

1.24. PROPOSICIÓN. *Un subconjunto A de un espacio $(X, \mathcal{T})$ es abierto si y sólo si para cada $x \in A$ existe una vecindad $V \in \mathcal{V}(x)$ tal que $V \subseteq A$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $A \in \mathcal{T}$ y $x \in A$. Sabemos que A es una vecindad de x y, claro está, $A \subseteq A$. Inversamente, supongamos que para cada punto $x \in A$ podemos encontrar $V_x \in \mathcal{V}(x)$ con la propiedad $V_x \subseteq A$. Por definición, existe un abierto B_x tal que $x \in B_x \subseteq V_x$. Entonces $A = \bigcup_{x \in A} B_x$ y por ello, $A \in \mathcal{T}$. ⊠

La siguiente proposición resume las propiedades más importantes de los sistemas de vecindades de los puntos de un espacio topológico.

1.25. PROPOSICIÓN. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, y supongamos que para cada $x \in X$ hemos elegido un sistema de vecindades $\mathcal{V}(x)$. Entonces se tiene lo siguiente:*

(1) *Si $U \in \mathcal{V}(x)$ entonces $x \in U$.*
(2) *Si $U, V \in \mathcal{V}(x)$ entonces $U \cap V \in \mathcal{V}(x)$.*
(3) *Para cada $U \in \mathcal{V}(x)$, existe un $V \in \mathcal{V}(x)$ tal que $U \in \mathcal{V}(y)$ para cada $y \in V$.*
(4) *Si $U \in \mathcal{V}(x)$ y $U \subseteq V \subseteq X$ entonces $V \in \mathcal{V}(x)$.*

DEMOSTRACIÓN. Aplicando la definición de vecindad obtenemos la demostración de la propiedad del inciso (1). Para demostrar (2), note que debido a que $U, V \in \mathcal{V}(x)$ existen abiertos $A, B \in \mathcal{T}$ tales que $x \in A \subseteq U$ y $x \in B \subseteq V$. Entonces $x \in A \cap B \subseteq U \cap V$ y $A \cap B \in \mathcal{T}$. De donde, $U \cap V \in \mathcal{V}(x)$.

Para demostrar (3), suponga que $U \in \mathcal{V}(x)$ es arbitrario. Entonces existe $V \in \mathcal{T}$ tal que $x \in V \subseteq U$. Por ser V abierto, tenemos que $V \in \mathcal{V}(x)$. Además, si $y \in V$ entonces $y \in V \subseteq U$ y $V \in \mathcal{T}$. Por ello, $U \in \mathcal{V}(y)$ para cada $y \in V$.

Dejamos la demostración de la propiedad (4) al lector. ⊠

Así como una base de una topología $\mathcal{T}$ contiene toda la información de $\mathcal{T}$, también podemos tomar de manera conveniente alguna subcolección de $\mathcal{V}(x)$ que guarde la información topológica que nos proporciona $\mathcal{V}(x)$. A una colección así le llamaremos *base de vecindades de x en $(X, \mathcal{T})$*. De manera formal la definición es la siguiente.

1.26. Definición. Para un punto x en un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, una colección $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{V}(x)$ es *una base de vecindades de x en $(X, \mathcal{T})$* si para cada $V \in \mathcal{V}(x)$ podemos encontrar $B \in \mathcal{B}(x)$ tal que $B \subseteq V$.

Obsérvese que en particular la colección de subconjuntos abiertos de X que contienen a x forma una base de vecindades de x.

1.27. Observaciones.

(1) Si $\mathcal{B}(x)$ es una base de vecindades de x, entonces el sistema de vecindades de x, $\mathcal{V}(x)$, puede ser reconstruido a partir de $\mathcal{B}(x)$ de la siguiente manera:

$$\mathcal{V}(x) = \{V \subseteq X : \exists\, B \in \mathcal{B}(x) \text{ con } B \subseteq V\}.$$

(2) Si $\mathcal{B}$ es una base para la topología $\mathcal{T}$ en X, y $x \in X$, entonces no es difícil demostrar que la colección $\mathcal{B}(x) = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ es una base de vecindades de x. Así por ejemplo, en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$, para que un subconjunto V de $\mathbb{R}$ sea vecindad de un punto x, es suficiente y necesario que haya un intervalo (a, b) tal que $x \in (a, b) \subseteq V$. O si consideramos la topología discreta en un conjunto no vacío X, cualquier subconjunto de X que contiene a x pertenece a $\mathcal{V}(x)$.

1.28. Ejemplo. Sea (X, d) un espacio métrico, y sea $\mathcal{T}_d$ la topología definida por la métrica d (véase la sección 2 de este capítulo). La colección $\{B(x, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ forma una base de vecindades del punto x en $(X, \mathcal{T}_d)$.

1.29. Observación. Supongamos que para cada $x \in X$ hemos considerado una base de vecindades $\mathcal{B}(x)$ de x. De la definición de base de vecindades, resulta que un subconjunto no vacío A de X es abierto si, y sólo si, para cada $x \in A$ existe un elemento $B \in \mathcal{B}(x)$ con la propiedad $x \in B \subseteq A$. Es decir, la colección $\bigcup_{x \in X} \mathcal{B}(x)$ tiene todas las propiedades para ser una base para X, excepto, posiblemente, la de que sus elementos sean conjuntos abiertos. A colecciones de este tipo se les llama *redes* y son una generalización del concepto de base (ver ejercicio 5.E.(2)).

La siguiente proposición resume las propiedades más importantes de las bases de vecindades en un espacio topológico.

1.30. Proposición. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, y supongamos que para cada $x \in X$ hemos elegido una base de vecindades $\mathcal{B}(x)$. Entonces se tiene lo siguiente:*

(1) *Si V_1 y V_2 son miembros de $\mathcal{B}(x)$, entonces existe $V_3 \in \mathcal{B}(x)$ tal que $V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$.*
(2) *Para cada $V \in \mathcal{B}(x)$ podemos escoger un $V_0 \in \mathcal{B}(x)$ tal que si $y \in V_0$, entonces existe $W \in \mathcal{B}(y)$ la cual está contenida en V.*

Demostración. Para demostrar (1) tomemos V_1 y V_2 en $\mathcal{B}(x)$. Por definición, existen dos abiertos A_1 y A_2 que cumplen $x \in A_1 \subseteq V_1$ y $x \in A_2 \subseteq V_2$. Así tenemos que $x \in A_1 \cap A_2$ y este conjunto es abierto; esto significa que $A_1 \cap A_2$ es vecindad de x. Por lo tanto, debe existir $V_3 \in \mathcal{B}(x)$ que satisface $x \in V_3 \subseteq A_1 \cap A_2 \subseteq V_1 \cap V_2$.

(2) Como V es una vecindad de x, existe $A \in \mathcal{T}$ tal que $x \in A \subseteq V$. A es una vecindad de x, por lo que podemos encontrar $V_0 \in \mathcal{B}(x)$ tal que $x \in V_0 \subseteq A$. De tal modo que si $y \in V_0$, entonces $y \in A$ y A es vecindad de y. Por lo tanto, existe $W \in \mathcal{B}(y)$ que cumple la relación $W \subseteq A \subseteq V$. ⊠

6. Subespacios

Supongamos que $\mathcal{T}$ es una topología definida sobre un conjunto X y que Y es un subconjunto de X. Ya hemos mencionado en las secciones anteriores cómo, dado un subconjunto S de X, $\mathcal{T}$ proporciona una forma de medir qué tan cercanos a S se encuentran otros objetos contenidos en X, así que una forma natural de proporcionarle a Y una noción de cercanía es la siguiente: para un $A \subseteq Y$ fijo, $B \subseteq Y$ está cercano a A en Y si, considerados como objetos de X, B está cercano a A. La presente sección está dedicada a analizar algunas consecuencias de esta idea.

Dado el espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ y dado $Y \subseteq X$, definimos la colección

$$\mathcal{T}\restriction Y = \{A \cap Y : A \in \mathcal{T}\}.$$

1.31. PROPOSICIÓN. *$\mathcal{T}\restriction Y$ es una topología en Y.*

DEMOSTRACIÓN. Como $\emptyset, X \in \mathcal{T}$, tenemos que $\emptyset, Y \in \mathcal{T}\restriction Y$. Si $A, B \in \mathcal{T}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{T}$ y $(A \cap Y) \cap (B \cap Y) = (A \cap B) \cap Y$. Y para concluir, si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}$, $\bigcup\{A \cap Y : A \in \mathcal{A}\} = (\bigcup \mathcal{A}) \cap Y$. $\boxtimes$

A $\mathcal{T}\restriction Y$ le llamaremos *topología relativa en Y con respecto a* $(X, \mathcal{T})$, y diremos que $(Y, \mathcal{T}\restriction Y)$ es un *subespacio* de $(X, \mathcal{T})$.

1.32. EJEMPLO.

(1) En el espacio $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ la topología relativa en $\mathbb{Z}$ es la discreta. Para demostrar esto bastará probar que cualquier subconjunto unipuntual, es decir, cualquier subconjunto con exactamente un elemento, de $\mathbb{Z}$ es abierto en la topología relativa, pero esto es una consecuencia inmediata de la igualdad $\{n\} = (n - 1/2, n + 1/2) \cap \mathbb{Z}$, para cada $n \in \mathbb{Z}$.

(2) Sea X un conjunto infinito y $Y = X \cup \{p\}$ con $p \notin X$. Consideremos en Y la topología $\mathcal{T}_{p,\aleph_0}$ definida en los ejercicios (6) y (7) en 1.B. La topología que hereda X de $\mathcal{T}_{p,\aleph_0}$ es la topología discreta. Para confirmar esta afirmación sólo tenemos que probar que para cada $x \in X$, podemos encontrar $A \in \mathcal{T}_{p,\aleph_0}$ tal que $A \cap X = \{x\}$. Pero esto es trivialmente cierto porque $\{x\} \in \mathcal{T}_{p,\aleph_0}$ para cada $x \in X$.

El resultado siguiente nos proporciona un método para generar bases y subbases para los subespacios de un espacio dado.

1.33. PROPOSICIÓN. *Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $Y \subseteq X$ y $y \in Y$.*

(1) *Si $\mathcal{B}$ es una base (subbase) para $\mathcal{T}$, entonces $\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ es una base (subbase) para $\mathcal{T}\restriction Y$.*

(2) *Si $\mathcal{B}(y)$ es una base local de y en $(X, \mathcal{T})$, entonces $\{B \cap Y : B \in \mathcal{B}(y)\}$ es una base local de y en $(Y, \mathcal{T}\restriction Y)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sólo desarrollaremos la demostración de la parte concerniente a bases en (1) a manera de ejemplo. Supongamos, pues, que $\mathcal{B}$ es base para $\mathcal{T}$. Dado $A \in \mathcal{T}\restriction Y$ debe existir $A^+ \in \mathcal{T}$ de tal modo que $A = A^+ \cap Y$. Por nuestra suposición, debe existir $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ de manera que

$A^+ = \bigcup \mathcal{A}$ y, por ende, $A = \bigcup \mathcal{A}^+$, donde $\mathcal{A}^+ = \{B \cap Y : B \in \mathcal{A}\} \subseteq \mathcal{B}_Y$. ⊠

1.34. Ejemplo.

(1) Sabemos que una base para $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ es $\{(a,b) : a < b\}$, así que una base para la topología relativa en $[0,1]$ es

$$\{[0,b) : 0 < b \leqslant 1\} \cup \{(a,b) : 0 < a < b < 1\} \cup \{(a,1] : 0 \leqslant a < 1\}.$$

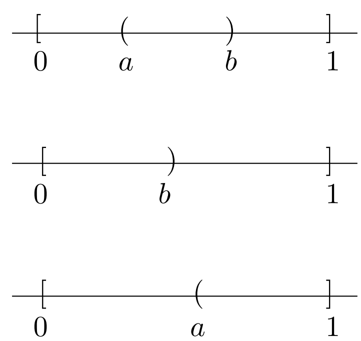

Figura 9. Básicos del subespacio $[0,1]$.

(2) Gracias a las afirmaciones en el ejercicio 1.E inciso (6) y de la proposición anterior, resulta que el subespacio $\mathbb{P}$ de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{P}})$ (véase el ejemplo 1.12) es discreto. Por otro lado, la topología relativa en $\mathbb{Q}$ heredada de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{P}})$, coincide con la topología euclidiana en $\mathbb{Q}$.

1.35. Observación. De la definición de la topología heredada por un subconjunto E de un espacio X, es claro que $F \subseteq E$ es cerrado en E si existe un cerrado G en X tal que $F = G \cap E$. En efecto, si F es cerrado en E, entonces $E \setminus F$ es abierto en E; lo cual significa que $E \setminus F$ es de la forma $A \cap E$, en donde A es un subconjunto abierto de X. No es muy difícil ahora demostrar que si $G = X \setminus A$, $F = G \cap E$.

A partir de este momento la frase *"Y es un subespacio de X"* significa que Y es un subconjunto del espacio topológico X y que Y posee la topología relativa.

Ahora supongamos que (X, d) es un espacio métrico y que $Y \subseteq X$. Obsérvese que la restricción de d en $Y \times Y$, d^*, es una métrica en Y, así que podemos considerar la topología $\mathcal{T}_{d^*}$ en Y generada por d^*. Resulta que $\mathcal{T}_d \restriction Y = \mathcal{T}_{d^*}$ (ver ejercicio 1.F.(1)).

7. Generación de topologías a partir de subcolecciones del conjunto potencia de X

Las ideas expresadas y analizadas en la sección anterior nos motivan a obtener métodos para construir topologías en un conjunto X a partir de subcolecciones de $\mathcal{P}(X)$ que satisfagan ciertas condiciones preestablecidas.

A continuación tenemos un primer resultado en este sentido. Este resultado nos proporciona un método para generar una topología en un conjunto utilizando a una colección de conjuntos de tal forma que ella resulte ser una base de la topología generada.

1.36. Proposición. *Sea $\mathcal{B}$ una familia de subconjuntos de un conjunto X que satisface*

(1) *$X = \bigcup \mathcal{B}$, y*
(2) *si B_1 y B_2 son elementos de $\mathcal{B}$, y $x \in B_1 \cap B_2$, entonces existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$ (veáse la figura 10).*

Entonces, la colección $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \{A \subseteq X : \exists\, \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \text{ con } A = \bigcup \mathcal{A}\}$ es una topología en X que contiene a $\mathcal{B}$ como base.

Demostración. Por (1), $X \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. El conjunto $\emptyset$ está en $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ ya que $\emptyset \subseteq \mathcal{B}$ y $\bigcup \emptyset = \emptyset$. Además, es fácil ver que la condición (A3) en la definición 1.8.1 se satisface. Tomemos ahora $A_1, A_2 \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Para cada $x \in A_1 \cap A_2$, existen $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ tales que $x \in B_1 \cap B_2$ y $B_i \subseteq A_i$ para $i \in \{1, 2\}$ (esto ya que cada A_i es unión de elementos en $\mathcal{B}$). El inciso (2) nos garantiza que podemos encontrar un elemento B_x de $\mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subseteq B_1 \cap B_2$. Ahora es fácil ver que $A_1 \cap A_2 = \bigcup \{B_x : x \in A_1 \cap A_2\}$; es decir, $A_1 \cap A_2$ pertenece a $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. $\boxtimes$

1.37. Ejemplo. Ya en la sección 1 de este capítulo nos detuvimos a reflexionar un poco sobre el anillo de funciones continuas $C(I)$. Definimos en esa ocasión en $C(I) \times C(I)$ la función d_∞ y demostramos que era una métrica sobre $C(I)$. Podemos entonces considerar la topología

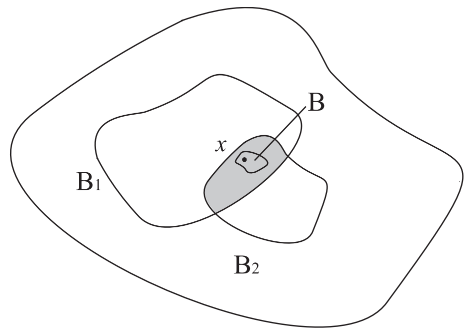

Figura 10. B_1 y B_2 son elementos de una base $\mathcal{B}$ de X. Si $x \in B_1 \cap B_2$, entonces existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$.

$\mathcal{T}_\infty$ que esta métrica define en el conjunto $C(I)$ (véase la sección 2 de este capítulo). Una bola abierta en $(C(I), \mathcal{T}_\infty)$, como ya mencionamos en el ejemplo 1.16, es de la forma

$$B(f,r) = \{g \in C(I) : \sup\{|g(x) - f(x)| : x \in I\} < r\}.$$

Por otra parte, podemos obtener una topología en $C(I)$ diferente a $\mathcal{T}_\infty$ al considerar para cada $f \in C(I)$, cada $n \in \mathbb{N}$, cada colección $\{x_1, ..., x_n\}$ de elementos en I y cada $r \in \mathbb{R}^+$, a la colección

$$[f; x_1, ..., x_n; r] = \{g \in C(I) : \ \forall\, 1 \leqslant i \leqslant n \ (\ |f(x_i) - g(x_i)| < r \ ) \ \}$$

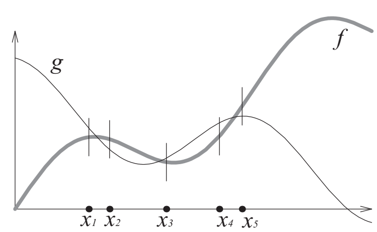

Figura 11. $g \in [f; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5; \epsilon]$

Efectivamente, definamos al conjunto $\mathcal{B}_p$ como la colección

$$\mathcal{B}_p = \{[f; x_1, ..., x_n; r] : f \in C(I), \ n \in \mathbb{N}, \ x_1, ..., x_n \in I, \ r \in \mathbb{R}^+\}.$$

Definamos también $\mathcal{T}_p = \{E \subseteq C(I) : \exists\, \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}_p \text{ con } E = \bigcup \mathcal{A}\}$. A continuación verificaremos que $\mathcal{T}_p$ es una topología para $C(I)$. Primero note que $C(I) = \bigcup \mathcal{B}_p$. Además, si

$$h \in [f; x_1, ..., x_n; r] \cap [g; y_1, ..., y_m; s],$$

entonces podemos tomar $\epsilon' = \text{máx}\{|f(x_i) - h(x_i)| : i = 1, \ldots, n\} < r$ y $\delta' = \text{máx}\{|g(y_i) - h(y_i)| : i = 1, \ldots, m\} < s$. Definamos ahora $\epsilon = r - \epsilon'$, $\delta = s - \delta'$ y consideremos $0 < t < \text{mín}\{\epsilon, \delta\}$ (obsérvese que ϵ y δ son números reales > 0). Pedimos al lector que compruebe que

$$[h; x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m; t] \subseteq [f; x_1, ..., x_n; r] \cap [g; y_1, ..., y_m; s].$$

Ahora, por la proposición 1.36, podemos concluir que $\mathcal{T}_p$ es una topología en $C(I)$. Se puede demostrar también que $\mathcal{T}_p$ está contenida propiamente en $\mathcal{T}_\infty$ (véase el ejercicio 1.G.(2)). A la pareja $(C(I), \mathcal{T}_p)$ la denotaremos con los símbolos $C_p(I)$.

La topología generada por una colección $\mathcal{S}$ como una subbase: A partir de una colección no vacía $\mathcal{S}$ de subconjuntos de X que cubre a X, podemos generar siempre una topología $\mathcal{T}_\mathcal{S}$ en X de forma tal que $\mathcal{S}$ se convierta en subbase de $\mathcal{T}_\mathcal{S}$. Para lograr esto tomamos la colección $\mathcal{B}_\mathcal{S} = \{B \subseteq X : \exists\, \mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S} \text{ con } 0 < |\mathcal{S}_0| < \aleph_0 \text{ y } \bigcap \mathcal{S}_0 = B\}$. Resulta ahora que $\mathcal{B}_\mathcal{S}$ satisface las condiciones de la proposición 1.36 y por lo tanto $\mathcal{B}_\mathcal{S}$ genera una topología $\mathcal{T}_\mathcal{S}$ que tiene como base a $\mathcal{B}_\mathcal{S}$, y, naturalmente, $\mathcal{S}$ es una de sus subbases.

1.38. Ejemplo. (*Espacios topológicos linealmente ordenados*) Sea $(X, \leqslant)$ un conjunto linealmente ordenado no vacío con al menos dos elementos. Para cada $a \in X$, definimos $I_a = \{x \in X : x < a\}$ y $D_a = \{x \in X : x > a\}$. A I_a le llamamos *segmento inicial definido por a*, y el nombre de D_a es *segmento final definido por a* (también denotaremos a I_a con $(\leftarrow, a)$ y a D_a con $(a, \rightarrow)$, como hicimos en el ejemplo 1.22). Entonces, la colección $\mathcal{S} = \{I_a : a \in X\} \cup \{D_a : a \in X\}$ es una subbase para una topología $\mathcal{T}_\leqslant$ en X que llamaremos *topología inducida por el orden $\leqslant$*.

Una base de $\mathcal{T}_\leqslant$ es pues la colección $\mathcal{B} = \mathcal{S} \cup \{(a, b) : a, b \in X \text{ y } a < b\}$ (es decir, $\mathcal{B}$ es la colección de todos los segmentos iniciales, más todos los segmentos finales, más todos los intervalos abiertos en X).

Por lo expuesto en el ejemplo 1.22 inciso (1), concluimos que la topología euclidiana en $\mathbb{R}$ coincide con la topología generada por el orden usual en $\mathbb{R}$.

Veamos otro ejemplo: consideremos el conjunto $I \times I = \{(a,b) : 0 \leqslant a, b \leqslant 1\}$. En este cuadrado podemos definir un orden lineal del modo siguiente: $(a,b) < (c,d) \Leftrightarrow a < c$ ó $a = c$ y $b < d$. Este es el orden *lexicográfico* en I^2, llamado así ya que corresponde al orden que se utiliza en los diccionarios. La pareja $(I^2, \leqslant)$ forma un conjunto linealmente ordenado de tal modo que podemos considerar la topología $\mathcal{T}_{\leqslant}$ generada por este orden en I^2. La figura 17 muestra gráficamente la forma que tienen los intervalos en este conjunto. Es posible demostrar que $\mathcal{T}_{\leqslant}$ no está contenida ni contiene a la topología euclideana heredada en I^2 (véase el ejercicio 1.G.(6)).

Ahora daremos otro método para generar una topología en un conjunto no vacío X, asignando a cada punto del conjunto X una colección de subconjuntos que resultarán ser los sistemas de vecindades de los puntos del espacio topológico resultante.

1.39. PROPOSICIÓN. *Si para cada elemento x en un conjunto X, se elige una familia $\mathcal{V}(x) \neq \emptyset$ de subconjuntos de X de tal forma que las colecciones $\mathcal{V}(x)$ tienen las siguientes propiedades:*

(1) *Si $U \in \mathcal{V}(x)$ entonces $x \in U$.*
(2) *Si $U, V \in \mathcal{V}(x)$ entonces $U \cap V \in \mathcal{V}(x)$.*
(3) *Para cada $U \in \mathcal{V}(x)$, existe un $V \in \mathcal{V}(x)$ tal que $U \in \mathcal{V}(y)$ para cada $y \in V$.*
(4) *Si $U \in \mathcal{V}(x)$ y $U \subseteq V \subseteq X$ entonces $V \in \mathcal{V}(x)$.*

entonces la familia

$$\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{A \subseteq X : \text{ para cada } x \in A, \text{ existe } V \in \mathcal{V}(x) \text{ con } V \subseteq A\}$$

es una topología en X y cada $\mathcal{V}(x)$ resulta ser el sistema de vecindades de x para esta topología.

DEMOSTRACIÓN. Primero demostremos que $\mathcal{T}$ es una topología para X. Por definición, $\emptyset \in \mathcal{T}$. Por otro lado, si $x \in X$ entonces por hipótesis, existe $U \in \mathcal{V}(x)$. Entonces $x \in U \subseteq X$. Esto muestra que $X \in \mathcal{T}$. Ahora bien, si A_1 y A_2 son elementos de $\mathcal{T}$ y $x \in A_1 \cap A_2$ entonces existen $U, V \in \mathcal{V}(x)$ tales que $x \in U \subseteq A_1$ y $x \in V \subseteq A_2$. Por la propiedad (2), tenemos que $U \cap V \in \mathcal{V}(x)$ y como $x \in U \cap V \subseteq A_1 \cap A_2$, podemos concluir que $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$. Finalmente, si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}$ y $x \in \bigcup \mathcal{A}$ entonces existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A$. Como $A \in \mathcal{T}$, existe $U \in \mathcal{V}(x)$ tal que $x \in U \subseteq A$. Claramente $U \subseteq \bigcup \mathcal{A}$, por ello, y por lo anterior, podemos concluir que $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{T}$. De esta forma, hemos demostrado que $\mathcal{T}$ es una topología para X.

Demostremos ahora que $\mathcal{V}(x)$ es el sistema fundamental de vecindades para x en $(X,\mathcal{T})$. Para ello primero notemos que cada elemento de $\mathcal{V}(x)$ es en efecto una vecindad de x en $(X,\mathcal{T})$. Sea $U \in \mathcal{V}(x)$. Entonces $A = \{y \in U : U \in \mathcal{V}(y)\} \in \mathcal{T}$. Efectivamente, si $a \in A$ entonces $a \in U$ y $U \in \mathcal{V}(a)$. Por (3), existe $V_a \in \mathcal{V}(a)$ tal que $U \in \mathcal{V}(y)$ para cada $y \in V_a$. Por la definición de A, tenemos que $V_a \subseteq A$. Por (4), esto último implica que $A \in V(a)$. Esto prueba que $A \in T$. Además, como $U \in \mathcal{V}(x)$ por la definición de A, se tiene que $x \in A$. En resumen, $x \in \mathcal{A} \subseteq U$ y $A \in \mathcal{T}$. Por ello, U es vecindad de x en $(X,\mathcal{T})$.

Por otro lado, si W es una vecindad de x en $(X,\mathcal{T})$ entonces por definición de vecindad, existe un elemento $B \in \mathcal{T}$ tal que $x \in B \subseteq W$. Como $x \in B \in \mathcal{T}$, existe una $U \in \mathcal{V}(x)$ tal que $x \in U \subseteq B$. Pero por (4), $U \subseteq B \subseteq W$ implica que $W \in \mathcal{V}(x)$.

Por lo tanto, $\mathcal{V}(x)$ es el sistema de vecindades de x en $(X,\mathcal{T})$. ⊠

Nuestro propósito ahora es generar una topología en un conjunto X, asignando a cada punto del conjunto X una colección de subconjuntos que resulte ser una base para el sistema fundamental de vecindades de cada punto del espacio topológico resultante.

1.40. Proposición. *Si para cada elemento x en un conjunto X, se elige una familia $\mathcal{B}(x) \neq \emptyset$ de subconjuntos de X con $x \in B$ para cualquier $B \in \mathcal{B}(x)$, y que tienen las propiedades:*

(1) *si V_1 y V_2 son miembros de $\mathcal{B}(x)$, entonces existe $V_3 \in \mathcal{B}(x)$ tal que $V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$, y*

(2) *para cada $V \in \mathcal{B}(x)$ podemos escoger un $V_0 \in \mathcal{B}(x)$ tal que si $y \in V_0$, entonces existe $W \in \mathcal{B}(y)$ la cual está contenida en V,*

entonces la familia $\mathcal{T} = \{A \subseteq X : \text{para cada } x \in A, \text{ existe } V \in \mathcal{B}(x) \text{ con } V \subseteq A\}$ es una topología en X y cada $\mathcal{B}(x)$ resulta ser una base de vecindades de x para esta topología.

Demostración. Definamos, para cada $x \in X$, a la colección

$$\mathcal{V}(x) = \{U \subseteq X : \exists\, B \in \mathcal{B}(x)\,(\, B \subseteq U\,)\,\}.$$

Demostremos que las colecciones $\mathcal{V}(x)$ $(x \in X)$ cumplen las condiciones de la proposición 1.39.

Sea $x \in X$. Es claro que debido a que $x \in B$ para cada $B \in \mathcal{B}(x)$ se tiene que $x \in U$ para cada $U \in \mathcal{V}(x)$. Por otro lado, si $U, V \in \mathcal{V}(x)$ entonces existen $B, C \in \mathcal{B}(x)$ tales que $B \subseteq U$ y $C \subseteq V$. Por (1), existe $A \in \mathcal{B}(x)$ tal que $A \subseteq B \cap C$. Como $A \subseteq B \cap C \subseteq U \cap V$, tenemos que

$U \cap V \in \mathcal{V}(x)$. Por otra parte, si $U \in \mathcal{V}(x)$ entonces existe $B \in \mathcal{B}(x)$ tal que $B \subseteq U$. Por la condición (2), existe $V \in \mathcal{B}(x)$ tal que para cada $y \in V$ existe $W_y \in \mathcal{B}(y)$ con $W_y \subseteq B$. Es claro que $V \in \mathcal{V}(x)$ y, además, para cada $y \in V$ se tiene que $W_y \subseteq U$. Entonces $V \in \mathcal{V}(x)$ y para cada $y \in V$ tenemos que $U \in \mathcal{V}(y)$. Esto muestra que las colecciones $\mathcal{V}(x)$ cumplen la condición (3) de la proposición 1.39. Finalmente, para demostrar (4) de 1.39, note que si $U \in \mathcal{V}(x)$ y $U \subseteq W \subseteq X$ entonces existe $B \in B(x)$ tal que $B \subseteq U \subseteq W$. Por ello, $W \in \mathcal{V}(x)$.

Aplicando ahora la proposición 1.39, podemos concluir que existe una topoloía $\mathcal{T}$ para la cual la colección $\mathcal{V}(x)$ es el sistema de vecindades del punto x en $(X, \mathcal{T})$. Es fácil observar que por la misma definición de $\mathcal{V}(x)$, la colección $\mathcal{B}(x)$ es una base de vecindades de x en $(X, \mathcal{T})$. $\boxtimes$

1.41. Observación. Con respecto a la topología $\mathcal{T}$ definida en la proposición anterior, si $A \in \mathcal{T}$ y $A \neq \emptyset$, entonces para cada $x \in A$, existe $V_x \in \mathcal{B}(x)$ tal que $x \in V_x \subseteq A$. Así resulta que $A = \bigcup\{V_x : x \in A\}$. Por lo tanto, si $\mathcal{B} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}(x)$, entonces $\mathcal{T}$ es la colección de todos los subconjuntos de X que son uniones de elementos de alguna subcolección de $\mathcal{B}$. Esto significa que $\mathcal{B}$ es una red para $\mathcal{T}$.

1.42. Ejemplo. Asociemos a cada número real x la colección $\mathcal{B}(x) = \{[x, x + \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$. Es posible verificar que la familia $\{\mathcal{B}(x) : x \in \mathbb{R}\}$ satisface las condiciones de la proposición 1.30.

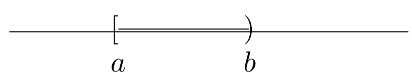

Figura 12. Un básico canónico de la línea de Sorgenfrey.

Por la proposición 1.40, la colección $\mathcal{S}$ formada por el vacío y todo subconjunto en $\mathbb{R}$ que es unión de intervalos de la forma $[a, a + \frac{1}{n})$ es una topología en el conjunto de números reales. Resulta entonces que cualquier intervalo de la forma $[a, b)$, cuando $a < b$, es un elemento de $\mathcal{S}$. También se puede demostrar que cualquier intervalo en $\mathbb{R}$ de la forma (a, b), con $a < b$, es un subconjunto abierto en $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$. Esto significa, en particular, que la topología euclidiana $\mathcal{T}_e$ en $\mathbb{R}$ está contenida en $\mathcal{S}$. Además, esta inclusión es propia pues $[a,b) \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{T}_e$.

Al espacio $\mathcal{L}_S = (\mathbb{R}, \mathcal{S})$ se le conoce con el nombre de *línea de Sorgenfrey* (véase la figura 12). Este espacio es considerado ya por P. Alexandroff y P. Urysohn en su artículo de 1929 *"Memoire sur les espace topologique compact"* [1], y obtuvo relevancia cuando R. H. Sorgenfrey mostró en 1947 [58] algunas de sus propiedades sobresalientes, las cuales veremos en secciones posteriores.

Ejercicios

1.A. Espacios métricos

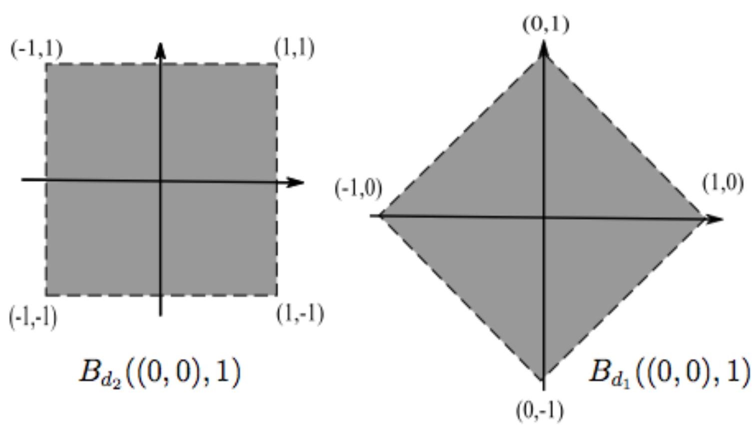

FIGURA 13. Bolas unitarias en $(\mathbb{R}^2, d_2)$ y $(\mathbb{R}^2, d_1)$, respectivamente

(1) Sea $d : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ una función tal que, para cada $x, y, z \in X$,
   (a) $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$, y
   (b) $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(y,z)$.

Demuestre que d es una métrica en X.

(2) Compruebe que la métrica usual en $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) satisface en efecto las condiciones que definen una función distancia.

(3) Pruebe que cada una de las siguientes funciones es una métrica en $\mathbb{R}^n$.
(a) $d_1(x,y) = \Sigma_{i=1}^n |x_i - y_i|$,
(b) $d_2(x,y) = \text{máx}\{|x_1 - y_1|, ..., |x_n - y_n|\}$,
en donde $x = (x_1, ..., x_n)$ y $y = (y_1, ..., y_n)$ (véase la figura 13).

(4) (*El erizo métrico de κ espinas*) Sea J un conjunto de cardinalidad κ, y sea I el intervalo cerrado unitario $[0,1]$. En $I \times J$ definimos una relación de equivalencia $\sim$ como sigue: $(t,j) \sim (s,i) \Leftrightarrow (t,j) = (s,i)$ o $t = s = 0$. Por $[(t,j)]$ denotamos a la clase de equivalencia del punto $(t,j) \in I \times J$. En el conjunto de clases de equivalencia $Z = (I \times J)/\sim$ definimos la función $\rho : Z \times Z \to \mathbb{R}$ como

$$\rho([(t,j)],[(s,i)]) = \begin{cases} |t-s| & \text{si } j = i \\ t+s & \text{si } j \neq i \end{cases}$$

Demuestre que ρ es una métrica en Z. Al espacio Z con la topología definida por la métrica ρ, lo denotaremos por $J(\kappa)$ y le llamamos *erizo métrico de κ espinas*. Puede verse una representación gráfica del erizo métrico en la figura 14.

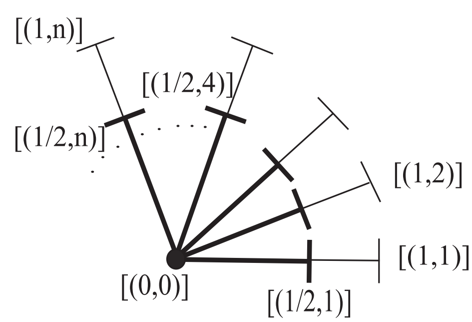

FIGURA 14. En obscuro una vecindad del punto $[(0,0)]$ en el erizo metrizable con $\aleph_0$ espinas.

(5) Definimos la función $d_1 : C(I) \times C(I) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ como $d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx$ (véase la figura 15). Demuestre que d_1 es una métrica en $C(I)$.

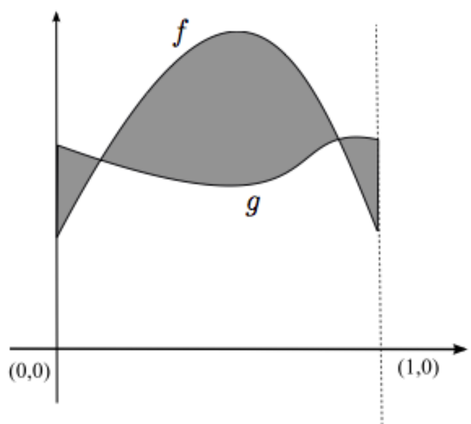

Figura 15. El área sombreada representa la distancia entre f y g con respecto a la distancia d_1 definida por $d_1(f,g) = \int_0^1 \mid f(x) - g(x) \mid dx$

(6) Pruebe que para cualesquiera dos funciones $u, v \in C(I)$ se cumple

$$\int_0^1 u(x) \cdot v(x)dx \leqslant \sqrt{\int_0^1 u^2(x)dx \cdot \int_0^1 v^2(x)dx}$$

(desigualdad de Cauchy-Schwarz para integrales). Para demostrar esta relación, observe que para cada número real λ,

$$\int_0^1 [u(x) - \lambda \cdot v(x)]^2 dx \geqslant 0,$$

y considere el número

$$\lambda = \frac{\int_0^1 u(x) \cdot v(x)dx}{\int_0^1 v^2(x)dx}.$$

Definamos ahora en $C(I)$ la función

$$d_2(f,g) = \sqrt{\int_0^1 |f(x) - g(x)|^2 dx}.$$

Verifique que d_2 es una métrica; use la desigualdad de Cauchy-Schwarz para probar que d_2 satisface la desigualdad triangular.

(7) Sean d y ρ dos métricas definidas en un conjunto X. Diremos que $d \leqslant \rho$ si, para algún $\epsilon > 0$, podemos dar un número real $N > 0$ tal

que $d(x,y) \leqslant N \cdot \rho(x,y)$ para todo $x, y \in X$ con $\rho(x,y) < \epsilon$. Si $d \leqslant \rho$, entonces cada bola abierta $B_d(x,r)$ es la unión de bolas abiertas en (X,ρ). Compruebe que $\leqslant$ define un pre-orden parcial en la colección de métricas en X. Diremos que d es *equivalente* a ρ si $d \leqslant \rho$ y $\rho \leqslant d$.

(8) Una métrica d en X es *acotada* si existe una constante M tal que $d(x,y) \leqslant M$ para cualquier $x, y \in X$. Demuestre que para cada distancia d en X, la función d^* definida por $d^*(x,y) = \text{mín}\{d(x,y), 1\}$ es una métrica acotada equivalente a d.

(9) (*Pseudométricas*) Una *pseudométrica* en un conjunto X es una función $\rho : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ que, para cada tres elementos x, y y z en X, satisface
  (a) $\rho(x,x) = 0$,
  (b) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$,
  (c) $\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y)$.

Observe que para definir pseudométrica no hemos pedido que x sea igual a y si $\rho(x,y) = 0$; esto es lo que marca la diferencia con la definición de métrica. Naturalmente cualquier métrica es una pseudométrica. El recíproco no es cierto:
  (a) Sea X un conjunto no vacío. La función $\rho(x,y) = 0$ para cualquier $x, y \in X$, es una pseudométrica la cual no es métrica si $|X| > 1$.
  (b) Sea E un subconjunto finito del intervalo $I = [0,1]$. Definamos $\rho : C(I) \times C(I) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ como
$$\rho(f,g) = \text{máx}\{|f(x) - g(x)| \, : \, x \in E\}.$$
  Justifique la afirmación "ρ es una pseudométrica que no es métrica".

Si ρ es una pseudométrica en X, podemos definir la relación $\sim$ en X como $x \sim y$ si, y sólo si, $\rho(x,y) = 0$. Compruebe que $\sim$ es una relación de equivalencia. Si Y es la colección de clases de equivalencia definida por $\sim$ y si $d : Y \times Y \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ está definida por la regla $d([x],[y]) = \rho(x,y)$, en donde $[x]$ denota la clase de equivalencia de x, entonces d es una métrica en Y.

(10) (*Espacios vectoriales normados*) Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Una *norma* en X, que denotaremos por $||\cdot||$, es una función de X en $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ que satisface las siguientes condiciones (el valor de $x \in X$ bajo $||\cdot||$ se escribe $||x||$):
  (a) $||x|| = 0$ si y sólo si $x = 0$.
  (b) $||r \cdot x|| = |r| \cdot ||x||$ para cualquier $x \in X$ y cada $r \in \mathbb{R}$.
  (c) $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$ para cualesquiera $x, y \in X$.

Si X es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y si $||\cdot||$ es una norma en X, entonces a la pareja $(X, ||\cdot||)$ le llamaremos *espacio vectorial normado*.

Pruebe que para un tal espacio, la función $d : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dada por $d(x, y) = ||x - y||$ es una función distancia en X. (La función d es la *métrica definida por la norma* $|| \cdot ||$).

Sea $C^*(\mathbb{R})$ la colección de funciones continuas con valor real definidas sobre $\mathbb{R}$ y acotadas (es decir, si $f \in C^*(\mathbb{R})$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f[\mathbb{R}] \subseteq (-n, n)$). El conjunto $C^*(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ si lo consideramos con la suma $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ y con la multiplicación por escalares definida de la siguiente forma: $r \in \mathbb{R}$, $(r \cdot f)(x) = r \cdot f(x)$. La función $f \to \sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}\}$, es una norma en $C^*(\mathbb{R})$. La métrica en $C^*(\mathbb{R})$ definida por esta norma es llamada *distancia del supremo* en $C^*(\mathbb{R})$ (véase el ejemplo 1.7).

1.B. Espacios topológicos

(1) Construya todas las topologías posibles en el conjunto $X = \{a, b, c\}$.

(2) Sea X un conjunto y $\xi : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ la función definida por

$$\xi(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

Compruebe que ξ es una métrica en X y que $\mathcal{T}_\xi$ es la topología discreta en X.

(3) Sean ρ y d dos métricas equivalentes definidas en un conjunto X (véase el ejercicio 1.A inciso (7)). Demuestre que la topología generada por ρ coincide con la generada por d.

(4) Sea E un subconjunto de X. Corrobore la exactitud de la afirmación *"la colección* $\mathcal{T}(E) = \{\emptyset\} \cup \{A \subseteq X : E \subseteq A\}$ *es una topología en* X*"*. ¿Cómo es $\mathcal{T}(E)$ si $E = \emptyset$ (respectivamente, si $E = X$)?

(5) Sea X un conjunto más que numerable y $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{E \subseteq X : |X \setminus E| \leqslant \aleph_0\}$. Demuestre que $\mathcal{T}$ es una topología en X que llamaremos *topología conumerable*. Más generalmente, sea κ un número cardinal infinito y sea $\mathcal{T}_\kappa = \{\emptyset\} \cup \{E \subseteq X : |X \setminus E| < \kappa\}$. La colección $\mathcal{T}_\kappa$ es una topología en X, es igual a la topología discreta si $|X| < \kappa$, es la topología cofinita si $\kappa = \aleph_0$, y es igual a la topología conumerable si $\kappa = \aleph_1$.

(6) (*Extensiones unipuntuales Lindelöf-κ*) Sea κ un número cardinal infinito. Para un conjunto X y un conjunto E_0 que no intersecta a X consideramos el conjunto $Y = X \cup E_0$. Verifique que la colección $\mathcal{T}_{E_0,\kappa} = \{E : E \subseteq X\} \cup \{E \subseteq Y : E_0 \subseteq E \text{ y } |Y \setminus E| < \kappa\}$ es una topología en Y. Cuando E_0 está formado por un solo punto p, escribimos $\mathcal{T}_{p,\kappa}$ en vez de $\mathcal{T}_{\{p\},\kappa}$. Cuando $|X| > \kappa$ y $E_0 = \{p\}$, al espacio $(Y, \mathcal{T}_{p,\kappa^+})$ le llamamos *extensión unipuntual Lindelöf-κ de X*.

(7) (*Compactación de Alexandroff del espacio discreto de cardinalidad τ*) En el caso en que $|X| = \tau \geqslant \aleph_0$ y $\kappa = \aleph_0$, el espacio $(Y, \mathcal{T}_{p,\aleph_0})$

definido en el ejercicio anterior recibe el nombre de *compactación por un punto del espacio discreto X de cardinalidad τ* o *compactación de Alexandroff de X*, indistintamente, y se le denota como $A(X)$ o $A(\tau)$. Pruebe que si $\mathcal{C}$ es una colección de abiertos de $A(\tau)$ cuya unión es igual a todo el espacio, entonces existe una subcolección finita de $\mathcal{C}$ cuya unión es todo el espacio.

1.C. Comparación de topologías

(1) Demuestre lo que se pide en los ejemplos 1.11 inciso (2) e inciso (3).

(2) Sea X un conjunto infinito. Compare en X la topología cofinita y la topología conumerable. De manera más general, dados dos números cardinales infinitos κ y τ podemos considerar las topologías $\mathcal{T}_\kappa$ y $\mathcal{T}_\tau$ como se definieron en el ejercicio 1.B inciso (5). ¿Bajo qué condiciones en κ y τ se cumple que $\mathcal{T}_\kappa \subseteq \mathcal{T}_\tau$? Lleve a cabo un ejercicio semejante para las topologías $\mathcal{T}_{p,\kappa}$ y $\mathcal{T}_{q,\tau}$ en $X \cup \{p\}$ y $X \cup \{q\}$ con $p, q \notin X$ (véase el ejercicio 1.B inciso (6)).

(3) Considere en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ los subconjuntos $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \mathbb{N}\} \cup \{\{1, 2, ..., n\} : n \in \mathbb{N}\}$ y $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \mathbb{N}\} \cup \{\{n, n+1, n+2, ...\} : n \in \mathbb{N}\}$. Muestre que $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ son dos topologías no comparables en $\mathbb{N}$. Ahora considere la topología $\mathcal{T}$ en $\mathbb{N}$ definida al final de la sección 2 (ejemplo 1.10). ¿Qué relación de inclusión cumple $\mathcal{T}$ con respecto a $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$?

(4) Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $Y, Z \subseteq X$. ¿Bajo qué condiciones en Y y Z se cumple que $\mathcal{T}_Y \subseteq \mathcal{T}_Z$? (Véase el ejemplo 1.12).

(5) Hemos definido sobre $C(I)$ las métricas d_∞, d_1 y d_2 (véase el ejemplo 1.7 y los ejercicios (5) y (6) en 1.A). Verifique que la topología $\mathcal{T}_2$ definida por d_2 está contenida en la topología $\mathcal{T}_\infty$ definida por d_∞, y que constituyen dos topologías diferentes. Determine las relaciones de $\mathcal{T}_1$, la topología definida por d_1, con $\mathcal{T}_\infty$ y $\mathcal{T}_2$.

(6) Demuestre que si $\mathcal{F} = \{\mathcal{T}_\alpha : \alpha \in J\}$ es una familia no vacía de topologías en X, entonces $\bigcap_{\alpha \in J} \mathcal{T}_\alpha$ es también una topología en X. En cambio, la unión de topologías no es necesariamente una topología (demuestre este hecho). Sin embargo, es posible definir una mínima topología $\mathcal{T}$ en X que contiene a $\bigcup_{\alpha \in J} \mathcal{T}_\alpha$. Es decir, dada cualquier familia $\mathcal{F}$ de topologías en X, podemos encontrar una máxima cota superior de $\mathcal{F}$ en $\tau(X)$ y una mínima cota superior de $\mathcal{F}$ en $\tau(X)$. (Demuéstrelo).

1.D. Conjuntos cerrados

(1) Sean $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ dos topologías en un conjunto X. Sean $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ la colección de los subconjuntos cerrados en $(X, \mathcal{T}_1)$ y $(X, \mathcal{T}_2)$, respectivamente. Pruebe que $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ si y sólo si $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$.

(2) Demuestre la afirmación hecha en el ejemplo 1.15.(2).

(3) ¿Cuáles son los subconjuntos cerrados de los siguientes espacios topológicos?
   (a) $(X, \mathcal{T})$ en donde $X = \{a, b, c, d\}$ y $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.
   (b) Los espacios en el ejercicio 1.B.(5).
   (c) El espacio $(X, \mathcal{T}_\kappa)$ definido en el ejercicio 1.B.(6).
   (d) El espacio $(X, \mathcal{T}_{p,\kappa})$ definido en el ejercicio 1.B.(7).
   (e) El espacio $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ definido al final de la sección 2 (ejemplo 1.10).

(4) Supongamos que (X, d) es un espacio métrico. Muestre que cualquier subconjunto finito F en $(X, \mathcal{T}_d)$ es un subconjunto cerrado. Además, en el caso en que $(X, \mathcal{T}_d)$ es el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$, F no es abierto.

(5) (Bases para los conjuntos cerrados) Sea X un espacio topológico. Una *base para los subconjuntos cerrados* es una colección de cerrados $\mathcal{F}$ tal que cualquier subconjunto cerrado de X es la intersección de todos los elementos de alguna subfamilia de $\mathcal{F}$.
   (a) Si $\mathcal{F}$ es una base para los conjuntos cerrados del espacio X, entonces $\mathcal{B} = \{X \setminus F : F \in \mathcal{F}\}$ es una base para la topología de X.
   (b) Una colección $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X es base para los cerrados de alguna topología en X si y sólo si (a) para cada A, B en $\mathcal{F}$, el conjunto $A \cup B$ es la intersección de los elementos de alguna subcolección de $\mathcal{F}$, y (b) $\bigcap_{f \in \mathcal{F}} F = \emptyset$.

1.E. Bases, subbases y bases locales

(1) Sean $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ dos topologías en X, y supongamos que $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ son bases de $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$, respectivamente. Si para cada $B \in \mathcal{B}_1$ y cada $x \in B$, podemos encontrar un elemento $A \in \mathcal{B}_2$ tal que $x \in A \subseteq B$, entonces $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$.

(2) En el ejercicio 1.A.(7) definimos un orden parcial $\leqslant$ en el conjunto de métricas definidas sobre un conjunto X. Compruebe que si $d \leqslant \rho$ entonces $\mathcal{T}_d \subseteq \mathcal{T}_\rho$.

(3) Pruebe que la colección de subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ de la forma $\{(x, y) : a < x < b \text{ y } c < y < d\}$, en donde a, b, c y d son números reales, constituye una base para la topología usual en $\mathbb{R}^2$.

(4) Demostrar que cualquier base $\mathcal{B}$ del espacio discreto $(X, \mathcal{P}(X))$ debe contener a la colección $\{\{x\} : x \in X\}$.

(5) Considere los espacios topológicos $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$, $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_1)$ y $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_2)$ definidos en el ejemplo 1.10 y en el ejercicio 1.C.(3). Para cada $n \in \mathbb{N}$ muestre una base local de vecindades de n en cada una de las topologías $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$.

(6) Sea $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_\mathbb{P})$ la línea de Michael (ejemplo 1.12). Demostrar que para cada número irracional x, la colección $\{\{x\}\}$ es una base de vecindades para x en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_\mathbb{P})$; y para cada número racional y, $\mathcal{B}(y) =$

$\{(y - \frac{1}{n}, y + \frac{1}{n}) \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ es una base de vecindades de y en este mismo espacio.

1.F. Subespacios

(1) Sea (X, d) un espacio métrico y sea Y un subconjunto de X. Podemos considerar en X la topología $\mathcal{T}_d$ definida por d. Podemos también definir la función $d^* : Y \times Y \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ por $d^*(a, b) = d(a, b)$ para cualesquiera dos puntos a, b en Y. Corrobore que d^* es una métrica en Y, y que la topología definida en Y por d^*, $\mathcal{T}_{d^*}$, coincide con la topología relativa $\mathcal{T}_d \restriction Y$.

(2) Consideremos en un conjunto infinito X la topología cofinita $\mathcal{T}$. Demuestre que para $Y \subseteq X$, $\mathcal{T} \restriction Y$ es la topología cofinita en Y.

(3) Sean A y Y dos subconjuntos de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ tales que $A \subseteq Y$. Corrobore que la topología relativa en el conjunto A, considerado como subespacio de $(Y, \mathcal{T} \restriction Y)$, coincide con $\mathcal{T} \restriction A$.

(4) Consideremos el espacio vectorial $C^*(\mathbb{R})$ con la norma del supremo, y consideremos en él la topología definida por esta norma (véase el ejercicio 1.A.(10)). El conjunto de funciones continuas $C(I)$ es un subconjunto de $C^*(\mathbb{R})$. Verifique que la topología de $C(I)$ heredada de $C^*(\mathbb{R})$ coincide con la topología generada por la distancia del supremo en $C(I)$ como fue definida en el ejemplo 1.7.

(5) (*El plano radial*) Un subconjunto A en el plano $\mathbb{R}^2$ es *radialmente abierto* si contiene un segmento de línea abierto en cada dirección alrededor de cada uno de sus puntos (véase la figura 16).

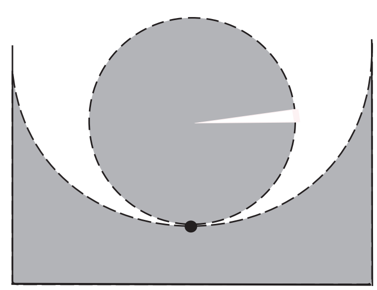

Figura 16. Ejemplo de un abierto radial que no es abierto euclideano (el punto p forma parte del conjunto).

(a) Pruebe que la colección de los conjuntos radialmente abiertos forma una topología en $\mathbb{R}^2$.

(b) Justifique la proposición: "cada abierto euclidiano es radialmente abierto".
(c) Dé un ejemplo de un conjunto radialmente abierto que no es abierto euclidiano. Demuestre todas sus afirmaciones.
(d) Demuestre que cualquier circunferencia en el plano radial hereda la topología discreta como subespacio.

Con esta topología el plano $\mathbb{R}^2$ recibe el nombre de *plano radial*.

1.G. Generación de topologías a partir de subcolecciones del conjunto potencia de X

(1) Para $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que $X = \bigcup \mathcal{S}$, la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ definida en el párrafo anterior al ejemplo 1.38, es la menor topología en X que contiene a $\mathcal{S}$. Es decir, $\mathcal{T}_{\mathcal{S}} = \bigcap\{\mathcal{T} \in \tau(X) \,:\, \mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}\}$.

(2) Compruebe que la topología $\mathcal{T}_p$ en $C(I)$ definida en el ejemplo 1.37, es estríctamente menor a la topología $\mathcal{T}_\infty$. ¿Cómo se relacionan $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ con $\mathcal{T}_p$? (Véanse las definiciones de $\mathcal{T}_\infty, \mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ en 2.C).

(3) Consideremos al espacio de funciones continuas $C(I)$ con su topología de la convergencia puntual $\mathcal{T}_p$ (véase el ejemplo 1.37). Sea J un subconjunto de I fijo, y para cada $x \in J$ sea F_x un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$. Demuestre que el conjunto $\{f \in C(I) :\ \forall\, x \in J, f(x) \in F_x\}$ es un subespacio cerrado de $(C(I), \mathcal{T}_p)$.

(4) (*Topología de Vietoris*) Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Denotemos por $\mathcal{F}(X)$ a la colección de subconjuntos cerrados de X diferentes de $\emptyset$. Para cada colección finita $U_1, U_2, \ldots, U_n$ de elementos en $\mathcal{T}$, sea $\mathcal{V}(U_1, ..., U_n)$ el conjunto

$$\{F \in \mathcal{F}(X) \,:\, F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i;\ \forall\, i = 1, 2, ..., n\,(\, F \cap U_i \neq \emptyset\,)\,\}.$$

Demuestre que la colección

$$\mathcal{B} = \{\mathcal{V}(U_1, ..., U_n) \,:\, n \in \mathbb{N};\ \forall\, 1 \leqslant i \leqslant n\ (U_i \in \mathcal{T}\,)\,\}$$

satisface las condiciones de la proposición 1.36, y por ende, $\mathcal{B}$ genera una topología $\mathcal{T}(\mathcal{V})$ en $\mathcal{F}(X)$ de la cual $\mathcal{B}$ es base. A $\mathcal{T}(\mathcal{V})$ se le conoce como *la topología de Vietoris en* $\mathcal{F}(X)$.

(5) (*Métrica de Hausdorff*) Consideremos un espacio métrico (X, d). Para cada dos subconjuntos E y F de X definimos la *distancia* entre E y F como el número

$$d(E, F) = \inf\{d(x, y) : x \in E,\ y \in F\}.$$

Cuando $F = \{x\}$, escribiremos $d(E, x)$ en lugar de $d(E, \{x\})$. Para un $r > 0$ y $E \subseteq X$, definimos *la bola centrada en* E *de radio* r como $B(E, r) = \{x \in X : d(E, x) < r\}$. Sea $\mathcal{T}_d$ la topología en X definida

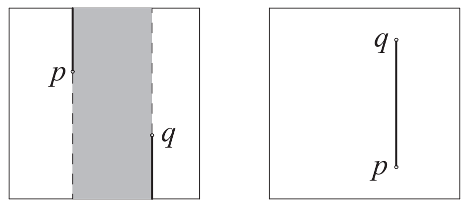

Figura 17. Algunas representaciones gráficas del intervalo cuyos extremos son p y q, donde $p, q \in I^2$ y $p < q$.

por d, y sea $\mathcal{F}(X)$ la colección de subconjuntos cerrados no vacíos de $(X, \mathcal{T}_d)$.

(a) Pruebe que la función $d^* : \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definida por $d^*(E, F) = d(E, F)$ no satisface necesariamente la desigualdad del triángulo. (Considérese $X = \mathbb{R}^2$ con la métrica usual.)

(b) Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, por lo dicho en el ejercicio 1.A.(8), que la función d es una métrica acotada en X. Así, para $A, B \in \mathcal{F}(X)$ podemos definir

$$\rho_A(B) = \sup\{d(A, x) : x \in B\} \ \text{ y } \ \rho(A, B) = \text{máx}\{\rho_A(B), \rho_B(A)\}.$$

Compruebe que la función ρ así definida sí es una métrica en $\mathcal{F}(X)$ a la cual se le denomina *métrica de Hausdorff*.

(c) Determine si existe alguna relación de inclusión entre la topología de Vietoris (véase el ejercicio 1.G.(4)) y la definida por la métrica de Hausdorff en $\mathcal{F}(X)$.

(6) (*Espacios topológicos linealmente ordenados*)

(a) El conjunto de los números ordinales α que son $\leqslant_o \omega_1$ con su topología definida por $\leqslant_o$ (véase el Apéndice A) lo denotaremos como $[0, \omega_1]$, y a su subespacio $[0, \omega_1] \setminus \{\omega_1\}$ le asignaremos el símbolo $[0, \omega_1)$. Pruebe que para cada $\alpha, \beta <_o \omega_1$ con $\alpha <_o \beta$, el intervalo $(\alpha, \beta] = \{\lambda <_o \omega_1 : \alpha <_o \lambda \leqslant_o \beta\}$ es un subconjunto cerrado y abierto en $[0, \omega_1]$.

(b) (*El cuadrado lexicográfico*) Consideremos el conjunto $I \times I = \{(a, b) : 0 \leqslant a, b \leqslant 1\}$. En este cuadrado podemos definir un orden lineal del modo siguiente: $(a, b) < (c, d) \Leftrightarrow$ o $a < c$, o $a = c$ y $b < d$. Compruebe que $(I^2, \leqslant)$ es un conjunto linealmente ordenado.

Sea $\mathcal{T}_\leqslant$ la topología definida por el orden lexicográfico en I^2 (véase el ejemplo 1.38 y la figura 17).

(i) Determine una base local en $\mathcal{T}_{\leqslant}$ para los puntos $(0,0)$, $(1,1)$, (a,b) con $0 < a, b < 1$, $(a,0)$ con $0 < a \leqslant 1$ y $(a,1)$ con $0 \leqslant a < 1$, respectivamente.
(ii) Compare la topología euclidiana heredada en I^2 con la topología $\mathcal{T}_{\leqslant}$.
(iii) Pruebe que el subespacio $[0,1] \times \{1/2\}$ de $(I^2, \mathcal{T}_{\leqslant})$ es discreto.

Capítulo **2**

La cerradura, el interior y otros operadores

Recordemos que un punto x en un espacio métrico (X, d) está adherido o pegado a un conjunto $A \subseteq X$ si toda bola abierta con centro en el punto x siempre intersecta a A. El conjunto de todos los puntos del espacio métrico X que están adheridos a un conjunto A se llama cerradura o adherencia de A. Esta noción (la cerradura de un conjunto) no es exclusiva de los espacios métricos y se puede extender a los espacios topológicos. Para ello simplemente hay que notar que la razón por la que un punto x está adherido a un conjunto A en un espacio métrico X es porque cualquier subconjunto abierto que contiene a x tiene una intersección no vacía con el conjunto A. Con esto último nos podemos dar una idea de cómo extender la noción de adherencia a los espacios topológicos abstractos: un punto x de un espacio topológico X está adherido (o pegado) a un subconjunto A de X si cualquier abierto que contiene a x tiene puntos de A. Lo contrario significará que x se encuentra separado de A.

Observe que al calcular la cerradura de los subconjuntos de un espacio topológico X estamos definiendo una función $\operatorname{cl} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$, de la colección de los subconjuntos del espacio X en sí misma, que se conoce comúnmente como operador cerradura asociado al espacio topológico X.

Las propiedades básicas más importantes de éste y otros operadores asociados a espacios topológicos serán estudiadas en este capítulo.

1. El derivado y la cerradura de un conjunto

Cuando tenemos un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ y un subconjunto E de X, podemos definir los puntos que están adheridos a E de la siguiente manera.

2.1. Definiciones.

(1) Un punto $x \in X$ es *un punto de acumulación* de E si cada vecindad V de x en $(X, \mathcal{T})$ contiene algún punto de E diferente de x. Esto es, x es un punto de acumulación de E si $(E \cap V) \setminus \{x\} \neq \emptyset$ para cada $V \in \mathcal{V}(x)$.

(2) El *conjunto derivado* de E, que denotaremos por $\mathrm{der}(E)$, es el conjunto de todos los puntos de acumulación de E.

(3) Un punto x en E es un *punto aislado* de E si $x \in E \setminus \mathrm{der}(E)$.

2.2. Ejemplos.

(1) Consideremos al conjunto $\mathbb{R}^2$ con la topología euclidiana. En este espacio topológico consideremos el conjunto $A = \{(\frac{1}{n}, 1) : n \in \mathbb{N}\}$. Afirmamos que $\mathrm{der}(A) = \{(0,1)\}$. Efectivamente, si $B((0,1), r)$ es una bola abierta centrada en $(0,1)$ por la propiedad arquimediana podemos hallar un número natural m tal que $0 < \frac{1}{m} < r$. Entonces se tiene que $(\frac{1}{m}, 1) \in (B((0,1), r) \cap A) \setminus \{(0,1)\}$. Esto demuestra que $(0,1)$ es punto de acumulación de A.

Por otro lado, si $(x,y) \neq (0,1)$ definamos $\epsilon = \frac{e((x,y),(0,1))}{2} > 0$, observe ahora que las bolas abiertas $B((0,1), \epsilon)$ y $B((x,y), \epsilon)$ son conjuntos ajenos. Además, utilizando un argumento análogo a lo anterior, podemos verificar la existencia de una $m \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < \epsilon$ para toda $n > m$. Para finalizar consideremos los siguientes casos:

Caso 1. Si $(x,y) = (\frac{1}{i}, 1)$ para alguna $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ entonces definamos

$$r = \begin{cases} \min\{\epsilon, e((x,y), (\frac{1}{2}, 1))\} & \text{si } i = 1 \\ \min\{\epsilon, e((x,y), (\frac{1}{i+1}, 1)), e((x,y), (\frac{1}{i-1}, 1))\} & \text{si } i \neq 1. \end{cases}$$

Caso 2. Si $(x,y) \neq (\frac{1}{i}, 1)$ para toda $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ definamos $r = \min\{\epsilon, e((x,y), (\frac{1}{2}, 1))\}, \ldots, e((x,y), (\frac{1}{m}, 1))\}$.

Note que en cualquiera de los anteriores casos podemos concluir que $(B((0,1), r) \cap A) \setminus \{(0,1)\} = \emptyset$, y con ello hemos probado que el punto (x, y) no es un punto de acumulación del conjunto A.

Observe también que como $\text{der}(A) = \{(0, 1)\}$, todo punto de A es un punto aislado de A.

(2) Sea $\mathcal{T}$ la topología discreta en un conjunto no vacío X. Sabemos que, en este caso, cada conjunto formado por un solo punto es un conjunto abierto y, por lo tanto, el derivado de cualquier subconjunto E de X es vacío ya que $(E \cap \{x\}) \setminus \{x\} = \emptyset$ para toda $x \in X$. Así resulta que todo elemento de E es un punto aislado de E.

(3) Consideremos ahora un subconjunto E de un espacio indiscreto X. El único subconjunto abierto no vacío es X, de tal manera que

$$\text{der}(E) = \begin{cases} X & \text{si } E \text{ tiene más de un punto} \\ X \setminus E & \text{si } E \text{ tiene sólo un punto} \\ \emptyset & \text{si } E = \emptyset \end{cases}$$

(Verifíquese, vea el ejercicio 2.A.(4))) (¿Cuáles son los puntos aislados de E?)

(4) Sea X un conjunto infinito y consideremos en X a la topología cofinita $\mathcal{T}$. Sea E un subconjunto de X diferente del vacío. Es fácil verificar que

$$\text{der}(E) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } E \text{ es finito} \\ X & \text{si } E \text{ es infinito.} \end{cases}$$

Por lo tanto, todo elemento de E es un punto aislado de E en el caso en que E es finito. Si E es infinito entonces no tiene puntos aislados. En efecto, si $E = \{x_1, ..., x_n\}$, entonces, para cualquier $x \in X$, el conjunto $A = (X \setminus E) \cup \{x\}$ es un subconjunto abierto que contiene a x y $(A \setminus \{x\}) \cap E = \emptyset$. Por lo tanto, $x \notin \text{der}(E)$; es decir, $\text{der}(E) = \emptyset$. Para el caso en que E es infinito, notemos que para cada $x \in X$ y cada abierto A de X que contiene a x, siempre sucede que $X \setminus A$ es finito. Así que $(E \cap A) \setminus \{x\} \neq \emptyset$. Por lo cual $\text{der}(E) = X$.

(5) Sea $\mathcal{S} = (X, \mathcal{T})$ el *espacio de Sierpiński* definido en el ejemplo 1.9 inciso (4). Tenemos que $\text{der}(\{0\}) = \{1\}$, y como el único abierto que contiene a 1 es el espacio total X, $\text{der}(\{1\}) = \emptyset$.

El proceso de calcular el conjunto derivado de un subconjunto E de un espacio topológico X define una función der : $\mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ del conjunto de todos los subconjuntos de X en sí mismo. Una función de este tipo es lo que se conoce como un operador sobre $\mathcal{P}(X)$. Formalmente, un *operador* sobre $\mathcal{P}(X)$ es una función definida en $\mathcal{P}(X)$ y con valores en $\mathcal{P}(X)$.

Al operador que asocia a cada $E \subseteq X$ con $\operatorname{der}(E)$ le llamaremos *operador derivado*. En la siguiente proposición mostramos las propiedades básicas de este operador.

2.3. PROPOSICIÓN. *Para subconjuntos A y B de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, se tienen las siguientes propiedades:*

(1) $\operatorname{der}(\emptyset) = \emptyset$.
(2) *Si* $A \subseteq B$, *entonces* $\operatorname{der}(A) \subseteq \operatorname{der}(B)$.
(3) *Si* $x \in \operatorname{der}(A)$, *entonces* $x \in \operatorname{der}(A \setminus \{x\})$.
(4) $\operatorname{der}(A \cup B) = \operatorname{der}(A) \cup \operatorname{der}(B)$.

DEMOSTRACIÓN. (1) $\operatorname{der}(\emptyset) = \emptyset$ ya que $(\emptyset \cap G) \setminus \{x\} = \emptyset$ para cualquier $x \in X$ y para cualquier subconjunto abierto G de X.

(2) Supongamos que $A \subseteq B$ y que $x \in \operatorname{der}(A)$. Resulta entonces que para cualquier subconjunto abierto G de X que contiene a x se cumple que $(A \cap G) \setminus \{x\} \neq \emptyset$. Pero $(A \cap G) \setminus \{x\} \subseteq (B \cap G) \setminus \{x\}$; por lo tanto, $(B \cap G) \setminus \{x\} \neq \emptyset$. Concluimos que $\operatorname{der}(A) \subseteq \operatorname{der}(B)$.

(3) Tenemos que $([A \setminus \{x\}] \cap G) \setminus \{x\} = (A \cap G) \setminus \{x\}$. Por lo cual, si $x \in \operatorname{der}(A)$, entonces x también pertenece a $\operatorname{der}(A \setminus \{x\})$.

(4) Si $x \notin \operatorname{der}(A) \cup \operatorname{der}(B)$, entonces existen abiertos G_1 y G_2 que contienen a x y que satisfacen $(A \cap G_1) \setminus \{x\} = \emptyset$ y $(B \cap G_2) \setminus \{x\} = \emptyset$. El conjunto abierto $G = G_1 \cap G_2$ contiene a x y $(A \cup B) \cap (G \setminus \{x\}) = \emptyset$, de modo que $x \notin \operatorname{der}(A \cup B)$. Concluimos que $\operatorname{der}(A \cup B) \subseteq \operatorname{der}(A) \cup \operatorname{der}(B)$. La otra inclusión se obtiene al aplicar el inciso (2) de manera adecuada a los conjuntos A, B y $A \cup B$. ⊠

Un subconjunto de un espacio topológico es cerrado si contiene a su conjunto derivado, como veremos a continuación.

2.4. PROPOSICIÓN. *Un subconjunto E de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es cerrado si y sólo si* $\operatorname{der}(E) \subseteq E$.

DEMOSTRACIÓN. Vamos a demostrar la proposición equivalente: $E \subseteq X$ no es cerrado en $(X, \mathcal{T})$ si y sólo si $\operatorname{der}(E) \cap (X \setminus E) \neq \emptyset$. En efecto, si E no es cerrado, entonces $X \setminus E$ no es abierto. De la proposición 1.24, resulta que existe $x \in X \setminus E$ con la propiedad de que para cualquier vecindad V del punto x, se tiene que $\emptyset \neq E \cap V = (E \cap V) \setminus \{x\}$. Es decir, $x \in \operatorname{der}(E)$. Esto implica que $\operatorname{der}(E) \cap (X \setminus E) \neq \emptyset$.

Ahora supongamos que existe $x \in \operatorname{der}(E) \setminus E$. Resulta que si V es una vecindad de x entonces $(V \setminus \{x\}) \cap E \neq \emptyset$. Por ello, aplicando la proposición 1.24, podemos concluir que $X \setminus E$ no es abierto; es decir, E no es un conjunto cerrado. ⊠

Ahora vamos a introducir un concepto de especial relevancia que será clave en nuestro estudio de la topología general.

2.5. Definición. La *cerradura* $\operatorname{cl}(E)$ de un conjunto E contenido en un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, es el subconjunto $\operatorname{cl}(E) = E \cup \operatorname{der}(E)$.

Obsérvese que tanto los puntos de E como los puntos del $\operatorname{der}(E)$ son los únicos elementos de X que podemos pensar que están pegados a E. Esta es la razón por la que se acostumbra llamar a los puntos del conjunto $\operatorname{cl}(E)$ *puntos adherentes* a E.

En la siguiente proposición se establecen algunas de las propiedades más importantes de la cerradura de un conjunto.

2.6. Proposición. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y sean E, F subconjuntos de X. Las siguientes proposiciones son válidas.*

(1) $x \in \operatorname{cl}(E)$ *si y sólo si cada subconjunto abierto de X que contiene a x tiene intersección no vacía con E.*
(2) $\operatorname{cl}(E)$ *es cerrado.*
(3) *Si $F \subseteq X$ es un cerrado que contiene a E, entonces* $\operatorname{cl}(E) \subseteq F$.
(4) *E es cerrado si y sólo si* $E = \operatorname{cl}(E)$.
(5) *Si $E \subseteq F$ entonces* $\operatorname{cl}(E) \subseteq \operatorname{cl}(F)$.
(6) $\operatorname{cl}(E) = \bigcap\{F \subseteq X : F$ *es un cerrado y* $E \subseteq F\}$.
(7) $\operatorname{cl}(E \cup F) = \operatorname{cl}(E) \cup \operatorname{cl}(F)$.
(8) $\operatorname{cl}(E \cap F) \subseteq \operatorname{cl}(E) \cap \operatorname{cl}(F)$.

Demostración.

(1) $\Rightarrow]$ Si $x \in \operatorname{cl}(E)$ entonces $x \in E$ ó $x \in \operatorname{der}(E)$. En el primer caso, es claro que cualquier abierto que contenga a x intersecta a E. Si $x \in \operatorname{der}(E)$, por definición de punto de acumulación, cualquier vecindad de x tiene puntos de E diferentes de x.

$\Leftarrow]$ Si $x \in E$, entonces es claro que $x \in \operatorname{cl}(E)$. Supongamos entonces que $x \notin E$. Entonces cada vecindad de x debe tener puntos de E diferentes de x. Esto implica que $x \in \operatorname{der}(E)$.

(2) Si $x \in X \setminus \mathrm{cl}(E)$, entonces existe una vecindad V de x tal que $V \cap E = \emptyset$. Tomemos un abierto G de X tal que $x \in G \subseteq V$. Entonces $G \cap E = \emptyset$. Note que también sucede que $G \cap \mathrm{der}(E) = \emptyset$. Por ello, tenemos que $x \in G \subseteq X \setminus \mathrm{cl}(E)$. Esto muestra que el conjunto $X \setminus \mathrm{cl}(E)$ es abierto. En consecuencia, $\mathrm{cl}(E)$ es cerrado.

(3) Por (3), $\mathrm{cl}(E) \subseteq \bigcap\{F : F \subseteq X$ es un cerrado tal que $E \subseteq F\}$. Como $\mathrm{cl}(E)$ es un cerrado que contiene a E, se cumple que $\bigcap\{F : F \subseteq X$ es un cerrado tal que $E \subseteq F\} \subseteq \mathrm{cl}(E)$.

(4) Aplicando (5), resulta que $\mathrm{cl}(E) \subseteq \mathrm{cl}(E \cup F)$ y $\mathrm{cl}(F) \subseteq \mathrm{cl}(E \cup F)$. De esta manera podemos concluir que $\mathrm{cl}(E) \cup \mathrm{cl}(F) \subseteq \mathrm{cl}(E \cup F)$.

Por otro lado, nótese que $\mathrm{cl}(E) \cup \mathrm{cl}(F)$ es un subconjunto cerrado de X que contiene a $E \cup F$. Por (3), tenemos que $\mathrm{cl}(E \cup F) \subseteq \mathrm{cl}(E) \cup \mathrm{cl}(F)$.

(5) El conjunto $\mathrm{cl}(E) \cap \mathrm{cl}(F)$ es un subconjunto cerrado de X que contiene a $E \cap F$. Aplicando (3), obtenemos que $\mathrm{cl}(E \cap F) \subseteq \mathrm{cl}(E) \cap \mathrm{cl}(F)$.

Dejamos las demostraciones de los restantes incisos como un ejercicio al lector (véase el ejercicio 2.A.(5)). ⊠

Obsérvese que por el inciso (3) de la proposición anterior (véase también el inciso (6)), $\mathrm{cl}(E)$ es el mínimo conjunto cerrado que contiene a E.

2.7. Ejemplos.

(1) Consideremos en $\mathbb{R}$ dos puntos a, b con $a < b$. El intervalo $[a, b)$ es un subconjunto cerrado en $\mathbb{R}$ cuando consideramos la topología de Sorgenfrey (ejemplo 1.42). En efecto, es claro que $[a, b) \subseteq \mathrm{cl}([a, b))$. Además, si $x \notin [a, b)$, entonces $x < a$ ó $b \leqslant x$. En el primer caso, $[x, a)$ es un abierto que contiene a x y no intersecta a $[a, b)$. En el segundo caso, $[b, x + 1)$ es un abierto que contiene a x y no intersecta a $[a, b)$. Tenemos entonces que $[a, b) = \mathrm{cl}([a, b))$.

Pero ya sabemos que cada conjunto de la forma $[a, b)$ es abierto en $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}$. De tal manera que $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ contiene una base para su topología formada por conjuntos que son a la vez abiertos y cerrados (a un espacio con esta propiedad se le llama *cero-dimensional*).

(2) Sea X un conjunto infinito. Consideremos el espacio $(X, \mathcal{T}_{p,\aleph_0})$ definido en el ejercicio 1.B.(7). Sea E un subconjunto de X. Para cualquier $x \in X$, $\{x\}$ es abierto en X, y si $|E| \geqslant \aleph_0$, entonces $p \in \text{cl}(E)$ ya que si V es una vecindad de p, entonces $|X \setminus V| < \aleph_0$; por lo tanto, V debe intersectar a E. Tenemos entonces que para cualquier $E \subseteq X$,

$$\text{cl}(E) = \begin{cases} E & \text{si } E \text{ es finito} \\ E \cup \{p\} & \text{si } E \text{ es infinito.} \end{cases}$$

(3) Consideremos el conjunto $\mathbb{R}$ con la topología usual. Sea $\mathbb{Q}$ el subconjunto de $\mathbb{R}$ formado por los números racionales. Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$, entonces debe haber un número racional en (a, b). Esto significa que si $x \in \mathbb{R}$ y (a, b) es un intervalo que contiene a x, entonces $[(a, b) \setminus \{x\}] \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Esto es, $\text{der}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R} = \text{cl}(\mathbb{Q})$.

Es claro que lo mismo podemos decir acerca del conjunto de los números irracionales $\mathbb{P}$. Es decir, $\text{cl}(\mathbb{P}) = \mathbb{R}$.

Lo anterior nos permite ejemplificar que la contención en (8) de la proposición 2.6 puede ser estricta: $\emptyset = \text{cl}(\mathbb{Q} \cap \mathbb{P}) \subsetneqq \mathbb{R} = \text{cl}(\mathbb{Q}) \cap \text{cl}(\mathbb{P})$.

Al igual que para el caso del derivado de un conjunto, la operación que consiste en calcular la cerradura de un subconjunto E en un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, define un operador $C : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ que tiene la siguiente fórmula de asociación: $C(E) = \text{cl}(E)$ para todo $E \subseteq X$. Este operador es conocido como el *operador cerradura* asociado al espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ (o generado por la topología $\mathcal{T}$).

2. El interior de un conjunto E

En la sección anterior definimos al mínimo conjunto cerrado que contiene a un subconjunto E de un espacio topológico X. Ahora estamos interesados en definir al máximo subconjunto abierto contenido en E.

2.8. Definición. Sea E un subconjunto de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$. El *interior* de E, el cual denotaremos con $\text{int}(E)$, es la unión de todos los abiertos contenidos en E. A los puntos que pertenecen a $\text{int}(E)$ les llamaremos *puntos interiores* de E.

De la definición resultan obvias las afirmaciones de la siguiente proposición (vea el ejercicio 2.B.(1)).

2.9. Proposición. *Para cualquier subconjunto E de un espacio $(X, \mathcal{T})$, se tiene que:*

(1) $\text{int}(E)$ *es un subconjunto abierto de X.*
(2) $\text{int}(E)$ *es el mayor abierto que está contenido en E; es decir, si A es un abierto en X contenido en E, entonces $A \subseteq \text{int}(E) \subseteq E$.*
(3) *Si $A \subseteq B \subseteq X$, entonces* $\text{int}(A) \subseteq \text{int}(B)$.
(4) $E \in \mathcal{T}$ *si y sólo si* $\text{int}(E) = E$.

Es claro que utilizando la noción de interior de un conjunto podemos definir un nuevo operador en cada espacio topológico. Dado un espacio $(X, \mathcal{T})$, la función $I : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ cuya regla de asociación es $I(E) = \text{int}(E)$ para cada $E \in \mathcal{P}(X)$ es un operador sobre $\mathcal{P}(X)$, llamado *operador interior* asociado a $(X, \mathcal{T})$.

La proposición que a continuación presentamos agrupa algunas de las propiedades que caracterizan al operador interior.

2.10. Proposición. *Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y A, B y E subconjuntos de X. Entonces,*

(1) $\text{int}(X) = X$,
(2) $\text{int}(E) \subseteq E$,
(3) $\text{int}(\text{int}(E)) = \text{int}(E)$,
(4) $\text{int}(A \cap B) = \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$.

Demostración. La afirmación en el inciso (1) es una consecuencia de la proposición 2.9.4. (2) es una consecuencia inmediata de la definición, y (3) resulta de 2.9.1 y 2.9.4. Demostremos, pues, la proposición en el inciso (4). Como $A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq B$, entonces, por (3) en la proposición 2.9, $\text{int}(A \cap B) \subseteq \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$. Por el inciso (2) de esta proposición, tenemos que $\text{int}(A) \cap \text{int}(B) \subseteq A \cap B$. Pero entonces $\text{int}(A) \cap \text{int}(B)$ es un abierto contenido en $A \cap B$ e $\text{int}(A \cap B)$ es el mayor de los abiertos que están contenidos en $A \cap B$, por lo cual $\text{int}(A) \cap \text{int}(B)$ está contenido en $\text{int}(A \cap B)$. De este modo hemos obtenido las dos contenciones que determinan la relación $\text{int}(A \cap B) = \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$.
$\boxtimes$

2.11. Observación. De la definición 2.8 y de la proposición 2.9 inciso (1), deducimos que $x \in E$ es un punto interior de E si existe un abierto A tal que $x \in A \subseteq E$.

La siguiente proposición relaciona los conceptos de interior y cerradura de un conjunto.

2.12. Proposición. *Para cualquier subconjunto E en un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, $\text{int}(E) = X \setminus \text{cl}(X \setminus E)$; lo cual es equivalente a la expresión $\text{cl}(E) = X \setminus \text{int}(X \setminus E)$.*

Demostración. Sea $x \in \text{int}(E)$. El conjunto $\text{int}(E)$ es abierto, contiene a x y no intersecta a $X \setminus E$. Por lo tanto, $x \notin \text{cl}(X \setminus E)$ (proposiciones 2.6 y 2.9), lo que significa que $x \in X \setminus \text{cl}(X \setminus E)$. Como x es un punto arbitrario de $\text{int}(E)$, entonces $\text{int}(E) \subseteq X \setminus \text{cl}(X \setminus E)$.

Ahora bien, si $x \in X \setminus \text{cl}(X \setminus E)$, entonces podemos encontrar un subconjunto abierto A que satisface $x \in A \subseteq E$. Por lo tanto, $x \in \text{int}(E)$ (vea la observación 2.11), y concluimos nuestra demostración. ⊠

Presentamos a continuación dos operadores más que están relacionados con los operadores cerradura e interior y que nos permitirán decidir cuando un punto en un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ está "lejos" de un conjunto dado $E \subseteq X$ y cuando pertenece a la "cáscara" de E según la topología $\mathcal{T}$, respectivamente.

2.13. Definiciones.

(1) Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $E \subseteq X$. *El exterior de E*, denotado por $\text{ext}(E)$, es el conjunto de puntos interiores de $X \setminus E$. Es decir, $\text{ext}(E) = \text{int}(X \setminus E)$.

(2) Un punto $x \in X$ es *un punto frontera de E* si cualquier vecindad V de x satisface $V \cap E \neq \emptyset$ y $V \cap (X \setminus E) \neq \emptyset$.

(3) La *frontera de E*, $\text{fr}(E)$, es el conjunto de los puntos frontera de E.

La siguiente proposición enumera algunas de las propiedades esenciales del operador exterior. Su demostración se deja también al lector (ver ejercicio 2.B.(1)).

2.14. Proposición. *Para subconjuntos E, A y B de un espacio X, las siguientes afirmaciones se cumplen.*

(1) $\text{ext}(\emptyset) = X$;

(2) $\text{ext}(E) \subseteq X \setminus E$;

(3) $\operatorname{ext}(E) = \operatorname{ext}(X \setminus \operatorname{ext}(E))$;
(4) $\operatorname{ext}(A \cup B) = \operatorname{ext}(A) \cap \operatorname{ext}(B)$.

Ahora veamos algunas propiedades del operador frontera.

2.15. Proposición. *Para subconjuntos E, A y B de un espacio X son ciertas las propiedades siguientes:*
(1) $\operatorname{fr}(\emptyset) = \emptyset$;
(2) $\operatorname{fr}(E) = \operatorname{fr}(X \setminus E)$;
(3) $\operatorname{fr}(\operatorname{fr}(E)) \subseteq \operatorname{fr}(E)$;
(4) $\operatorname{fr}(A \cap B) \subseteq [\operatorname{cl}(A) \cap \operatorname{fr}(B)] \cup [\operatorname{fr}(A) \cap \operatorname{cl}(B)]$.

Demostración. Las pruebas de las propiedades (1)–(4) requieren de cálculos simples; como una muestra de ello comprobemos la veracidad de la relación dada en (4). Si $x \in \operatorname{fr}(A \cap B)$ y V es una vecindad de x, entonces $\emptyset \neq V \cap A \cap B \subseteq V \cap A$. Es decir, cualquier vecindad de x intersecta a A en un conjunto no vacío. Por lo tanto $x \in \operatorname{cl}(A)$. De manera similar se prueba que $x \in \operatorname{cl}(B)$. Ahora queda por comprobar que x debe pertenecer a alguno de los conjuntos $\operatorname{fr}(A)$ o $\operatorname{fr}(B)$. Como toda vecindad de x intersecta tanto a A como a B, suponer que x no está en $\operatorname{fr}(A)$ y no está en $\operatorname{fr}(B)$ quiere decir que existen vecindades V y W de x que satisfacen que $V \cap (X \setminus A) = \emptyset = W \cap (X \setminus B)$. Pero esto significa que la vecindad $V \cap W$ de x no intersecta a $X \setminus (A \cap B)$, lo cual contradice el hecho de que $x \in \operatorname{fr}(A \cap B)$. Por lo tanto, $x \in \operatorname{fr}(A) \cup \operatorname{fr}(B)$. ⊠

En la siguiente proposición enumeramos varias igualdades que relacionan a los operadores interior, cerradura, exterior y frontera. Las igualdades en el primer inciso son consecuencia de la proposición 2.12. Las relaciones restantes son consecuencias directas de las definiciones y dejamos su verificación como un ejercicio (vea 2.B.(2)).

2.16. Proposición. *Para un subconjunto E de un espacio $(X, \mathcal{T})$ se cumple lo que a continuación enunciamos.*
(1) $\operatorname{ext}(E) = X \setminus \operatorname{cl}(E)$ *y* $\operatorname{cl}(E) = X \setminus \operatorname{ext}(E)$.
(2) $\operatorname{ext}(E) \cap \operatorname{int}(E) = \operatorname{ext}(E) \cap \operatorname{fr}(E) = \operatorname{int}(E) \cap \operatorname{fr}(E) = \operatorname{int}(E) \cap \operatorname{cl}(X \setminus E) = \operatorname{cl}(E) \cap \operatorname{ext}(E) = \emptyset$.
(3) $\operatorname{cl}(E) \cap \operatorname{fr}(E) = \operatorname{cl}(X \setminus E) \cap \operatorname{fr}(E) = [X \setminus \operatorname{int}(E)] \cap [X \setminus \operatorname{ext}(E)] = \operatorname{fr}(E)$.
(4) $\operatorname{cl}(E) = E \cup \operatorname{fr}(E)$ *y* $\operatorname{int}(E) = E \setminus \operatorname{fr}(E)$.
(5) $\operatorname{int}(E) \cup \operatorname{ext}(E) \cup \operatorname{fr}(E) = X$.

2.17. Ejemplo. Consideremos el espacio $Y = A(X) = X \cup \{p\}$ definido en el ejercicio 1.B.(7), en donde p es el punto distinguido de $A(X)$, y sea $E \subseteq A(X)$. Como $\{x\}$ es un subconjunto abierto para cada $x \in X$ y los únicos abiertos que contienen a p tienen complemento finito, entonces

$$\operatorname{int}(E) = \begin{cases} E & \text{si } p \notin E \\ E & \text{si } p \in E \text{ y } |X \setminus E| < \aleph_0 \\ E \setminus \{p\} & \text{si } p \in E \text{ y } |X \setminus E| \geqslant \aleph_0 \end{cases}$$

Ahora, si aplicamos el operador exterior a E, obtenemos:

$$\operatorname{ext}(E) = \operatorname{int}(Y \setminus E) = \begin{cases} Y \setminus E & \text{si } p \in E \\ Y \setminus E & \text{si } p \notin E \text{ y } |E| < \aleph_0 \\ X \setminus E & \text{si } p \notin E \text{ y } |E| \geqslant \aleph_0 \end{cases}$$

Y, finalmente,

$$\operatorname{fr}(E) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } p \in E \text{ y } |X \setminus E| < \aleph_0 \\ \{p\} & \text{si } p \in E \text{ y } |X \setminus E| \geqslant \aleph_0 \\ \emptyset & \text{si } p \notin E \text{ y } |E| < \aleph_0 \\ \{p\} & \text{si } p \notin E \text{ y } |E| \geqslant \aleph_0 \end{cases}$$

Notemos que los operadores que hemos definido hasta el momento, dependen de la topología elegida en X. En general, si $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ son topologías diferentes en X y $E \subseteq X$, entonces el interior, exterior, cerradura y frontera de E con respecto a $\mathcal{T}_1$ serán diferentes de aquellas en $\mathcal{T}_2$. Antes de dar un ejemplo, convengamos en utilizar las notaciones $\operatorname{int}_{\mathcal{T}}(E)$, $\operatorname{cl}_{\mathcal{T}}(E)$, $\operatorname{ext}_{\mathcal{T}}(E)$ y $\operatorname{fr}_{\mathcal{T}}(E)$, para hacer énfasis que se está calculando el interior, la cerradura, el exterior y la frontera de E en el espacio topológico $(X, \mathcal{T})$.

2.18. Ejemplo. Tomemos en el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ el subconjunto $E = [\mathbb{Q} \cap (0,1)] \cup \{3 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup (4, \to)$. Sea $\mathcal{S}$ la topología de Sorgenfrey en $\mathbb{R}$ definida en 1.42 del capítulo anterior. Consideremos la topología euclidiana $\mathcal{T}_e$ en $\mathbb{R}$, y sea

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(a, \to) : a \in \mathbb{R}\}.$$

Puede verificarse que $\mathcal{T}$ es una topología en $\mathbb{R}$ contenida en $\mathcal{T}_e$. La cerradura de E con respecto a $\mathcal{S}$ es igual a

$$\operatorname{cl}_{\mathcal{S}}(E) = [0,1) \cup \{3 - \tfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup [4, \to);$$

en cambio, si consideramos la topología euclidiana obtenemos

$$\mathrm{cl}_{\mathcal{T}_e}(E) = [0,1] \cup \{3 - \tfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{3\} \cup [4, \rightarrow),$$

y por otro lado $\mathrm{cl}_{\mathcal{T}}(E) = \mathbb{R}$. Sin embargo, $\mathrm{int}_{\mathcal{S}}(E) = \mathrm{int}_{\mathcal{T}_e}(E) = \mathrm{int}_{\mathcal{T}}(E) = (4, \rightarrow)$. Además, $\mathrm{ext}_{\mathcal{S}}(E) = (\leftarrow, 0) \cup [1,4) \setminus \{3 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, $\mathrm{ext}_{\mathcal{T}_e}(E) = (\leftarrow, 0) \cup (1,4) \setminus \{3 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ y $\mathrm{ext}_{\mathcal{T}}(E) = \emptyset$.

Y en el caso de la frontera tenemos que

$$\mathrm{fr}_{\mathcal{S}}(E) = [0,1) \cup \{3 - \tfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{4\},$$

y que $\mathrm{fr}_{\mathcal{T}_e}(E) = [0,1] \cup \{3 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{3,4\}$ y además $\mathrm{fr}_{\mathcal{T}}(E) = (-\infty, 4]$.

La demostración formal de la siguiente proposición es dejada como un ejercicio al lector (vea 2.B.(5)).

2.19. Proposición. *Sean $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ dos topologías en X y sea A un subconjunto de X. Si $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$, entonces*

(1) $\mathrm{der}_{\mathcal{T}_2}(A) \subseteq \mathrm{der}_{\mathcal{T}_1}(A)$,
(2) $\mathrm{cl}_{\mathcal{T}_2}(A) \subseteq \mathrm{cl}_{\mathcal{T}_1}(A)$,
(3) $\mathrm{int}_{\mathcal{T}_2}(A) \supseteq \mathrm{int}_{\mathcal{T}_1}(A)$,
(4) $\mathrm{ext}_{\mathcal{T}_2}(A) \supseteq \mathrm{ext}_{\mathcal{T}_1}(A)$,
(5) $\mathrm{fr}_{\mathcal{T}_2}(A) \subseteq \mathrm{fr}_{\mathcal{T}_1}(A)$.

En particular, si $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ es la recta real con su topología usual y $\mathbb{P}$ es el conjunto de números irracionales, entonces la topología $\mathcal{T}_{\mathbb{P}}$ definida en el ejemplo 1.34 inciso (2), es una topología más fina que $\mathcal{T}_e$; por lo cual si $A \subseteq \mathbb{R}$, $\mathrm{der}_{\mathcal{T}_{\mathbb{P}}}(A) \subseteq \mathrm{der}_{\mathcal{T}_e}(A)$, $\mathrm{cl}_{\mathcal{T}_{\mathbb{P}}}(A) \subseteq \mathrm{cl}_{\mathcal{T}_e}(A)$, $\mathrm{int}_{\mathcal{T}_{\mathbb{P}}}(A) \supseteq \mathrm{int}_{\mathcal{T}_e}(A)$, $\mathrm{ext}_{\mathcal{T}_{\mathbb{P}}}(A) \supseteq \mathrm{ext}_{\mathcal{T}_e}(A)$ y $\mathrm{fr}_{\mathcal{T}_{\mathbb{P}}}(A) \subseteq \mathrm{fr}_{\mathcal{T}_e}(A)$. Para $A = [\mathbb{Q} \cap (0,1)] \cup [\mathbb{P} \cap (2,3)]$ se puede demostrar que todas las contenciones son propias.

Ahora veamos las relaciones entre los operadores aplicados a un espacio X con respecto a los mismos operadores aplicados a alguno de sus subespacios. En el resultado siguiente los subíndices indican el espacio en el que se está aplicando el operador.

2.20. Proposición. *Sea Y un subespacio de X. Para cualquier $E \subseteq Y$ se tiene que*

(1) $\mathrm{der}_Y(E) = \mathrm{der}_X(E) \cap Y$,
(2) $\mathrm{cl}_Y(E) = \mathrm{cl}_X(E) \cap Y$,
(3) $\mathrm{int}_X(E) \cap Y \subseteq \mathrm{int}_Y(E)$, *y*
(4) $\mathrm{fr}_Y(E) \subseteq \mathrm{fr}_X(E) \cap Y$.

DEMOSTRACIÓN. Como $E \subseteq Y$, se tiene que para cualesquiera $A \subseteq X$ y $x \in Y$, $E \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ equivale a $E \cap ((A \cap Y) \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. De este hecho se obtiene la demostración de (1).

Para demostrar (2) se emplean las igualdades $\mathrm{cl}_Y(E) = E \cup \mathrm{der}_Y(E)$ y $\mathrm{cl}_X(E) = E \cup \mathrm{der}_X(E)$.

Ahora, como $\mathrm{int}_X(E)$ es un abierto en X contenido en E, tenemos que $Y \cap \mathrm{int}_X(E)$ es un abierto en Y contenido en E y, por ende, $Y \cap \mathrm{int}_X(E) \subseteq \mathrm{int}_Y(E)$.

Por último, sea $x \in \mathrm{fr}_Y(E)$. Naturalmente $x \in Y$. Para demostrar que $x \in \mathrm{fr}_X(E)$, tomemos un abierto A en X que contiene a x; entonces $A \cap Y$ es un abierto en Y que contiene a x, así que $\emptyset \neq (A \cap Y) \cap E \subseteq A \cap E$ y $\emptyset \neq (A \cap Y) \cap (Y \setminus E) \subseteq A \cap (X \setminus E)$. ⊠

2.21. OBSERVACIÓN. Las contenciones mencionadas en los incisos (3) y (4) de la proposición anterior pueden ser estrictas. Por ejemplo, en $\mathbb{R}$ con la topología usual podemos considerar el subespacio $Y = [0, 1]$ y el subconjunto $E = [0, 1/2)$. De esta forma tenemos que $\mathrm{int}_{\mathbb{R}}(E) = (0, 1/2)$ y que $\mathrm{int}_Y(E) = [0, 1/2)$. Dejamos al lector la tarea de crear un ejemplo en donde $\mathrm{fr}_Y(E)$ sea un subconjunto propio de $Y \cap \mathrm{fr}_X(E)$ (vea ejercicio 2.C.(6)).

3. Construcción de topologías a partir de operadores

En la sección 7, vimos cómo generar topologías en un conjunto X a partir de familias de subconjuntos de X. En las secciones 1 y 2 introdujimos los conceptos de cerradura e interior de un conjunto E en un espacio X. Resulta ahora claro que a partir del operador interior asociado al espacio topológico X, podemos siempre reproducir a todos los conjuntos abiertos del espacio X; para ello simplemente tomemos la colección $\{\mathrm{int}(E) : E \subseteq X\}$. Y es claro también que utilizando al operador cerradura podemos recuperar a todos los subconjuntos cerrados de X.

Es entonces natural pensar que podemos crear topologías para un conjunto X si tenemos definido un operador $I : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ sobre X que satisfaga las propiedades (1), (2), y (3) enunciadas en la proposición 2.10; es decir, un operador que tenga propiedades que nos recuerden al operador interior.

Esta idea fue aplicada por el matemático polaco K. Kuratowski al operador cerradura. K. Kuratowski analizó las propiedades más importantes del operador cerradura asociado a todo espacio topológico y notó que cuatro de ellas tienen toda la información topológica del espacio. Kuratowski definió en [47] la estructura topológica en un conjunto X utilizando operadores definidos sobre X que satisfacen cuatro relevantes propiedades, que hoy día son conocidas como axiomas de Kuratowski.

2.22. Definición. Diremos que una función $\eta : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ es un *operador de Kuratowski* u *operador cerradura* si satisface las siguientes condiciones, conocidas como *axiomas de Kuratowski*:

(1) $\eta(\emptyset) = \emptyset$.
(2) $\forall\, E \subseteq X$, se tiene que $E \subseteq \eta(E)$.
(3) $\forall\, E \subseteq X \,:\, \eta(\eta(E)) = \eta(E)$.
(4) $\forall\, E, F \subseteq X \,:\, \eta(E \cup F) = \eta(E) \cup \eta(F)$.

El primer ejemplo de un operador de Kuratowski es el operador de cerradura asociado a un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$. El siguiente lema establece una propiedad de monotonía de los operadores de Kuratowski, que será de gran utilidad.

2.23. Lema. *Si η es un operador de Kuratowski en un conjunto X, entonces, para todo $E, F \subseteq X$, $E \subseteq F$ implica que $\eta(E) \subseteq \eta(F)$.*

Demostración. Como $\eta(F) = \eta(E \cup F) = \eta(E) \cup \eta(F)$, tenemos que $\eta(E) \subseteq \eta(F)$. ⊠

Estamos ya en posición de saber cómo generar topologías utilizando operadores de Kuratowski. En el siguiente teorema se muestra esto.

2.24. Proposición. *Sea X un conjunto. Si $\eta : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ es un operador de Kuratowski para X entonces existe una única topología $\mathcal{T}$ en X para la cual η es su operador de cerradura.*

Demostración. Sea $\mathcal{F} = \{F \subseteq X \,:\, F = \eta(F)\}$. Verifiquemos que $\mathcal{F}$ es la familia de los conjuntos cerrados para una topología en X; esto es, verificaremos que la colección $\mathcal{F}$ contiene a los conjuntos $\emptyset$ y X, y que es cerrada bajo uniones finitas e intersecciones arbitrarias (note que si logramos demostrar que $\mathcal{F}$ tiene estas propiedades, entonces la colección $\mathcal{T} = \{X \setminus F \,:\, F \in \mathcal{F}\}$ es una topología).

Es claro que $\emptyset \in \mathcal{F}$. Por la condición (2) de la definición de un operador de Kuratowski, tenemos que $X \subseteq \eta(X)$. Como siempre sucede que $\eta(X) \subseteq X$, tenemos que $\eta(X) = X$. Por ello, $X \in \mathcal{F}$.

Supongamos que $E, F \in \mathcal{F}$. Como η es un operador de Kuratowski, se tiene que $\eta(E \cup F) = \eta(E) \cup \eta(F)$. Pero $\eta(E) = E$ y $\eta(F) = F$. Así que $\eta(E \cup F) = E \cup F$. Consecuentemente $\mathcal{F}$ es cerrada bajo uniones finitas.

Supongamos, por otro lado, que $\emptyset \neq \{E_\alpha : \alpha \in J\} \subseteq \mathcal{F}$. Por la condición (2) de la definición de operador de Kuratowski, tenemos que $\bigcap_{\alpha\in J} E_\alpha \subseteq \eta(\bigcap_{\alpha\in J} E_\alpha)$.

Por otra parte, aplicando el lema anterior, tenemos que $\eta(\bigcap_{\alpha\in J} E_\alpha) \subseteq \eta(E_\beta)$ para toda $\beta \in J$, de donde, $\eta(\bigcap_{\alpha\in J} E_\alpha) \subseteq \bigcap_{\alpha\in J} \eta(E_\alpha)$. Pero $\eta(E_\alpha) = E_\alpha$ para toda $\alpha \in J$. Por lo tanto, $\eta(\bigcap_{\alpha\in J} E_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in J} E_\alpha$. En consecuencia $\bigcap_{\alpha\in J} E_\alpha \in \mathcal{F}$.

Hemos demostrado entonces que existe una topología $\mathcal{T}$ para la cual la familia $\mathcal{F}$ es la familia de cerrados. Verifiquemos ahora que η es el operador cerradura para esta topología.

Para ello tomemos un subconjunto E de X arbitrario. Denotemos con $\mathrm{cl}(E)$ a la cerradura de E respecto de la topología $\mathcal{T}$. Como $\eta(E)$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{T}$ (puesto que $\eta(E) = \eta(\eta(E))$) que contiene a E, tenemos que $\mathrm{cl}(E) \subseteq \eta(E)$. Por otro lado, como $E \subseteq \mathrm{cl}(E)$ se tiene que $\eta(E) \subseteq \eta(\mathrm{cl}(E))$. Pero $\mathrm{cl}(E)$ es cerrado en $(X, \mathcal{T})$. Entonces $\mathrm{cl}(E) \in \mathcal{F}$. Así que $\eta(\mathrm{cl}(E)) = \mathrm{cl}(E)$. En consecuencia $\mathrm{cl}(E) = \eta(E)$. De esta forma η es el operador cerradura de $(X, \mathcal{T})$.

Dejamos al lector verificar que $\mathcal{T}$ es la única topología para la cual η es su operador cerradura. $\boxtimes$

2.25. Definición. Sea X un conjunto. Diremos que una función $\eta : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ es un *operador interior* si:

(1) $\eta(X) = X$;
(2) $\eta(E) \subseteq E$ para cualquier $E \subseteq X$;
(3) $\eta(\eta(E)) = \eta(E)$ para cualquier $E \subseteq X$; y
(4) $\eta(A \cap B) = \eta(A) \cap \eta(B)$.

En la siguiente proposición mostraremos cómo generar una topología en un conjunto X utilizando a un operador interior. Antes de ello demostraremos que los operadores interior también son monótonos.

2.26. Lema. *Suponga que $\eta : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ es un operador interior definido en un conjunto X. Entonces*

$$A \subseteq B \subseteq X \text{ implica } \eta(A) \subseteq \eta(B).$$

Demostración. Como $A \subseteq B$, tenemos que $A \cap B = A$. Ahora bien $\eta(A) \cap \eta(B) \subseteq \eta(B)$, y por (4) de la definición de operador interior, tenemos que $\eta(A) \cap \eta(B) = \eta(A \cap B) = \eta(A)$. Con lo cual concluimos que $\eta(A) \subseteq \eta(B)$. ⊠

2.27. Proposición. *Sea X un conjunto y sea $\eta : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ un operador interior definido sobre X. Entonces existe una única topología $\mathcal{T}$ en X para la cual η es su operador interior.*

Demostración. Defina $\kappa : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ por medio de la siguiente regla: $\kappa(A) = X \setminus \eta(A)$ para toda $A \in \mathcal{P}(X)$. Se deja como ejercicio para el lector verificar que κ es un operador de Kuratowski, probar que η es en efecto el operador interior asociado al espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, donde $\mathcal{T}$ es la topología generada por η, y que $\mathcal{T}$ es la única topología con esta propiedad. (ver el ejercicio 2.C.(5)) ⊠

2.28. Ejemplos.

(1) Sea X un conjunto y $\eta : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ definido por

$$\eta(E) = \begin{cases} E & \text{si } E \text{ es finito} \\ X & \text{si } E \text{ es infinito} \end{cases}$$

Tenemos entonces que:

(a) $\eta(\emptyset) = \emptyset$;

(b) $E \subseteq \eta(E) \ \forall \ E \subseteq X$;

(c)

$$\eta(\eta(E)) = \begin{cases} \eta(E) & \text{si } E \text{ es finito} \\ \eta(X) & \text{si } E \text{ es infinito} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} E & \text{si } E \text{ es finito} \\ X & \text{si } E \text{ es infinito} \end{cases} = \eta(E)$$

(d) Ahora sean $A, B \subseteq X$. Si A y B son finitos, entonces $A \cup B$ también es un conjunto finito, de tal modo que $\eta(A \cup B) = A \cup B = \eta(A) \cup \eta(B)$. En el caso en que A o B es infinito, entonces también se cumple que $\eta(A \cup B) = X = \eta(A) \cup \eta(B)$.

Resulta así que η es un operador de Kuratowski pues cumple con las condiciones de la definición 2.22. De la proposición 2.27 inciso (2) se sigue que $\mathcal{T} = \{X \setminus \eta(E) : E \subseteq X\}$ es una topología para X. Observe que $\mathcal{T}$ es precisamente la topología cofinita en X.

(2) Sea E_0 un subconjunto fijo de X. El operador $\eta_0 : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ dado por

$$\eta_0(E) = \begin{cases} E_0 \cup E & \text{si } E \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{si } E = \emptyset \end{cases}$$

es un operador de Kuratowski. Verifiquémoslo: es claro que η_0 satisface (1) y (2) de la definición 2.22. Por otro lado, $\eta_0(\eta_0(E)) = E_0 \cup \eta_0(E) = E_0 \cup E_0 \cup E = E_0 \cup E = \eta_0(E)$ si $E \neq \emptyset$, y $\eta_0(\eta_0(\emptyset)) = \eta_0(\emptyset) = \emptyset$; y finalmente, $\eta_0(A \cup B) = E_0 \cup A \cup B = (E_0 \cup A) \cup (E_0 \cup B) = \eta_0(A) \cup \eta_0(B)$ si $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$. En el caso en que $A = \emptyset = B$, la igualdad $\eta_0(A \cup B) = \eta_0(A) \cup \eta_0(B)$ resulta trivial. Por otro lado, si uno de los dos conjuntos A o B es no vacío y el otro no, por ejemplo, si $A \neq \emptyset$ y $B = \emptyset$, tenemos que $\eta_0(A \cup B) = \eta_0(A) = E_0 \cup A = (\mathcal{E}_0 \cup A) \cup \emptyset = \mathcal{E}_0 \cup A) \cup \eta_0(B)$. Por lo tanto, podemos concluir que η_0 es un operador cerradura en X y $\mathcal{T}_0 = \{X \setminus \eta_0(E) : E \subseteq X\}$ es una topología en X. ¿Cómo es $\mathcal{T}_0$ si $E_0 = \emptyset$ (respectivamente, $E_0 = X$)? (véase ejercicio 2.C.(6)).

(3) Para $E_0 \subseteq X$ fijo y κ, cardinal infinito, la fórmula

$$\eta(E) = \begin{cases} E \cap (X \setminus E_0) & \text{si } E \not\supseteq E_0 \text{ ó } E \supseteq E_0 \text{ y } |X \setminus E| \geqslant \kappa \\ E & \text{si } E \supseteq E_0 \text{ y } |X \setminus E| < \kappa \end{cases}$$

define un operador interior. Compare la topología generada por este operador y la topología $\mathcal{T}_{E_0,\kappa}$ definida en el ejercicio 1.B.(6). (véase ejercicio 2.C.(7)).

4. Subconjuntos densos, perfectos, densos en ninguna parte y fronterizos

Los conceptos que hemos estudiado en las secciones anteriores, nos permiten definir de manera precisa algunos tipos especiales de subconjuntos de espacios topológicos que tienen particular importancia.

2.29. Definiciones. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico.

(1) Un conjunto $E \subseteq X$ es *denso* en X si $\text{cl}(E) = X$.

(2) Un conjunto $E \subseteq X$ es *denso en sí mismo* si cualquier punto de E es punto de acumulación de E, es decir, $E \subseteq \text{der}(E)$.

(3) $E \subseteq X$ es *perfecto* si E es cerrado y denso en sí mismo.
(4) $E \subseteq X$ es *fronterizo* si $\text{int}(E) = \emptyset$.
(5) $E \subseteq X$ es *denso en ninguna parte* si $\text{int}(\text{cl}(E)) = \emptyset$.

Cantor fue quien introdujo los conceptos de punto aislado, conjunto frontera, conjunto denso, conjunto derivado, conjunto cerrado y conjunto perfecto (todos ellos considerados solamente en la recta real) en sus trabajos publicados a partir de 1872 y hasta 1888. Estableciendo con ello las bases de la Topología. Más tarde, Hausdorff en [33] generaliza estos conceptos a espacios topológicos.

Los siguientes resultados son una consecuencia directa de las definiciones.

2.30. Proposición. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico.*

(1) *$E \subseteq X$ es denso en X si y sólo si cada elemento $A \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ satisface $A \cap E \neq \emptyset$.*
(2) *Los siguientes enunciados son equivalentes.*
  (a) *$E \subseteq X$ es fronterizo;*
  (b) *cada elemento $A \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ contiene puntos de $X \setminus E$;*
  (c) *$X \setminus E$ es denso en X.*
(3) *Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*
  (a) *$E \subseteq X$ es denso en ninguna parte;*
  (b) *$X \setminus \text{cl}(E)$ es denso en X;*
  (c) *cualquier abierto A en X no vacío, contiene un abierto $B \neq \emptyset$ tal que $B \cap E = \emptyset$.*
(4) *E es perfecto si y sólo si $E = \text{der}(E)$.*
(5) *Todo subconjunto denso en ninguna parte es fronterizo, y todo subconjunto cerrado fronterizo es denso en ninguna parte.*

2.31. Ejemplos.

(1) En un espacio discreto X, el único subconjunto denso en ninguna parte (respectivamente, fronterizo, denso en sí mismo, perfecto) es el vacío, y el único subconjunto denso es X.
(2) En el espacio euclidiano $\mathbb{R}$, el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ y el de los irracionales $\mathbb{P}$, son ejemplos de subconjuntos densos, fronterizos, y densos en sí mismos.
(3) Sea $X = (I^2, \mathcal{T}_{\leqslant})$ el cuadrado lexicográfico (véase el ejercicio 1.G.(6)). Este espacio tiene la característica de no contener subconjuntos densos numerables. En efecto, si $N = \{(a_n, b_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto numerable de X, entonces podemos

encontrar un número real $x \in I$ tal que $x \notin \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ (ya que I es más que numerable). Resulta que el conjunto $\{(x,t) : 0 < t < 1\}$ es abierto y no intersecta a N. Esto significa que N no es denso. Como N se eligió de manera arbitraria, podemos concluir que X no contiene subconjuntos densos numerables.

Es claro que si $E \subseteq X$ es fronterizo (resp., denso en ninguna parte) y $F \subseteq E$, entonces F es también fronterizo (resp., denso en ninguna parte). Es también obvio que si $E \subseteq X$ es denso y $E \subseteq F$, entonces F es denso en X. Algunos resultados menos evidentes en este sentido son los siguientes:

2.32. PROPOSICIÓN. *Para un espacio topológico X se cumple que*

(1) *la unión de dos subconjuntos fronterizos de X no necesariamente es un conjunto fronterizo; sin embargo,*
(2) *si $A \subseteq X$ es fronterizo y $B \subseteq X$ es denso en ninguna parte, entonces $A \cup B$ es fronterizo. Además,*
(3) *la unión de dos (y en consecuencia, de cualquier cantidad finita de) subconjuntos densos en ninguna parte de X es también un conjunto denso en ninguna parte.*

DEMOSTRACIÓN.

(1) Como ya habíamos mencionado, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{P}$ son dos subconjuntos fronterizos de $\mathbb{R}$ con su topología euclidiana. Pero $\mathbb{Q} \cup \mathbb{P} = \mathbb{R}$ no lo es.
(2) Conocemos la igualdad $\mathrm{cl}[X \setminus (A \cup B)] = \mathrm{cl}[(X \setminus A) \cap (X \setminus B)]$. Por el ejercicio 2.A.(6), sabemos que
$$\mathrm{cl}[(X \setminus A) \cap (X \setminus B)] \supseteq \mathrm{cl}(X \setminus A) \cap (X \setminus \mathrm{cl}(B)).$$
Como A es fronterizo, $\mathrm{cl}(X \setminus A) = X$. Así,
$$\mathrm{cl}(X \setminus A) \cap (X \setminus \mathrm{cl}(B)) = X \setminus \mathrm{cl}(B);$$
es decir, $X \setminus \mathrm{cl}(B) \subseteq \mathrm{cl}[(X \setminus A) \cap (X \setminus B)]$. Como $\mathrm{cl}[(X \setminus A) \cap (X \setminus B)]$ es cerrado, $\mathrm{cl}[X \setminus \mathrm{cl}(B)] \subseteq \mathrm{cl}[(X \setminus A) \cap (X \setminus B)]$. Pero B es denso en ninguna parte, por lo cual $\mathrm{cl}[X \setminus \mathrm{cl}(B)] = X$; en otras palabras, $\mathrm{cl}[X \setminus (A \cup B)] = X$; o sea, $A \cup B$ es fronterizo.
(3) Si A y B son densos en ninguna parte, entonces $\mathrm{cl}(A)$ y $\mathrm{cl}(B)$ también son densos en ninguna parte. Aplicando (2) concluimos que $\mathrm{cl}(A) \cup \mathrm{cl}(B) = \mathrm{cl}(A \cup B)$ es fronterizo; es decir, $A \cup B$ es denso en ninguna parte. ⊠

El siguiente resultado será de mucha utilidad.

2.33. Proposición. *Sea D un subconjunto denso del espacio $(X, \mathcal{T})$, y sea $A \in \mathcal{T}$. Entonces* $\text{cl}(A) = \text{cl}(A \cap D)$.

Demostración. Tomemos $x \in \text{cl}(A)$ y sea V una vecindad de x. Resulta que $V \cap A$ contiene un abierto no vacío, y como D es denso en X, $V \cap A \cap D \neq \emptyset$. Es decir, cualquier vecindad de x tiene intersección no vacía con $A \cap D$, lo que significa que $x \in \text{cl}(A \cap D)$. Hemos demostrado pues que $\text{cl}(A) \subseteq \text{cl}(A \cap D)$. La inclusión inversa es obvia. ⊠

Terminaremos esta sección estudiando las ideas anteriores aplicadas a un espacio de funciones continuas con la topología de la convergencia puntual.

2.34. Ejemplo. Tomemos el espacio $C_p(I)$ de funciones continuas definidas en el intervalo cerrado $[0, 1]$ y con valores en la línea real $\mathbb{R}$, considerado con la topología $\mathcal{T}_p$, la cual por cierto recibe el nombre de *topología de la convergencia puntual* en $C(I)$. Recordemos que un abierto canónico en este espacio es de la forma

$$[x_0, \ldots, x_k; A_0, \cdots, A_k] = \{g \in C(I) : \forall i = 0, \ldots, k \,(g(x_i) \in A_i)\},$$

en donde cada A_i es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$. También recordemos que una vecindad canónica de $f \in C(I)$ es de la forma

$$[f; x_0, \ldots, x_k; \epsilon] = \{g \in C(I) : \forall i = 0, \ldots, k \,(|g(x_i) - f(x_i)| < \epsilon)\},$$

en donde ϵ es un número real positivo.

Consideremos el subconjunto E de $C_p(I)$ de funciones lineales. Es decir,

$$E = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R} \;:\; \exists\, a_0, a_1 \in \mathbb{R} \left(\forall\, x \in [0, 1] \,(f(x) = a_1 x + a_0)\right)\}.$$

El conjunto E resulta ser denso en sí mismo, pues para cada $f \in E$ y $V = [f; x_0, \ldots, x_k; \epsilon]$, la función $f + \epsilon/2$ es lineal y pertenece a V. Además, E es un subconjunto cerrado de $C_p(I)$. En efecto, $g \notin E$ implica que existen $a, b, c \in I$ tales que los puntos $p = (a, g(a))$, $q = (b, g(b))$ y $r = (c, g(c))$ constituyen los vértices de un triángulo no degenerado Δ. Si $\delta = \epsilon/2$ en donde ϵ es el mínimo de las distancias de cada uno de los puntos p, q, r a su respectivo lado opuesto en el triángulo Δ, entonces, el abierto $[g; a, b, c; \delta]$ contiene a g y no contiene puntos de E.

Así E es perfecto. Además, E es denso en ninguna parte ya que para cada $f \in E$, cada $V = [f; x_0, \ldots, x_k; \epsilon]$ contiene funciones continuas las cuales no son lineales. Esto significa que $\text{int}(E) = \emptyset$.

Ejercicios

2.A. El derivado y la cerradura de un conjunto

(1) Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y sea A un subconjunto de X. Demuestre las siguientes afirmaciones.
   (a) $x \in X$ es punto de acumulación de A si y sólo si x es un punto de adherencia de $A \setminus \{x\}$.
   (b) Un punto $x \in X$ es un punto aislado de A si y sólo si existe un abierto U tal que $U \cap A = \{x\}$.
   (c) Un punto x en un espacio topológico X es *aislado* si es aislado de X (véase el inciso anterior). Demuestre que x es aislado si y sólo si el conjunto $\{x\}$ es abierto en X.
   (d) El conjunto $\mathrm{der}(A)$ es cerrado si y sólo si $\mathrm{der}(\mathrm{der}(A)) \subseteq \mathrm{der}(A)$.
   (e) Para cualquier $x \in X$, $x \notin \mathrm{der}(\{x\})$.
   (f) Si para cada $x \in \mathrm{cl}(A)$, $\{x\}$ es cerrado, entonces $\mathrm{der}(\mathrm{der}(A)) \subseteq \mathrm{der}(A)$.
   (g) Si $\mathrm{der}(\{x\})$ es cerrado y $x \in \mathrm{der}(\mathrm{der}(A))$, entonces x no es punto aislado de A.
   (h) Si para cada $x \in \mathrm{cl}(A)$, $\mathrm{der}(\{x\})$ es cerrado, entonces $\mathrm{der}(A)$ es cerrado.

(2) Sea $X = \{a, b, c, d, e\}$ y
$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}.$$
Verifique que $\mathcal{T}$ es una topología en X, y que los subconjuntos cerrados en $(X, \mathcal{T})$ son $\emptyset$, X, $\{b, c, d, e\}$, $\{a, b, e\}$, $\{b, e\}$ y $\{a\}$. Pruebe que $\mathrm{cl}(\{b\}) = \{b, e\}$, $\mathrm{cl}(\{a, c\}) = X$, y $\mathrm{cl}(\{b, d\}) = \{b, c, d, e\}$.

(3) Sea $\mathcal{T}$ la topología cofinita en un conjunto no vacío X (véase el ejemplo 1.9 inciso (4)). Determine los subconjuntos cerrados en $(X, \mathcal{T})$, y caracterice la cerradura de cualquier subconjunto E de X.

(4) Demuestre las afirmaciones hechas en los ejemplos 2.2.

(5) Demuestre los incisos (6), (7) y (8) de la proposición 2.6.

(6) Sean A y B dos subconjuntos del espacio topológico X. Verifique que las siguientes relaciones siempre se cumplen.
   (a) $\mathrm{cl}(A) \setminus \mathrm{cl}(B) \subseteq \mathrm{cl}(A \setminus B)$;
   (b) $\mathrm{der}(A) \setminus \mathrm{der}(B) \subseteq \mathrm{der}(A \setminus B)$;
   (c) $\mathrm{cl}(X \setminus A) \cap (X \setminus \mathrm{cl}(B)) \subseteq \mathrm{cl}[(X \setminus A) \cap (X \setminus B)]$;

(d) $\text{der}(X \setminus A) \cap (X \setminus \text{der}(B)) \subseteq \text{der}[(X \setminus A) \cap (X \setminus B)]$.

(7) Considere los espacios $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_1)$ y $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_2)$ definidos en el ejercicio 1.C.(3). Determine los subconjuntos cerrados de cada uno de ellos. Obtenga la cerradura, en cada una de estas dos topologías, de los subconjuntos $\{7, 10, 80\}$ y $\{3n : n \in \mathbb{N}\}$. En general, ¿cuál es la cerradura, en cada una de estas topologías, de A y B en los casos en que A es finito y B es infinito?

(8) Sea $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$. Pruebe que $\mathcal{T}$ es una topología en $\mathbb{R}$ y caracterice a sus subconjuntos cerrados. Determine, también, los puntos de acumulación, los de adherencia y los aislados de los conjuntos $[3, 7)$, $\{7, 24\}$, $\{3n : n \in \mathbb{N}\}$ y $(\infty, 0]$.

(9) Consideremos en $\mathbb{R}$, con su topología usual $\mathcal{T}_e$, al conjunto $E = \{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} : m, n \in \mathbb{N}\}$. Pruebe que $\text{der}(E) = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ y $\text{der}(\text{der}(E)) = \{0\}$.

(10) Tomemos en $\mathbb{R}$ la topología de Sorgenfrey $\mathcal{S}$ definida en el ejemplo 1.42. Como ya se vió en el texto, cada conjunto de la forma $[a, b)$, con $a < b$, es cerrado en $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$. ¿Cuáles son los puntos de acumulación, de adherencia y los aislados del conjunto $E = (0, 1) \cup \{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{2 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{p \in \mathbb{Q} : p > 3\}$? Repita el mismo ejercicio sobre E cuando $\mathbb{R}$ posee la topología usual. En general, para $E \subseteq \mathbb{R}$, pruebe que $\text{cl}_{\mathcal{S}} E = E \cup \{x \in \mathbb{R} : \exists\, F \subseteq E$ tal que x es el ínfimo de $F\}$.

(11) Consideremos la línea de Michael $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{P}})$. Justifique las siguientes afirmaciones:
   (a) $H \subseteq \mathbb{R}$ es cerrado en $\mathcal{M}$ si, y sólo si, $H = F \cap G$ en donde F es un cerrado euclidiano en $\mathbb{R}$ y G es de la forma $\mathbb{R} \setminus B$, en donde B es un subconjunto de $\mathbb{P}$; y
   (b) para cualquier subconjunto E de $\mathbb{R}$, $\text{cl}_{\mathcal{M}} E = (\text{cl}_e E \cap \mathbb{Q}) \cup E$, en donde $\text{cl}_e E$ es la cerradura euclidiana de E.

2.B. El interior de un conjunto

(1) Corrobore la veracidad de las afirmaciones hechas en la proposiciones 2.9 y 2.14.

(2) Pruebe (1), (2) y (3) en 2.15; proporcione ejemplos que muestren que las igualdades en (3) y (4) de esta proposición, no se satisfacen necesariamente; y verifique que las relaciones en la proposición 2.16 son ciertas.

(3) Sea $X = \{a, b, c, d, e\}$ y $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$. Verifique que $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico. Consideremos el subconjunto $E = \{b, c, d\}$. Determine los conjuntos $\text{int}(E)$, $\text{ext}(E)$ y $\text{fr}(E)$.

(4) Sea E un subconjunto propio de X diferente del vacío. Determine los conjuntos $\text{int}(E)$, $\text{ext}(E)$ y $\text{fr}(E)$ en $(X, \mathcal{T})$ cuando $\mathcal{T}$ es la topología discreta (respectivamente, indiscreta).
(5) Verifique que la proposición 2.19 se cumple.
(6) Verifique que la contención en el inciso (4) de la proposición 2.20 puede ser estricta.
(7) Sea $A, B \subseteq X$. Demuestre que $\text{int}(A \cup B) \supseteq \text{int}(A) \cup \text{int}(B)$, y exponga un ejemplo que muestre que esta inclusión puede ser estricta.
(8) Compruebe que las siguientes relaciones son ciertas para $A, B \subseteq X$:
  (a) $\text{fr}(A \cup B) \subseteq \text{fr}(A) \cup \text{fr}(B)$.
  (b) $\text{fr}(\text{cl}(A)) \subseteq \text{fr}(A)$.
  (c) si $A \cap \text{cl}(B) = \emptyset = \text{cl}(A) \cap B$, entonces $\text{fr}(A \cup B) = \text{fr}(A) \cup \text{fr}(B)$.
(9) Proporcione un ejemplo de un espacio topológico X y de subconjuntos A y B, que muestre que la inclusión en el inciso (4) de la proposición 2.15 puede ser estricta.
(10) (a) Sea $A \subseteq X$, en donde X es un espacio topológico. Si $\text{int}(A) \subseteq B \subseteq \text{cl}(A)$, entonces $\text{fr}(B) \subseteq \text{fr}(A)$.
  (b) Para cualquier subconjunto A de un espacio X se tiene que $\text{cl}(\text{int}(\text{fr}(A))) = \text{cl}[A \cap \text{int}(\text{fr}(A))]$.
  (c) Encuentre un subconjunto A del espacio euclidiano $\mathbb{R}$ tal que $\text{int}(\text{fr}(A))$, $\text{cl}(\text{fr}(A))$ y $\text{fr}(A)$ son conjuntos diferentes.
(11) El *duplicado de Alexandroff* del círculo es un clásico ejemplo que se usa con frecuencia y el cual es fácil de describir. Considere en el plano $\mathbb{R}^2$ dos círculos concéntricos $C_i = \{(i, \theta) \colon 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$ para $i = 1, 2$, donde los puntos están representados en coordenadas polares. Definamos $AD(C_1) = C_1 \cup C_2$ y sea $p \colon C_1 \to C_2$ la biyección definida por $p((1, \theta)) = (2, \theta)$ para cada θ. Para cada $x \in C_1$ y cada $n \in \mathbb{N}$, sea $U(x, n)$ el arco abierto de C_1 con centro en x de longitud $\frac{1}{n}$. Inducimos una topología en $AD(C_1)$ haciendo a los conjuntos de la forma

$$U(x, n) \cup p[U(x, n) \setminus \{x\}], \quad n \in \mathbb{N},$$

una base local de un punto $x \in C_1$ (véase la figura 18) y declarando a los puntos de C_2 puntos aislados.

El espacio resultante $AD(C_1)$ es llamado el duplicado de Alexandroff del círculo.
  (a) Verifique que efectivamente esto nos da una topología en $AD(C_1)$.
  (b) Describa las operaciones de cerradura e interior en el espacio $AD(C_1)$.

R. Engelking generalizó en 1968 la construcción del espacio $AD(C_1)$ reemplazando al círculo C_1 por un espacio arbitrario como sigue: Para cada espacio X, consideremos una copia ajena X_1 de X y la

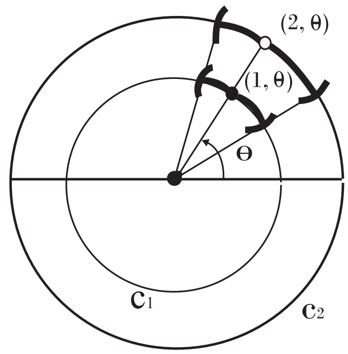

FIGURA 18. En obscuro, una vecindad del punto $(1,\theta)$ en $AD(C_1)$.

unión $AD(X) = X \cup X_1$. Sea $p\colon X \to X_1$ la biyección natural. Inducimos una topología en $AD(X)$ haciendo a los conjuntos de la forma $U \cup p[U \setminus \{x\}]$, donde U es una vecindad abierta de x en X, una base local de un punto $x \in X$ y declarando a los puntos de X_1 puntos aislados. Al espacio $AD(X)$ se le conoce como *duplicado de Alexandroff* de X.

(12) Si A es cualquier subconjunto de un espacio topológico, el número más grande posible de conjuntos diferentes en las dos sucesiones

$$A, A', A'^{-}, A'^{-\prime}, \ldots$$

$$A, A^{-}, A^{-\prime}, A^{-\prime -}, \ldots$$

es 14 (donde $'$ denota complementación y $^{-}$ denota cerradura). Demuestre también que hay un subconjunto A del espacio usual de los números reales para se obtienen los 14 conjuntos diferentes. (Sugerencia: Para la segunda parte considere al conjunto $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup (2,3) \cup (3,4) \cup \{4.5\} \cup [5,6] \cup (\mathbb{Q} \cap [7,8]))$

2.C. Construcción de topologías a partir de operadores

(1) Compruebe que si para cada $A \subseteq X$, $\eta(A) = A \cup \operatorname{der}(A)$ y $\eta'(A) = A \cup \operatorname{fr}(A)$, entonces η y η' son operadores de Kuratowski en X.

(2) Demuestre que el operador cerradura cl asociado a un espacio topológico X es en efecto un operador de Kuratowski.

(3) Sea $\phi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ una función con las siguientes propiedades:
   (a) $\phi(\emptyset) = \emptyset$.
   (b) Para cada $A \subseteq X$, $\phi(\phi(A)) \subseteq A \cup \phi(A)$.
   (c) Para cada dos subconjuntos A y B de X, $\phi(A \cup B) = \phi(A) \cup \phi(B)$.

(d) Para cada $x \in X$, $x \notin \phi(\{x\})$.

Sea $\tau^* = \{A \subseteq X : \phi(A) \subseteq A\}$ y $\tau = \{V \subseteq X : X \setminus V \in \tau^*\}$. Pruebe que τ es una topología en X y que, para cada $A \subseteq X$, $\phi(A)$ es el conjunto derivado de A con respecto a la topología τ.

(4) Sea $\psi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ una función con las siguientes propiedades:
  (a) $\psi(\emptyset) = \emptyset$.
  (b) Para cada $A \subseteq X$, $\psi(\psi(A)) \subseteq \psi(A)$.
  (c) Para cada dos subconjuntos A y B de X, $\psi(A \cup B) \subseteq \phi(A) \cup \phi(X \setminus B)$.
  (d) Para cada dos subconjuntos A y B de X, $\psi(A \cap B) \subseteq A \cup B \cup \phi(A \cup B)$.

  Sea $\tau^* = \{A \subseteq X : \psi(A) \subseteq A\}$ y $\tau = \{V \subseteq X : X \setminus V \in \tau^*\}$. Entonces τ es una topología en X y, para cada $A \subseteq X$, $\phi(A)$ es el conjunto frontera de A con respecto a la topología τ.

(5) Demuestre la proposición 2.27.

(6) En relación al ejemplo 2.28 inciso (2), describa a la topología $\mathcal{T}_0$ cuando $E_0 = \emptyset$ y cuando $E_0 = X$.

(7) Demuestre todas las afirmaciones hechas en el ejemplo 2.28 inciso (3).

2.D. Subconjuntos densos, densos en ninguna parte y fronterizos

(1) Verifique que las siguientes afirmaciones se cumplen:
  (a) Un subconjunto de un subconjunto denso en sí mismo no posee necesariamente esta propiedad;
  (b) la unión de subconjuntos densos en sí mismos es un conjunto denso en sí mismo;
  (c) si A es denso en sí mismo, entonces $\text{cl}(A)$ es perfecto; y
  (d) cualquier subconjunto abierto de un espacio denso en sí mismo es denso en sí mismo.

(2) Un conjunto E es denso en ninguna parte si y sólo si $\text{cl}(E)$ es un conjunto fronterizo.

(3) La frontera de un conjunto A es fronterizo si y sólo si $A \setminus \text{int}(A)$ es denso en ninguna parte.

(4) Un conjunto E es de la forma $A \setminus B$, en donde A y B son cerrados, si y sólo si el conjunto $\text{cl}(E) \setminus E$ es cerrado.

(5) Un subconjunto E de un espacio topológico X es denso en ninguna parte si y sólo si $E \subseteq \text{cl}(X \setminus \text{cl}(E))$.

(6) Sea X un espacio denso en sí mismo. Si D es denso en X y para cada $x \in X$, $\text{der}(\{x\})$ es cerrado, entonces D es denso en sí mismo.

(7) Consideremos las topologías $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ en $\mathbb{N}$ definidas en el ejercicio 1.C.(3). Caracterice a los subconjuntos densos, fronterizos, densos en ninguna parte y densos en sí mismos de los espacios $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_1)$ y $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_2)$.

(8) Realice un ejercicio semejante al anterior para $(X \cup \{p\}, \mathcal{T}_{p,\aleph_0})$, en donde $|X| = \aleph_1$ y $\mathcal{T}_{p,\aleph_0}$ está definida como en el ejercicio 1.B.(7).

(9) Consideremos en $(C(I), \mathcal{T}_p)$ (véase el ejemplo 1.37) a los subconjuntos $F = \{f \in C(I) : f(0) = 0\}$ y $G = \{f \in C(I) : f(0) \in \mathbb{Q}\}$. Demuestre que F es denso en ninguna parte y denso en sí mismo y que G es denso en $(C(I), \mathcal{T}_p)$, denso en sí mismo y fronterizo. ¿Cuáles de las propiedades definidas en 2.29 poseen los conjuntos F y G cuando los consideramos como subconjuntos de $C(I)$ con la topología $\mathcal{T}_\infty$?

(10) Sea X infinito con la topología cofinita y $E \subseteq X$. Entonces,
  (a) E es fronterizo si y sólo si su complemento es infinito;
  (b) E es denso en ninguna parte si y sólo si E es finito;
  (c) E es denso si y sólo si E es infinito;
  (d) E es denso en sí mismo si y sólo si E es infinito.

(11) En este ejercicio, X denotará al cuadrado lexicográfico.
  (a) Construya una colección de cardinalidad $\mathfrak{c}$ de abiertos en X dos a dos ajenos.
  (b) Determine la cerradura del conjunto $F = \{(x, \frac{1}{2} : x \in I\}$, y concluya que F es denso en ninguna parte.

(12) (*G. Cantor*) Cualquier subconjunto cerrado de la recta real $\mathbb{R}$ es la unión de un conjunto perfecto y de un conjunto numerable.

(Sugerencia: Considere $F \subseteq \mathbb{R}$ cerrado. Definimos $F_0 = \{x \in F : x \text{ es un punto aislado de } F\}$. Sea $F_1 = F \setminus F_0$. Note que F_1 es cerrado y denso en sí mismo. Además observe que para cada $x \in F_0$, $\{x\}$ es abierto en F. Utilice ahora el teorema 3.28 del siguiente capítulo para probar que F_0 debe ser numerable.)

(13) (*Subconjuntos regularmente abiertos y regularmente cerrados*) Un subconjunto A en un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es *regularmente abierto* si $\operatorname{int}(\operatorname{cl}(A)) = A$. Un subconjunto F en un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es *regularmente cerrado* si $\operatorname{cl}(\operatorname{int}(F)) = F$.
  (a) El complemento de un conjunto regularmente abierto es regularmente cerrado y viceversa.
  (b) Muestre un subconjunto en el espacio euclidiano $\mathbb{R}$ que no sea regularmente abierto.
  (c) Para cualquier conjunto A de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, el conjunto $\operatorname{int}(\operatorname{cl}(A))$ es un conjunto regularmente abierto, y el conjunto $\operatorname{cl}(\operatorname{int}(A))$ es regularmente cerrado.
  (d) La intersección de dos conjuntos regularmente abiertos es regularmente abierto. La unión de dos conjuntos regularmente cerrados es regularmente cerrado.
  (e) Demuestre que la unión (respectivamente, la intersección) de dos conjuntos regularmente abiertos (resp., regularmente cerrados)

no necesariamente es regularmente abierto (resp., regularmente cerrados).

(14) Una función f en $C(I)$ es *poligonal* si existe un conjunto finito de puntos $x_0 < x_1 < ... < x_n$ en I tales que para cada $i \in \{0, ..., n-1\}$, $f \restriction [x_i, x_{i+1}]$ es una función lineal. Verifique que el subconjunto de funciones poligonales E en $C(I)$ es denso en $C_p(I)$, y demuestre que E no es denso en $C_u(I)$.

Ejercicios adicionales del capítulo 2

2.E. Espacios topológicos linealmente ordenados

(1) Sean $(X, \leqslant)$ un conjunto linealmente ordenado y $x, y \in X$. Se dice que x es un *antecesor inmediato* de y (y entonces, en este caso, y es un *sucesor inmediato* de x) si $x < y$ y el intervalo abierto (x, y) es vacío.

Consideremos la topología $\mathcal{T}_\leqslant$ en X generada por el orden $\leqslant$. Muestre que un punto $x \in X$ es aislado si y sólo si o

(a) x es el primer elemento de $(X, \leqslant)$ y posee un sucesor inmediato, o

(b) x es el último elemento de $(X, \leqslant)$ y posee un antecesor inmediato, o

(c) existen un antecesor y un sucesor inmediatos de x.

Un elemento $x \in X$ es un punto de acumulación, o *punto límite*, de $(X, \mathcal{T}_\leqslant)$ si y sólo si o

(a) x es el primer elemento de $(X, \leqslant)$ y para cada $b > x$, $(x, b) \neq \emptyset$, o

(b) x es el último elemento de $(X, \leqslant)$ y para cada $a < x$, $(a, x) \neq \emptyset$, o

(c) para cualesquiera $a, b \in X$ con $a < x < b$, alguno de los intervalos (a, x) , (x, b) no es vacío.

(2) Dado un número ordinal α, denotaremos por $[0, \alpha)$ (resp., $[0, \alpha]$) al conjunto de números ordinales menores (resp., menores o iguales) que α con su topología generada por su orden $\leqslant_o$ (véase la sección 8 y los ejercicios A.VIII y el inciso (2) del ejercicio 1.G.). Demuestre que el punto $\lambda \in [0, \omega_1]$ es aislado si y sólo si λ tiene un antecesor inmediato (es decir, si y sólo si α es un ordinal sucesor), y, claro, λ es un punto límite o de acumulación en $[0, \omega_1]$ si y sólo si λ es un ordinal límite. Así, ordinales como ω, $\omega + \omega$, ω^2 y ω_1 son elementos no aislados de

$[0, \omega_1]$, y ordinales como $\omega + 1$, $\omega^\omega + 20$ son ordinales sucesores o aislados.

(3) Denotaremos con S al conjunto $\{\alpha \in \omega_1 : \alpha \text{ es un ordinal sucesor}\}$, y denotaremos con L al conjunto $\{\alpha \in \omega_1 : \alpha \text{ es un ordinal límite}\}$. Observe que $[0, \omega_1) = S \cup L$, y verifique que las siguientes afirmaciones se cumplen:
   (a) Un subconjunto D de $[0, \omega_1)$ es denso cuando y sólo cuando $S \subseteq D$;
   (b) si $E \subseteq [0, \omega_1)$ es denso en sí mismo, entonces $E \cap S = \emptyset$;
   (c) el conjunto L es perfecto y denso en ninguna parte;
   (d) $E \subseteq [0, \omega_1)$ es fronterizo si y sólo si $E \cap S = \emptyset$, si y sólo si E es denso en ninguna parte.

(4) Un subconjunto F de $[0, \omega_1)$ es *acotado* si existe $\alpha <_o \omega_1$ tal que $x \leqslant_o \alpha$ para todo $x \in F$ (es decir, F es acotado en $[0, \omega_1)$ si y sólo si F no es cofinal). Sean H y K dos subconjuntos cerrados ajenos de $[0, \omega_1)$. Compruebe que uno de ellos debe ser acotado.

2.F. Álgebras Booleanas sobre espacios topológicos

(1) Pruebe que la colección de subconjuntos de X que son cerrados y abiertos a la vez, con el orden parcial $\subseteq$ y las operaciones de unión, intersección y complementación, más los elementos distinguidos X y $\emptyset$, forman un álgebra Booleana (véase el ejercicio A.VIII.(9)).

(2) Muestre que la colección $\mathcal{AR}(X)$ de los subconjuntos abiertos regulares de un espacio X, forma un álgebra Booleana cuando consideramos las operaciones $A \wedge B = \inf\{A, B\} = A \cap B$, $A \vee B = \sup\{A, B\} = \text{int}(\text{cl}(A \cup B))$, y para cada $A \in \mathcal{AR}(X)$, definimos $A' = X \setminus \text{cl}(A)$, y los elementos distinguidos son $0 = \emptyset$ y $1 = X$.

(3) Defina sobre la colección $\mathcal{CR}(X)$ de cerrados regulares de X, operaciones $\wedge$, $\vee$ y $'$, y elementos distingidos 0 y 1, tales que $(\mathcal{CR}(X), \wedge, \vee, 0, 1)$ constituya un álgebra Booleana.

2.G. Conjuntos F_σ y G_δ

(1) Un subconjunto G de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es G_δ si es la intersección de una familia numerable de subconjuntos abiertos de X. Y $F \subseteq X$ es un F_σ si es la unión de una colección numerable de subconjuntos cerrados de X.
   (a) El complemento de un G_δ es un F_σ, y el complemento de un F_σ es un G_δ.
   (b) Un conjunto F_σ es la unión de una sucesión creciente $F_1 \subseteq F_2 \subseteq F_3 \subseteq \cdots$ de subconjuntos cerrados. Y un conjunto G_δ es la intersección de una sucesión decreciente de subconjuntos abiertos.

(c) Sea F un subconjunto cerrado en un espacio métrico (X,d). Sea $A_n = \{x \in X : d(x,F) < 1/n\}$. Compruebe que A_n es un subconjunto abierto de $(X, \mathcal{T}_d)$, y concluye que cualquier subconjunto cerrado de un espacio métrico es un G_δ, y cualquier subconjunto abierto de $(X, \mathcal{T}_d)$ es un F_σ.

(d) El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ es un conjunto F_σ en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$.

(2) (*Subespacios de primera categoría y de segunda categoría.*)

Un subespacio Y de un espacio X es de *primera categoría en* X si es igual a la unión de una familia numerable de subconjuntos densos en ninguna parte de X. Cuando un subespacio Y *no* es de primera categoría en X se dice que es de *segunda categoría en* X.

Un espacio topológico X es de *primera* (respectivamente, *segunda*) *categoría en sí mismo* si es de primera (respectivamente, segunda) categoría en X. En lo que sigue omitiremos la frase "en X" si el contexto lo permite.

Observe que todo subconjunto de un espacio de primera categoría es también de primera categoría. Además, la unión de una colección numerable de conjuntos de primera categoría posee esta misma propiedad. Verifique además que cada subconjunto numerable de un espacio denso en sí mismo en el cual cada conjunto formado por un solo punto es cerrado, es de primera categoría. En particular, el subespacio $\mathbb{Q}$ de la línea real $\mathbb{R}$ es de primera categoría en $\mathbb{R}$.

Demuestre también que un espacio X es de segunda categoría en sí mismo si y sólo si para toda sucesión $\{ U_n : n \in \mathbb{N} \}$ de suconjuntos abiertos y densos de X, se tiene que $\bigcap\{ U_n : n \in \mathbb{N} \} \neq \emptyset$.

2.H. Teorema de Categoría de Baire

En esta serie de ejercicios se demuestrá el Teorema de Categoría de Baire para espacios métricos. En el ejercicio 7.A.(7), se dará una versión del Teorema de Categoría de Baire para espacios compactos.

Un espacio métrico X es *completo* si para toda sucesión $\{ F_n : n \in \mathbb{N} \}$ de conjuntos cerrados no vacíos en X tal que $F_{n+1} \subseteq F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0$, tenemos que existe un punto $x^* \in X$ con $\bigcap\{ F_n : n \in \mathbb{N} \} = \{x^*\}$.

Recuerde que el diámetro de un conjunto F en un espacio métrico (X,d) se define como el número real $\operatorname{diam}(F) = \sup\{d(x,y) : x,y \in F\}$ cuando este número existe.

La definición de espacio métrico completo que hemos introducido difiere, pero es equivalente, de la que usualmente se da en los cursos de análisis matemático; en dichos cursos se introducen a los espacios métricos completos en términos de sucesiones de Cauchy.

(1) (*Teorema de Categoría de Baire para espacios métricos*). Sea X un espacio métrico completo y sea $\{ A_n : n \in \mathbb{N} \}$ una sucesión de conjuntos densos en ninguna parte de X. Demuestre que el complemento $X \setminus \bigcup\{ A_n : n \in \mathbb{N} \}$ es un subconjunto denso de X.

 (*Sugerencia*: Si G es un abierto no vacío, defina una sucesión decreciente $\{ F_n : n \in \mathbb{N} \}$ de bolas cerradas en X tales que $\operatorname{diam}(F_n) < 2^{-n}$ y $F_n \cap A_n = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $F_1 \subseteq G$. Para ello, utilice el hecho de que los conjuntos A_n son densos en ninguna parte. Luego aplique la hipótesis de que X es completo.)

(2) Se dice que un espacio topológico X es un *espacio de Baire* si para toda sucesión de subconjuntos abiertos densos $\{ U_n : n \in \mathbb{N} \}$, se tiene que $\bigcap\{ U_n : n \in \mathbb{N} \}$ es un subconjunto denso de X. Demuestre lo siguiente:
 (a) Todo espacio de Baire es de segunda categoría en sí mismo. (Vea el inciso (2) de 2.G. para la definición de espacio de segunda categoría en sí mismo).
 (b) Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire.
 (c) Concluya que todo espacio métrico completo es de segunda categoría en sí mismo.

(3) Un conjunto G en un espacio X es *de tipo* G_δ si existe una sucesión $\{ U_n : n \in \mathbb{N} \}$ de conjuntos abiertos en X tal que $G = \bigcap\{ U_n : n \in \mathbb{N} \}$.

 Demuestre que un espacio X es de Baire si y sólo si para toda familia numerable $\{ G_n : n \in \mathbb{N} \}$ de subconjuntos densos que son de tipo G_δ en X, se tiene que $\bigcap\{ G_n : n \in \mathbb{N} \}$ es un subconjunto denso en X.

(4) Demuestre que el conjunto $\mathbb{Q}$ no es un subconjunto G_δ del espacio métrico $\mathbb{R}$.

Capítulo **3**

Funciones continuas y propiedades ligadas a la numerabilidad

Dos de las ideas centrales en topología son las de límite de una sucesión y de función continua. En este sentido, podemos remontar los orígenes de la topología hasta los matemáticos y filósofos griegos de la antigüedad. Pero es a lo largo del siglo XIX cuando a estos conceptos se les expresa en términos matemáticos muy precisos cuando se les considera dentro del marco de los espacios euclideanos. Finalmente estas ideas adquirieron toda su generalidad a través del lenguaje topológico.

En este capítulo introducimos y analizamos estos conceptos fundamentales de funcion continua y límites de sucesiones. Además de ello iniciaremos el estudio de tres importantes propiedades topológicas relacionadas con lo numerable: el primer axioma de numerabilidad, el segundo axioma de numerabilidad y la separabilidad.

1. Continuidad y Homemorfismos

Uno de los conceptos básicos más importantes en topología es el de función continua. Intuitivamente, una función f definida sobre un espacio topológico X y con valores en otro espacio Y, es continua en un punto $x_0 \in X$ si manda puntos cercanos a x_0 en puntos cercanos a $f(x_0)$.

En el caso de una funcion f cuyo dominio y codominio son subconjuntos de $\mathbb{R}$, la condición de continuidad se puede expresar diciendo: f es continua en un punto x_0 si para cada $\epsilon > 0$ es posible encontrar un $\delta > 0$ de tal modo que si x es un elemento del dominio de f que satisface $|x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Es fácil darse cuenta de que esto último tiene una generalización inmediata a espacios métricos. En efecto, si (X, d_X) y (Y, d_Y) son espacios métricos, $x_0 \in X$ y $f : X \to Y$ es una función, entonces diremos que

f es *continua* en x_0 si dado cualquier $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de tal modo que $d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon$, siempre que $d_X(x, x_0) < \delta$. Recurriendo al lenguaje de las bolas abiertas, lo anterior se puede expresar como sigue: f es continua en x_0 si y sólo si para cada bola abierta $B_{d_Y}(f(x_0), \epsilon)$ existe una bola abierta $B_{d_X}(x_0, \delta)$ que satisface $f[B_{d_X}(x_0, \delta)] \subseteq B_{d_Y}(f(x_0), \epsilon)$.

En esta sección, generalizaremos estas ideas a espacios topológicos y estableceremos de manera formal la noción de continuidad y exploraremos algunas de sus consecuencias.

3.1. Definiciones. Sea f una función cuyo dominio X y codominio Y son espacios topológicos.

(1) Diremos que f es *continua en el punto* $x_0 \in X$ si para cualquier subconjunto abierto A de Y que contiene a $f(x_0)$, existe un subconjunto abierto B de X que contiene a x_0 y que satisface $f[B] \subseteq A$.
(2) En el caso en que f sea continua en todos los puntos de X, se dirá simplemente que f es *continua*.
(3) f es *discontinua* (en $x_0 \in X$) si no es continua (en $x_0 \in X$).

3.2. Observaciones. En los comentarios siguientes la notación y las hipótesis son como en las definiciones anteriores. Dejamos la demostración de estos dos comentarios como un ejercicio para el lector en el problema 3.A.(1).

(1) Si $\mathcal{B}_0$ y $\mathcal{B}_1$ son bases para X y Y, respectivamente, entonces la función f es continua en x_0 si, y sólo si, cada vez que $A \in \mathcal{B}_1$ y $f(x_0) \in A$, se tiene que existe $B \in \mathcal{B}_0$ de tal forma que $x_0 \in B$ y $f[B] \subseteq A$. En otras palabras, la continuidad de cualquier función puede ser comprobada empleando bases.
(2) Si suponemos que X y Y son espacios métricos, entonces las colecciones de bolas abiertas forman bases para ellos, así que la continuidad de f en x_0 puede ser establecida en forma equivalente a lo expresado antes de la definición 3.1.

3.3. Ejemplos.

(1) Sean X y Y espacios topológicos y b un elemento de Y. Si f es la función constante b de X en Y ($f(x) = b$ para cualquier $x \in X$), entonces f es continua pues $f[X] \subseteq A$ siempre que $b \in A \subseteq Y$.

(2) Las funciones $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $q : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$s(x,y) = x + y,\ p(x,y) = x \cdot y,\ q(x) = 1/x,\ r(x) = -x,\ t(x) = |x|,$$

son continuas. Demostremos lo dicho para p, q y t. Dejamos como ejercicio la demostración de la continuidad de r y s (vea ejercicio 3.A.(2)).

La función p es continua. En efecto, sea (a,b) un punto en $\mathbb{R}^2$ y $\epsilon > 0$. Definamos $\delta = \min\{\frac{\epsilon}{2(1+|b|)}, 1\}$. Entonces el cuadrado $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |a-x| < \delta,\ |b-y| < \frac{\epsilon}{2(1+|a|)}\}$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^2$ que contiene al punto (a,b). Además, para cada $(x,y) \in V$, el punto $p(x,y)$ pertenece a la bola abierta $B(p(a,b),\epsilon)$:

$$\begin{aligned} |p(x,y) - p(a,b)| &= |xy - ab| \\ &= |x(y-b) + b(x-a)| \\ &\leqslant |x||y-b| + |b||x-a| \\ &< (|a|+1)\tfrac{\epsilon}{2(|a|+1)} + (|b|+1)\tfrac{\epsilon}{2(|b|+1)} = \epsilon. \end{aligned}$$

Lo cual muestra la continuidad de p en el punto (a,b). Como este punto y ϵ son arbitrarios, concluimos la continuidad de p en todo $\mathbb{R}^2$.

Para demostrar la continuidad de q, tomemos un punto fijo $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, y elijamos una $\epsilon > 0$. Definamos $\delta = \min\{\frac{|a|}{2}, \frac{\epsilon|a|^2}{2}\}$. Si $y \in B(a,\delta)$, entonces

$$|q(y) - q(a)| = |\tfrac{1}{y} - \tfrac{1}{a}| = \tfrac{|y-a|}{|y||a|} \leqslant \tfrac{2}{|a|^2}|y-a| < \tfrac{2}{|a|^2}\tfrac{|a|^2\epsilon}{2} = \epsilon.$$

De nuevo, como a y ϵ son arbitrarios, concluimos que q es continua en todo $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Finalmente, demostremos que t es continua. Para ello tomemos un punto $a \in \mathbb{R}$ y elijamos $\epsilon > 0$. Observe que si $y \in B(a,\delta)$, donde $\delta = \epsilon$, entonces $\big||y| - |a|\big| \leqslant |y-a| < \delta = \epsilon$. Por lo anterior podemos concluir que t es continua en a, y como a es un punto arbitrario de $\mathbb{R}$, tenemos que t es una función continua.

(3) En el espacio topológico $(C(I), \mathcal{T}_\infty)$ (ejemplo 1.7) definamos la función $\varphi : C(I) \to \mathbb{R}$ mediante $\varphi(f) = f(1)$. Vamos a demostrar ahora que si $\mathbb{R}$ tiene la topología usual, entonces φ es continua.

Sea $f_0 \in C(I)$. Sabemos que los intervalos abiertos constituyen una base para $\mathbb{R}$, así que para demostrar que φ es continua en f_0 consideraremos únicamente intervalos abiertos que contienen a $\varphi(f_0)$. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < f_0(1) < b$. Hagamos $\epsilon = \text{mín}\{f_0(1) - a, b - f_0(1)\}$. Ahora, si $f \in B(f_0, \epsilon)$ entonces $d_\infty(f_0, f) = \sup\{|f_0(x) - f(x)| : x \in I\} < \epsilon$ y, en particular, $|f_0(1) - f(1)| < \epsilon$, de aquí que $a < f(1) < b$. Resumiendo, $\varphi[B(f_0, \epsilon)] \subseteq (a, b)$.

Por cierto, el lector puede constatar que si consideramos a $C(I)$ con su topología $\mathcal{T}_2$ definida en 1.C.(5), φ no es continua.

(4) Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{P}. \end{cases}$$

Observe que f es discontinua en cada punto de $\mathbb{R}$ si consideramos la topología usual en $\mathbb{R}$, y f solamente es continua en cada punto de $\mathbb{P}$ si consideramos en $\mathbb{R}$ la topología $\mathcal{T}_\mathbb{P}$ definida en el ejemplo 1.12.

(5) Suponga que $n, m \in \mathbb{N}$ y que los espacios $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ tienen su topología usual. Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal entonces sabemos que existe una constante positiva M tal que $\|T(x)\| \leqslant M\|x\|$ para toda $x \in \mathbb{R}^n$ (tome, por ejemplo, $M = n\big(1+\text{máx}\{\|T((1,0,\ldots,0))\|, \ldots, \|T((0,0,\ldots,1))\|\}\big)$). Esto último implica que T es una función continua en $\mathbb{R}^n$. Efectivamente, si $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $\epsilon > 0$ son arbitrarios, entonces

$$T(B(x_0, \tfrac{\epsilon}{M})) \subseteq B(T(x_0), \epsilon).$$

Por ejemplo, las homotecias, es decir, las transformaciones lineales $h_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ cuya regla de asociación es $h_r(x) = r\,x$ para toda $x \in \mathbb{R}^n$ (donde $r > 0$ es fijo) son funciones continuas.

(6) Otros ejemplos de funciones continuas del espacio $\mathbb{R}^n$ en sí mismo son las llamadas *traslaciones*, es decir, funciones $T_b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ cuyas reglas de asociación son de la forma: $T_b(x) = x + b$ para toda $x \in \mathbb{R}^n$ (donde $b \in \mathbb{R}^n$ es un vector fijo).

Note que toda traslación $T_b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función biyectiva, y que su inversa, es otra traslación, a saber la traslación $T_{-b} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Por lo tanto, si $T_b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una traslación entonces tanto ella, como su inversa, son funciones continuas.

A continuación vamos a dar una lista de formas diferentes en las que se expresa la continuidad de una función. Este es un resultado que nos será de mucha utilidad.

3.4. TEOREMA. *Si f es una función del espacio topológico X en el espacio topológico Y, entonces las condiciones siguientes son equivalentes.*

(1) *f es continua.*
(2) *Para cualquier abierto U de Y, $f^{-1}[U]$ es abierto en X.*
(3) *$f^{-1}[F]$ es cerrado en X para cualquier cerrado F de Y.*
(4) *$f[\mathrm{cl}_X(A)] \subseteq \mathrm{cl}_Y(f[A])$ para cualquier $A \subseteq X$, donde cl_X y cl_Y son los operadores cerradura en X y Y, respectivamente.*
(5) *$\mathrm{cl}_X(f^{-1}[B]) \subseteq f^{-1}[\mathrm{cl}_Y(B)]$ para cada $B \subseteq Y$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que f es continua y que U es abierto en Y. Dado $x \in f^{-1}[U]$, tenemos que existe B_x, abierto en X que contiene a x, de tal forma que $f[B_x] \subseteq U$ y, por ende, $x \in B_x \subseteq f^{-1}[U]$. El resto es aplicar la proposición 1.24 del capítulo 1 para concluir que $f^{-1}[U]$ es abierto.

Demos por válido el inciso (2) y sea F un subconjunto cerrado de Y. Tenemos que $Y \setminus F$ es un abierto en Y y, por lo tanto, $f^{-1}[Y \setminus F]$ debe ser abierto en X. Ahora, la igualdad $f^{-1}[Y \setminus F] = X \setminus f^{-1}[F]$ nos garantiza que $f^{-1}[F]$ es cerrado en X.

Sea A un subconjunto de X. Sabemos que $\mathrm{cl}_Y(f[A])$ es un subconjunto cerrado de Y, así que si (3) es cierto, entonces $f^{-1}[\mathrm{cl}_Y(f[A])]$ es cerrado en X. Por otro lado, la condición $f[A] \subseteq \mathrm{cl}_Y(f[A])$, implica que $A \subseteq f^{-1}[f[A]] \subseteq f^{-1}[\mathrm{cl}_Y(f[A])]$. De aquí obtenemos que $\mathrm{cl}_X(A) \subseteq f^{-1}[\mathrm{cl}_Y(f[A])]$ y, finalmente, $f[\mathrm{cl}_X(A)] \subseteq \mathrm{cl}_Y(f[A])$, tal y como se quería.

Para probar que (4) implica (5), tomemos un subconjunto B de Y y hagamos $A = f^{-1}[B]$. Por (4) sabemos que $f[\mathrm{cl}_X(A)] \subseteq \mathrm{cl}_Y(f[A])$ y como $f[A] \subseteq B$, obtenemos $f[\mathrm{cl}_X(A)] \subseteq \mathrm{cl}_Y(B)$, con lo cual $\mathrm{cl}_X(A) \subseteq f^{-1}[\mathrm{cl}_Y(B)]$; es decir, $\mathrm{cl}_X(f^{-1}[B]) \subseteq f^{-1}[\mathrm{cl}_Y(B)]$.

Finalmente, tomemos por hipótesis el inciso (5) y concluyamos que f es continua. Sea $x \in X$ un punto arbitrario y sea N un abierto en Y que contiene a $f(x)$. El conjunto $B = Y \setminus N$ es cerrado, así que la contención del inciso (5) toma la forma: $\mathrm{cl}_X(f^{-1}[B]) \subseteq f^{-1}[B]$. De esto último se infiere que $f^{-1}[B] = f^{-1}[Y \setminus N] = X \setminus f^{-1}[N]$ es cerrado en X o, en otras palabras, $M = f^{-1}[N]$ es abierto. En resumen, M es un abierto en X que contiene a x y además $f[M] \subseteq N$. ⊠

El siguiente corolario es fácil de demostrar; dejamos la demostración al cuidado del lector (vea el ejercicio 3.A inciso (5)).

3.5. COROLARIO. *Si $f : X \to Y$ es una función entre espacios topológicos entonces son equivalentes:*

(1) *$f : X \to Y$ es continua,*
(2) *Para cada $Z \subseteq Y$ con $f[X] \subseteq Z$, la función $f : X \to Z$ es continua, donde Z tiene la topología de subespacio respecto de Y.*

3.6. OBSERVACIÓN. Mediante los incisos 2-(a) y 2-(b) de la proposición A.19 es posible demostrar que si $\mathcal{B}$ y $\mathcal{S}$ son una base y una subbase de Y, respectivamente, entonces son equivalentes

(1) f es continua.
(2) $f^{-1}[B]$ es abierto en X para cada $B \in \mathcal{B}$.
(3) $f^{-1}[S]$ es abierto en X para cada $S \in \mathcal{S}$.

3.7. EJEMPLOS. Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función.

(1) Si X tiene la topología discreta, entonces $f^{-1}[B]$ es abierto en X para cualquier $B \subseteq Y$, así que f debe ser continua. Es fácil ver también que f es continua si Y tiene la topología indiscreta sin importar cual es la topología en X.
(2) Para un subespacio Y de X, la función *inclusión* $i_Y : Y \to X$ definida por $i_Y(y) = y$, es continua ya que para cada subconjunto abierto A de X, $i_Y^{-1}[A]$ es igual al conjunto $Y \cap A$, que es abierto en Y.
(3) Si $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ son dos topologías definidas sobre el conjunto X, entonces la función identidad $\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2)$ es continua si y sólo si $\mathcal{T}_2 \leqslant \mathcal{T}_1$.

Relacionado al ejemplo 3.7, inciso (3), mostramos el siguiente resultado cuya prueba se deja como ejercicio (vea 3.A.(3)).

3.8. PROPOSICIÓN. *Supongamos que la función $f : (X, \mathcal{T}_1) \to (Y, \mathcal{T}_2)$ es continua. Si $\mathcal{T}'_1$ y $\mathcal{T}'_2$ son dos topologías definidas en X y Y, respectivamente, que satisfacen $\mathcal{T}'_2 \leqslant \mathcal{T}_2$ y $\mathcal{T}_1 \leqslant \mathcal{T}'_1$, entonces, $f : (X, \mathcal{T}'_1) \to (Y, \mathcal{T}'_2)$ es también continua.*

3.9. PROPOSICIÓN. *Si las funciones $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son continuas, entonces su composición $g \circ f$ también es una función continua.*

Demostración. Sea A un subconjunto abierto de Z. Vamos a demostrar que $(g \circ f)^{-1}[A]$ es un subconjunto abierto de X. Pero $(g \circ f)^{-1}[A] = f^{-1}[g^{-1}[A]]$ y como g es continua, entonces $g^{-1}[A]$ es un subconjunto abierto en Y. Por hipótesis, f también es continua, luego se cumple que $f^{-1}[g^{-1}[A]]$ es abierto en X. ⊠

3.10. Corolario. *Si $f : X \to Y$ es una función continua y A es un subespacio de X, entonces la función $f \restriction A : A \to X$ es continua.*

Como otra consecuencia de la proposición anterior y del ejemplo 3.3.2 obtenemos el siguiente resultado.

3.11. Proposición. *Sean $(X, \mathfrak{T})$ un espacio topológico y $f, g : X \to \mathbb{R}$ funciones continuas. Entonces las funciones $P, Q, R, S : X \to \mathbb{R}$ y $\Delta : X \to \mathbb{R}^2$ definidas por medio de las reglas: $P(x) = f(x) \cdot g(x)$, $Q(x) = |f(x)|$, $R(x) = -f(x)$, $S(x) = f(x)+g(x)$, y $\Delta(x) = (f(x), g(x))$ para cada $x \in X$, son continuas. Además, la función $D(x) = 1/f(x)$, definida en $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$, es también continua.*

Demostración. Demostremos la proposición para las funciones Δ y S. Fijemos un punto $a \in X$ y tomemos la bola abierta $B((f(a), g(a)), \epsilon)$ del punto $(f(a), g(a))$ en $\mathbb{R}^2$ (en donde $\epsilon > 0$). Como f y g son funciones continuas en a, existen subconjuntos abiertos U y V de X tales que $a \in U$, $a \in V$, $f[U] \subseteq (f(a) - \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}, f(a) + \frac{\epsilon}{\sqrt{2}})$ y $f[V] \subseteq (g(a) - \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}, g(a) + \frac{\epsilon}{\sqrt{2}})$. Entonces $W = U \cap V$ es un abierto de X que contiene a a y además para cada $x \in W$ se tiene que

$$\sqrt{(f(a) - f(x))^2 + (g(a) - g(x))^2} < \epsilon.$$

Esto prueba la continuidad de la función Δ. Ahora sólo basta observar que S es igual a la composición $s \circ \Delta$ y aplicar lo demostrado en el ejemplo 3.3 inciso (2) y la proposición 3.9. ⊠

Como consecuencia del resultado anterior concluimos que cualquier función polinomial $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$p(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots + a_n \cdot x^n,$$

y cada función racional $q : D \to \mathbb{R}$ definida por

$$q(x) = \frac{a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots + a_n \cdot x^n}{b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2 + \cdots + b_m \cdot x^m}$$

en donde $n, m \in \mathbb{N}$, $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$ y $D = \{x : b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2 + \cdots + b_m \cdot x^m \neq 0\}$, son continuas. Además, por la proposición 3.8, las funciones polinomiales p y q que acabamos de mencionar, siguen siendo continuas si sus correspondientes dominios están considerados, digamos, con la topología de la línea de Sorgenfrey.

Otro corolario inmediato es el siguiente:

3.12. Corolario. *Sean $f, g : X \to \mathbb{R}$ funciones continuas, entonces las funciones $\text{mín}\{f, g\} : X \to \mathbb{R}$ y $\text{máx}\{f, g\} : X \to \mathbb{R}$ definidas por:*

$$\text{mín}\{f, g\}(x) = \text{mín}\{f(x), g(x)\} \quad y \quad \text{máx}\{f, g\}(x) = \text{máx}\{f(x), g(x)\},$$

son continuas.

Demostración. Simplemente note que $\text{mín}\{f, g\} = \frac{f+g-|f-g|}{2}$ y que $\text{máx}\{f, g\} = \frac{f+g+|f-g|}{2}$. Aplique ahora la proposición 3.11. ⊠

Una pregunta natural para una función biyectiva y continua f, se refiere a si su inversa es continua. La respuesta es, en general, negativa. Esto lo podemos deducir de 3.7. En efecto, para un espacio X con más de un punto, la función identidad $\text{id}_X : (X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2)$, en donde $\mathcal{T}_1$ es la topología discreta sobre X y $\mathcal{T}_2$ es la topología indiscreta, es un ejemplo extremo en donde ${\text{id}_X}^{-1} = \text{id}_X : (X, \mathcal{T}_2) \to (X, \mathcal{T}_1)$ no es continua.

Con el pretexto de estas últimas observaciones nos introducimos al estudio de los conceptos, fundamentales en topología, de “homeomorfismo” y “espacios homeomorfos”, que se refieren a los objetos topológicos que se consideran equivalentes.

3.13. Definiciones.

(1) Una función biyectiva h definida sobre el espacio topológico X y con valores en el espacio Y será llamada *homeomorfismo* si tanto ella como su inversa son continuas.

(2) Los espacios topológicos X y Y serán llamados *homeomorfos* si existe un homeomorfismo entre X y Y. La expresión $X \cong Y$ significará que los espacios X y Y son homeomorfos.

Es inmediato, de la definición, que si f es un homeomorfismo, entonces f^{-1} también lo es.

Cuando dos espacios X y Y son homeomorfos, los consideramos como objetos equivalentes en la clase de espacios topológicos, y podemos intercambiar uno por el otro en nuestros discursos y argumentaciones sin que las conclusiones se alteren. Como hemos mencionado, ellos son el mismo objeto topológico ya que la estructura topológica de uno se copia con precisión sobre la estructura topológica del segundo por medio del homeomorfismo.

3.14. Definición. Una propiedad P es *topológica* si cada vez que un espacio X tiene la propiedad P, también la posee cualquier espacio topológico homeomorfo a X.

Puesto que un homeomorfismo $f : X \to Y$ establece una correspondencia biyectiva entre los puntos de X y los de Y y también entre los conjuntos abiertos de ambos espacios, cualquier propiedad definida en términos de conjuntos abiertos y en términos de propiedades conjuntistas es una propiedad topológica.

Se puede decir que la topología es el estudio de las propiedades que se preservan bajo homeomorfismos; en otras palabras, es el estudio de las propiedades topológicas (o invariantes topológicos).

3.15. Ejemplos.

(1) Sean X y Y espacios topológicos discretos (respectivamente, indiscretos). Tenemos que X y Y son homeomorfos si y sólo si $|X| = |Y|$. En efecto, si los espacios son homeomorfos, entonces podemos encontrar una función biyectiva entre ellos, así que deben tener la misma cardinalidad. En la otra dirección, si $f : X \to Y$ es una biyección entonces existe su función inversa $f^{-1} : Y \to X$. Por lo dicho en el ejemplo 3.7.(1), se tiene que tanto f como f^{-1} son funciones continuas.

(2) En el ejemplo 1.22 inciso (2) vimos que la colección

$$\{(a,b) \times \mathbb{R} \,:\, a < b\} \cup \{\mathbb{R} \times (c,d) \,:\, c < d\}$$

es una subbase para la topología euclidiana en $\mathbb{R}^2$. De aquí se deduce que la topología relativa en el subespacio $\mathbb{R} \times \{0\}$ de $\mathbb{R}^2$, tiene como subbase a

$$\mathcal{B} = \{(a,b) \times \{0\} \,:\, a < b\},$$

y como la intersección de cualquier número finito de elementos de esta familia es otro elemento de la familia, podemos concluir que $\mathcal{B}$ es base para la topología relativa en $\mathbb{R} \times \{0\}$.

Una consecuencia de lo anterior es que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \{0\}$ definida mediante $f(x) = (x, 0)$ es un homeomorfismo, pues $f[(a,b)] = (a,b) \times \{0\}$ y $f^{-1}[(a,b) \times \{0\}] = (a,b)$. En resumen, $\mathbb{R}$ es homeomorfo a $\mathbb{R} \times \{0\}$.

(3) Hemos visto en el ejemplo 3.3 que toda transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una función continua. También sabemos, desde los cursos básicos de Álgebra Lineal, que toda transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sobreyectiva es también inyectiva, y por lo tanto, biyectiva. En consecuencia, si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal sobreyectiva, tanto T como su función inversa T^{-1} son funciones continuas (recuerde que la inversa de una transformación lineal también es una transformación lineal). Es decir, toda transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sobreyectiva es un homeomorfismo cuando en $\mathbb{R}^n$ se considera a la topología euclidiana.

(4) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua y consideremos a la gráfica de f, es decir, consideremos el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$G(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Entonces, si dotamos a $G(f)$ con la topología de subespacio respecto de $\mathbb{R}^{n+1}$, resulta que $G(f)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Efectivamente, consideremos la función $h : G(f) \to \mathbb{R}^n$ dada por $h(x, f(x)) = x$ para toda pareja $(x, f(x)) \in G(f)$. La inversa de la función h es la función $g : \mathbb{R}^n \to G(f)$ dada por $g(x) = (x, f(x))$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Es muy fácil verificar que ambas funciones son continuas.

Como una simple aplicación de lo anterior, podemos notar que el paraboloide de revolución $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2+y^2\}$ es homeomorfo al plano $\mathbb{R}^2$. Asimismo, el paraboloide hiperbólico

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 = z\},$$

como subespacio de $\mathbb{R}^3$, es homeomorfo al espacio $\mathbb{R}^2$ con su topología usual.

Después de las propiedades de funciones estudiadas hasta aquí, parece muy natural introducir las siguientes definiciones.

3.16. Definiciones. Sea f una función del espacio topológico X en el espacio topológico Y.

(1) f es una *función abierta* si la imagen bajo f de cualquier subconjunto abierto de X es un subconjunto abierto en Y.

(2) Si en el enunciado anterior se cambia "subconjunto abierto" por "subconjunto cerrado", entonces f será llamada *función cerrada*.

3.17. Observación. Sea $\mathcal{B}$ una base del espacio topológico X. Si Y es un espacio topológico y f es una función de X en Y, entonces el inciso 2-(a) de la proposición A.18 implica que f es abierta si, y sólo si, $f[B]$ es abierto en Y para cada $B \in \mathcal{B}$.

Es posible encontrar funciones continuas que son abiertas y no son cerradas, y viceversa; e incluso, se pueden hallar funciones que no son continuas pero sí abiertas o cerradas. Veamos algunos ejemplos.

3.18. Ejemplos. En los incisos siguientes $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ tienen las topologías usuales.

(1) Cualquier función constante de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ es continua y cerrada, pues para cada $r \in \mathbb{R}$, los conjuntos $\{r\}$ y $\emptyset$ son cerrados en $\mathbb{R}$; sin embargo, el conjunto $\{r\}$ no es abierto en $\mathbb{R}$, es decir, toda función constante es continua, cerrada y no es abierta.

(2) La proyección $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por la regla $\pi(x, y) = x$ nos servirá como ejemplo de una función que es continua y abierta pero no es cerrada.

Para convencernos de la continuidad de π bastará observar que si a y b son números reales, entonces $\pi^{-1}[(a, b)] = (a, b) \times \mathbb{R}$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$, donde (a, b) denota al intervalo abierto con extremos a y b.

Como $\mathbb{R}^2$ es un espacio métrico, según la observacion 3.17, sólo debemos demostrar que la imagen bajo π de cualquier disco abierto es un conjunto abierto en $\mathbb{R}$. Esto último debe ser claro teniendo en cuenta la igualdad $\pi[B((x, y), \epsilon)] = (x - \epsilon, x + \epsilon)$, donde $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y $\epsilon > 0$.

Por último, π no es cerrada ya que el conjunto $F = \{(x, \frac{1}{x}) : x > 0\}$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^2$ (compruébelo), pero $\pi[F] = (0, \to)$ no es un subconjunto cerrado en $\mathbb{R}^2$.

(3) Finalmente, obsérvese que si X tiene más de un punto, entonces la función $\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{T}_2) \to (X, \mathcal{T}_1)$, en donde $\mathcal{T}_2$ es la topología indiscreta y $\mathcal{T}_1$ es la topología discreta, es una muestra de una función biyectiva que es abierta y cerrada pero que no es continua.

Como se puede observar, la función discutida en el inciso (1) de los ejemplos anteriores no es suprayectiva, mientras que la correspondiente al inciso (2) no es inyectiva. Para funciones biyectivas tenemos:

3.19. Proposición. *Si f es una función biyectiva entre los espacios topológicos X y Y, entonces los siguientes enunciados son equivalentes.*

(1) *f^{-1} es continua.*
(2) *f es abierta.*
(3) *f es cerrada.*

En particular, una función biyectiva y continua $f : X \to Y$ es un homeomorfismo si satisface alguna de las anteriores condiciones (equivalentes) (1), (2), ó (3).

Demostración. Sea A un subconjunto abierto de X. Si f^{-1} es continua entonces $(f^{-1})^{-1}[A]$ es un subconjunto abierto de Y, y como $(f^{-1})^{-1}[A] = f[A]$ (ejercicio 1.D, incisos (4) y (5)), ya podemos concluir que f es abierta.

Supongamos que f es abierta y sea F un subconjunto cerrado de X. Esto último implica que $U = X \backslash F$ es abierto en X, así que $f[U]$ debe ser abierto en Y. Ahora, la biyectividad de f garantiza que $f[F] = f[X \backslash U] = Y \backslash f[U]$ (ejercicio A.III inciso (4)) y, por consiguiente, $f[F]$ es cerrado en Y.

Finalmente demostraremos que si f es cerrada, entonces f^{-1} es continua. Si F es un subconjunto cerrado de X, tenemos que $f[F]$ es cerrado en Y; este hecho, junto con la igualdad $(f^{-1})^{-1}[F] = f[F]$, nos prueban la continuidad de f^{-1}. ⊠

La demostración del resultado siguiente se dejan como ejercicio (véase el ejercicio 3.A.(4)).

3.20. Observación. Si Y es un subespacio de un espacio X, entonces la inclusión $i_Y : Y \to X$ es cerrada (abierta) si, y sólo si, el conjunto Y es cerrado (abierto) en X.

Terminamos esta sección dando más ejemplos de espacios homeomorfos.

3.21. Ejemplos.

(1) Sea $\mathbb{R}$ con su topología usual y asignémosle al intervalo $(-1, 1)$ la topología relativa. La función $f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ definida

mediante $f(t) = \frac{t}{1+|t|}$ es un homeomorfismo, pues es biyectiva, continua y su inversa $f^{-1}(t) = \frac{t}{1-|t|}$ también es continua.

En general, la función $x \mapsto \frac{x}{1+\|x\|}$ establece un homeomorfismo entre $\mathbb{R}^n$ con su topología usual y la bola abierta $\{x \in \mathbb{R}^n \; : \|x\| < 1\}$ con la topología relativa.

(2) La segunda parte del ejemplo anterior puede ser generalizado aún más: Toda bola abierta $B(a,r)$ de $\mathbb{R}^n$ es homeomorfa a $\mathbb{R}^n$. En efecto, es claro que bastará demostrar que si $a \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, entonces la bola abierta $B(a,r)$ de $\mathbb{R}^n$ es homeomorfa a la bola unitaria $B(0,1)$ de $\mathbb{R}^n$. Para ello, note que si $T_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ denota a la traslación $T_a(x) = x + a$ y $h_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ denota a la homotecia $h_r(z) = r\,z$ entonces la función composición $F = T_a \circ h_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo (ver ejemplo 3.3) y evidentemente se tiene que $F(B(0,1)) = B(a,r)$. Entonces la función $F \restriction B(0,1) : B(0,1) \to B(a,r)$ es un homeomorfismo.

(3) Sea $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \; : \| x \| = 1\}$ la circunferencia unitaria con centro en el origen equipada con la topología relativa y hagamos $p = (0,1)$. La función $h : S^1 \backslash \{p\} \to \mathbb{R}$ definida como $h(x,y) = \frac{x}{1-y}$ es un homeomorfismo.

De forma más general, si $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \; \| x \| = 1\}$ tiene la topología relativa, entonces la aplicación

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \frac{1}{1-x_n}(x_1, \ldots, x_{n-1})$$

nos proporciona un homeomorfismo entre $S^{n-1} \backslash \{(0, \ldots, 0, 1)\}$ y $\mathbb{R}^{n-1}$ (véase la figura 19).

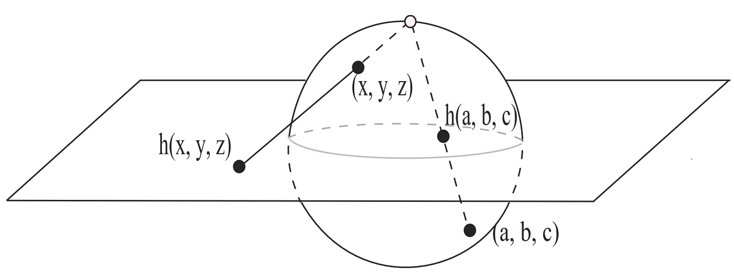

FIGURA 19. Homeomorfismo entre $S^{n-1} \backslash \{(0, \ldots, 0, 1)\}$ y $\mathbb{R}^{n-1}$.

(4) Considere en el intervalo semiabierto $X = [0, 2\pi)$ la siguiente topología: $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\} \cup \{U \subseteq (0,1) : U \in \mathcal{T}_0\} \cup \{[0,a) \cup (b,1) : 0 < a < b < 1\}$, donde $\mathcal{T}_0$ denota a la topología de subespacio del intervalo $(0,1)$ respecto de $\mathbb{R}$. El espacio $(X, \mathcal{T})$ es homeomorfo al círculo unitario $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Efectivamente, considere la función $f : [0, 2\pi) \to S^1$ dada por $f(x) = (\cos(x), \operatorname{sen}(x))$ para toda $x \in [0, 2\pi)$. La función f es un homeomorfismo.

(5) En algunas ocasiones decidir cuándo dos espacios topológicos X y Y no son homeomorfos, depende únicamente de condiciones conjuntistas. Por ejemplo, una condición necesaria para que X y Y sean homeomorfos es que tengan la misma cardinalidad. Por lo tanto, es claro que los espacios euclideanos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$ no son homeomorfos pues el primero tiene cardinalidad $\mathfrak{c}$ y el segundo es numerable. Otra condición necesaria para que dos espacios sean homeomorfos es que tengan la misma cantidad de subconjuntos abiertos; así, el conjunto $\mathbb{N}$ con la topología cofinita no es homeomorfo a $\mathbb{N}$ con su topología discreta ya que el primero tiene sólo una cantidad numerable de subconjuntos abiertos mientras que el segundo tiene $\mathfrak{c} = |\mathbb{R}|$ subconjuntos abiertos.

2. Espacios separables, primero numerables y segundo numerables

El espacio de los números reales con su topología usual tiene algunas propiedades especiales que se expresan en términos de numerabilidad y que le confieren a $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ gran parte de sus características fundamentales. Por ejemplo, el conjunto de los números racionales, $\mathbb{Q}$, es un conjunto numerable y denso en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$. Además, para cada punto x en $\mathbb{R}$, la colección de bolas con centro en x y de radio $1/n$, donde n varía en el conjunto $\mathbb{N}$, es una base local numerable de vecindades de x. Más aún, el conjunto $\{B(r, 1/n) : r \in \mathbb{Q} \text{ y } n \in \mathbb{N}\}$ es una base numerable para la topología $\mathcal{T}_e$ en $\mathbb{R}$.

El propósito de esta sección es analizar las cualidades más básicas de espacios topológicos que tienen alguna de estas propiedades.

3.22. Definiciones. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico.

(1) $(X, \mathcal{T})$ es *separable* si contiene un subconjunto denso numerable.
(2) El espacio $(X, \mathcal{T})$ es *primero numerable* si cada punto $x \in X$ posee una base local de vecindades numerable.
(3) El espacio $(X, \mathcal{T})$ es *segundo numerable* si existe una base numerable para $\mathcal{T}$.

Las propiedades "primero numerable" y "segundo numerable" son conocidas como el primer axioma de numerabilidad y el segundo axioma de numerabilidad, respectivamente.

Un primer hecho importante relacionado al segundo axioma de numerabilidad, es que cualquier base de una topología segundo numerable contiene una base numerable, como veremos a continuación.

3.23. Proposición. *Si X es un espacio segundo numerable y $\mathcal{B}$ es cualquier base de X, entonces $\mathcal{B}$ contiene una base numerable de X.*

Demostración. Comencemos por fijar una base numerable $\mathcal{B}_0$ de X. Vamos a demostrar, en primer lugar, que si $\mathcal{A}$ es una familia de abiertos en X, entonces existe una familia numerable $\mathcal{A}^+ \subseteq \mathcal{A}$ de tal forma que $\bigcup \mathcal{A}^+ = \bigcup \mathcal{A}$.

Hagamos $\mathcal{A}^* = \{B \in \mathcal{B}_0 : \exists\, A \in \mathcal{A}$ tal que $B \subseteq A\}$, y para cada $B \in \mathcal{A}^*$ fijemos un conjunto $A_B \in \mathcal{A}$ que satisfaga $B \subseteq A_B$. Afirmamos que $\mathcal{A}^+ = \{A_B : B \in \mathcal{A}^*\}$ es el conjunto buscado. En vista de que $\mathcal{A}^* \subseteq \mathcal{B}_0$, $\mathcal{A}^*$ es numerable y por lo tanto $\mathcal{A}^+$ también lo es. Obviamente $\mathcal{A}^+ \subseteq \mathcal{A}$ y, por ende, $\bigcup \mathcal{A}^+ \subseteq \bigcup \mathcal{A}$. Ahora, si $x \in \bigcup \mathcal{A}$, entonces existe $A \in \mathcal{A}$ de tal modo que $x \in A$ y como $\mathcal{B}_0$ es base para X, tenemos que $x \in B \subseteq A$, para algún $B \in \mathcal{B}_0$; esto último implica que $B \in \mathcal{A}^*$ y así $x \in B \subseteq A_B$, con lo cual obtenemos que $x \in \bigcup \mathcal{A}^+$.

Ahora, debido a que cada $B \in \mathcal{B}_0$ es abierto en X y $\mathcal{B}$ es una base de X, debe existir $\mathcal{A}_B$, una subfamilia de $\mathcal{B}$, de tal forma que $B = \bigcup \mathcal{A}_B$. Utilizando lo demostrado en el párrafo anterior, fijamos una subcolección numerable $\mathcal{A}_B^+$ de $\mathcal{A}_B$ que satisface la condición: $B = \bigcup \mathcal{A}_B = \bigcup \mathcal{A}_B^+$. Es fácil verificar ahora que la colección $\bigcup\{\mathcal{A}_B^+ : B \in \mathcal{B}_0\}$ es una base numerable para X contenida en $\mathcal{B}$. ⊠

De las tres propiedades que estamos estudiando en esta sección, la condición de poseer una base numerable es la más fuerte en el sentido en que ésta implica las otras dos.

3.24. Proposición. *Si* $(X, \mathcal{T})$ *es segundo numerable, entonces* X *es también separable y primero numerable.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ una base numerable de $\mathcal{T}$. Para cada $x \in X$, la colección $\mathcal{B}(x) = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ constituye una base local de x en X. Naturalmente, como $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{B}$, se tiene que $\mathcal{B}(x)$ es numerable. Esto demuestra que el espacio X es primero numerable. Por otro lado, si elegimos para cada $B \in \mathcal{B}$ un punto $x_B \in B$, entonces el conjunto numerable $D = \{x_B : B \in \mathcal{B}\}$ es denso en X. En efecto, si $A \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$, entonces debe existir $B \in \mathcal{B}$ no vacío contenido en A. Por lo tanto, $x_B \in A$. ⊠

Una clase amplia e importante de espacios topológicos está contenida en la clase de los espacios primero numerables, como se puede apreciar en el siguiente resultado.

3.25. Proposición. *Cualquier espacio métrico es primero numerable.*

Demostración. Sea $(X, \mathcal{T}_d)$ un espacio métrico, y sea $x \in X$. Entonces, la colección $\mathcal{B}(x) = \{B(x, 1/n) : n \in \mathbb{N}\}$ constituye una base local numerable de vecindades de x. ⊠

3.26. Ejemplos.

(1) Como ya mencionamos, $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ es separable, segundo numerable y primero numerable. No es difícil corroborar que cualquier espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ cumple también estas propiedades. Por ejemplo, la colección de puntos D en $\mathbb{R}^n$ cuyas coordenadas son números racionales, es un subconjunto denso y numerable de $\mathbb{R}^n$; y $\{B(d, 1/n) : d \in D, n \in \mathbb{N}\}$ es una base numerable de $\mathbb{R}^n$.

(2) Para un espacio discreto $(X, \mathcal{T})$ y un punto x en él, el conjunto $\{x\}$ es abierto, de tal manera que el único subconjunto denso en X es X mismo, y cualquier base de X debe contener a todos los subconjuntos unipuntuales de X. Por lo cual, en el espacio $(X, \mathcal{T})$ son equivalentes el segundo axioma de numerabilidad, la separabilidad, y la cualidad: $|X| \leqslant \aleph_0$. De esta forma tenemos que la condición $|X| > \aleph_0$ implica que X, con la topología discreta, es un ejemplo de un espacio métrico (y por lo tanto primero numerable) que no es separable (y claro, tampoco es segundo numerable).

(3) Consideremos ahora un conjunto X de cardinalidad mayor a $\aleph_0$ y sea $\mathcal{T}$ su topología cofinita. Como el complemento de cualquier elemento no vacío en $\mathcal{T}$ es finito, todo subconjunto infinito numerable Y de X es denso. Así, $(X, \mathcal{T})$ es separable. Pero este espacio no es primero numerable (y, por ende, no es segundo numerable). En efecto, sea $x \in X$ y sea $\mathcal{B}(x) = \{B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots\}$ una colección de subconjuntos abiertos que contienen a x. Por la definición de $\mathcal{T}$, cada conjunto $X \setminus B_i$ es finito. Por lo tanto, $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}(X \setminus B_i) = X \setminus \bigcap_{i\in\mathbb{N}} B_i$ es numerable. Pero hemos supuesto que X tiene cardinalidad estrictamente mayor que $\aleph_0$. Por lo tanto, $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} B_i$ es un conjunto infinito. Esto nos permite tomar un punto $y \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} B_i$ diferente de x. Resulta ahora que el subconjunto abierto $X \setminus \{y\}$ contiene a x y no contiene a ninguno de los conjuntos B_i. Es decir, $\mathcal{B}(x)$ no es una base local de x. Como $\mathcal{B}(x)$ es arbitraria, hemos demostrado que x no posee una base local numerable.

Hemos visto pues, por medio de los ejemplos anteriores, que podemos tener espacios que son separables pero no primero numerables (y por lo tanto, no pueden ser segundo numerables), y espacios que son primero numerables pero no separables (y por lo tanto, tampoco son segundo numerables). Ahora veremos que la separabilidad y el segundo axioma de numerabilidad son equivalentes en la clase de espacios métricos.

3.27. Proposición. *Sea (X, d) un espacio métrico y sea $\mathcal{T}_d$ la topología generada en X por la métrica d. Si $(X, \mathcal{T}_d)$ es separable, entonces $(X, \mathcal{T}_d)$ es segundo numerable.*

Demostración. Supongamos que D es un subconjunto denso numerable de $(X, \mathcal{T}_d)$. Para cada $z \in D$ consideramos la colección $\mathcal{B}(z) = \{B(z, 1/n) : n \in \mathbb{N}\}$. Tomamos $\mathcal{B} = \bigcup_{z\in D} \mathcal{B}(z)$. Como D es numerable, y la unión de una colección numerable de conjuntos numerables aún es numerable, resulta que $\mathcal{B}$ es numerable. Habremos logrado nuestro objetivo si probamos que $\mathcal{B}$ es una base para $\mathcal{T}_d$. Supongamos que $A \in \mathcal{T}_d$ contiene a $x \in X$. Fijemos un número natural n que satisfaga $B(x, 1/n) \subseteq A$. Como D es denso en X, podemos asegurar que existe un $z \in D \cap B(x, 1/(2n))$. Es claro que $x \in B(z, 1/(2n))$ y $B(z, 1/(2n)) \in \mathcal{B}$. Veamos que la relación $B(z, 1/(2n)) \subseteq A$ también se cumple. Para $y \in B(z, 1/(2n))$ se tiene que $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$. Pero $d(x, z) < 1/(2n)$ y $d(z, y) < 1/(2n)$. Por lo tanto, $d(x, y) < 1/n$. Es decir, $y \in$

$B(x, 1/n)$. Como este último conjunto está contenido en A, se concluye que $y \in A$. ⊠

3. Subespacios e imágenes continuas de espacios segundo numerables, separables y primero numerables

Recordemos que para un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ y un $Y \subseteq X$, si $\mathcal{B}$ es una base para X, entonces $\mathcal{B}(Y) = \{Y \cap B : B \in \mathcal{B}\}$ es una base para la topología $\mathcal{T}\restriction Y$ en Y (véase sección 5). Además, si $y \in Y$ y $\mathcal{B}(y)$ es una base local de y en $(X, \mathcal{T})$, entonces $\mathcal{B}_Y(y) = \{Y \cap B : B \in \mathcal{B}(y)\}$ es una base local de y en $(Y, \mathcal{T}\restriction Y)$. Con esta información es fácil demostrar que el primer y segundo axiomas de numerabilidad son hereditarios; es decir, se transmiten a los subespacios.

3.28. Proposición. *Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio segundo numerable (respectivamente, primero numerable) y Y es un subespacio de X, entonces $(Y, \mathcal{T} \restriction Y)$ es también un espacio segundo numerable (respectivamente, primero numerable).*

Demostración. Tomemos una base numerable $\mathcal{B}$ de $(X, \mathcal{T})$. Entonces, la colección $\mathcal{B}(Y)$ es también numerable y es una base para $\mathcal{T}\restriction Y$. El mismo razonamiento prueba que $(Y, \mathcal{T}\restriction Y)$ es primero numerable si $(X, \mathcal{T})$ lo es. ⊠

A pesar de lo que pudiera pensarse, un resultado similar no se cumple para espacios separables. En efecto, sea X un conjunto más que numerable. Tomemos un punto distinguido p en X. La colección $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{E \subseteq X : p \in E\}$ es una topología para X, y es claro que $\{p\}$ es un subespacio denso de este espacio. Sin embargo, el subespacio $Y = X \setminus \{p\}$ es discreto. Como $|Y| > \aleph_0$, entonces Y es un subespacio de $(X, \mathcal{T})$ que no es separable.

3.29. Proposición. *Si D es un subconjunto denso en un espacio topológico X y A es un conjunto abierto en X, entonces el conjunto $A \cap D$ es denso en el subespacio A. En particular, si X es separable entonces cualquier subespacio abierto de él también es separable.*

Demostración. Sabemos que $\mathrm{cl}_A(A \cap D) = \mathrm{cl}_X(A \cap D) \cap A$ según el inciso (2) de la proposición 2.20; y ahora, la proposición 2.33 del capítulo 2 garantiza que $\mathrm{cl}_X(A \cap D) = \mathrm{cl}_X(A)$, con lo cual se obtiene $\mathrm{cl}_A(A \cap D) = A$. ⊠

3.30. Proposición. *Sean X y Y dos espacios topológicos, y sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Si D es un subconjunto denso en X, entonces $f[D]$ es denso en Y. En particular, si X es separable, así también lo es Y.*

Demostración. Sea A un subconjunto abierto de Y. Como f es una función continua, $f^{-1}[A]$ es un subconjunto abierto de X, y por lo tanto $f^{-1}[A] \cap D \neq \emptyset$. Si x pertenece a esta intersección, entonces $f(x) \in f[D] \cap A$. ⊠

En el caso de imágenes continuas de espacios primero o segundo numerables no se tiene un resultado análogo.

3.31. Ejemplo. Si $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ son las topologías euclideana y cofinita en $\mathbb{R}$, respectivamente, entonces la función identidad $\mathrm{id} : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_1) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_2)$ es continua y suprayectiva. Ahora, a pesar de que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$ es segundo numerable, $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_2)$ no es ni siquiera primero numerable (inciso (3) del ejemplo 3.26).

Aunque estas propiedades no se preservan bajo funciones continuas, sí se preservan cuando consideramos funciones que son a la vez continuas y abiertas.

3.32. Lema. *Sea X un espacio topológico y sea $\mathcal{B}(x)$ una base local de vecindades de x en X. Sea $f : X \to Y$ una función continua y abierta. Entonces la colección $\{f[B] : B \in \mathcal{B}(x)\}$ es una base local de $f(x) = y$ en Y.*

Demostración. Sea A un subconjunto abierto no vacío de Y que contiene a y. Resulta que, como f es continua, $f^{-1}[A]$ es un subconjunto abierto de X que contiene a x. Existe, entonces, un elemento B en $\mathcal{B}(x)$ tal que $x \in B \subseteq f^{-1}[A]$. Concluimos que $f(x) = y \in f[B] \subseteq f[f^{-1}[A]] \subseteq A$. Como f es una función abierta, cada $f[B]$ es una vecindad de y para cada $B \in \mathcal{B}(x)$. Por lo tanto, $\{f[B] : B \in \mathcal{B}(x)\}$ es una base local de $f(x)$ en Y. ⊠

Ahora no es difícil demostrar el siguiente resultado.

3.33. PROPOSICIÓN. *La imagen continua y abierta de cualquier espacio segundo numerable (resp., primero numerable) es segundo numerable (resp., primero numerable).*

4. Convergencia de sucesiones

Debe ser conocido por el lector que para $\mathbb{R}$ con la topología usual $\mathcal{T}_e$, una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en un punto z si (y sólo si) para cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a z, la sucesión $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(z)$. También es cierto que el operador cerradura en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ está determinado por las sucesiones; en efecto, para $F \subseteq \mathbb{R}$, $z \in cl(F)$ si, y sólo si, existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en F que converge a z.

Resultados análogos son ciertos cuando se consideran espacios cuyas topologías están definidas por una métrica. Pero, ¿se podrá caracterizar el operador cerradura y la continuidad de funciones en espacios topológicos arbitrarios en términos exclusivos de convergencia de suceciones? En esta sección analizaremos este problema y daremos una respuesta negativa; posteriormente, en la sección 5 y en el ejercicio 3.H veremos las nociones de filtro y red, respectivamente, y los conceptos de convergencia de filtros y de redes que generalizan las nociones de sucesión y convergencia de sucesiones, y que caracterizan completamente la continuidad de las funciones entre espacios topológicos y el operador cerradura de cualquier espacio en términos de convergencia.

3.34. DEFINICIONES. Sea X un espacio topológico.

(1) Una *sucesión en* X es una función de $\mathbb{N}$ en X. La sucesión $n \mapsto x_n$ será representada por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
(2) Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X *converge a un punto* $x_0 \in X$ si para cada vecindad V de x_0 existe un número natural $n(V)$ tal que $x_m \in V$ siempre que $m \geqslant n(V)$. El símbolo $x_n \to x_0$ significa que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x_0.
(3) Diremos que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es *finita* si el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es finito. En el caso en que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no sea finita, diremos que es *infinita*.

Obsérvese que para determinar la convergencia de una sucesión a un punto x_0 nos basta con disponer de una base local en x_0. De modo más preciso, si $\mathcal{B}$ es una base local para el espacio topológico X en el punto $x_0 \in X$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X, entonces $x_n \to x_0$ si, y sólo si, para cada $B \in \mathcal{B}$ existe un número natural $n(B)$ de tal forma que $x_n \in B$ para cualquier $n \geqslant n(B)$.

3.35. Ejemplos. Sean X un espacio topológico, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X y $x_0 \in X$.

(1) Si X tiene la topología indiscreta, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a todos los puntos de X, pues la única vecindad no vacía de cualquier punto en X es X.
(2) Por otro lado, si X es un espacio discreto, entonces $x_n \to x_0$ si, y sólo si, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ con la virtud de que $x_n = x_0$ siempre que $n \geqslant n_0$ (¿por qué?). Es decir, las únicas sucesiones que convergen en un espacio discreto son las *eventualmente constantes*.
(3) Cuando la topología de X está generada por una métrica d, sabemos que la colección de bolas abiertas centradas en x_0 es una base local, así que, en este caso, nuestro criterio de convergencia se traduce en: $x_n \to x_0$ si, y sólo si, para cada $\epsilon > 0$ existe $n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ de tal forma que $d(x_0, x_n) < \epsilon$, siempre que $n \geqslant n(\epsilon)$.

Analicemos ahora la convergencia de sucesiones en espacios de funciones.

3.36. Ejemplo. En el conjunto $C(I)$ de funciones continuas definidas sobre I y con valores en $\mathbb{R}$, hemos definido dos topologías; a saber, $\mathcal{T}_\infty$ (ejemplo 1.16) y $\mathcal{T}_p$ (ejemplo 1.37). Nuestro propósito en este ejemplo es hacer una comparación de la convergencia de sucesiones entre los espacios $(C(I), \mathcal{T}_\infty)$ y $(C(I), \mathcal{T}_p)$. Con este fin, tomemos una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $C(I)$, y sea $f_0 \in C(I)$.

En primer lugar afirmamos que si $f_n \to f_0$ con respecto a la topología $\mathcal{T}_\infty$, entonces $f_n \to f_0$ con respecto a la topología $\mathcal{T}_p$.

Comencemos tomando un básico $[f_0; x_1, \ldots, x_k; \epsilon]$ de $\mathcal{T}_p$ que contiene a f_0 (ver el ejemplo 1.37). Para este ϵ debe existir, debido a que $f_n \to f_0$ con respecto a la topología $\mathcal{T}_\infty$, un número natural $n(\epsilon)$ que satisfaga $d_\infty(f_0, f_n) = \sup\{|f_0(x) - f_n(x)| : x \in I\} < \epsilon$, siempre que $n \geqslant n(\epsilon)$. En particular, si $n \geqslant n(\epsilon)$ entonces $|f_0(x_i) - f_n(x_i)| < \epsilon$, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$. Esto último quiere decir que $f_n \in [f_0; x_1, \ldots, x_k; \epsilon]$ para cualquier $n \geqslant n(\epsilon)$. De esta manera, si $f_n \to f_0$ en $\mathcal{T}_\infty$ entonces $f_n \to f_0$ en $\mathcal{T}_p$.

Observe que la convergencia de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a f_0 en $\mathcal{T}_\infty$ significa que las gráficas de las funciones f_n van siendo cada vez más parecidas a la gráfica de f_0 en la medida en que n es muy grande. Es por esto que a $\mathcal{T}_\infty$ se le conoce como la *topología de la convergencia uniforme*.

Por otro lado, en $\mathcal{T}_p$, la convergencia de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a f_0 es equivalente a la convergencia de cada una de las sucesiones $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ a $f_0(x)$ para cada punto $x \in I$. Es por esto que a $\mathcal{T}_p$ se le llama la *topología de la convergencia puntual*.

Si una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $C(I)$ converge a f_0 con respecto a $\mathcal{T}_\infty$, diremos que *converge uniformemente a* f_0 y escribiremos $f_n \rightrightarrows f_0$. Por otra parte, si la convergencia es con respecto a $\mathcal{T}_p$, se dirá que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge puntualmente* a f_0 y se escribirá $f_n \to f_0$.

Con la notación del párrafo anterior tenemos que si $f_n \rightrightarrows f_0$, entonces $f_n \to f_0$. El recíproco no es válido en general, tal y como se puede corroborar con el siguiente ejemplo.

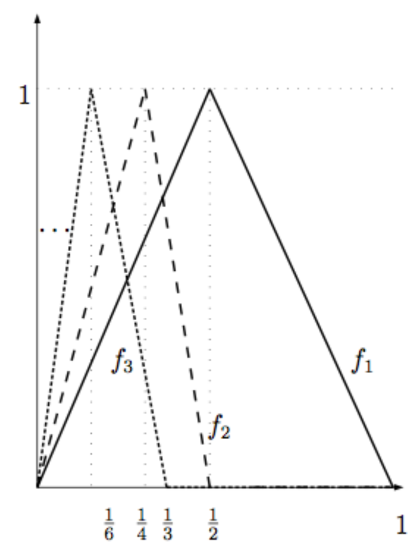

FIGURA 20. Gráficas de las funciones f_1, f_2, f_3.

Sea $f_n : I \to \mathbb{R}$ definida mediante la fórmula:

$$f_n(x) = \begin{cases} 2nx & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2n}], \\ 2(1 - nx) & \text{si } x \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}], \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

No es muy complicado demostrar que $f_n \to 0$ (la función constante 0). Pero la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge uniformemente a 0 ya que si $n \in \mathbb{N}$ entonces para $x_n = \frac{1}{2n} \in [0,1]$ se tiene que $f_n(x_n) = 1$. Esto permite mostrar que $1 = \sup\{|f_n(x) - 0(x)| : x \in [0,1]\} = d_\infty(f_n, 0)$. Por ello, para la bola abierta $B(0, \frac{1}{2})$ no es posible hallar una $N \in \mathbb{N}$ con la propiedad de que $f_m \in B(0, \frac{1}{2})$ para toda $m > N$.

3.37. Ejemplo. Sea X un conjunto infinito y sea $\mathfrak{T}$ la topología cofinita sobre X. Vamos a demostrar que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X que satisface $x_n \neq x_m$, si $m \neq n$, entonces $x_n \to x$ para cualquier $x \in X$. En primer lugar, si $V \in \mathfrak{T}$ es tal que $x \in V$, tenemos que $X\backslash V$ debe ser finito y, por ende, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}\backslash V$ también. La condición impuesta a la sucesión garantiza que el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin V\}$ es finito, y de este hecho se deduce la existencia de un número natural n_0 con la virtud de que $x_n \in V$, siempre que $n \geqslant n_0$.

Supongamos ahora que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es semiconstante, es decir, que existen $n_0 \in \mathbb{N}$ y $x_0 \in X$ de tal modo que $x_n = x_0$, para cada $n \geqslant n_0$. Afirmamos que en este caso la sucesión sólo converge a x_0. En efecto, si $a \neq x_0$, entonces $V = X\backslash\{x_0\}$ es un abierto que contiene a a y además, para cada $m \in \mathbb{N}$, se tiene que $m + n_0 \geqslant n_0$ y $x_{m+n_0} \notin V$.

3.38. Proposición. *Sea E un subconjunto del espacio topológico X. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión infinita de puntos pertenecientes a E que converge a x, entonces $x \in der(E)$.*

Demostración. Sea V un abierto que contiene a x. Por la convergencia de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de tal forma que $\{x_n : n \geqslant n_0\} \subseteq V$. Ahora, la infinitud de la sucesión nos lleva a concluir que $V \cap E$ es infinito y, en particular, debemos tener que $(V \cap E)\backslash\{x_0\} \neq \emptyset$. ⊠

El siguiente resultado es una consecuencia de la proposición anterior.

3.39. Corolario. *Si E es un subconjunto cerrado del espacio X y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en E que converge al punto x_0, entonces $x_0 \in E$.*

Aunque la convergencia de sucesiones no basta para caracterizar la continuidad de las funciones como veremos en el ejemplo 3.44, sí se dispone de la implicación siguiente.

3.40. Proposición. *Sea $f : X \to Y$ una función continua. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X que converge a x_0, entonces $f(x_n) \to f(x_0)$.*

Demostración. Sea W un abierto en Y que contiene a $f(x_0)$. La continuidad de f garantiza que existe un abierto V en X que contiene a x_0 y es tal que $f[V] \subseteq W$. Ahora, la convergencia de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nos lleva a concluir que existe un número natural n_0 con la virtud de que $\{x_n : n \geqslant n_0\} \subseteq V$. Esto último implica que $\{f(x_n) : n \geqslant n_0\} \subseteq f[V] \subseteq W$, y con esto ya se tiene demostrado que $f(x_n) \to f(x_0)$. $\boxtimes$

Existen espacios topológicos en los que los recíprocos de las proposiciones anteriores se cumplen.

3.41. Proposición. *Si X es primero numerable y $E \subseteq X$, entonces $x \in cl(E)$ si, y sólo si, existe una sucesión en E que converge a x.*

Demostración. Como X es primero numerable, X tiene una base local numerable en x; así que, por el ejercicio 3.B.(2), existe una base local $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ de X en x que satisface $B_n \subseteq B_m$ siempre que $m < n$.

Si suponemos que $x \in cl(E)$, entonces podemos elegir un punto $x_n \in B_n \cap E$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Para comprobar que $x_n \to x$, sea A un abierto en X que contiene a x. Debe existir $n_0 \in \mathbb{N}$ de tal modo que $B_{n_0} \subseteq A$, y como $B_n \subseteq B_{n_0}$ para $n \geqslant n_0$, ya tenemos que $\{x_n : n \geqslant n_0\} \subseteq A$.

La otra implicación ya fue demostrada en 3.39. $\boxtimes$

3.42. Proposición. *Sea $f : X \to Y$ una función entre los espacios X y Y. Si X es primero numerable y $x \in X$, entonces f es continua en x si, y sólo si, para cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X que converge a x se tiene que $f(x_n) \to f(x)$.*

Demostración. Como en la prueba de la proposición anterior, fijemos una base local $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ de X en x que satisfaga $B_n \subseteq B_m$ para $n > m$.

Supongamos que f no es continua en x. Esto quiere decir que existe un abierto B en Y que contiene a $f(x)$, pero de forma tal que para cualquier abierto A en X que contiene a x se cumple que $f[A] \nsubseteq B$. En particular, para cada $n \in \mathbb{N}$ debe existir un punto $x_n \in B_n$ que satisfaga $f(x_n) \notin B$. Tenemos que $x_n \to x$ pero $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a $f(x)$, pues B es un abierto que contiene a este punto pero no contiene ningún término de la sucesión $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

La demostración de la implicación restante se desarrolló en la proposición 3.40. $\boxtimes$

En particular, cuando consideramos espacios métricos, las sucesiones bastan para definir el operador cerradura y para definir funciones continuas como se expresa en las proposiciones anteriores. Sin embargo, también es posible proporcionar ejemplos de espacios en los que no necesariamente se cumplen las conclusiones de las proposiciones 3.41 y 3.42. Veamos algunos ejemplos.

3.43. Ejemplo. Sea p un punto que no pertenece a $\mathbb{R}$. Y sea X el conjunto $\mathbb{R}\cup\{p\}$ al cual le asignamos la topología $\mathcal{T}_{p,\omega_1}$ que fue definida en el ejercicio 2.B.(7). Así, un conjunto $A \subseteq X$ pertenece a $\mathcal{T}_{p,\omega_1}$ cuando, y sólo cuando, $p \notin A$ ó $p \in A$ y $|\mathbb{R} \setminus A| \leqslant \aleph_0$. Resulta evidente que el punto p pertenece a la cerradura de $\mathbb{R}$, pero ninguna sucesión en $\mathbb{R}$ converge a p pues si $S = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$, entonces $\{p\} \cup (\mathbb{R} \setminus S)$ es una vecindad de p que no contiene ninguno de los elementos de S.

3.44. Ejemplo. Exhibamos ahora un espacio X en el cual es posible definir una funcion que no es continua pero manda límites de sucesiones convergentes en límites de las imagenes de las sucesiones respectivas.

Sea X un conjunto no numerable y sea $\mathcal{T}$ la topología conumerable sobre X (véase el ejercicio 1.B.(5)).

Vamos a demostrar que si una sucesión en X converge, entonces es semiconstante. Supongamos que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x_0 en X. El conjunto $S = \{n \in \mathbb{N} : x_n \neq x_0\}$ es numerable, así que $V = X\setminus\{x_n : n \in S\}$ es un abierto en $\mathcal{T}$ que contiene a x_0. Por la convergencia, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de tal suerte que $\{x_n : n \geqslant n_0\} \subseteq V$ y por la definición de V, tenemos que $x_n = x_0$ para todo $n \geqslant n_0$; o sea, nuestra sucesión es semiconstante.

Ahora consideremos la función identidad $\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{P}(X))$. Para demostrar que esta función no es continua bastará probar, según el ejemplo 3.7 inciso (3) de este capítulo, que $\mathcal{P}(X) \nsubseteq \mathcal{T}$. Pero esto último resulta cierto ya que $\{x\} \in \mathcal{P}(X)\setminus\mathcal{T}$ para cualquier $x \in X$.

Para terminar nuestra argumentación notemos que si $x_n \to x_0$ en $(X, \mathcal{T})$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de tal modo que $x_n = x_0$, para $n \geqslant n_0$. Con esto se tiene que $\mathrm{id}_X(x_n) \to \mathrm{id}_X(x_0)$ en $(X, \mathcal{P}(X))$. ⊠

5. Filtros y convergencia

Antes de la publicación de *Grundzüge der Mengenlehre* [33], varios notables matemáticos propusieron diversos sistemas de axiomas que intentaban definir la noción de espacio topológico. En su gran mayoría, estas axiomatizaciones pretendían que la noción de convergencia de sucesiones fuera su fundamento; en particular, se aspiraba a que la operación que consiste en tomar límites de sucesiones bastara para definir el operador cerradura de un espacio topológico. El mismo M. Frechet describió, en su tesis doctoral en 1906, un sistema de axiomas que intentaba sistematizar las propiedades fundamentales de la convergencia de sucesiones de los espacios conocidos hasta ese momento. Pronto se supo que las ideas construidas alrededor de las sucesiones no eran lo suficientemente poderosas para lograr reproducir la idea general de espacio topológico. Había que sustituir a las sucesiones y su convergencia por objetos y procesos más generales y complejos.

Fue F. Riesz quien en 1908, en su artículo [53], introduce los conceptos de filtro y ultrafiltro, haciendo notar su potencial para definir puntos de acumulación y llevar a cabo procesos de completación. Pero es hasta 1937 que Henry Cartan ([22], [23]) reintrodujo estos conceptos presentándolos con claridad como los instrumentos adecuados para reemplazar a las sucesiones en el estudio de los espacios abstractos.

En esta sección estudiaremos los filtros y su convergencia, demostraremos que a través de ellos es posible definir tanto el operador cerradura en cualquier espacio topológico como la continuidad de funciones cuyo dominio y rango son espacios arbitrarios.

3.45. Definición. Sea X un conjunto no vacío. Una colección no vacía $\mathcal{F}$ de subconjuntos no vacíos de X es llamada *filtro* en X si se cumplen las siguientes condiciones:

(1) Si $F \in \mathcal{F}$ y $F \subseteq F_1 \subseteq X$, entonces $F_1 \in \mathcal{F}$.
(2) Si $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, entonces $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.

Es fácil probar que la condición (2) de la definición anterior es válida para cualquier cantidad finita de elementos de $\mathcal{F}$. Por otra parte, es común decir que la condición (1) significa que la colección $\mathcal{F}$ es cerrada bajo superconjuntos. De esta manera un filtro en un conjunto X es una colección no vacía de subconjuntos no vacíos que es cerrada bajo superconjuntos y bajo intersecciones finitas.

El lector debe notar que la noción de filtro pertenece enteramente al ámbito de la teoría de conjuntos. En lo que sigue involucramos a los filtros en el mundo de los espacios topológicos.

3.46. Ejemplos.

(1) Es fácil verificar que en todo espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, la colección $\mathcal{V}(x)$ de todas las vecindades de un punto $x \in X$ es un filtro en X, dicho filtro es llamado *filtro de vecindades de x en X* o *sistema de vecindades del punto x* (véase la definición 1.23).

(2) Si X es un conjunto y $\emptyset \neq A \subseteq X$, entonces la colección

$$\mathcal{F}(A) = \{B : A \subseteq B \subseteq X\}$$

es un filtro en X. Es costumbre escribir $\mathcal{F}_p$ para denotar al filtro $\mathcal{F}(A)$ en el caso en que $A = \{p\}$.

(3) La colección $\mathcal{C} = \{(a, \to) : a \in \mathbb{R}\}$ es una colección no vacía de subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ que no es un filtro debido a que ella no es cerrada bajo superconjuntos. No obstante, podemos utilizar a $\mathcal{C}$ para crear un filtro que de hecho contenga a $\mathcal{C}$. Simplemente consideremos la colección

$$\mathcal{F}_{\mathcal{C}} = \{A \subseteq \mathbb{R} : \text{ existe } C \in \mathcal{C} \text{ tal que } C \subseteq A\}.$$

Sabemos que para determinar al sistema de vecindades de un punto es suficiente conocer una base de vecindades del punto. En el caso más general de los filtros, la situación es la misma: un filtro puede ser determinado por subcolecciones especiales de él. A continuación introducimos la noción de base de filtro. (Por ejemplo, el lector puede notar esto último en el inciso (3) del ejemplo 3.46).

3.47. Definición. Dado un filtro $\mathcal{F}$ en un conjunto X, una subcolección no vacía $\mathcal{B}$ de $\mathcal{F}$ es una *base de filtro* para $\mathcal{F}$ si ocurre que para todo $F \in \mathcal{F}$ existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq F$.

Es claro que todo filtro es una base de filtro de sí mismo. La propiedad relevante que tienen las bases de filtro está sintetizada en la siguiente proposición.

3.48. Proposición. *Sean X un conjunto y $\mathcal{B}$ una familia no vacía de subconjuntos de X. Entonces $\mathcal{B}$ es una base de un filtro en X si y sólo si $\emptyset \notin \mathcal{B}$ y para cualesquiera $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.*

Demostración. $\Rightarrow]$ Si $\mathcal{B}$ es una base de un filtro $\mathcal{F}$, entonces $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$, y por esto $\emptyset \notin \mathcal{B}$. Ahora bien, si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, entonces $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{F}$, y por ser $\mathcal{B}$ base de filtro de $\mathcal{F}$ debe existir un elemento $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

$\Leftarrow$] Si $\emptyset \notin \mathcal{B}$ y para todo $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. Definamos

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}} = \{ F \subseteq X : \text{existe } B \in \mathcal{B} \text{ tal que } B \subseteq F \}.$$

Entonces $\emptyset \notin \mathcal{F}_{\mathcal{B}}$, y de la definición de $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ se deduce: $F \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ y $F \subseteq F_1$ implican que $F_1 \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}}$. Ahora tomemos $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}}$. Existen $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ tales que $B_1 \subseteq F_1$ y $B_2 \subseteq F_2$. Consideremos ahora un $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. Tenemos entonces que $B_3 \subseteq F_1 \cap F_2$, de donde $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}}$. Esto muestra que $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ es un filtro; obviamente, $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$. ⊠

3.49. Observación. Si $\mathcal{B}$ es una colección no vacía de subconjuntos de un conjunto X que satisface la condición

($\star$) $\emptyset \notin \mathcal{B}$ y para todo $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$,

entonces el filtro del cual $\mathcal{B}$ es base es la colección

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}} = \{ F \subseteq X : \text{existe } B \in \mathcal{B} \text{ tal que } B \subseteq F \}.$$

El filtro $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ es el *filtro generado por la base de filtro* $\mathcal{B}$. Observe, por ejemplo, que en el inciso (3) del ejemplo 3.46, la colección $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ es el filtro generado por $\mathcal{C}$.

Los filtros $\mathcal{F}_p$ en el inciso (2) del ejemplo 3.46 tienen una propiedad especial; ellos no están contenidos propiamente en ningún otro filtro. Es decir, los filtros de tipo $\mathcal{F}_p$ son filtros maximales.

3.50. Definición. Un filtro $\mathcal{F}$ sobre un conjunto X es un *filtro maximal* si no existe un filtro $\mathcal{G}$ sobre X tal que $\mathcal{F} \subsetneqq \mathcal{G}$. Los filtros maximales son también llamados *ultrafiltros*.

Probemos ahora que efectivamente los filtros de tipo $\mathcal{F}_p$ ($p \in X$) son ultrafiltros. Para ello supongamos que $\mathcal{G}$ es un filtro en X tal que $\mathcal{F}_p \subseteq \mathcal{G}$. Tomemos un elemento cualquiera $G \in \mathcal{G}$. Como $\{p\}$ y G son elementos de $\mathcal{G}$, $\{p\} \cap G \neq \emptyset$. Entonces $p \in G$ y en consecuencia $G \in \mathcal{F}_p$.

El Lema de Zorn (cf. teorema A.40) produce el siguiente resultado relevante. Recuérdese que una familia $\mathcal{C}$ de subconjuntos de un conjunto X tiene *la propiedad de la intersección finita* (o es una *familia centrada*) si para toda subfamilia finita $\mathcal{C}'$ no vacía de $\mathcal{C}$, se tiene que $\bigcap \mathcal{C}' \neq \emptyset$.

3.51. Proposición. *Sea X un conjunto. Para toda familia centrada $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X existe un ultrafiltro $\mathcal{F}$ que contiene a $\mathcal{C}$.*

Demostración. Consideremos el conjunto

$$\Phi = \{\mathcal{D} : \mathcal{D} \text{ es una familia centrada con } \mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}\}.$$

Es claro que este conjunto no es vacío y es parcialmente ordenado por la relación $\subseteq$ de contención de conjuntos. Para aplicar el Lema de Zorn, debemos mostrar que toda cadena en $(\Phi, \subseteq)$ es acotada superiormente en $(\Phi, \subseteq)$. Consideremos entonces una cadena $\{\mathcal{D}_\alpha\}_{\alpha\in J}$ en Φ. Definamos $\mathcal{H} = \bigcup_{\alpha\in J} \mathcal{D}_\alpha$. Se tiene entonces que $\mathcal{H} \in \Phi$ y que $\mathcal{D}_\alpha \subseteq \mathcal{H}$ para cada $\alpha \in J$. Por el Lema de Zorn, existe un elemento maximal $\mathcal{F} \in \Phi$.

Afirmación. $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro que contiene a $\mathcal{C}$.

Bastará demostrar que $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro. Probaremos primeramente que $\mathcal{F}$ es filtro. Note que como $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de la intersección finita, se tiene que $\mathcal{F} \neq \emptyset$ y $\emptyset \notin \mathcal{F}$. Por otro lado, si $A \in \mathcal{F}$ y $A \subseteq B \subseteq X$, entonces la colección $\mathcal{F} \cup \{B\}$ tiene la propiedad de la intersección finita y contiene a $\mathcal{C}$. Como $\mathcal{F}$ es maximal y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F} \cup \{B\}$, se tiene que $B \in \mathcal{F}$. De esta manera $\mathcal{F}$ es cerrada bajo superconjuntos. Consideremos ahora a un par de elementos $A, B \in \mathcal{F}$. Es fácil verificar que $\mathcal{F} \cup \{A \cap B\}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Nuevamente, el hecho de que $\mathcal{F}$ es maximal y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F} \cup \{A \cap B\}$, implican que $A \cap B \in \mathcal{F}$. De esta forma, $\mathcal{F}$ es un filtro. Para mostrar que $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro, bastará recordar que todo filtro es una colección con la propiedad de la intersección finita. Por ello, si $\mathcal{G}$ es un filtro que contiene a $\mathcal{F}$ entonces $\mathcal{G}$ es también una colección centrada que contiene a $\mathcal{F}$ y por lo cual contiene a $\mathcal{C}$. La maximalidad de $\mathcal{F}$ ahora implica que $\mathcal{F} = \mathcal{G}$. ⊠

Como cualquier filtro y cualquier base de filtro es una familia centrada, tenemos el siguiente corolario.

3.52. Corolario. *Sea X un conjunto. Si $\mathcal{F}$ es un filtro (respectivamente, una base de filtro) entonces existe un ultrafiltro $\mathcal{G}$ que contiene a $\mathcal{F}$.*

El siguiente resultado proporciona algunas formas equivalentes de caracterizar a los filtros maximales.

3.53. Teorema. *Sea X un conjunto. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(1) *$\mathcal{F}$ es un ultrafiltro en X.*
(2) *$\mathcal{F}$ es una familia centrada maximal.*

(3) *$\mathcal{F}$ es una base de filtro con la siguiente propiedad: para todo $A \subseteq X$, si $A \cap B \neq \emptyset$ para cada $B \in \mathcal{F}$, entonces $A \in \mathcal{F}$.*

(4) *$\mathcal{F}$ es una familia centrada con la siguiente propiedad: para todo $A \subseteq X$, se tiene que $A \in \mathcal{F}$ ó bien $X \setminus A \in \mathcal{F}$.*

Demostración.

(1)$\Rightarrow$ (2) Ya sabemos que todo filtro es siempre una familia centrada, así que sólo probaremos que $\mathcal{F}$ es maximal (en el ámbito de las familias centradas). Supongamos que $\mathcal{C}$ es una familia centrada de subconjuntos de X que contiene a $\mathcal{F}$. Por la proposición 3.51, podemos considerar un filtro $\mathcal{G}$ que contiene a $\mathcal{C}$. De esta manera, tenemos un filtro $\mathcal{G}$ tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{G}$. Como $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro, lo anterior implica que $\mathcal{F} = \mathcal{C} = \mathcal{G}$.

(2)$\Rightarrow$ (3) Sea $\mathcal{B}$ la colección de todas las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{F}$. Claramente $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$ y $\mathcal{B}$ es cerrada bajo intersecciones finitas. Por la proposición 3.48, $\mathcal{B}$ es una base de filtro. Pero toda base de filtro es una familia centrada. Entonces $\mathcal{B}$ es una familia centrada que contiene a $\mathcal{F}$. Aplicando la maximalidad de $\mathcal{F}$ tenemos que $\mathcal{F} = \mathcal{B}$. De esta manera hemos probado que $\mathcal{F}$ es una base de filtro.

Supongamos ahora que A es un subconjunto de X que tiene la siguiente propiedad: $A \cap B \neq \emptyset$ para toda $B \in \mathcal{F}$. Esta propiedad que posee A implica que $\mathcal{F} \cup \{A\}$ es una familia centrada; pero además contiene a $\mathcal{F}$. La maximalidad de $\mathcal{F}$ implica ahora que $\mathcal{F} = \mathcal{F} \cup \{A\}$. Con esto, $A \in \mathcal{F}$.

(3)$\Rightarrow$ (4) Como toda base de filtro es una familia centrada, bastará probar que para todo $A \subseteq X$, se tiene que $A \in \mathcal{F}$ o bien $X \setminus A \in \mathcal{F}$.

Consideremos entonces un subconjunto A de X. Si $A \in \mathcal{F}$ entonces no hay nada que demostrar. Supongamos entonces que $A \notin \mathcal{F}$ y probemos que $X \setminus A \in \mathcal{F}$. Para ello tomemos $B \in \mathcal{F}$ arbitrario. Note que si ocurriera que $B \cap (X \setminus A) = \emptyset$ entonces B estaría contenido en A. Pero esto implicaría que A pertenece a $\mathcal{F}$, lo cual es imposible. Por lo tanto, $B \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ para toda $B \in \mathcal{F}$. Nuestras hipótesis implican ahora que $(X \setminus A) \in \mathcal{F}$.

(4)$\Rightarrow$ (1) Definamos

$$\mathcal{B} = \{A_1 \cap \cdots \cap A_n : A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}\}.$$

Es evidente que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$. Además, como $\mathcal{B}$ es cerrada bajo intersecciones finitas y $\emptyset \notin \mathcal{B}$ (porque $\mathcal{F}$ es una familia centrada), la colección $\mathcal{B}$ es una base de filtro. Ahora probaremos que de hecho $\mathcal{B}$ es un ultrafiltro y que $\mathcal{B} = \mathcal{F}$.

Primero notemos que $\mathcal{B}$ es cerrada bajo superconjuntos. Efectivamente, supongamos que $B \in \mathcal{B}$ y que $B \subseteq A \subseteq X$. Si $A \notin \mathcal{B}$, entonces $A \notin \mathcal{F}$. De donde, tendríamos que $X \setminus A \in \mathcal{F}$. Pero esto implicaría que $(X \setminus A) \cap B \neq \emptyset$, lo cual es imposible porque $B \subseteq A$. Por lo tanto, debe ocurrir que $A \in \mathcal{B}$.

Como la familia $\mathcal{B}$ ya es cerrada bajo intersecciones finitas, podemos concluir que $\mathcal{B}$ es un filtro.

Probemos ahora que $\mathcal{B}$ es un ultrafiltro: Supongamos que $\mathcal{G}$ es un filtro en X tal que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}$. Tomemos un elemento arbitrario $A \in \mathcal{G}$. Por hipótesis, tenemos que $A \in \mathcal{F}$ o bien que $X \setminus A \in \mathcal{F}$. Note ahora que no puede ocurrir que $X \setminus A \in \mathcal{F}$, ya que de lo contrario tendríamos que $\emptyset = A \cap (X \setminus A) \in \mathcal{G}$, lo cual no es posible debido a que $\mathcal{G}$ es un filtro en X. Resulta entonces que $A \in \mathcal{F}$ y, en consecuencia, $A \in \mathcal{B}$. Por lo tanto $\mathcal{B} = \mathcal{G}$.

Para finalizar probaremos que $\mathcal{F} = \mathcal{B}$. Para ello consideremos un elemento $B \in \mathcal{B}$. Note que como $\mathcal{B}$ es una familia centrada (pues es base de filtro), no puede suceder que $X \setminus B \in \mathcal{B}$. En consecuencia, $X \setminus B \notin \mathcal{F}$. Entonces deberá ocurrir que $B \in \mathcal{F}$. Esto muestra que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$. Por lo tanto, $\mathcal{B} = \mathcal{F}$. ⊠

Para caracterizar el operador cerradura y la continuidad de funciones usando filtros, necesitamos introducir las nociones de filtro convergente y de punto de acumulación de un filtro.

3.54. Definición. Sea X un espacio topológico.

(1) *Un filtro $\mathcal{F}$ (en X) converge a un punto $x \in X$*, y x es un *punto límite de* $\mathcal{F}$, si toda vecindad de x pertenece al filtro $\mathcal{F}$. Para denotar este hecho escribiremos $\mathcal{F} \to x$.

(2) Diremos que *una base de filtro $\mathcal{B}$ converge a un punto $x \in X$*, y x es un *punto límite de* $\mathcal{B}$, si el filtro generado por ella converge a x; esto es, si $\mathcal{F}_{\mathcal{B}} \to x$.

3.55. Definición. Sea X un espacio topológico.

(1) Se dice que un punto $x \in X$ es *punto de acumulación de un filtro* $\mathcal{F}$ si $x \in \bigcap\{\mathrm{cl}_X(F) : F \in \mathcal{F}\}$.

(2) Un punto $x \in X$ es *punto de acumulación de una base de filtro* $\mathcal{B}$ si lo es del filtro $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ generado por $\mathcal{B}$.

3.56. Observación.

(1) Note que si $\mathcal{F}$ es un filtro que converge a un punto x de un espacio topológico X, entonces el punto x es punto de acumulación del filtro $\mathcal{F}$.
(2) El recíproco de la afirmación anterior no es cierto. Por ejemplo, considere en el espacio $\mathbb{R}^2$, con la topología inducida por la norma euclidiana, dos puntos diferentes $\vec{x}, \vec{y}$. Observe que el filtro $\mathcal{F}(\{\vec{x}, \vec{y}\})$ contiene tanto a $\vec{x}$ como a $\vec{y}$ como sus únicos puntos de acumulación, pero el filtro no converge a ningún punto de $\mathbb{R}^2$.

Dada una sucesión $s = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio topológico X, podemos considerar el conjunto $S_{n_0} = \{x_m : m \geqslant n_0\}$ para cada $n_0 \in \mathbb{N}$. La colección $\mathcal{S} = \{S_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base de filtro como podrá constatar el lector. El filtro generado por $\mathcal{S}$, $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$, es llamado *filtro generado por la sucesión* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3.57. Proposición. *Sea $s = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio X. Entonces, la sucesión s converge a un punto $p \in X$ (respectivamente, p es un punto de acumulación de s) si y sólo si el filtro generado por s, $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$, converge a p (respectivamente, p es un punto de acumulación de $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$)*

Demostración. Demostraremos la proposición sólo para el caso de la convergencia. La demostración de la proposición relativa a la acumulación se lleva a cabo de manera similar.

Si s converge a p, entonces para cada vecindad V de p podemos encontrar un número natural n_0 tal que $x_n \in V$ para todo $n \geqslant n_0$. Esto significa que el elemento S_{n_0} del filtro $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ está contenido en V. Es decir, $V \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}$. Pero esto significa que $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ converge a p.

Supongamos ahora que $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ converge a p. Esto quiere decir que cada vecindad de p es elemento de $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$. Ahora bien, $\mathcal{S}$ es base de $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$; por lo tanto, para cada vecindad V de p, existe un número natural n_0 tal que S_{n_0} es un subconjunto de V. Es decir, $x_n \in V$ para cada $n \geqslant n_0$. ⊠

Ahora veremos que la convergencia de filtros determina completamente la topología de cualquier espacio.

3.58. Teorema. *Sea A un subconjunto de un espacio topológico X. Un punto x pertenece a $\mathrm{cl}_X(A)$ si y sólo si existe una base de filtro $\mathcal{B}$ formada por subconjuntos de A tal que $\mathcal{B} \to x$ en X.*

Demostración. $\Rightarrow]$ Como $x \in \mathrm{cl}_X(A)$, para toda vecindad V de x se tiene que $V \cap A \neq \emptyset$. Definamos $\mathcal{B} = \{V \cap A : V \in \mathcal{V}(x)\}$. Claramente $\mathcal{B}$

está formada por subconjuntos de A. Además B es una base de filtro que converge a x. En efecto, para probar que $\mathcal{B}$ es base de filtro, simplemente note que $\mathcal{B} \neq \emptyset$, que todos los elementos de B no son vacíos, y que si $B_1 = V_1 \cap A$ y $B_2 = V_2 \cap A$ son elementos arbitrarios de $\mathcal{B}$, entonces el conjunto $B_3 = (V_1 \cap V_2) \cap A$ pertenece a $\mathcal{B}$ y además $B_3 = B_1 \cap B_2$.

Para probar que $\mathcal{B} \to x$, considere al filtro generado por $\mathcal{B}$, esto es,

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}} = \{C \subseteq X : \text{ existe un } B \in \mathcal{B} \text{ tal que } B \subseteq C\}.$$

Resulta que por la misma definición de $\mathcal{B}$ y de $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$, se tiene que $\mathcal{V}(x) \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{B}}$. Esto último garantiza que $\mathcal{F}_{\mathcal{B}} \to x$. Por ello, $\mathcal{B} \to x$.

$\Leftarrow$] Como $\mathcal{B}$ es una base de filtro que converge a x, tenemos que $\mathcal{F}_{\mathcal{B}} \to x$. Entonces $\mathcal{V}(x) \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{B}}$. De esta forma, para cada elemento $V \in \mathcal{V}(x)$, existe un elemento $C \in \mathcal{B}$ tal que $C \subseteq V$. Pero como $C \in \mathcal{B}$, $\emptyset \neq C \subseteq A$. Entonces podemos concluir que $V \cap A \neq \emptyset$ para cada $V \in \mathcal{V}(x)$. En consecuencia, $x \in \mathrm{cl}_X(A)$. ⊠

La siguiente proposición muestra cómo los filtros, y la convergencia de filtros, son una buena herramienta para determinar la continuidad de una función. Obsérvese que, dados una función $f : X \to Y$ entre conjuntos y un filtro $\mathcal{F}$ en X, podemos definir a la *imagen del filtro bajo la función* f como el conjunto $f(\mathcal{F}) = \{f(F) : F \in \mathcal{F}\}$. La imagen de un filtro puede no ser un filtro en Y. Note lo que pasa, por ejemplo, cuando f es una función constante. No obstante, el conjunto $f(\mathcal{F})$ siempre es una base de filtro, como lo puede verificar el lector.

3.59. Teorema. *Sean X y Y espacios topológicos, $f : X \to Y$ una función y $x \in X$. La función f es continua en x si y sólo si para todo filtro $\mathcal{G}$ en X que converge a x, se tiene que la base de filtro $f(\mathcal{G})$ converge a $f(x)$ en Y.*

Demostración. $\Rightarrow$] Sea $\mathcal{G}$ un filtro en X que converge a x. Para probar que $f(\mathcal{G}) \to f(x)$ en el espacio Y, debemos probar que $\mathcal{V}(f(x)) \subseteq \mathcal{F}_{f(\mathcal{G})}$. Para ello, consideremos una vecindad arbitraria W de $f(x)$ en Y. Como f es continua en x, el conjunto $f^{-1}(W)$ es una vecindad de x en X. Debido a que $\mathcal{G} \to x$, tenemos que $f^{-1}(W) \in \mathcal{G}$. Entonces $f(f^{-1}(W)) \in f(\mathcal{G})$ y $f(f^{-1}(W)) \subseteq W$. Por lo tanto, $W \in \mathcal{F}_{f(\mathcal{G})}$.

$\Leftarrow$] Supongamos que W es un abierto de Y tal que $f(x) \in W$. Como el filtro $\mathcal{V}(x)$ converge a x, tenemos que la base de filtro $f(\mathcal{V}(x))$ converge a $f(x)$. Entonces $\mathcal{V}(f(x)) \subseteq \mathcal{F}_{f(\mathcal{V}(x))}$. Como $W \in \mathcal{V}(f(x))$, existe una vecindad $V \in \mathcal{V}(x)$ tal que $f(V) \subseteq W$. ⊠

Ejercicios

3.A. Continuidad y homeomorfismos

(1) Demuestre los incisos (1) y (2) de la observación 3.2.

(2) Verique que las funciones r y s del ejemplo 3.3 inciso (2) son efectivamente funciones continuas.

(3) Verifique que la proposición 3.8 y la segunda parte de la proposición 3.19 son ciertas.

(4) Demuestre la observación 3.20.

(5) (a) Demuestre que si $f : X \to Y$ es una función continua y A es un subespacio de X, entonces $f \restriction A : A \to Y$ es también una función continua.

(b) Demuestre que si $f : X \to Y$ es una función entre espacios topológicos entonces son equivalentes:

(i) $f : X \to Y$ es continua,

(ii) Para cada $Z \subseteq Y$ con $f[X] \subseteq Z$, la función $f : X \to Z$ es continua, donde Z tiene la topología de subespacio respecto de Y.

(6) Demuestre que las funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $j : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definidas por las fórmulas: $f(x, y) = x + y$, $g(x, y) = x \cdot y$, $h(x) = -x$ y $j(x) = x^{-1}$, son funciones continuas (donde $x + y$ y $x \cdot y$ denotan la suma y el producto de los números reales x y y).

(7) Dos espacios discretos X y Y son homeomorfos si y sólo si $A(X) \cong A(Y)$ (ejercicio 1.B.(7)), si y sólo si $|X| = |Y|$. También se cumple que para espacios X y Y con la topología cofinita, las condiciones (a) $X \cong Y$ y (b) $|X| = |Y|$, son equivalentes. En este mismo espíritu, ¿qué se puede decir de $AD(X)$ y $AD(Y)$ para espacios arbitrarios X y Y (véase el ejercicio 2.B.(11)).

(8) Sea E un subconjunto de un espacio X, y sea $\chi_E : X \to \mathbb{R}$ la función característica de E, la cual está definida como

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E \end{cases}$$

Demuestre que χ_E es continua en un punto $x \in X$ si y sólo si $x \notin \text{fr}(E)$. En consecuencia χ_E es continua si y sólo si E es a la vez abierto y cerrado.

(9) Sean $f_1, \ldots, f_k$ una colección finita de funciones continuas definidas sobre un espacio X y con valores en $\mathbb{R}$. Verifique que la función que asocia a cada $x \in X$ con el valor $\text{mín}\{f_i(x) : i \in \{1, ..., k\}\}$ (resp., $\text{máx}\{f_i(x) : i \in \{1, ..., k\}\}$) es continua.

(10) Si $h : X \to Y$ es un homeomorfismo y $A \subseteq X$, entonces $h \restriction A : A \to h[A]$ es también un homeomorfismo. Cuando $h : X \to Y$ es continua y $h : X \to h[X]$ es un homeomorfismo, decimos que h es una *inmersión* y que X es *sumergible* en Y (es decir, X es esencialmente un subespacio de Y).

(11) Pruebe que cualquier intervalo euclidiano abierto no vacío (a, b) es homeomorfo a $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$. Demuestre también que para cualesquiera $s, t \in \mathbb{R}$, los subespacios $\mathbb{R} \times \{s\}$ y $\{t\} \times \mathbb{R}$ de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_e)$ son homeomorfos entre sí, y ambos son homeomorfos a la línea euclidiana $\mathbb{R}$.

(12) En el ejemplo 1.42 se definió la línea de Sorgenfrey $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}$. Compruebe que el subespacio (a, b) $(a < b)$ de $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}$ es homeomorfo a $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}$.

(13) Sea $(I^2, \mathcal{T}_{\leqslant})$ el cuadrado lexicográfico (ejercicio 1.G.(6)). Pruebe que el subespacio $(0, 1) \times \{0\}$ es homeomorfo a $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}$. Compruebe también que el subespacio $\{t\} \times (0, 1)$ (resp., $\{t\} \times [0, 1]$) es homeomorfo al espacio euclidiano $\mathbb{R}$ (resp., al intervalo euclidiano $[0, 1]$) para cualquier $t \in [0, 1]$.

(14) Una colección $\mathcal{C}$ de subconjuntos de un conjunto X es una *cubierta de* X si $X = \bigcup \mathcal{C}$. Por *cubierta abierta* de un espacio topológico X entenderemos una cubierta de X cuyos elementos son subconjuntos abiertos de X. Si los elementos de $\mathcal{C}$ son subconjuntos cerrados, entonces decimos que $\mathcal{C}$ es una *cubierta cerrada de* X.

Sean X y Y espacios topológicos y sea $f : X \to Y$ una función. Sea $\mathcal{C}$ una cubierta de X. Justifique las siguientes proposiciones:

(a) Si $\mathcal{C}$ es finita y cerrada, y $f \restriction C : C \to f[C]$ es continua para cada $C \in \mathcal{C}$, entonces f es continua.

(b) Si $\mathcal{C}$ es abierta, y $f \restriction C : C \to f[C]$ es continua para cada $C \in \mathcal{C}$, entonces f es continua.

(15) (*Extensiones y retractos*) Uno de los problemas fundamentales en topología es saber cuándo una función f definida sobre un subespacio Z de un espacio X y con valores en un espacio Y puede ser extendida continuamente a todo el espacio X; es decir, cuándo podemos encontrar $g : X \to Y$ continua tal que $g \restriction Z = f$. Naturalmente, si f es una función constante de valor c (donde $c \in Y$), podemos definir g de manera muy simple: g será la función constante c. Note que el problema también puede expresar en la siguiente forma:

¿Bajo qué condiciones en Z, cualquier función continua $f : Z \to Y$ puede ser extendida a una función continua $g : X \to Y$ cualquiera que sea el espacio Y?

(a) Demuestre que esto es posible cuando, y sólo cuando, existe $r : X \to Z$ continua tal que $r(z) = z$ para cualquier $z \in Z$. Si esto sucede, decimos que Z es un *retracto* de X y que la función r es una *retracción* de X en Z.

(b) Pruebe que la función $r : \mathbb{R} \to [0,1]$ definida por

$$r(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

es una retracción de la línea euclidiana $\mathbb{R}$ sobre el intervalo euclidiano $[0,1]$.

3.B. Espacios separables, primero numerables y segundo numerables

(1) Consideremos al conjunto X equipado con la topología cofinita $\mathcal{T}_c$. Compruebe que $(X, \mathcal{T}_c)$ es un espacio separable. Además, $(X, \mathcal{T}_c)$ es primero numerable si y sólo si $(X, \mathcal{T}_c)$ es segundo numerable, si y sólo si $|X| \leqslant \aleph_0$.

(2) Sea x un punto en un espacio $(X, \mathcal{T})$. Supongamos que x posee una base local de vecindades numerable. Verifique que es posible construir una base local de vecindades $\{B_1, B_2, ..., B_n, ...\}$ de x tal que $B_{n+1} \subseteq B_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(3) Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y sea Y un subconjunto de X. El espacio X_Y, definido en el ejemplo 1.12, es primero numerable si y sólo si $(X, \mathcal{T})$ es primero numerable. Además, si $(X, \mathcal{T})$ es segundo numerable (resp., separable) y $|Y| \leqslant \aleph_0$, entonces X_Y es segundo numerable (resp., separable). Demuestre que la línea de Michael $\mathbb{R}_{\mathbb{P}}$ es un espacio primero numerable pero no es separable. En general, si d es una métrica en X, y consideramos en X la topología definida por d, entonces X_Y es primero numerable cualquiera que sea Y. Dé un ejemplo de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ y de un subconjunto Y tales que X_Y es segundo numerable y $(X, \mathcal{T})$ no es separable.

(4) Sea $(x, 0)$ un elemento de la tapa inferior del cuadrado lexicográfico $(I^2, \mathcal{T}_{\leqslant})$ con $x > 0$. Muestre que la colección de intervalos de la forma $((x - \frac{1}{n}, 0), (x, \frac{1}{n}))$ con n recorriendo los números naturales mayores al primer natural n_0 que satisface $x - \frac{1}{n_0} \in [0,1]$, es una base local numerable de $(x, 0)$. De manera semejante es posible demostrar que cada punto $(x, 1)$ tiene una base local numerable. Concluya que $(I^2, \mathcal{T}_{\leqslant})$ es primero numerable.

3.C. Subespacios e imágenes continuas de espacios segundo numerables, separables y primero numerables

(1) Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio segundo numerable (resp., primero numerable). Sea $f : X \to Y$ una función continua, cerrada y sobre. ¿Es entonces Y un espacio segundo numerable (resp., primero numerable)? Será más fácil contestar esta pregunta cuando hayamos estudiado el capítulo 4. Véase en particular el ejercicio 4.E.(7).

(2) Un espacio X es *hereditariamente separable* si cada subespacio de X es separable. Demuestre que cualquier espacio segundo numerable es hereditariamente separable.

(3) Sea d una métrica en X. Pruebe que si $(X, \mathcal{T}_d)$ tiene la propiedad de que para toda colección $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}_d$ tal que $X = \bigcup \mathcal{U}$, existe una subcolección numerable $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$ tal que $X = \bigcup \mathcal{V}$, entonces $(X, \mathcal{T}_d)$ es segundo numerable.

(Sugerencia: Para cada número natural n, considere una subcubierta numerable $\mathcal{C}_n$ de la colección de todas las bolas abiertas en X de radio $\frac{1}{n}$. Compruebe que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_n$ es una base numerable de $(X, \mathcal{T}_d)$).

(4) Deduzca de 3.11 que cualquier polinomio $p(x)$ (ver ejercicio A.V.(4)) definido sobre $I = [0, 1]$ es una función continua; es decir, $p(x) \in C(I)$.

   (a) Consideremos en $C(I)$ la topología $\mathcal{T}_\infty$. Demuestre que si $p(x)$ es un polinomio y $\epsilon > 0$, entonces existe un polinomio con coeficientes racionales contenido en $B(p(x), \epsilon)$.

   (b) El Teorema de Aproximación de Stone-Weierstrass (véase [12], pags 177-187) asegura que el conjunto de polinomios definidos en I es un conjunto denso en $C(I)$. Concluya, usando el resultado en (a), que $(C(I), \mathcal{T}_\infty)$ es separable.

(5) Pruebe que si X tiene cardinalidad $> \aleph_0$ y $p \notin X$, entonces $(X \cup \{p\}, \mathcal{T}_{p,\aleph_1})$ (véase el ejercicio 1.B.(6)) es de Lindelöf pero no es segundo numerable.

3.D. Convergencia de sucesiones

(1) Sea X un conjunto, y sean $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ dos topologías en X tales que $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Observe que si una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un punto $x \in X$ en $(X, \mathcal{T}_2)$, entonces $x_n \to x$ en $(X, \mathcal{T}_1)$.

(2) Sea $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_1)$ y $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_2)$ los espacios definidos en el ejercicio 1.C.3. Determine, en cada uno de estos espacios, cuándo una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{N}$ converge a un punto $x \in \mathbb{N}$. Haga lo propio considerando el conjunto $\mathbb{R}$ con la topología conumerable.

(3) Demuestre que en un espacio métrico (X, d) una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $x \in X$ si y sólo si $d(x_n, x) \to 0$.

(4) Caracterice a las sucesiones convergentes en la línea de Sorgenfrey y en la línea de Michael.

(5) Consideremos el espacio $C(I)$ con su topología $\mathcal{T}_p$ (véase el ejemplo 3.36). Pruebe que una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos en $C(I)$ converge a $f \in C(I)$ (es decir $f_n \to f_0$) si y sólo si, para cada $x \in I$, la sucesión de números reales $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$ en I.

(6) Sea $\mathcal{T}_2$ la topología definida en $C(I)$ por la métrica d_2 determinada en el ejercicio 1.A.(6). Para cada número natural n, definimos la función $g_n \in C(I)$ como

$$g_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}.$$

Demuestre que en $(C(I), \mathcal{T}_2)$, la sucesión $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a la función constante 0. Y verifique, en contraste, que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a ninguna función en $(C(I), \mathcal{T}_\infty)$ (ejemplo 3.36).

(7) (*Espacios de Fréchet-Uryshon*) Un espacio X es de *Fréchet-Urysohn* si para cada $A \subseteq X$ y cada $x \in \text{cl}(A)$, existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en A que converge a x. Corrobore que cualquier espacio primero numerable es un espacio de Fréchet-Uryshon, y que esta propiedad es hereditaria.

(8) (*Espacios secuenciales*)
   (a) Se dice que un espacio X es *secuencial* si para cada $A \subseteq X$, A no es cerrado si y sólo si existe $x \notin A$ y una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en A que converge a x. Demuestre que cualquier subespacio cerrado de un secuencial es secuencial y que cualquier espacio de Fréchet-Uryshon es secuencial.
   (b) Verifique que las proposiciones 3.41 y 3.42 siguen siendo válidas si cambiamos en ellas cada “primero numerable” por “secuencial”.

3.E. Filtros y ultrafiltros

(1) Sea X un conjunto no vacío y sea $\mathcal{C}$ una familia no vacía de subconjuntos de X que tiene la propiedad de la intersección finita. Demuestre que existe un filtro $\mathcal{F}$ en X que contiene a $\mathcal{C}$. (Sugerencia: Considere la colección $\mathcal{B} = \{A_1 \cap \cdots \cap A_n : A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{C},\, n \in \mathbb{N}\}$ y demuestre que es una base de filtro.)

(2) Sea $f : X \to Y$ una función suprayectiva. Demuestre que si $\mathcal{F}$ es un filtro en Y, entonces la colección $f^{-1}[\mathcal{F}] = \{f^{-1}[F] : F \in \mathcal{F}\}$ es una base de filtro en X. Pruebe con un ejemplo que, incluso si $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro, el filtro

$$\mathcal{F}_{f^{-1}[\mathcal{F}]} = \{W \subseteq X : \text{ existe } A \in f^{-1}[\mathcal{F}] \text{ tal que } A \subseteq W\}$$

no necesariamente es un ultrafiltro, es decir, no necesariamente es un filtro maximal.

Ejercicios adicionales del capítulo 3

3.F. Funciones Cardinales Topológicas

(1) (*El peso de un espacio topológico*) Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, podemos fijarnos en la colección $\mathfrak{B}$ de todas las posibles bases de $\mathcal{T}$. Esta colección es un subconjunto de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$. El peso de X, que se denota como $w(X)$, es el número cardinal $\text{mín}\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \in \mathfrak{B}\} + \aleph_0$. (Observe que esto tiene sentido pues cualquier conjunto de números cardinales considerados con su orden definido en A.26, constituye un conjunto bien ordenado.) Resulta entonces que un espacio X es segundo numerable si y sólo si $w(X) = \aleph_0$.

(a) Determine el peso de los espacios $(X, \mathcal{T}_\kappa)$ y $(X, \mathcal{T}_{p,\kappa})$, definidos en los ejercicios 1.B.(5) y 1.B.(6), en términos del número cardinal κ y de $|X|$.

(b) Observe que la línea de Sorgenfrey es un espacio primero numerable, y verifique que su peso es igual a $\mathfrak{c}$.
(Sugerencia: Considere una base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{L}_\mathcal{S}$. Para cada $x \in \mathbb{R}$ debe haber un $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subseteq [x, x+1)$. Demuestre que la aplicación $x \mapsto B_x$ es inyectiva.)

(c) Pruebe que cada base $\mathcal{B}$ de un espacio X contiene una subcolección $\mathcal{A}$ que aún es base de X y tal que $|\mathcal{A}| \leqslant w(X)$.

(2) (*La celularidad de un espacio topológico*) Una familia $\mathcal{C}$ de subconjuntos abiertos no vacíos de un espacio topológico X es *celular* si cada dos elementos diferentes A y B de $\mathcal{C}$ tienen intersección vacía. La *celularidad o número de Souslin de* X, $c(X)$, es igual a

$$\sup\{|\mathcal{C}| : \mathcal{C} \text{ es una familia celular }\} + \aleph_0$$

(a) Pruebe que la celularidad de un conjunto separable es igual a $\aleph_0$.

(b) Además $c(X) \leqslant w(X)$ para cualquier espacio X.

(c) Muestre que la celularidad del cuadrado lexicográfico es igual a $\mathfrak{c}$
(Sugerencia: Si $\mathcal{C}$ fuera una familia celular en $(I^2, \mathcal{T}_\leqslant)$ de cardinalidad $> \mathfrak{c}$, entonces para alguna subcolección $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ de cardinalidad $> \mathfrak{c}$, existe algún $x \in [0,1]$ tal que $C \cap I_x \neq \emptyset$ para cualquier elemento $C \in \mathcal{C}'$, en donde $I_x = \{(x,t) : t \in [0,1]\}$.)

(d) Finalmente, pruebe que el peso de $(I^2, \mathcal{T}_{\leqslant})$ es $\mathfrak{c}$.

(3) (*La densidad de un espacio topológico*) La *densidad* de un espacio $(X, \mathcal{T})$ es el número cardinal

$$d(X) = \text{ mín } \{|D| : D \text{ es un subconjunto denso de } X\} + \aleph_0.$$

Tenemos entonces que un espacio X es separable si y sólo si $d(X) = \aleph_0$. Verifique la veracidad de las siguientes afirmaciones:

(a) Para cualquier espacio X, $c(X) \leqslant d(X) \leqslant w(X)$.

(b) Si X tiene una topología generada por una métrica, entonces $d(X) = w(X)$.

(c) Para la línea de Sorgenfrey $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}$ se cumple $d(\mathcal{L}_{\mathcal{S}}) < w(\mathcal{L}_{\mathcal{S}})$.

(d) Calcule la celularidad, densidad y peso de un espacio del tipo X_Y (ver ejemplo 1.12) en términos de $|Y|$ y de la celularidad, densidad y peso de X, respectivamente.

(e) Calcule la celularidad, densidad y peso del espacio definido en el ejemplo 1.10.

(f) Si $f : X \to Y$ es una función continua y suprayectiva, entonces $d(Y) \leqslant d(X)$.

(4) (*El carácter de un espacio topológico*) Para un espacio X y un punto $x \in X$, al número

$$\min \{|\mathcal{B}(x)| : \mathcal{B}(x) \text{ es una base local de } x \text{ en } X\} + \aleph_0$$

le llamamos *carácter de x en X*, y lo denotamos por $\chi(x, X)$.

Ahora definimos el *carácter de X* como

$$\chi(X) = \sup \{\chi(x, X) : x \in X\}.$$

Pruebe que:

(a) Para cada X, $\chi(X) \leqslant w(X)$.

(b) El espacio X es primero numerable si y sólo si $\chi(X) = \aleph_0$.

(c) Determine el carácter del los espacios $(X, \mathcal{T}_\kappa)$ y $(X, \mathcal{T}_{p,\kappa})$, definidos en los ejercicios 1.B.(5) y 1.B.(6), respectivamente, en términos del número cardinal κ y de $|X|$.

(d) Calcule el carácter de un espacio del tipo X_Y (ver ejemplo 1.12) en términos del carácter de X.

(5) (*Funciones cardinales topológicas*) Una función ϕ definida sobre la clase T de los espacios topológicos y con valores en la clase NC de los números cardinales, es una *función cardinal topológica* si para cada dos espacios homeomorfos X y Y, se cumple $\phi(X) = \phi(Y)$. Compruebe que el peso, la celularidad, la densidad y el carácter son funciones de este tipo.

3.G. Espacios topológicos linealmente ordenados

(1) Supongamos que $(X, \leqslant)$ es un conjunto linealmente ordenado. Sea $\mathcal{T}_{\leqslant}$ la topología en X generada por el orden $\leqslant$ (ejemplo 1.38). Demuestre que si $(X, \mathcal{T}_{\leqslant})$ es secuencial, entonces es primero numerable.
(2) Demuestre que para cada número ordinal $\alpha < \omega_1$, $|\alpha| = |[0, \alpha)| \leqslant \aleph_0$. En cambio, $|[0, \omega_1)| = \aleph_1 > \aleph_0$. Compruebe también que tanto el conjunto S de ordinales sucesores en $[0, \omega_1)$ como el conjunto de ordinales límites L, tienen, cada uno de ellos, cardinalidad $\aleph_1$.
(3) Usando el resultado anterior compruebe que el espacio topológico de ordinales numerables $[0, \omega_1)$ es un espacio primero numerable y no es separable. Además muestre una cubierta abierta $\mathcal{C}$ de $[0, \omega_1)$ tal que ninguna subcolección numerable de $\mathcal{C}$ sea cubierta del espacio.
(4) Pruebe que $[0, \omega]$ es homeomorfo al subespacio $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{R}$, y que $[0, \omega^2]$ es homeomorfo a
$$\{0\} \cup \{\tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{m} : n \in \mathbb{N}, m \geqslant n + 1\} \subseteq \mathbb{R}.$$
(5) Justifique la afirmación: *para cada* $\alpha < \omega_1$, $[0, \alpha)$ *es un espacio segundo numerable*.
(6) Demuestre que $S = \{\lambda \leqslant \omega_1 : \lambda \text{ es un ordinal sucesor}\}$ con la topología heredada por $[0, \omega_1)$ es un espacio discreto.
(7) Podemos considerar a S con el orden $\preceq$ heredado del orden $\leqslant_o$ en $[0, \omega_1)$. Sea $\mathcal{T}_{\preceq}$ la topología en S generada por el orden $\preceq$. Muestre que $(S, \mathcal{T}_{\preceq})$ es homeomorfo a $[0, \omega_1)$.
(8) Sea un orden líneal $\leqslant$ en un conjunto X, sea $\mathcal{T}_{\leqslant}$ la topología en X definida por $\leqslant$. Si E es un subconjunto de X y $\mathcal{T}_o$ es la topología en E definida por el orden $\leqslant$ restrigido a E, y $\mathcal{T}_E$ es la topología en E heredada de $\mathcal{T}_{\leqslant}$, entonces $\mathcal{T}_o \subseteq \mathcal{T}_E$, y la contensión puede ser estricta, como se aprecia en los incisos (6) y (7).

3.H. Redes

Una pareja $(\Lambda, \leqslant)$, en donde Λ es un conjunto y $\leqslant$ es una relación en Λ, es un *conjunto dirigido* si se satisfacen las siguientes condiciones:

(a) $\lambda \leqslant \lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$,
(b) si $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ y $\lambda_2 \leqslant \lambda_3$, entonces $\lambda_1 \leqslant \lambda_3$, y
(c) para cada λ_1 y λ_2 en Λ, existe $\lambda_3 \in \Lambda$ tal que $\lambda_1 \leqslant \lambda_3$ y $\lambda_2 \leqslant \lambda_3$.

(1) Observe que el conjunto de números naturales $\mathbb{N}$ con su orden usual es una dirección, y que una dirección no satisface necesariamente la antisimetría.
(2) Observe también que el conjunto de vecindades $\mathcal{V}_x$ de un punto en un espacio topológico X es un conjunto dirigido cuando se define “$V \leqslant U$ si y sólo si $U \subseteq V$”.

Una *red* en un conjunto X es una función $r : \Lambda \to X$, en donde Λ es un conjunto dirigido. Al punto $r(\lambda)$ se le denota frecuentemente como x_λ, y la expresión "$r : \Lambda \to X$ es una red" se escribe también como "$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es una red".

(3) Observe, a partir de las definiciones, que cada sucesión en un conjunto X es una red en X.

(4) Si para cada vecindad V de un punto x en un espacio X elegimos un punto x_V, entonces $(x_V)_{V\in\mathcal{V}_x}$ es una red en X.

Decimos que una red $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ en un espacio topológico X *converge a un punto* $x \in X$, lo cual representamos escribiendo $x_\lambda \to x$, si para cada vecindad V de x existe un $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x_\lambda \in V$ para todo $\lambda \geqslant \lambda_0$.

(5) Verifique que si para cada vecindad V de un punto x en un espacio X se toma $x_V \in V$, entonces la red $(x_V)_{V\in\mathcal{V}_x}$ converge al punto x.

(6) Demuestre que para cualquier subconjunto A de un espacio topológico X se cumple: $x \in cl(A)$ si y sólo si existe una red $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ en A que converge a x.

(7) Pruebe la siguiente proposición: Sea $f : X \to Y$ una función. Entonces f es continua en un punto $z \in X$ si y sólo si cada vez que una red $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge a z en X, entonces la red $(f(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ converge a $f(z)$ en Y.

3.I. Espacios Metrizables

Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es *metrizable* si podemos definir una métrica d en X tal que $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$. Evidentemente, cualquier espacio métrico considerado con su topología generada por d, es un espacio metrizable. Además, todo espacio metrizable es primero numerable (compruébelo).

(1) Observe que los espacios euclidianos y los espacios discretos son espacios metrizables.

(2) Compruebe que ni la línea de Sorgenfrey, ni la línea de Michael, ni $[0, \omega_1)$ son espacios metrizables.

(3) Concluya que para cualquier espacio metrizable X se cumple: $c(X) = w(X)$.

(4) ¿Es el cuadrado lexicográfico un espacio metrizable?

(5) Demuestre que la metrizabilidad no se conserva bajo funciones continuas.

Capítulo 4

Construcción de espacios topológicos a partir de espacios dados

Cada vez que tenemos dos conjuntos X y Y y una propiedad de conjuntos $P(x)$, podemos considerar los nuevos objetos $E = \{x \in X : P(x)\}$, $X \cup Y = \{x : x \in X \text{ ó } x \in Y\}$ y $X \times Y = \{(a, b) : a \in X \text{ y } b \in Y\}$ que, gracias a los axiomas de Zermelo-Fraenkel, son también conjuntos. Como los espacios topológicos son parejas ordenadas $(X, \mathcal{T})$ constituidas por un conjunto X y una adecuada subcolección $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(X)$, cada vez que tenemos dos espacios topológicos $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{S})$ es muy natural considerar a los conjuntos E, $X \cup Y$ y $X \times Y$, e intentar definir en ellos topologías que se relacionen convenientemente con $\mathcal{T}$ y $\mathcal{S}$. En el capítulo 1 ya se mostró un ejemplo de esta idea cuando se introdujo el concepto de subespacio topológico.

La finalidad de este capítulo es exhibir algunos de los métodos clásicos para la obtención de nuevos espacios topológicos a partir de espacios conocidos, y analizar construcciones particulares que merecen especial atención.

1. Topologías débiles inducidas por funciones

Observe que si $f : X \to Y$ es una función donde $(Y, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, siempre es posible considerar una topología en X que haga de f una función continua. Simplemente tomemos a la más fina de todas las topologías para X: la topología discreta $\mathcal{P}(X)$. Pero, en general, es posible definir más de una topología en X que transforme a f en función continua. De entre estas topologías nos interesan las más pequeñas.

Note que para cada función f definida en un conjunto X y con valores en un conjunto Y, y para cada familia $\{A_j : j \in J\}$ de subconjuntos de Y, se cumple

(i) $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$ y $f^{-1}[Y] = X$,
(ii) $f^{-1}[\bigcup_{j\in J} A_j] = \bigcup_{j\in J} f^{-1}[A_j]$, y
(iii) $f^{-1}[\bigcap_{j\in J} A_j] = \bigcap_{j\in J} f^{-1}[A_j]$.

Estas igualdades nos permiten definir una topología en un conjunto X cada vez que tengamos una función f definida en X y con valores en un espacio topológico $(Y, \mathcal{T})$.

4.1. Proposición. *El conjunto* ${}_f\mathcal{T} = \{f^{-1}[A] : A \in \mathcal{T}\}$ *es una topología en* X.

A la topología ${}_f\mathcal{T}$ le llamamos *topología inicial en X definida por f y $(Y, \mathcal{T})$* (o *topología débil en X inducida por f*).

Como los elementos de ${}_f\mathcal{T}$ son precisamente las imágenes inversas de los subconjuntos abiertos de Y, resulta claro que si dotamos a X con la topología ${}_f\mathcal{T}$, la función f es continua. Además, ${}_f\mathcal{T}$ tiene otra propiedad importante: supongamos que $\mathcal{T}'$ es una topología en X tal que $f : (X, \mathcal{T}') \to (Y, \mathcal{T})$ es continua; esto significa que para cada $A \in \mathcal{T}$, $f^{-1}[A] \in \mathcal{T}'$. Es decir, ${}_f\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$. De esta forma hemos demostrado el siguiente resultado.

4.2. Proposición. *La topología* ${}_f\mathcal{T}$ *es la menor (o más débil) de las topologías para* X *que hacen continua a la función* f.

Otra característica fundamental de la topología ${}_f\mathcal{T}$ es la siguiente:

4.3. Proposición.

(1) *Para cualquier espacio topológico* Z, *una función* $g : Z \to (X, {}_f\mathcal{T})$ *es continua si y sólo si* $f \circ g$ *es continua.*

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & (X, {}_f\mathcal{T}) \arrow[d, "f"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

(2) *Además* ${}_f\mathcal{T}$ *es la única topología en* X *que satisface (1).*

Demostración. (1) Naturalmente, si g es continua, entonces, por la proposición 3.9, $f \circ g$ también. Supongamos ahora que $f \circ g$ es continua, y sea $A \in {}_f\mathcal{T}$. Esto significa que existe $B \in \mathcal{T}$ tal que $A = f^{-1}[B]$. Por lo tanto, $g^{-1}[A] = g^{-1}[f^{-1}[B]] = (f \circ g)^{-1}[B]$. Como $f \circ g$ es continua y B es un subconjunto abierto de Y, entonces $g^{-1}[A]$ es abierto en Z. Con lo cual queda demostrado que g es continua.

(2) Supongamos ahora que $\mathcal{T}'$ es una topología en X que satisface la misma condición que ${}_f\mathcal{T}$ en (1). La función identidad $\text{id}_X : (X, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T}')$ es continua, por lo cual $f = f \circ \text{id} : (X, \mathcal{T}') \to Y$ es continua. Aplicamos ahora la proposición 4.2 y obtenemos ${}_f\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$.

Ahora consideremos la función $id : (X,{}_f \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}')$. La composición $f \circ \text{id} : (X,{}_f \mathcal{T}) \to Y$ es continua. Como estamos suponiendo que $\mathcal{T}'$ satisface (1), entonces $\text{id} : (X,{}_f \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}')$ es continua. Pero esto significa que $\mathcal{T}' \subseteq {}_f\mathcal{T}$. ⊠

4.4. Ejemplos.

(1) Consideremos un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, y sea E un subconjunto de X. Sea $j : E \hookrightarrow X$ la función inclusión ($j(x) = x\ \forall\ x \in E$). Por lo ya dicho, la topología ${}_j\mathcal{T}$ es igual a $\{j^{-1}[A] : A \in \mathcal{T}\} = \{E \cap A : A \in \mathcal{T}\}$; es decir, ${}_j\mathcal{T}$ coincide con la topología $\mathcal{T}_E$ que transforma a E en subespacio de $(X, \mathcal{T})$ y que ya revisamos en la sección 6.

(2) Sea E un subconjunto de un conjunto X, y sea $\mathbb{R}$ la línea real con la topología usual. Consideremos la función característica de E, $\chi_E : X \to \mathbb{R}$, dada por

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin E \\ 1 & \text{si } x \in E \end{cases}$$

La topología inducida en X por χ_E es el conjunto de imágenes inversas bajo χ_E de abiertos en $\mathbb{R}$, de tal manera que

$${}_{\chi_E}\mathcal{T} = \{\emptyset, X, E, X \setminus E\}$$

ya que si A es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$, entonces

$$(\chi_E)^{-1}[A] = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \{0,1\} \cap A = \emptyset \\ X & \text{si } \{0,1\} \subseteq A \\ X \setminus E & \text{si } 0 \in A \text{ y } 1 \notin A \\ E & \text{si } 0 \notin A \text{ y } 1 \in A \end{cases}$$

Generalicemos ahora lo dicho hasta aquí de la siguiente manera: Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_j) : j \in J\}$ una familia de espacios topológicos, y sea

$$\mathcal{F} = \{f_j : X \to X_j : j \in J\}$$

una familia de funciones definidas sobre un conjunto X. Denotemos por ${}_\mathcal{F}\mathcal{T}$ (o ${}_f\mathcal{T}$ si f es el único elemento de $\mathcal{F}$) a la menor de las topologías en X que convierten a cada función $f \in \mathcal{F}$ en una función continua. Tenemos entonces:

4.5. Teorema.

(1) *La familia* $\mathcal{S} = \{f_j^{-1}[A] : j \in J \text{ y } A \in \mathcal{T}_j\}$ *es una subbase para la topología* ${}_{\mathcal{F}}\mathcal{T}$.

(2) ${}_{\mathcal{F}}\mathcal{T}$ *es la única topología que satisface la siguiente proposición: para cualquier espacio topológico* Z *y cualquier función* $g : Z \to (X, {}_{\mathcal{F}}\mathcal{T})$, g *es continua si y sólo si* $f_j \circ g$ *es continua para cada* $j \in J$.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "g \circ f_j"'] & (X, {}_{\mathcal{F}}\mathcal{T}) \arrow[d, "f_j"] \\
 & Y
\end{tikzcd}$$

Demostración. (1) Consideremos la topología $\mathcal{T}$ en X generada por $\mathcal{S}$ como subbase. (Note que la colección $\mathcal{S}$ satisface todos los requerimientos para generar una topología como una subbase ya que $\mathcal{S} \neq \emptyset$ y $\bigcup \mathcal{S} = X$). Vamos a demostrar que $\mathcal{T}$ coincide con ${}_{\mathcal{F}}\mathcal{T}$. En otras palabras, vamos a verificar que $\mathcal{T}$ es la menor topología que hace a cada f_j continua ($j \in J$).

Como $\mathcal{S}$ es una subbase de $\mathcal{T}$, entonces, una base para $\mathcal{T}$ es

$$\mathcal{B} = \{f_{j_1}^{-1}[A_1] \cap \cdots \cap f_{j_n}^{-1}[A_n] : n \in \mathbb{N},\ j_i \in J \ \text{ y } A_i \in \mathcal{T}_{j_i}\ \forall\ 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

Por lo tanto, $\mathcal{T} = \{U \subseteq X :\ \exists\ \mathcal{U} \subseteq \mathcal{B} \text{ tal que } U = \bigcup \mathcal{U}\}$.

Ahora bien, cada elemento de $\mathcal{S}$ pertenece a $\mathcal{T}$; así, para cada $j \in J$ y cada $A \in \mathcal{T}_j$, $f_j^{-1}[A] \in \mathcal{T}$; lo cual significa que, para cada $j \in J$, $f_j : (X, \mathcal{T}) \to (X_j, \mathcal{T}_j)$ es continua.

Por otro lado, si $\mathcal{T}'$ es una topología en X tal que $f_j : (X, \mathcal{T}') \to X_j$ es continua para cada $j \in J$, entonces, $f_j^{-1}[A] \in \mathcal{T}'$ para cada $j \in J$ y cada $A \in \mathcal{T}_j$. Por lo tanto, como estamos suponiendo que $\mathcal{T}'$ es una topología, tenemos que para cualquier colección finita $j_1, ..., j_n$ de elementos en J, y cada elección $A_i \in \mathcal{T}_{j_i}$ ($1 \leqslant i \leqslant n$), $f_{j_1}^{-1}[A_1] \cap \cdots \cap f_{j_n}^{-1}[A_n] \in \mathcal{T}'$; es decir, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$.

(2) La demostración de la proposición de este inciso se puede hacer de manera análoga a la demostración de la proposición 4.3.(2). ⊠

4.6. Observación. Es fácil verificar que si para cada $j \in J$, $\mathcal{B}_j$ es una base para la topología $\mathcal{T}_j$, entonces $\mathcal{D} = \{f_j^{-1}[A] : j \in J, A \in \mathcal{B}_j\}$ es una subbase de ${}_{\mathcal{F}}\mathcal{T}$.

4.7. Definición. Sean $\mathcal{C} = \{(X_j, \mathcal{T}_j) : j \in J\}$ una colección de espacios topológicos, X un conjunto y $\mathcal{F} = \{f_j : X \to X_j\}$ una colección de funciones. A la topología ${}_{\mathcal{F}}\mathcal{T}$ en X le llamamos *topología débil o inicial inducida por* $\mathcal{F}$ *(y* $\mathcal{C}$*)*.

4.8. Ejemplo. Tomemos para un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ la colección $C(X)$ de todas las funciones continuas definidas en X y con valores en $\mathbb{R}$. Para cada $D \subseteq C(X)$, la topología ${}_D\mathcal{T}$ está contenida en $\mathcal{T}$ pues cada $f \in D$ es continua en $(X, \mathcal{T})$, por lo cual $f^{-1}[A] \in \mathcal{T}$ para cualquier subconjunto abierto A de $\mathbb{R}$. En particular ${}_{C(X)}\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}$. Es claro que si $D \subseteq E \subseteq C(X)$, entonces ${}_D\mathcal{T} \subseteq {}_E\mathcal{T}$. Además la subcolección $C^*(X) = \{f \in C(X) : \exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $f[X] \subseteq (-n, n)\}$ de $C(X)$ satisface ${}_{C^*(X)}\mathcal{T} = {}_{C(X)}\mathcal{T}$. En efecto, como ya mencionamos, se cumple ${}_{C^*(X)}\mathcal{T} \subseteq {}_{C(X)}\mathcal{T}$. Ahora bien, sean $n \in \mathbb{N}$, $f_1, \cdots, f_n \in C(X)$ y $A_1 \cdots, A_n$ abiertos en $\mathbb{R}$. Sea $x \in f_1^{-1}[A_1] \cap \cdots \cap f_n^{-1}[A_n]$. Existe $\epsilon \in (0, 1)$ tal que $B(f_i(x), \epsilon) \subseteq A_i$ para toda $i \in \{1, \cdots, n\}$. Para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, definimos $\xi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$\xi_i(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in (f_i(x) - 1, f_i(x) + 1) \\ f_i(x) - 1 & \text{si } t \leqslant f_i(x) - 1 \\ f_i(x) + 1 & \text{si } t \geqslant f_i(x) + 1 \end{cases}$$

Sea $g_i = \xi_i \circ f_i : X \to \mathbb{R}$. Ahora resulta que cada $g_i \in C^*(X)$ y $x \in \bigcap_{i \leqslant n} g_i^{-1}[B(f_i(x), \epsilon)] \subseteq \bigcap_{i \leqslant n} f_i^{-1}[A_i]$. Esto significa que ${}_{C^*(X)}\mathcal{T} = {}_{C(X)}\mathcal{T}$.

2. Producto de dos espacios topológicos

Para cada pareja de conjuntos X y Y podemos considerar al conjunto $X \times Y$. En el caso en que tanto en X como en Y estén definidas estructuras topológicas, es natural intentar construir alguna topología en $X \times Y$ que se encuentre convenientemente relacionada con las topologías de cada factor. Un modo natural de hacer esto es usando las técnicas de la sección anterior ya que las *proyecciones* $\pi_X : X \times Y \to X$ y $\pi_Y : X \times Y \to Y$ ($\pi_X(x, y) = x$ y $\pi_Y(x, y) = y$ para cada $(x, y) \in X \times Y$)

son funciones que relacionan naturalmente a $X \times Y$ con los espacios topológicos X y Y.

4.9. Definición. Dados dos espacios topológicos $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{S})$, llamaremos *topología producto* $\mathcal{P}$, *o topología de Tychonoff, en* $X \times Y$, a la topología ${}_{\{\pi_X, \pi_Y\}}\mathcal{T}$; es decir, $\mathcal{P}$ es la menor de las topologías en $X \times Y$ que convierte a π_X y a π_Y en funciones continuas.

4.10. Observaciones.

(1) Observe que si alguno de los espacios X ó Y es vacío, entonces $X \times Y$ es el vacío y $\mathcal{P} = \{\emptyset\}$.

(2) De lo expresado en la sección anterior, resulta que si $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{T}$ y si $\mathcal{C}$ es una base de $\mathcal{S}$, entonces $\{\pi_X^{-1}[B] \cap \pi_Y^{-1}[C] : B \in \mathcal{B} \text{ y } C \in \mathcal{C}\}$ es una base para $\mathcal{P}$. Ahora bien, $\pi_X^{-1}[B] \cap \pi_Y^{-1}[C] = B \times C$. Concluimos así que la colección $\{B \times C : B \in \mathcal{B} \text{ y } C \in \mathcal{C}\}$ es una base para $\mathcal{P}$. Es decir, podemos describir una base para la topología en $X \times Y$ en forma simple lo cual nos facilita el trabajo cuando tratamos con productos topológicos. En los ejemplos 4.11 puede apreciarse esto de manera más concreta.

Una vez definida la topología producto de dos espacios topológicos, podemos definir la topología producto de una colección finita de espacios topológicos $(X_1, \mathcal{T}_1), (X_2, \mathcal{T}_2), \cdots, (X_k, \mathcal{T}_k)$ de manera inductiva. Por ejemplo, si tenemos tres espacios topológicos $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2)$, $(X_3, \mathcal{T}_3)$, entonces la topología producto en $X_1 \times X_2 \times X_3$ es la topología producto en $(X_1 \times X_2) \times X_3$. No es difícil verificar que, definida de este modo, la topología producto en $X_1 \times \cdots \times X_k$ es igual a la topología débil ${}_{\{\pi_i : 1 \leqslant i \leqslant k\}}\mathcal{T}$ en donde $\pi_i : X_1 \times \cdots \times X_k \to X_i$ es la *proyección en la i-ésima coordenada* ($\pi_i(x_1, ..., x_k) = x_i$ para cada $(x_1, ..., x_k) \in X_1 \times \cdots \times X_k$). Cuando todos los conjuntos X_1,...,X_k son iguales a un conjunto X, entonces denotamos por X^k al producto $X_1 \times \cdots \times X_k$.

4.11. Ejemplos.

(1) Una base de la topología usual en $\mathbb{R}$ es la colección de los intervalos abiertos (a, b). Para $\pi_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, la proyección al i-ésimo factor ($i \in \{1, 2\}$), $\pi_1^{-1}[(a, b)] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b\}$ y $\pi_2^{-1}[(c, d)] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c < y < d\}$. Por lo tanto, la topología producto en $\mathbb{R}^2$ está generada por la colección de todos los conjuntos de la forma $\{(x, y) : a < x < b \text{ y } c < y < d\}$

como base, en donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y las relaciones $a < b$ y $c < d$ se cumplen. Cada uno de estos conjuntos son los rectángulos abiertos en $\mathbb{R}^2$. Podemos confirmar fácilmente que la topología producto en $\mathbb{R}^2$ coincide con la topología euclidiana en $\mathbb{R}^2$. En efecto, cada rectángulo abierto es unión de discos abiertos, y cada disco abierto es unión de rectángulos abiertos. De manera más general, la topología euclidiana en $\mathbb{R}^n$ es igual a la topología producto en $\mathbb{R}^n$ cuando n es un número natural.

(2) El lector puede verificar que la topología producto del cuadrado $X^2 = X \times X$ es la topología discreta (respectivamente, indiscreta, cofinita) si X está equipado con la topología discreta (respectivamente, indiscreta, cofinita) (véase el ejercicio 4.B.(4)).

(3) Consideremos ahora al espacio $X = \mathcal{L}_{\mathbb{S}}$ (la Línea de Sorgenfrey) definido en 1.42. Como sabemos, una base para $\mathcal{L}_{\mathbb{S}}$ es la colección de intervalos de la forma $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$ en donde a y b son números reales que satisfacen $a < b$. Podemos ahora describir a los elementos de una base para la topología producto en $X \times X$. En efecto, la colección de los conjuntos de la forma $\pi_1^{-1}[[a, b)] \cap \pi_2^{-1}[[c, d)] = \{(x, y) : a \leqslant x < b$ y $c \leqslant y < d\}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $a < b$, $c < d$) constituye una base para esta topología.

4.12. Proposición. *Las proyecciones $\pi_X : X \times Y \to X$ y $\pi_Y : X \times Y \to Y$ son funciones continuas y abiertas cuando consideramos en $X \times Y$ la topología producto.*

Demostración. Por la definición de la topología producto en $X \times Y$, π_X y π_Y son continuas.

Demostremos ahora que π_X y π_Y son funciones abiertas. Haremos la demostración sólo para π_X. Sea V un subconjunto abierto de $X \times Y$ y sea $x \in \pi_X[V]$. Vamos a demostrar que existe un subconjunto abierto W de X que satisface $x \in W \subseteq \pi_X[V]$. Como $x \in \pi_X[V]$, podemos asegurar que existe $y \in Y$ tal que $(x, y) \in V$. Además, la definición de la topología producto en $X \times Y$ nos garantiza que podemos tomar un abierto A de X y un abierto B en Y tales que $(x, y) \in A \times B \subseteq V$. Tenemos ahora que $x \in \pi_X[A \times B] \subseteq \pi_X[V]$. Pero $\pi_X[A \times B] = A$. Haciendo $A = W$, obtenemos lo deseado. ⊠

Cuando una propiedad topológica P que comparten dos espacios X y Y, se conserva cuando consideramos la topología producto en $X \times Y$, diremos que P es una *propiedad finitamente productiva*. En el siguiente resultado veremos ejemplos de propiedades de este tipo.

4.13. Proposición. *Si X y Y son dos espacios topológicos segundo numerables (respectivamente, primero numerables, separables), entonces $X \times Y$ también es un espacio segundo numerable (respectivamente, primero numerable, separable).*

Demostración. Si $\mathcal{B}$ es una base numerable de X y $\mathcal{C}$ es una base numerable de Y, entonces $\{B \times C : B \in \mathcal{B}$ y $C \in \mathcal{C}\}$ forma una base numerable de $X \times Y$. Por lo tanto, el producto de dos espacios segundo numerables comparte esta propiedad.

Veamos ahora el caso en que X y Y son espacios primero numerables. Tomemos en $X \times Y$ un punto arbitrario (x, y). Por hipótesis, existen colecciones numerables de abiertos $\mathcal{B}(x)$ y $\mathcal{B}(y)$ que son bases locales de vecindades para x y y, respectivamente. La colección $\mathcal{A} = \{A \times B : A \in \mathcal{B}(x)$ y $B \in \mathcal{B}(y)\}$ es numerable, de tal manera que habremos terminado nuestra demostración si probamos que $\mathcal{A}$ es una base local para (x, y) en el producto topológico $X \times Y$. Hagámoslo con cuidado. Sea V una vecindad de (x, y). Ya vimos en la proposición anterior que las funciones π_X y π_Y son abiertas, de tal modo que $\pi_X(V)$ y $\pi_Y(V)$ son vecindades de x y y, respectivamente. Podemos, entonces, encontrar $A \in \mathcal{B}(x)$ y $B \in \mathcal{B}(y)$ que satisfacen $x \in A \subseteq \pi_X(V)$ y $y \in B \subseteq \pi_Y(V)$. Esto significa que $(x, y) \in A \times B \subseteq V$ y $A \times B \in \mathcal{A}$. Concluimos que $X \times Y$ es primero numerable.

Para demostrar que $X \times Y$ es separable si X y Y lo son, tomemos un subconjunto numerable y denso C en X, y otro D en Y con las mismas propiedades con respecto a Y. Entonces $C \times D$ es denso y numerable en $X \times Y$. ⊠

4.14. Ejemplo. Consideremos la línea de Michael $\mathcal{M}$ presentada en el ejemplo 1.12, y sea $\mathbb{P}$ el espacio de los números irracionales con su topología euclidiana. Por la proposición 4.13, $\mathcal{M} \times \mathbb{P}$ es primero numerable. Sin embargo, $\mathcal{M} \times \mathbb{P}$ no es segundo numerable y no es separable ya que para cada $r \in \mathbb{P}$, $\{r\} \times \mathbb{P}$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{M} \times \mathbb{P}$.

3. Producto de una familia arbitraria de espacios topológicos

En esta sección vamos a generalizar la construcción que hicimos en la sección anterior de la topología producto de una colección finita de espacios topológicos y, siguiendo las ideas del teorema 4.5, construiremos una topología producto también para el caso en que la colección de espacios topológicos dados es infinita.

Consideremos una familia $\{(X_j, \mathcal{T}_j) : j \in J\}$ de espacios topológicos no vacíos, en donde J es un conjunto no vacío finito o infinito. Recuerde, como se menciona en el apéndice, que $\prod_{j\in J} X_j$ es el conjunto de todas las posibles funciones de elección definidas sobre la colección $\{X_j : j \in J\}$. Más formalmente,

$$\prod_{j\in J} X_j = \{f : J \to \bigcup_{j\in J} X_j \ : \text{para cada } j \in J,\ f(j) \in X_j\}.$$

Para cada $i \in J$, podemos definir la función $\pi_i : \prod_{j\in J} X_j \to X_i$ como $\pi_i(f) = f(i)$ para cada $f \in \prod_{j\in J} X_j$. A π_i le llamaremos *proyección sobre el i-ésimo factor*. Agrupamos a todas estas funciones en una colección $\mathcal{P} = \{\pi_j : j \in J\}$.

Podemos ahora considerar en $\prod_{j\in J} X_j$ la topología débil ${}_{\mathcal{P}}\mathcal{T}$ inducida por $\mathcal{P}$. A la pareja $(\prod_{j\in J} X_j, {}_{\mathcal{P}}\mathcal{T})$ le llamaremos *producto topológico o producto Tychonoff* de los espacios X_j, y a ${}_{\mathcal{P}}\mathcal{T}$ le llamamos *topología producto o topología Tychonoff* en el producto $\prod_{j\in J} X_j$.

Por lo visto en la sección 4.1, tenemos las siguientes propiedades de la topología producto.

4.15. Proposición.

(1) *Para cada $i \in J$, $\pi_i : (\prod_{j\in J} X_j, {}_{\mathcal{P}}\mathcal{T}) \to (X_i, \mathcal{T}_i)$ es continua.*

(2) *${}_{\mathcal{P}}\mathcal{T}$ es la menor topología que hace a cada función π_j continua.*

(3) *Si Z es un espacio topológico y $g : Z \to \prod_{j\in J} X_j$, entonces g es continua si y sólo si $\pi_i \circ g$ es continua para cada $i \in J$.*

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "\pi_i \circ g"'] & \prod_{j\in J} X_j \arrow[d, "\pi_i"] \\ & X_i \end{tikzcd}$$

(4) *La familia $\mathcal{S} = \{\pi_j^{-1}[B] : j \in J \text{ y } B \in \mathcal{T}_j\}$ es una subbase de ${}_{\mathcal{P}}\mathcal{T}$.*

Las propiedades mencionadas en la proposición anterior constituyen la herramienta fundamental cuando nos ocupamos de productos topológicos. En particular, la proposición 4.15.(3) nos asegura que para decidir sobre la continuidad de la función g basta valorar la continuidad de funciones que, en muchas ocasiones, son más simples que la función g. Por otra parte, la proposición 4.15.(4) nos permite construir bases de $(\prod_{j\in J} X_j, {}_{\mathcal{P}}\mathcal{T})$ muy manejables. Aún más, a partir de lo mencionado en la observación 4.6 (véase también la observación 4.10), se concluye que si, para cada $i \in J$, $\mathcal{B}_i$ es una base para la topología $\mathcal{T}_i$, la colección de conjuntos de la forma

$$\pi_{j_1}^{-1}[B_1] \cap \cdots \cap \pi_{j_k}^{-1}[B_k]$$

en donde $k \in \mathbb{N}$, $j_1, \cdots, j_k \in J$, y $B_i \in \mathcal{B}_{j_i}$ para toda $i \in \{1, \cdots, k\}$, constituye una base para la topología ${}_{\mathcal{P}}\mathcal{T}$.

Cuando X_j es el espacio X para toda $j \in J$, al producto $\prod_{j\in J} X_j$ lo denotamos por X^J o con el símbolo X^τ, en donde τ es la cardinalidad de J.

4.16. Ejemplos.

(1) Sea $\{0,1\}$ el conjunto de dos puntos con la topología discreta. Consideremos el espacio producto $\{0,1\}^\omega = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \cdots \times \{0,1\} \times \cdots$. Una subbase para la topología producto en $\{0,1\}^\omega$ es

$$\mathcal{S} = \{\pi_n^{-1}[\{\epsilon\}] : n \in \mathbb{N}, \epsilon \in \{0,1\}\}$$

en donde $\pi_n : \{0,1\}^\omega \to \{0,1\}$ es la proyección al n-ésimo factor. Resulta entonces que la colección

$$\mathcal{B} = \{\pi_{n_1}^{-1}[\{\epsilon_1\}] \cap \cdots \cap \pi_{n_k}^{-1}[\{\epsilon_k\}] : k \in \mathbb{N}, n_i \in \mathbb{N}, \\ \epsilon_i \in \{0,1\} \text{ para cada } i = 1, \ldots, k\}$$

es la base canónica de $\{0,1\}^\omega$. Puede constatar el lector que también la colección

$$\mathcal{C} = \{\pi_1^{-1}[\{\epsilon_1\}] \cap \cdots \cap \pi_n^{-1}[\{\epsilon_n\}] : n \in \mathbb{N}, \epsilon_1, \ldots \epsilon_n \in \{0,1\}\}$$

es una base para la topología producto en $\{0,1\}^\omega$. Observe que cada elemento en $\mathcal{C}$ condiciona las primeras n coordenadas de sus elementos, en donde n varía en $\mathbb{N}$. Por lo tanto, una base local de vecindades de un elemento $\xi \in \{0,1\}^\omega$ está dada por los conjuntos de la forma

$$V(\xi, n) = \{\eta \in \{0,1\}^\omega : \forall\, i \leqslant n\, (\eta(i) = \xi(i))\}$$

con $n \in \mathbb{N}$. Al espacio $\{0,1\}^\omega$ se le conoce como el *espacio de Cantor* (véanse el ejercicio 4.C.(9), el ejemplo 7.5 y el ejercicio 7.A.(6)).

(2) Ahora tomemos como conjunto de índices J al intervalo unitario $[0,1]$. El producto $\mathbb{R}^J$ es entonces la colección de funciones definidas en $[0,1]$ y con valores en $\mathbb{R}$. Consideremos a $\mathbb{R}$ con su topología usual que tiene como base a la colección de intervalos abierto $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$. La topología producto en $\mathbb{R}^J$ tiene como subbase a la colección de conjuntos de la forma $\pi_x^{-1}[(a,b)] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \ : \ f(x) \in (a,b)\}$ con $x \in J$, $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$. De esta manera, un elemento básico canónico es del tipo $\pi_{x_1}^{-1}[(a_1,b_1)] \cap \cdots \cap \pi_{x_k}^{-1}[(a_k,b_k)]$ que igual al conjunto $[x_1;(a_1,b_1)] \cap \cdots \cap [x_k;(a_k,b_k)]$, el cual a su vez es igual al conjunto

$$\{f : [0,1] \to \mathbb{R} \ : \ \forall\, i = 1,\ldots,k\,(f(x_i) \in (a_i,b_i)\,)\,\}.$$

Por otro lado, un sistema básico de vecindades de un elemento $f \in \mathbb{R}^J$ lo constituye la colección de conjuntos de la forma

$$[f;x_1,...,x_n;r] = \{g : [0,1] \to \mathbb{R} \ : \ \forall\, i = 1,\ldots,n(|f(x_i) - g(x_i)| < r)\},$$

en donde $x_i \in [0,1]$ para cada $i = 1,\ldots,n$, y $r > 0$.

Podemos también considerar el subconjunto $C([0,1])$ de $\mathbb{R}^{[0,1]}$. Ahora podrá el lector demostrar que la topología en $C([0,1])$ que hereda como subespacio del producto Tychonoff en $\mathbb{R}^{[0,1]}$, coincide con la topología $\mathcal{T}_p$ definida en el ejemplo 1.37.

Cuando consideramos la topología débil en un conjunto X definida por una familia $\mathcal{F} = \{f_i : X \to Y_i \mid i \in J\}$, las funciones f_i se transforman en funciones continuas pero no necesariamente en funciones abiertas. Por ejemplo, la función inclusión $i : X \to Y$ es abierta si y sólo si X es abierto en Y. Esta situación no varía incluso cuando $\mathcal{F}$ está formada por funciones suprayectivas. Este es el caso cuando $\mathcal{F} = \{f \in C(\mathbb{R}) : f$ es suprayectiva$\}$. En efecto, ${}_{\mathcal{F}}\mathcal{T}$ es igual a la topología euclideana y hay elementos en $\mathcal{F}$ que no son abiertas como $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x) & \text{si } x \in [0,2\pi] \\ x & \text{si } x \in (\leftarrow,0] \\ x - 2\pi & \text{si } x \in [2\pi,\to) \end{cases}$$

ya que $g[(0,2\pi)] = [-1,1]$. Afortunadamente, cuando consideramos la topología producto obtenemos el siguiente resultado que tiene muchas aplicaciones:

4.17. Proposición. *La proyección* $\pi_i : \prod_{j\in J} X_j \to X_i$ *definida por* $\pi_i(f) = f(i)$ *para cada* $f \in \prod_{j\in J} X_j$*, es una función abierta para cualquier* $i \in J$.

Demostración. Sea A un subconjunto abierto arbitrario del espacio $\prod_{j\in J} X_j$. Demostraremos que $\pi_i[A]$ es un conjunto abierto en X_i. Para $x \in \pi_i[A]$ existe $f \in A$ tal que $\pi_i(f) = x$. Podemos encontrar un básico típico $B = \pi_{j_1}^{-1}[A_1] \cap \cdots \cap \pi_{j_k}^{-1}[A_k]$ tal que $f \in B \subseteq A$, en donde $k \in \mathbb{N}$, $j_1, ..., j_k \in J$, y A_l es un subconjunto abierto en X_{j_l} para cada $1 \leqslant l \leqslant k$. Tenemos entonces que $x = \pi_i(f) \in \pi_i[B] \subseteq \pi_i[A]$. Pero $\pi_i[B]$ es igual a X_i o es igual a algún A_l. En cualquiera de estos casos, $\pi_i[B]$ es abierto en X_i. Con esto hemos demostrado que el conjunto $\pi_i[A]$ es abierto. ⊠

La convergencia de una sucesión en un espacio producto está determinada por la convergencia de las sucesiones que determina cada proyección. En términos precisos:

4.18. Proposición. *Una sucesión* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de puntos en* $\prod_{j\in J} X_j$ *converge a un punto* x *de* $\prod_{j\in J} X_j$ *si y sólo si la sucesión* $(\pi_i(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* $\pi_i(x)$ *en* X_i *para cada* $i \in J$.

Demostración. Como cada π_i es una función continua, entonces $x_n \to x$ implica $\pi_i(x_n) \to \pi_i(x)$ (véase la proposición 3.40).

Supongamos ahora que para cada $i \in J$, la sucesión $(\pi_i(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\pi_i(x)$. Tomamos un conjunto abierto A en el producto topológico que contiene a x. Existe un abierto canónico $B = \pi_{j_1}^{-1}[A_1] \cap \cdots \cap \pi_{j_k}^{-1}[A_k]$ tal que $x \in B \subseteq A$, en donde $k \in \mathbb{N}$, $j_1, ..., j_k \in J$, y A_l es un subconjunto abierto en X_{j_l} para cada $1 \leqslant l \leqslant k$. Como $\pi_{j_l}(x_n)$ converge a $\pi_{j_l}(x)$, existe $n(l) \in \mathbb{N}$ tal que $\pi_{j_l}(x_n) \in A_l$ para toda $n \geqslant n(l)$ (para cada $l \in \{1, ..., k\}$). Resulta que si $n \geqslant \max\{n(1), ..., n(k)\}$, entonces $x_n \in B$, lo cual completa la demostración. ⊠

De ahora en adelante, una de nuestras preocupaciones constantes será saber si $X = \prod_{j\in J} X_j$ satisface una propiedad topológica P cuando cada espacio topológico $(X_j, \mathfrak{T}_j)$ cumple P. En la sección 4.2 ya discutimos este problema cuando J es finito y $P \in \{$segundo numerable, primero numerable, separable}. La proposición 4.13 puede ser generalizada a productos numerables como se observa en los ejercicios 4.C.(10), 4.C.(11) y en la proposición siguiente.

4.19. Proposición. *Sea* $\{X_j : j \in J\}$ *una familia no vacía de espacios topológicos no vacíos.*

(1) *Si cada* X_j *es segundo numerable y* $|J| \leqslant \aleph_0$*, entonces el producto Tychonoff* $X = \prod_{j\in J} X_j$ *es segundo numerable.*
(2) *Si* $X = \prod_{j\in J} X_j$ *es segundo numerable, entonces cada* X_j *es segundo numerable.*

Demostración. El inciso (2) es consecuencia del corolario 3.33.

Cuando J es finito, el inciso (1) se obtiene por un proceso inductivo a partir de la proposición 4.13.

Podemos suponer pues que $J = \mathbb{N}$. Para cada natural k, tomamos una base numerable $\mathcal{B}_k = \{B_1^k, B_2^k, \dots, B_n^k, \dots\}$ del espacio X_k. (Observe que no pedimos que los B_i^k sean diferentes por pares; incluso podría suceder que $\mathcal{B}_k$ sea un conjunto finito.) Por la definición de la topología en X, la siguiente colección es una base para X:

$$\begin{aligned}\mathcal{B} = \{\pi_{i_1}^{-1}[A_1] \cap \cdots \cap \pi_{i_n}^{-1}[A_n] \ :\ & n \in \mathbb{N}, i_1, \dots i_n \in \mathbb{N} \text{ y} \\ & A_j \in \mathcal{B}_j \text{ para cada } j \in \{i_1, \dots, i_n\}\}.\end{aligned}$$

Ahora bien, el conjunto $\mathcal{B}$ es numerable ya que la aplicación $\phi : \mathcal{B} \to \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^k$ definida por

$$\phi(\pi_{i_1}^{-1}[A_1] \cap \cdots \cap \pi_{i_n}^{-1}[A_n]) = (i_1, ..., i_n, l_1, ..., l_n)$$

cuando $A_j = B_{l_j}^{i_j}$ para cada $j \in \{i_1, \dots, i_n\}$, es una función inyectiva. Pero $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^k$ es un conjunto numerable por lo expuesto en las proposiciones A.48.1 y A.35; por lo tanto $\mathcal{B}$ es numerable. Concluimos entonces que X es segundo numerable. ⊠

4. Topologías fuertes definidas por funciones

Consideremos ahora una función $f : X \to Y$ definida sobre un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ y con valores en un conjunto Y. Vamos a construir una topología en Y, con propiedades deseadas, a partir de f y de $\mathcal{T}$ de manera dual a lo hecho en la sección 2. Queremos que la topología obtenida en Y, que denotaremos por $\mathcal{T}_f$, sea la más grande de las topologías que convierte a f en una función continua, y, además, que satisfaga la propiedad:

(**P**) Para cualquier espacio topológico Z, una función $g : Y \to Z$ es continua si y sólo si $g \circ f$ es continua.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

Proponemos como $\mathcal{T}_f$ a la colección $\{E \subseteq Y : f^{-1}[E] \in \mathcal{T}\}$. Verifiquemos que $\mathcal{T}_f$ cumple con las condiciones requeridas.

4.20. Teorema.

(1) *La familia $\mathcal{T}_f$ es una topología en Y.*
(2) *La función $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_f)$ es continua, y $\mathcal{T}_f$ es la mayor de las topologías en Y que satisface esta propiedad.*
(3) *$\mathcal{T}_f$ es la única topología en Y que satisface la propiedad* **P**.

Demostración. Pedimos al lector que demuestre la proposición en (1).

(2) La continuidad de f es una consecuencia directa de la definición de $\mathcal{T}_f$. Además, si $\mathcal{T}'$ es una topología que hace continua a f, entonces $f^{-1}[A]$ debe ser un elemento de $\mathcal{T}$ para cada $A \in \mathcal{T}'$. Lo cual significa que $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}_f$.

(3) Si $g : Y \to Z$ es continua, como f también lo es, entonces la proposición 3.9 nos garantiza que $g \circ f$ es continua. Ahora supongamos que $g \circ f$ es una función continua; es decir, supongamos que $(g \circ f)^{-1}[A] = f^{-1}[g^{-1}[A]] \in \mathcal{T}$ para cada subconjunto abierto A de Z. La manera en que está definida la familia $\mathcal{T}_f$ nos indica que $g^{-1}[A]$ debe ser un elemento de $\mathcal{T}_f$ para cada abierto A de Z; es decir, g es continua. Por otro lado, si $\mathcal{T}'$ es una topología en Y que satisface la propiedad **P**, entonces la función identidad $\mathrm{id}_Y : (Y, \mathcal{T}') \to (Y, \mathcal{T}_f)$ es continua ya que $\mathrm{id}_Y \circ f$ lo es. Por lo tanto, $\mathcal{T}_f \subseteq \mathcal{T}'$. Además $\mathrm{id}_Y : (Y, \mathcal{T}') \to (Y, \mathcal{T}')$ es, trivialmente, continua. Como estamos suponiendo que $(Y, \mathcal{T}')$ satisface **P**, $f = \mathrm{id}_Y \circ f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es continua. Aplicando (2) obtenemos $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}_f$. ⊠

4.21. Ejemplos.

(1) Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico cualquiera. Sea Y un conjunto y sea $y_0 \in Y$ fijo. Para la función $f : X \to Y$ constante y_0, la

topología $\mathcal{T}_f$ en Y es la topología discreta, ya que si $E \subseteq Y$,

$$f^{-1}[E] = \begin{cases} \emptyset & \text{si } y_0 \notin E \\ X & \text{si } y_0 \in E \end{cases}$$

Es decir, cualquier subconjunto de Y pertenece a $\mathcal{T}_f$. (¿Bajo qué condiciones en $f : X \to Y$ y en la topología de X, $\mathcal{T}_f$ es la topología indiscreta?)

(2) Sean $(X, \mathcal{T})$ y Y dos espacios topológicos. Tomemos en $X \times Y$ la topología producto y sea $\pi : X \times Y \to X$ la función proyección. Como la topología $\mathcal{T}_\pi$ en X es la más fina de las topologías que hacen continua a π, tenemos que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_\pi$. Si $U \in \mathcal{T}_\pi$, entonces $\pi^{-1}[U]$ es un abierto en $X \times Y$. Como $\pi : X \times Y \to (X, \mathcal{T})$ es una función abierta, $\pi\pi^{-1}[U] = U$ pertenece a $\mathcal{T}$. Es decir, $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\pi$.

Podemos generalizar la técnica presentada aquí de una manera análoga a lo hecho para definir topologías débiles. Dada una familia de espacios topológicos $\mathcal{G} = \{(X_j, \mathcal{T}_j) : j \in J\}$ y dada una familia de funciones $\mathcal{F} = \{f_j : X_j \to Y \ : \ j \in J\}$, podemos definir la colección $\mathcal{T}_\mathcal{F}$ de todos los subconjuntos E de Y que satisfacen $f_j^{-1}[E] \in \mathcal{T}_j$ para toda $j \in J$. Se cumple entonces el siguiente resultado cuya demostración se deja al lector (véase el ejercicio (2) de 4.D).

4.22. Teorema.

(1) *La colección $\mathcal{T}_\mathcal{F}$ es una topología en Y.*

(2) *Cada $f_j : (X_j, \mathcal{T}_j) \to (Y, \mathcal{T}_\mathcal{F})$ es continua para toda $j \in J$, y $\mathcal{T}_\mathcal{F}$ es la mayor de las topologías en Y con esta propiedad.*

(3) *$\mathcal{T}_\mathcal{F}$ es la única topología en Y que satisface: Para cualquier espacio Z, una función $g : (Y, \mathcal{T}_\mathcal{F}) \to Z$ es continua si y sólo si $g \circ f_j$ es continua para toda $j \in J$.*

$$\begin{tikzcd} X_j \arrow[r, "f_j"] \arrow[dr, "g \circ f_j"'] & (Y, \mathcal{T}_\mathcal{F}) \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

4.23. Definición. A la topología $\mathcal{T}_\mathcal{F}$ le llamaremos *topología fuerte, o topología final,* en Y definida por la familia de funciones $\mathcal{F}$ y la familia de espacios topológicos $\mathcal{G}$.

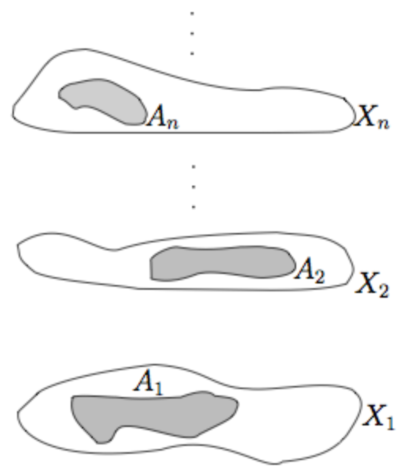

Figura 21. A_i es un subconjunto abierto en X_i. $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ es un subconjunto abierto de la suma libre $\oplus_{j\in\mathbb{N}} X_j$.

4.24. Ejemplo. *La suma topológica libre de una familia de espacios topológicos.* Sea $\mathcal{G} = \{(X_j, \mathcal{T}_j) : j \in J\}$ una colección de espacios topológicos, y sea $X = \bigcup_{j\in J} X_j$. Podemos entonces considerar, para cada $j \in J$, la función inclusión $i_j : X_j \to X$ definida por $i_j(x) = x$. Para $\mathcal{F} = \{i_j : j \in J\}$, $E \subseteq X$ pertenece a $\mathcal{T}_\mathcal{F}$ si y sólo si $E \cap X_j \in \mathcal{T}_j$ para todo $j \in J$. A la topología $\mathcal{T}_\mathcal{F}$ le llamamos *topología suma de la familia* $\mathcal{G}$, y a la pareja $(X, \mathcal{T}_\mathcal{F})$ le llamamos *suma topológica de la familia* $\mathcal{G}$. La *suma topológica libre de la familia* $\mathcal{G}$, denotada por $\bigoplus_{j\in J} X_j$, es el espacio suma de la familia $\{X_j \times \{j\} : j \in J\}$. Sus subconjuntos abiertos se obtienen, simplemente, uniendo subconjuntos abiertos de los espacios sumando (véase la figura 21). Por ejemplo, si $\mathbb{R}_n = \mathbb{R}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}_n$ es homeomorfo al subespacio $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\mathbb{R} \times \{n\})$ de $\mathbb{R}^2$.

5. Los cocientes de un espacio topológico

En la sección anterior analizamos la topología fuerte $\mathcal{T}_\mathcal{F}$ en un conjunto Y definida por una familia de funciones $\mathcal{F} = \{f_j : (X_j, \mathcal{T}_j) \to Y \;:$

$j \in J\}$. En esta sección vamos a estudiar con más cuidado el caso particular cuando $\mathcal{F}$ está constituida por una sola función suprayectiva $q : (X, \mathcal{T}) \to Y$. Intuitivamente, $(Y, \mathcal{T}_q)$ es el resultado de dividir a X en varias partes y de pegar los puntos en cada una de ellas obteniendo de esta manera un sólo punto, que se convierte así en un elemento de Y, y dados puntos $y, z \in Y$, z está cercano a y si los puntos en X que pertenecen a z están cercanos a los puntos de X que pertenecen a y. Veamos todo esto con cuidado.

4.25. Definición. Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, Y un conjunto y $q : X \to Y$ una función suprayectiva. A la pareja $(Y, \mathcal{T}_q)$, en donde $\mathcal{T}_q$ es la topología fuerte en Y definida por q y $(X, \mathcal{T})$, le llamaremos *espacio cociente determinado por* $(X, \mathcal{T})$ *y* q . Por las definiciones dadas en la sección 4 tenemos que $\mathcal{T}_q$ es igual a la colección $\{A \subseteq Y : q^{-1}[A] \in \mathcal{T}\}$.

Aplicando el teorema 4.20 obtenemos:

4.26. Teorema. *Si $(Y, \mathcal{T}_q)$ es el espacio cociente determinado por $q : (X, \mathcal{T}) \to Y$, entonces $\mathcal{T}_q$ es la mayor topología en Y que hace continua a q, y es la única topología en Y que satisface: para cualquier espacio Z y cualquier $g : (Y, \mathcal{T}_q) \to Z$, g es continua si y sólo si $g \circ q$ es continua.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "g \circ q"'] & (Y, \mathcal{T}_q) \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

Dada una función continua y suprayectiva q con dominio $(X, \mathcal{T}_X)$ y rango $(Y, \mathcal{T}_Y)$, nos preguntamos bajo qué condiciones $\mathcal{T}_Y$ coincide con la topología cociente $\mathcal{T}_q$. Como $\mathcal{T}_q$ es la mayor de las topologías que convierte a q en una función continua, entonces debe cumplirse la relación $\mathcal{T}_Y \subseteq \mathcal{T}_q$. Si $\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}_q$ decimos que q *es una función cociente* o *identificación*. En la siguiente proposición veremos algunas condiciones suficientes para que la igualdad de estas dos topologías se produzca.

4.27. Proposición. *Sean X y Y dos espacios topológicos y sea $q : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Si q es una función abierta o cerrada, entonces la topología de Y coincide con la topología cociente en Y definida por q.*

Demostración. Como q es continua, entonces $\mathcal{T}_Y$ está contenida en la topología cociente. Tenemos sólo que demostrar que $\mathcal{T}_q \subseteq \mathcal{T}_Y$. Sea

$A \subseteq Y$ tal que $q^{-1}[A] \in \mathcal{T}_X$. Observe que, como q es suprayectiva, entonces $q[q^{-1}[A]] = A$. Así, si q es una función abierta, A es abierto en Y ya que $q^{-1}[A]$ es abierto en X. Ahora supongamos que q es una función cerrada y que $A \in \mathcal{T}_q$. Resulta que $q[X \setminus q^{-1}[A]]$ es un conjunto cerrado en $(Y, \mathcal{T}_Y)$. Pero, $q[X \setminus q^{-1}[A]] = Y \setminus A$. Por lo tanto, $A \in \mathcal{T}_Y$, que es lo que deseábamos demostrar. $\boxtimes$

4.28. Ejemplo. Consideremos al intervalo unitario $[0, 1]$ con su topología usual. Tomemos ahora la circunferencia unitaria

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\| = 1\}$$

también con su topología de subespacio en $\mathbb{R}^2$. La función $q : [0, 1] \to S^1$ definida por $q(z) = (\cos(2z\pi), \operatorname{sen}(2z\pi))$ es suprayectiva, continua y cerrada; es decir, la topología euclidiana en S^1 coincide con la topología cociente en S^1 definida por q y $[0, 1]$. Este hecho se puede expresar diciendo que S^1 se obtiene al pegar o identificar los puntos extremos del intervalo $[0, 1]$ (observe que $q(0) = q(1)$).

Veamos ahora que, en efecto, el proceso que seguimos para obtener la topología cociente definida por un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ y una función q es una operación que, básicamente, consiste en construir una partición en X, identificar en un solo punto a los puntos de cada elemento de la partición y darle al nuevo conjunto una topología relacionada convenientemente a $\mathcal{T}$.

4.29. Definiciones.

(1) Una *partición* de un conjunto X es una colección $\mathcal{D}$ de subconjuntos no vacíos de X, dos a dos ajenos, y cuya unión es igual a X. Es decir, si $A, B \in \mathcal{D}$ y $A \neq B$, entonces $A \cap B = \emptyset$, y $\bigcup\{D : D \in \mathcal{D}\} = X$.

(2) Sea $\mathcal{D}$ una partición de un conjunto X. A la aplicación $q : X \to \mathcal{D}$ que asocia a cada $x \in X$ con el único elemento en $\mathcal{D}$ que lo contiene, le llamaremos *proyección natural asociada a la partición* $\mathcal{D}$.

(3) Sea $\mathcal{D}$ una partición del espacio topológico $(X, \mathcal{T})$. Consideremos en el conjunto $\mathcal{D}$ la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}$ definida de la siguiente forma: $\mathcal{A} \in \mathcal{T}_{\mathcal{D}} \Leftrightarrow \bigcup \mathcal{A}$ es un subconjunto abierto de X. A la pareja $(\mathcal{D}, \mathcal{T}_{\mathcal{D}})$ le llamaremos *espacio partición de* X.

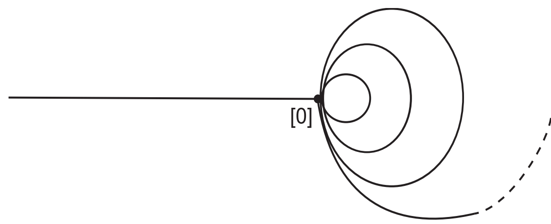

Figura 22. El espacio cociente $\mathbb{R}/\mathbb{N} = (\mathcal{D}_3, \mathcal{T}_{\mathcal{D}_3})$.

4.30. Proposición. *Para una partición $\mathcal{D}$ de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}$ es la topología cociente definida por la proyección natural $q : X \to \mathcal{D}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{T}_q$ la topología cociente determinada por la función q definida en 4.29.2. Observe que para $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$, $q^{-1}[\mathcal{A}] = \{x \in X : q(x) \in \mathcal{A}\} = \bigcup\{A \subseteq X : A \in \mathcal{A}\}$, de tal manera que $\mathcal{A} \in \mathcal{T}_q \Leftrightarrow q^{-1}[\mathcal{A}]$ es un subconjunto abierto en $X \Leftrightarrow \bigcup\{A \subseteq X : A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \mathcal{A} \in \mathcal{T}_{\mathcal{D}}$. $\boxtimes$

4.31. Ejemplos. Consideremos en el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ las particiones $\mathcal{D}_1 = \{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}$, $\mathcal{D}_2 = \{(n, n+1] : n \in \mathbb{Z}\}$ y $\mathcal{D}_3 = \{\{x\} : x \notin \mathbb{N}\} \cup \{\mathbb{N}\}$. Resulta que $(\mathcal{D}_1, \mathcal{T}_{\mathcal{D}_1})$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$, y $(\mathcal{D}_2, \mathcal{T}_{\mathcal{D}_2})$ es homeomorfo a $(\mathbb{Z}, \mathcal{T})$, en donde $A \in \mathcal{T} \setminus \{\mathbb{Z}, \emptyset\}$ si y sólo si existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $A = (n, \to)$. El espacio $(\mathcal{D}_3, \mathcal{T}_{\mathcal{D}_3})$ resulta al identificar a los números naturales en un solo punto (véase la figura 22).

4.32. Observaciones.

(1) La proyección natural $q : X \to \mathcal{D}$ puede no ser una función cerrada o abierta. Por ejemplo, si $\mathbb{R}$ tiene la topología usual y $\mathcal{D}$ es la partición $\{(n, n+1] : n \in \mathbb{Z}\}$ en $\mathbb{R}$, entonces q no es una función abierta ya que $q[(n, n+1)]$ es igual al conjunto unipuntual $\{(n, n+1]\}$, el cual no es un conjunto abierto en el espacio $(\mathcal{D}, \mathcal{T}_q)$. En efecto, $q^{-1}[\{(n, n+1]\}] = (n, n+1]$ no es abierto en $\mathbb{R}$. En este ejemplo, q tampoco es una función cerrada ya que $[n, n+1]$ es cerrado en $\mathbb{R}$, $q[[n, n+1]] = \{(n-1, n], (n, n+1]\}$, y $\{(n-1, n], (n, n+1]\}$ no es cerrado en $(\mathcal{D}, \mathcal{T}_{\mathcal{D}})$, ya que $q^{-1}[\{(n-1, n], (n, n+1]\}] = (n, n+1]$.

Estas observaciones muestran que el recíproco de la proposición 4.27 no es cierto.

(2) Si X es un conjunto y $\sim$ es una relación de equivalencia en X, entonces $\sim$ induce una partición en X. En efecto, las clases de equivalencia definidas por $\sim$ forman una partición $\mathcal{D}$ de X. Recíprocamente, si $\mathcal{D}$ es una partición en X, la relación $x \sim y$ $\Leftrightarrow$ x y y pertenecen al mismo elemento de la partición $\mathcal{D}$, es una relación de equivalencia en X. A cualquier partición $\mathcal{D}$ en X con la topología cociente definida por q, se le acostumbra denotar por $X/\sim$, en donde $\sim$ es la relación de equivalencia inducida por $\mathcal{D}$.

El siguiente teorema es fundamental y nos muestra que todo espacio cociente es esencialmente un espacio partición.

4.33. Teorema. *Si Y posee la topología cociente inducida por una función continua y suprayectiva $f : X \to Y$, entonces, existe un homeomorfismo h de Y en el espacio partición $\mathcal{D} = \{f^{-1}(y) : y \in Y\}$. Además $h \circ f$ es igual a la proyección natural $q : X \to \mathcal{D}$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "q = h \circ f"'] & (Y, \mathcal{T}_f) \arrow[d, "h"] \\ & (\mathcal{D}, \mathcal{T}_{\mathcal{D}}) \end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $h : Y \to \mathcal{D}$ definida por $h(y) = f^{-1}(y)$. De esta manera $h(f(x)) = f^{-1}(f(x)) = q(x)$ ya que, evidentemente, $x \in f^{-1}(f(x))$. Como f es una función, entonces $f^{-1}(y_1) \neq f^{-1}(y_2)$ si $y_1 \neq y_2$; es decir, h es inyectiva. La suprayectividad de h es evidente. Además, tenemos que:

$$\begin{aligned} h^{-1}[B] = A \in \mathcal{T}_f \quad &\Leftrightarrow f^{-1}[A] = \bigcup\{f^{-1}(y) : y \in A\} \text{ es abierto en } X \\ &\Leftrightarrow \{f^{-1}(y) : y \in A\} = h[A] = B \text{ es abierto } \mathcal{D}. \end{aligned}$$

Es decir, h es continua y abierta. ⊠

4.34. Ejemplos.

(1) Consideremos en el cuadrado $I \times I$ la partición $\mathcal{D}$ dada por los conjuntos de la forma $\{(x, y)\}$ si $x \notin \{0, 1\}$, y por los conjuntos de la forma $\{(0, y), (1, y)\}$. El espacio partición o espacio cociente $(\mathcal{D}, \mathcal{T}_{\mathcal{D}})$ es homeomorfo al cilindro $S^1 \times I$. En efecto,

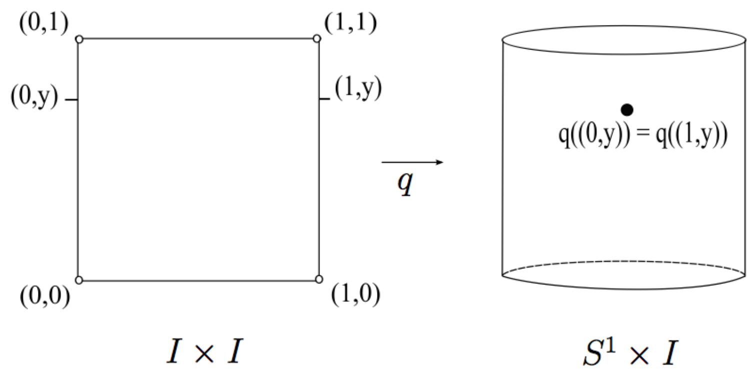

FIGURA 23. La identificación $q : I \times I \to S' \times I$ definida por $q((x, y)) = \ ((\cos(2\pi x), \sin(2\pi x), y)$.

la topología usual en el cilindro coincide con la topología cociente definida por la función $q : I \times I \to S^1 \times I$ dada por $q((x, y)) = ((\cos(2\pi x), \mathrm{sen}(2\pi x)), y)$ (véase la figura 23).

(2) Tomemos ahora el espacio cociente $(S^1 \times S^1, \mathcal{T}_q)$, en donde $q : I \times I \to S^1 \times S^1$ es la función definida por

$$q((x, y)) = ((\cos(2\pi x), \mathrm{sen}(2\pi x)), (\cos(2\pi y), sen(2\pi y))).$$

Se puede mostrar que $\mathcal{T}_q$ coincide con la topología usual en $S^1 \times S^1$. Del teorema 4.33, resulta que este espacio es homeomorfo al espacio partición $(\mathcal{D}, \mathcal{T}_{\mathcal{D}})$, en donde:

$$\begin{aligned}\mathcal{D} = \ & \{\{(0, y), (1, y)\} : 0 \leqslant y \leqslant 1\} \cup \{\{(x, 0), (x, 1)\} : 0 \leqslant x \leqslant 1\} \\ & \cup \{\{(x, y)\} : 0 < x < 1 \text{ y } 0 < y < 1\}.\end{aligned}$$

(Véase la figura 24). Este espacio es llamado *toro geométrico*.

(3) Consideremos ahora la siguiente partición en $I \times I$: $\mathcal{D} = \{\{(x, 0), (1 - x, 1)\} : x \in [0, 1]\} \cup \{\{(x, y)\} : x \in [0, 1], y \in (0, 1)\}$
(véase la figura 25). A este espacio se le conoce como *la banda de Moebius*.

(4) Sea X un espacio topológico. Definamos en $X \times I$ la relación de equivalencia $\sim$ definida por $(x, t) \sim (y, s) \Leftrightarrow x = y$ y $t = s$,

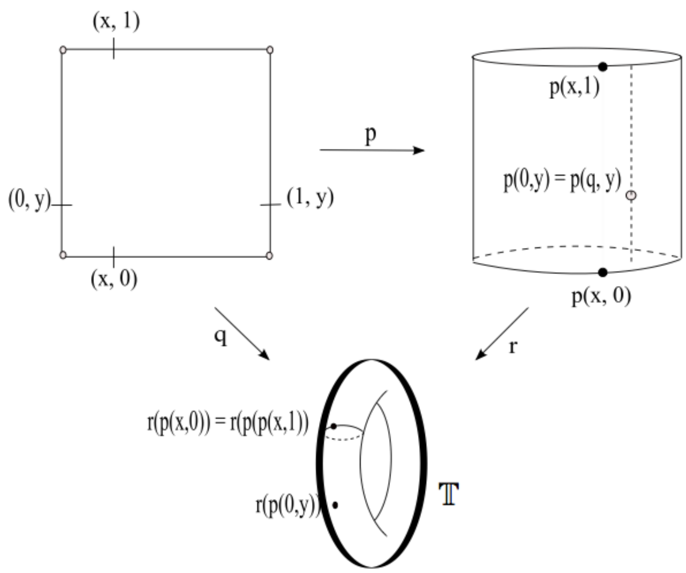

FIGURA 24. La identificación $q : I \times I \to \mathbb{T}$ definida por $q(x, y) = \ ((\cos 2\pi x, \sin 2\pi x), (\cos 2\pi y, \sin 2\pi y))$.

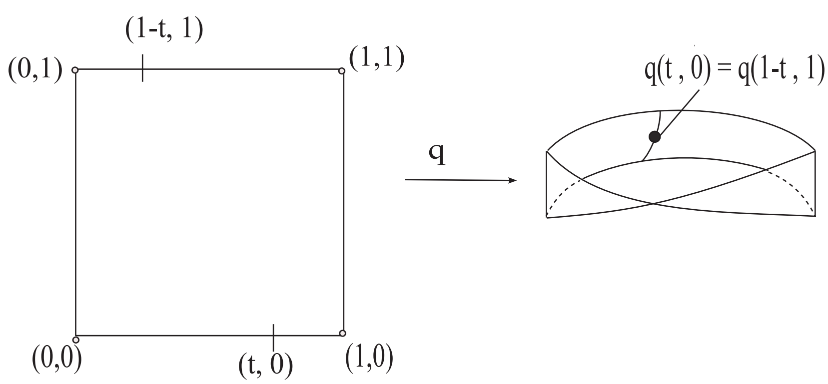

FIGURA 25. La Banda de Moebius.

o $t = s = 1$. El espacio $X/\sim$ es *el cono de* X y es denotado por $Con(X)$ (figura 26).

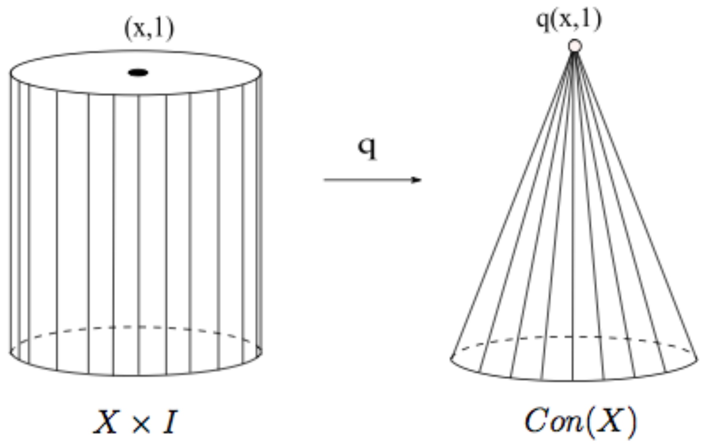

Figura 26. El Cono de X

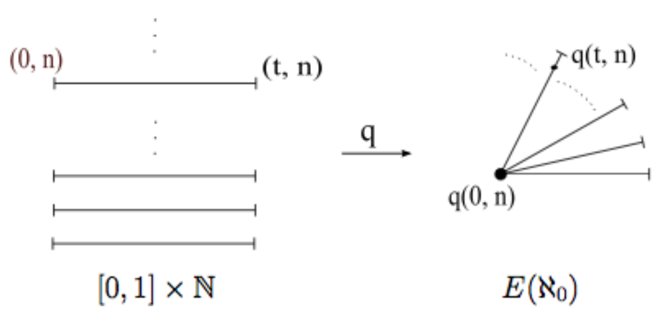

Figura 27. El erizo no metrizable de $\aleph_0$ espinas.

4.35. Ejemplo. *El erizo no metrizable de $\aleph_0$ espinas.* Veamos ahora un último ejemplo de un espacio cociente. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea I_n el espacio $[0,1] \times \{n\}$ en donde el intervalo $[0,1]$ está considerado con su topología usual. Tomemos $Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$. En Y identifiquemos en un solo punto $\widehat{0}$ a todos los elementos de la forma $(0, n)$. Es decir, definimos en Y la relación de equivalencia $(x, n) \sim (y, m)$ si, y sólo si, $x = y$ y $n = m$ ó $x = y = 0$. El espacio $Y/\sim$ es el *erizo no metrizable de* $\aleph_0$ *espinas* $E(\aleph_0)$ (véase la figura 27). Observe que cada I_n es homeomorfo al intervalo $[0, 1]$ y Y es el espacio producto $[0, 1] \times \mathbb{N}$, que es un espacio metrizable (véase el ejercicio 4.D.(3)). Cuando pasamos al cociente y consideramos el espacio $E(\aleph_0)$, los abiertos euclidianos en cada I_n que no contienen a $\widehat{0}$, siguen siendo abiertos en $E(\aleph_0)$, de tal manera que en cada punto de $E(\aleph_0)$ de la forma (x, n) con $x > 0$, podemos encontrar una base local numerable. Sin embargo, $\widehat{0}$ no posee una base local numerable en $E(\aleph_0)$ (vea ejercicio 4.E.8). (Compare con el espacio definido en el ejercicio 1.A.4).

Ejercicios

4.A. Topologías débiles inducidas por funciones

(1) Consideremos el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales con la topología $\mathcal{T}$ definida en el ejercicio 1.B.(5), y sea $j : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ la función inclusión: $j(n) = n$. ¿Cuál es la topología en $\mathbb{N}$ inducida por j y $\mathcal{T}$?

(2) Sea $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_1)$ el espacio descrito en el ejercicio 1.C.(3), y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ definida por $f(x)$ es el menor número natural n tal que $|x| \leqslant n$. Describa la topología ${}_f\mathcal{T}$ en $\mathbb{R}$.

(3) (*Espacios completamente regulares*) Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, sea $C(X, I)$ la colección de funciones continuas de X en el intervalo euclidiana $I = [0, 1]$. Sea $C \subseteq C(X, I)$ no vacío. Demuestre que si $\mathcal{T}$ coincide con ${}_C\mathcal{T}$, entonces, para cualquier conjunto cerrado F de X y cualquier punto $x \in X \setminus F$, existe una función $f \in C(X)$ tal que $f(x) = 0$ y $f(F) \subseteq \{1\}$. A un espacio que cumple con esta propiedad se le llama *espacio completamente regular*; a estos espacios los estudiaremos con detenimiento en el capítulo 6.

4.B. Producto de dos espacios topológicos

(1) Sean X y Y dos espacios topológicos, y sean E y F dos subconjuntos de X y Y, respectivamente. Demuestre que en el producto topológico $X \times Y$ se satisfacen las siguientes relaciones:

(a) $\mathrm{cl}(E \times F) = \mathrm{cl}(E) \times \mathrm{cl}(F)$.
(b) $\mathrm{int}(E \times F) = \mathrm{int}(E) \times \mathrm{int}(F)$.
(c) $\mathrm{fr}(E \times F) = [\mathrm{fr}(E) \times \mathrm{cl}(F)] \cup [\mathrm{cl}(E) \times \mathrm{fr}(F)]$.

(2) Sean X, Y, E y F como en el ejercicio anterior. Demuestre que $E \times F$ es fronterizo, denso en ninguna parte o denso en sí mismo si al menos uno de los conjuntos E ó F satisface la propiedad correspondiente.

(3) La topología del espacio euclidiano $\mathbb{R}^2$ coincide con la topología producto en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Demuestre que la proyección $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ no es una función cerrada.

(4) Si X tiene la topología discreta (resp., indiscreta, cofinita), entonces X^2 tiene la topología discreta (resp., indiscreta, cofinita).

(5) Para cualquier espacio X, la diagonal $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ en $X \times X$, considerada con la topología relativa, es un espacio homeomorfo a X.

(6) La diagonal Δ definida en el ejercicio anterior, es un subconjunto abierto en $X \times X$ si y sólo si X es discreto.

(7) Pruebe que el conjunto $\{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ es discreto y cerrado en el cuadrado de la línea de Sorgenfrey $\mathcal{L}_{\mathcal{S}} \times \mathcal{L}_{\mathcal{S}}$. Además, verifique que $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ es un subconjunto denso en $\mathcal{L}_{\mathcal{S}} \times \mathcal{L}_{\mathcal{S}}$ (véase el ejemplo 1.42).

(8) Demuestre que el cuadrado lexicográfico (ejemplo 1.38 y ejercicio 1.G.(6)) no es homeomorfo a $I \times I$.

4.C. Producto de una familia arbitraria de espacios topológicos

(1) Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_j) : j \in J\}$ una familia de espacios topológicos. Para cada $j \in J$, supongamos que $\mathcal{B}_j$ es una base para $\mathcal{T}_j$. Demuestre que la colección $\{\pi_j^{-1}[B_j] : j \in J \text{ y } B_j \in \mathcal{B}_j\}$ forma una subbase para la topología producto en $X = \prod_{j \in J} X_j$. Por lo tanto, la colección de subconjuntos de X de la forma $\prod_{j \in J} A_j$, en donde $A_j \in \mathcal{B}_j$ para una colección finita $F \subseteq J$, y $A_j = X_j$ si $j \notin F$, forma una base para X.

(2) Sea $J \neq \emptyset$ y sea $\prod_{j \in J} X_j$ un producto de espacios topológicos no vacíos. Sea $i \in J$, y para cada $j \in J \setminus \{i\}$ sea a_j un elemento en X_j. Demostrar que el subespacio $Y_i = \{x \in \prod_{j \in J} X_j : \ x_i \in X_i, \text{ y } \forall\, j \in J \setminus \{i\} \bigl(x_j = a_j \bigr) \}$ de $\prod_{j \in J} X_j$ es homeomorfo a X_i.

(3) Sean J y K dos conjuntos de la misma cardinalidad. Sea $\phi : J \to K$ una función biyectiva. Sean $\{X_j : j \in J\}$ y $\{X_k : k \in K\}$ dos familias de espacios topológicos tales que, para cada $j \in J$, $X_j = X_{\phi(j)}$. Entonces, los espacios $\prod_{j \in J} X_j$ y $\prod_{k \in K} X_k$ son homeomorfos. (Es decir, el producto topológico es conmutativo.)

(4) Sean J un conjunto y $\{J_k : k \in K\}$ una partición de J (es decir, $J = \bigcup_{k \in K} J_k$ y $J_k \cap J_l = \emptyset$ si $k \neq l$). Sea $\{X_j : j \in J\}$ una familia de espacios topológicos. Entonces, los espacios producto $\prod_{j \in J} X_j$ y

$\prod_{k\in K}(\prod_{j\in J_k} X_j)$ son homeomorfos. (Es decir, el producto topológico es asociativo.)

(5) Sean $\{X_j : j \in J\}$ y $\{Y_j : j \in J\}$ dos familias de espacios tales que, para cada $j \in J$, X_j es homeomorfo a Y_j. Demuestre que $\prod_{j\in J} X_j \cong \prod_{j\in J} Y_j$.

(6) Dar un ejemplo de un espacio X tal que $X \times X \cong X$. Exhiba tres espacios X, Y y Z tales que $X\times Y \cong X\times Z$ pero Y no es homeomorfo a Z. (Es también cierto que existen espacios X y Y tales que $X\times X \cong Y \times Y$ pero X no es homeomorfo a Y.)

(7) Sea $\{X_j : j \in J\}$ una colección más que numerable de espacios no indiscretos. Entonces $X = \prod_{j\in J} X_j$ no es primero numerable.

(Sugerencia: Para cada $j \in J$ tomamos un abierto A_j en X_j diferente de $\emptyset$ y de X_j. Fijamos $p_j \in A_j$. Sea $p = (p_j)_{j\in J} \in X$ y sea $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ una colección de abiertos que contienen a p. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que cada B_n es un abierto canónico, de tal manera que a cada $n \in \mathbb{N}$ le podemos asociar el conjunto finito $J_n = \{j \in J : \pi_j[B_n] \neq X_j\}$. El conjunto $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n$ es numerable. Tómese $j \in J \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n$. Demuestre que $\pi_j^{-1}[A_j]$ es un abierto en X que contiene a p y no contiene a ningún B_n.)

(8) (*El σ-producto*) Sea $\{X_j : j \in J\}$ una familia de espacios topológicos no vacíos, y sea $z \in \prod_{j\in J} X_j$. El *σ-producto de $X = \prod_{j\in J} X_j$ centrado en z*, denotado por $\sigma_z(X)$, es el subespacio $\{x \in X : |\{j \in J : x_j \neq z_j\}| < \aleph_0\}$ del producto Tychonoff X. Demuestre que si J es un conjunto infinito, entonces $\sigma_z(X)$ es denso en X, denso en sí mismo y fronterizo. En el caso en que J es finito, entonces $\sigma_z(X) = X$.

(9) (*Espacios de Cantor y de Baire*) Denotemos con 2 al espacio discreto con dos elementos: $\{0, 1\}$, y sea κ un número cardinal infinito. Al producto 2^κ se le conoce como *espacio de Cantor de peso κ*. Al producto de una colección numerable de copias del espacio discreto κ: κ^ω, le llamaremos *espacio de Baire de peso κ*. Como en el ejemplo 4.16, determine la forma de los elementos de una base para 2^κ y de los elementos de una base local para un $f \in 2^\kappa$. Repita el ejercicio para el espacio de Baire κ^ω.

(10) Demuestre que el producto numerable $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ de espacios separables es un espacio separable.

(Sugerencia: Sea D_n un denso numerable de X_n, sea $z \in X$ y sea $D = \{x \in \sigma_z(X) : x_n \neq z_n \Rightarrow x_n \in D_n\}$. Demuestre que D es denso en X y es numerable.)

En realidad la separabilidad es una propiedad $\mathfrak{c}$-productiva; esto es, el producto de Tychonoff de a lo más $\mathfrak{c}$ espacios separables es un espacio separable. Más aún, se tiene el siguiente resultado fundamental (para una demostración vea [26] pag 81):

Teorema de Hewitt-Marczewski-Pondiczery. Si $d(X_j) \leqslant \mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ para cualquier $j \in J$ y $|J| \leqslant 2^{\mathfrak{m}}$, entonces $d(\prod_{j\in J} X_j) \leqslant \mathfrak{m}$.

Observe que en el siguiente corolario no es necesaria ninguna limitante en la cardinalidad de J.

Corolario.
Si $d(X_j) \leqslant \mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ para cada $j \in J$, entonces $c(\prod_{j\in J} X_j) \leqslant \mathfrak{m}$.

(11) Un espacio producto $X = \prod_{j\in J} X_n$ es primero numerable si y sólo si cada X_j es primero numerable y $|J| \leqslant \aleph_0$.

(12) (*La topología de cajas*) Sea $\{(X_j, \mathcal{T}_j) : j \in J\}$ una familia de espacios topológicos no vacíos. Demuestre que la colección $\mathcal{B} = \{\prod_{j\in J} A_j : \forall\ j \in J, A_j \in \mathcal{T}_j\}$ constituye una base para una topología $\mathcal{T}_\square$ llamada la *topología de cajas* en el producto cartesiano $X = \prod_{j\in J} X_j$. Si J es finito, entonces $\mathcal{T}_\square$ es la topología Tychonoff en X. Demuestre que si $J = \mathbb{N}$ y cada X_j es la línea real $\mathbb{R}$, entonces $(X, \mathcal{T}_\square)$ no es separable y no es primero numerable (compare con la proposición 4.19 y con el ejercicio anterior).

(13) Sean $\{\, X_\alpha : \alpha \in A \,\}$ una familia de espacios topológicos y $B \subseteq A$. La función

$$\pi_B \ : \prod\{\, X_\alpha : \alpha \in A \,\} \to \prod\{\, X_\alpha : \alpha \in B \,\}$$

definida por

$$\pi_B(x) = x \restriction B$$

para todo $x \in \prod\{\, X_\alpha : \alpha \in A \,\}$ se llama *proyección* del producto $\prod\{\, X_\alpha : \alpha \in A \,\}$ a su subproducto $\prod\{\, X_\alpha : \alpha \in B \,\}$. Entonces, $(\pi_B(x))_\alpha = x_\alpha$ para todo $\alpha \in B$.

Compruebe que la función π_B es continua, abierta y suprayectiva.

(14) Para cada elemento j en un conjunto J, sea $f_j : X_j \to Y_j$ una función entre espacios topológicos (no vacíos) X_j y Y_j. Podemos definir la *función producto* $\prod f_j$ con dominio $\prod_{j\in J} X_j$ y con valores en $\prod_{j\in J} Y_j$ de la siguiente manera:

$$\forall\ i \in J\ [\pi_i \circ (\prod f_j)](\xi) = (\prod f_j)(\xi)(i) = f_i(\xi(i))$$

Demuestre que $\prod f_j$ es continua (respectivamente, abierta) si y sólo si cada f_j es continua (respectivamente, abierta).

(15) Sea X un espacio topológico y para cada elemento j en un conjunto J, sea $f_j : X \to Y_j$ una función en donde cada Y_j es un espacio topológico. Definimos ahora la *función diagonal* Δf_j (o el *producto*

diagonal de las funciones f_j) con dominio X y con valores en $\prod_{j\in J} Y_j$ como sigue:

$$\forall x \in X \ \forall\ i \in J \ \ (\Delta f_j)(x)(i) = f_i(x).$$

Demuestre que Δf_j es continua si y sólo si cada f_j es continua. Además, muestre que si Δf_j es abierta, entonces cada f_j es también abierta.

4.D. Topologías fuertes definidas por funciones

(1) Demuestre la proposición (1) del teorema 4.20.

(2) Demuestre el teorema 4.22.

(3) Si para cada elemento j de un conjunto J, el espacio X_j es homeomorfo a un espacio X, entonces $\bigoplus_{j\in J} X_j$ es homeomorfo a $X \times J$, en donde J tiene la topología discreta.

(4) Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y sea $\mathcal{C}$ una cubierta de X (esto es, $\bigcup \mathcal{C} = X$). En cada $C \in \mathcal{C}$ cosideremos la topología $\mathcal{T}_C$ que C hereda de $(X, \mathcal{T})$. Sea $\mathcal{T}_s$ la topología suma en X. Demuestre que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_s$, y determine $\mathcal{T}_s$ cuando $\mathcal{C} = \{\{x\} : x \in X\}$. Es natural preguntarnos:

($\star$) ¿Bajo qué condiciones en $\mathcal{C}$, la colección $\mathcal{T}_s$ coincide con $\mathcal{T}$?

Observe que planteada de modo tan general, la respuesta a ($\star$) puede ser muy variada según la naturaleza de $\mathcal{C}$. Responda a ($\star$) cuando:

(a) Cada $C \in \mathcal{C}$ es abierto en X.
(b) $\mathcal{C}$ es una partición finita formada por cerrados de X.
(c) Cada $C \in \mathcal{C}$ es cerrado y para cada $C, D \in \mathcal{C}$, ó $C \subseteq D$ ó $D \subseteq C$.
(d) $\mathcal{C}$ satisface las condiciones en (c) y es numerable infinita.
(e) Dé un ejemplo de un espacio X y dé una cubierta $\mathcal{C}$ formada por dos elementos, tal que $\mathcal{T}_s$ no es igual a $\mathcal{T}$.

(5) Una propiedad topológica P es *aditiva* (resp., *numerablemente aditiva*), si cada vez que se considere una colección $\{X_j : j \in J\}$ en donde J tiene cardinalidad arbitraria (respectivamente, $|J| \leqslant \aleph_0$) de espacios topológicos que satisfacen P, entonces $\bigoplus_{j\in J} X_j$ también cumple P. Demuestre que primero numerable, Fréchet y secuencial, son propiedades aditivas, y que segundo numerable, separable y Lindelöf son numerablemente aditivas.

(6) Determine el peso, la densidad, el caracter y la celularidad de $\bigoplus_{j\in J} X_j$ en términos de $|J|$ y del peso, la densidad, el carácter y la celularidad, respectivamente, de los espacios X_j.

4.E. Los cocientes de un espacio topológico

(1) Verifique que cualquier identificación biyectiva es un homeomorfismo.

(2) Demuestre que cualquier retracción (ejercicio 3.A.(15)) es una identificación.

(3) Sea $f : X \to Y$ una identificación y sea $h : X \to Z$ una función continua. Supongamos que h es constante en cada fibra $f^{-1}[y]$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & (Y, \mathcal{T}_f) \arrow[d, "g = h \circ f^{-1}"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

Entonces:

(a) $g = h \circ f^{-1}$ es una función continua y $g \circ f = h$.

(b) La función $g : Y \to Z$ es abierta (resp., cerrada) si y sólo si $h[U]$ es abierto (resp., cerrado) para todo subconjunto abierto (resp., cerrado) U tal que $U = f^{-1}f[U]$.

(c) h es una identificación si y sólo si g lo es.

(d) Si h es una identificación y los conjuntos $\{f^{-1}[y] : y \in Y\}$ y $\{h^{-1}[y] : y \in Y\}$ coinciden, entonces g es un homeomorfismo.

(4) Consideremos en $\mathbb{R}^2$ la siguiente relación de equivalencia: $(a, b) \sim (x, y)$ si y sólo si $b = y$. Entonces $\mathbb{R}^2/\sim$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$.

(5) Para cada $r \in [0, \infty)$, denotemos por C_r a la circunferencia en $\mathbb{R}$ con centro en $(0, 0)$ y radio r. Sea $\mathcal{D} = \{C_r : r \in [0, \infty)\}$. Pruebe que el espacio partición $(\mathcal{D}, \mathcal{T}_{\mathcal{D}})$ es homeomorfo a $[0, \infty)$ considerado con su topología euclidiana.

(6) Sea D^n la bola unitaria cerrada en $\mathbb{R}^n$; es decir,

$$D^n = \{(x_1, ..., x_n) : \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \leqslant 1\}.$$

Sea S^{n-1} la esfera unitaria $\{(x_1, ..., x_n) : \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = 1\}$. Tomemos en D^n la partición $\mathcal{D} = \{\{\overline{x}\} : \overline{x} \in D^n \setminus S^{n-1}\} \cup \{S^{n-1}\}$. Demuestre que el espacio $(\mathcal{D}, \mathcal{T}_{\mathcal{D}})$ es homeomorfo a la esfera unitaria S^n en $\mathbb{R}^{n+1}$.

(7) Consideremos el conjunto $Y = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ considerado con su topología euclidiana. Sea X el producto $Y \times \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ con la topología discreta). Observe que X es un espacio metrizable numerable (y por lo tanto, segundo numerable). Consideremos en X la relación: $(y, n) \sim (z, k)$ si $y = z = 0$ o si $y = z \neq 0$ y $n = k$ (estamos identificando en un solo punto $\widehat{0}$ a todos los elementos de la forma $(0, n)$). Al espacio $X/\sim\, = V(\aleph_0)$ le podemos llamar *abanico numerable* (véase la figura 28 y compare este espacio con el erizo no metrizable del ejemplo 4.35). Demuestre que:

(a) Cada punto de la forma $q[(y, n)]$ es aislado en $V(\aleph_0)$ si $y \neq 0$.

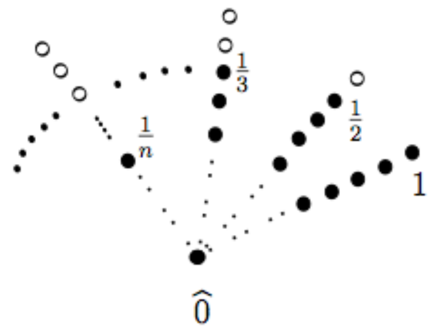

FIGURA 28. En obscuro una vecindad del $\widehat{0}$ en el abanico numerable no metrizable.

(b) Si B es un subconjunto abierto de $V(\aleph_0)$ que contiene a $\widehat{0}$, entonces para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $n(B,k) \in \mathbb{N}$ tal que $(1/m, k) \in q^{-1}[B]$ para cualquier $m \geqslant n(B,k)$.
(c) La proyección natural $q : X \to V(\aleph_0)$ es una función cerrada.
(d) $V(\aleph_0)$ es separable.
(e) $V(\aleph_0)$ no es primero numerable
(Sugerencia: Tome una colección numerable de abiertos en $V(\aleph_0)$ que contienen a $\widehat{0}$: $B_1, \ldots, B_k, \ldots$ Tome los números naturales $n(B_1,1), n(B_2,2), \ldots n(B_k,k), \ldots$ definidos en (b). Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $A_k = \{(0,k)\} \cup \{(\frac{1}{m}, k) : m > n(B_k,k)\} \subseteq X$. Por fin, tome el conjunto $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$. Demuestre que $q[A]$ es abierto en $V(\aleph_0)$, contiene a $\widehat{0}$ y no contiene a ningún B_n.)
(Al carácter de $\widehat{0}$ en $V(\aleph_0)$ se le denota como $\mathfrak{d}$ y es un número cardinal que satisface $\aleph_1 \leqslant \mathfrak{d} \leqslant \mathfrak{c}$.)

(8) Siga un análisis semejante al desarrollado en el ejercicio anterior para demostrar que los espacios $E(\aleph_0)$ (ejemplo 4.35) y $(\mathcal{D}_3, \mathcal{T}_{\mathcal{D}_3})$ (ejemplo 4.31) son espacios separables pero no tienen base numerable en el correspondiente punto distinguido $\widehat{0}$. A diferencia de $V(\aleph_0)$, los espacios $E(\aleph_0)$ y $(\mathcal{D}_3, \mathcal{T}_{\mathcal{D}_3})$ no son numerables y no tiene puntos aislados.

Ejercicios adicionales del capítulo 4

4.F. Grupos topológicos

Sea $(G, *)$ un grupo algebraico (no necesariamente abeliano). Sea $\mathcal{T}$ una topología para el conjunto G. Diremos que la terna ordenada $(G, *, \mathcal{T})$ es un *grupo topológico* si las funciones $f : G \times G \to G$ y $g : G \to G$ definidas como $f(x, y) = x * y$ y $g(x) = x^{-1}$, son funciones continuas (en $G \times G$ se considera a la topología producto). Si H es un subgrupo de $(G, *)$, entonces la función producto y la función inversa siguen siendo continuas en H cuando se toma en H a la topología de subespacio. De esta manera, la terna ordenada $(H, *, \mathcal{T}_H)$ es un grupo topológico. En este caso diremos que $(H, *, \mathcal{T}_H)$ es un *subgrupo topológico de* $(G, *, \mathcal{T})$.

Si A y B son subconjuntos del grupo topológico G, entonces denotaremos con $A * B$ y con A^{-1} a los conjuntos $\{a * b : a \in A, b \in B\}$ y $\{x^{-1} : x \in A\}$, respectivamente. En el caso en que A es unipuntual, digamos $A = \{x\}$, escribiremos $x * B$ o, simplemente xB, en lugar de $\{x\} * B$. En particular, al producto $a * b$ lo denotaremos también como ab.

(1) Del ejercicio 3.A.(6) se desprende que el conjunto de los números reales considerado con su suma usual, asi como el conjunto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ con el producto usual de números reales, son ejemplos de grupos topológicos (verifique esta afirmación). Además no es difícil demostrar que $(\mathbb{Z}, +)$ y $(\mathbb{Q}, +)$ son subgrupos topológicos de $(\mathbb{R}, +, \mathcal{T}_e)$.

(2) Demuestre que el producto Tychonoff $G = \prod_{\alpha \in J} G_\alpha$ de una colección no vacía $\{(G_\alpha, *_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) : \alpha \in J\}$ de grupos topológicos es un grupo topológico cuando se considera el producto $f * g$ de elementos $f, g \in G$ como el elemento en G que asocia a cada $\beta \in J$, el elemento $f(\beta) *_\beta g(\beta)$ en G_β.

(3) En particular, si se considera en la recta real $\mathbb{R}$ su suma usual, y X es un conjunto no vacío, entonces el producto $\mathbb{R}^X$ es un grupo topológico. Si además, X es un espacio topológico, entonces el espacio de funciones continuas $C_p(X)$ (véase 6.D.(4)) es un subgrupo topológico de $\mathbb{R}^X$.

(4) Verifique que para todo grupo topológico $(G, *, \mathcal{T})$ y todo $a \in G$, las funciones $f : G \to G$ Y $g : G \to G$ definidas por $f(x) = a * x$ y $g(x) = x * a$ son homeomorfismos.

(5) Un espacio topológico X es *homogéneo* si para todo par de puntos $x, y \in X$ existe un homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $h(x) = y$. Demuestre que todo grupo topológico es un espacio homogéneo (véase el inciso (4)).

Intuitivamente, uno puede pensar que en un espacio homogéneo la estructura topológica alrededor de cada punto no varía al movernos a través del espacio.

(6) Para cada elemento j en un conjunto J, sea $(G_j, *_j, \mathcal{T}_J)$ un grupo topológico no vacío. Consideremos en $\prod_{j\in J} G_j$ el producto $*$ definido en el inciso (2). Pruebe que el producto caja $\square_{j\in J} G_j$ con este producto $*$ es un grupo topológico.

(7) (*El* Σ*-producto.*) Dada una colección $\{X_j : j \in J\}$ de conjuntos, y elegido $a_j \in X_j$ para cada $j \in J$, llamamos Σ*-producto de* $\{X_j : j \in J\}$ *centrado en* $(a_j)_{j\in J}$ al subespacio

$$\sum_{j\in J} X_j = \{(x_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} X_j : |\{j \in J : x_j \neq a_j\}| < \aleph_0\}$$

de $\prod_{j\in J} X_j$. Verifique que si cada X_j es un grupo topológico, entonces cualquier Σ-producto, y cualquier σ-producto, de $\{X_j : j \in J\}$ es un subgrupo topológico de $\prod_{j\in J} X_j$ cuando lo consideramos con la operación definida en (2).

(8) Si A y B son dos subconjuntos de un grupo topológico G, entonces $\mathrm{cl}_G A * \mathrm{cl}_G B = \mathrm{cl}_G(A * B)$ y $(\mathrm{cl}_G A)^{-1} = \mathrm{cl}_G(A^{-1})$.

(9) Sea G un grupo topológico y H un subgrupo de G. Demuestre que $\mathrm{cl}_G H$ es también un subgrupo de G.

(10) Si x es un punto interior de un subconjunto A de un grupo topológico G, entonces existe una vecindad V del elemento identidad e de G tal que $xV \subseteq A$.

(11) Un subgrupo H de un grupo topológico G es abierto si y sólo si el interior de H no es vacío.

(Sugerencia: si x es un punto interior de H, existe una vecindad V de e tal que $xV \subseteq H$. Demuestre que para cada $y \in H$, $yV \subseteq H$.)

(12) Un subgrupo H de un grupo topológico G es discreto si y sólo si H tiene un punto aislado.

4.G. Espacios topológicos linealmente ordenados

(1) Consideremos el producto cartesiano $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ de todas las funciones con dominio $\mathbb{N}$ y valores en $\mathbb{Z}$. Podemos definir en $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ la relación $\leqslant$ definida por: $f < g$ si $f(n) <_{\mathbb{Z}} g(n)$, en donde n es el primer natural s en el cual $f(s) \neq g(s)$, y $<_{\mathbb{Z}}$ es el orden usual en el conjunto de números enteros. Demuestre que $(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \leqslant)$ es un conjunto linealmente ordenado.

(2) Tomemos ahora al conjunto $\mathbb{Z}$ con su topología discreta. Sea $\mathcal{T}$ la topología producto en $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. Consideremos la topología $\mathcal{T}_{\leqslant}$ dada por el orden $\leqslant$ definido en (1). Pruebe que estas dos topologías coinciden.

(De hecho, es posible demostrar que el producto $(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathcal{T}_{\leqslant})$ es homeomorfo al espacio $\mathbb{P}$ de los números irracionales con su topología heredada de la recta real euclidiana.)

(3) Demuestre que para el espacio $V(\aleph_0)$ se cumplen las relaciones

$$\chi(V(\aleph_0)) > \aleph_0 = c(V(\aleph_0)).$$

Además, si X es un espacio discreto no numerable, entonces $\chi(X) = \aleph_0 < c(X)$.

(4) Pruebe que siempre se cumple $\chi(X) \leqslant c(X)$ para cualquier espacio topológico linealmente ordenado.

(5) Compruebe que $\aleph_0 = \chi([0, \omega_1)) < c([0, \omega_1)) = \aleph_1$. Demuestre también, usando la proposición A.35, que $\chi(\omega_1, [0, \omega_1]) = \aleph_1$.

4.H. Espacios metrizables

(1) Verifique que cualquier subespacio de un espacio metrizable es también metrizable.

(2) Compruebe que cualquier espacio discreto es metrizable.

(3) Sea $(X_n, \mathcal{T}_n)$ un espacio metrizable para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea ρ_n una métrica acotada por 1 en X_n tal que $\mathcal{T}_{\rho_n} = \mathcal{T}_n$ (véase 2.A.8). Sea X el producto topológico $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Definamos en $X \times X$ la función

$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_n(f(n), g(n))}{2^n}.$$

Demuestre que ρ es una métrica en X y que $\mathcal{T}_\rho$ coincide con la topología producto en X.

(4) Demuestre que un espacio de Cantor 2^κ es metrizable si y sólo si $\kappa = \aleph_0$. Además, verifique que cualquier espacio de Baire κ^ω es metrizable.

Capítulo 5

Axiomas de separación

En 1914 Felix Hausdorff introdujo en su *Grundzüge der Mengenlehre* [33] la noción de espacio topológico, definiéndolo esencialmente como un conjunto X provisto de una familia $\{\mathcal{B}(x) : x \in X\}$ de colecciones de subconjuntos de X, que tienen las siguientes cuatro propiedades:

(1) Para todo $x \in X$, $\mathcal{B}(x) \neq \emptyset$, y además para cada $U \in \mathcal{B}(x)$, $x \in U$.
(2) Si $y \in U \in \mathcal{B}(x)$, entonces existe un $V \in \mathcal{B}(y)$ tal que $V \subseteq U$.
(3) Para todo $U_1, U_2 \in \mathcal{B}(x)$, existe un $U \in \mathcal{B}(x)$ tal que $U \subseteq U_1 \cap U_2$.
(4) Para cualquier pareja de puntos distintos x, y de X, existen $U \in \mathcal{B}(x)$ y $V \in \mathcal{B}(y)$ tales que $U \cap V = \emptyset$.

Pero hoy día es más común utilizar la variante de definición de topología propuesta por Alexandroff (véase la definición 1.8) que por cierto no es del todo equivalente a la definición de Hausdorff. La diferencia entre ambas es la condición (4) en la definición de Hausdorff, la cual postula una manera de separar puntos en un espacio topológico, utilizando para ello vecindades de los puntos.

Esta manera de separar puntos, conocida hoy día como axioma de separación de Hausdorff o axioma de separación T_2, permite la extensión de ciertos resultados del análisis clásico a la topología.

Dedicaremos gran parte del presente capítulo al estudio de esta y otras formas de separación de puntos por medio de vecindades.

1. Espacios T_0, T_1 y T_2

El primer axioma de separación que estudiaremos fue introducido por A. N. Kolmogoroff, y es conocido como axioma T_0.

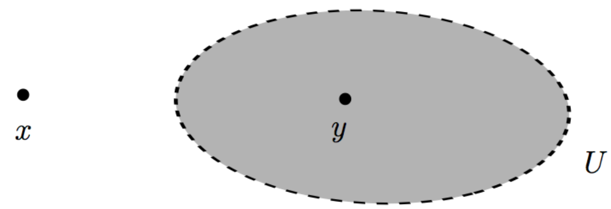

FIGURA 29. En un espacio T_0, dados dos puntos diferentes es posible hallar un abierto que contenga a uno de los puntos pero no al otro.

5.1. DEFINICIÓN. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ será llamado *espacio* T_0 (también se dice que $\mathcal{T}$ es una *topología* T_0) si para cada par de puntos distintos x y y de X existe un subconjunto abierto U tal que U contiene a uno de los puntos x ó y, pero no al otro; esto es, para cada par de puntos distintos x y y de X, existe un abierto U tal que $|U \cap \{x, y\}| = 1$. (Véase Figura 5.1).

No todos los espacios topológicos son espacios T_0. Por ejemplo, cualquier espacio topológico X (formado por más de un punto) cuya topología sea de la forma

$$\mathcal{T} = \{X\} \cup \{A \cap Y \ : \ A \text{ es un subconjunto propio de } X\},$$

donde $Y \subseteq X$ es tal que $|X \setminus Y| > 1$, no es un espacio T_0 (observe que cuando $Y = \emptyset$, la topología de X es la indiscreta).

No es muy complicado verificar que cualquier espacio discreto y cualquier espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ es T_0 y que toda topología más fina que una topología T_0 es también una topología de este tipo. En particular, el plano radial y la línea de Sorgenfrey son espacios T_0. Además, cualquier modificación de una topología T_0 de tipo

$$\mathcal{T}_Y = \{A \cup E \ : \ A \in \mathcal{T} \text{ y } E \subseteq Y\}$$

es también una topología T_0 (véase el ejemplo 1.12 para más detalles de la modificación $\mathcal{T}_Y$). Por esta razón, la línea de Michael es T_0.

5.2. EJEMPLOS.

(1) Un ejemplo clásico de un espacio T_0 es el espacio de Sierpiński $\mathcal{S} = (X, \mathcal{T})$, donde $X = \{0, 1\}$ y $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{0\}\}$. El espacio de Sierpinski es un espacio T_0 porque $\{0\}$ es un elemento de

la topología en X que contiene a 0 pero no al 1, y los únicos elementos de X son 0 y 1.

(2) Considere en $\mathbb{N}$ la familia $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{N}\} \cup \{\{1, 2, \ldots, n\} : n \in \mathbb{N}\}$ (véase el ejercicio 1.C.(3)). No es muy difícil verificar que $\mathcal{T}$ es una topología en $\mathbb{N}$. El espacio topológico $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ es un espacio topológico T_0.

(3) Sea $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$. La familia $\mathcal{T}$ es una topología en $\mathbb{R}$, y el espacio $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ es un espacio T_0. Porque si $a < b$ entonces $(\frac{a+b}{2}, \infty)$ es un subconjunto abierto de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ que contiene a b, pero no a a.

Es muy sencillo demostrar que todo subespacio de un espacio T_0 es un espacio T_0 (véase el problema 5.A.(12)). Por otra parte, note que como todo espacio topológico es la imagen continua de un espacio discreto (para convencerse de esto, basta que el lector observe que si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio arbitrario entonces la función $id_X : (X, \mathcal{P}(X)) \to (X, \mathcal{T})$ es continua y biyectiva), tenemos que las imágenes continuas (incluso imágenes continuas y biyectivas) de espacios T_0 no son necesariamente espacios T_0. Es también sencillo probar que la propiedad T_0 sí es una propiedad topológica. Con respecto al producto de espacios T_0 tenemos el siguiente resultado cuya demostración dejamos al lector en el ejercicio 5.A.(14).

5.3. Proposición. *Si $\{(X_j, \mathcal{T}_j) : j \in J\}$ es una familia de espacios topológicos no vacíos, entonces el producto $\prod_{j \in J} X_j$ es un espacio T_0 si y sólo si cada espacio X_j es un espacio T_0.*

La dificultad para que una topología cumpla con el axioma de separación T_0 está en poder garantizar que las cerraduras de conjuntos unipuntuales distintos sean distintas:

5.4. Teorema. *Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es un espacio T_0 si y sólo si para todo $x, y \in X$ con $x \neq y$, se tiene que $\mathrm{cl}(\{x\}) \neq \mathrm{cl}(\{y\})$.*

Demostración. $\Rightarrow]$ Supongamos que $x, y \in X$ son tales que $x \neq y$. Como X es un espacio T_0, existe $U \in \mathcal{T}$ tal que $|U \cap \{x, y\}| = 1$. Podemos suponer, sin perder generalidad en el argumento, que $\{x\} = U \cap \{x, y\}$. Entonces U es una vecindad de x que no intersecta al conjunto $\{y\}$. Por este motivo, $x \in \mathrm{cl}(\{x\}) \setminus \mathrm{cl}(\{y\})$.

$\Leftarrow]$ Sean x, y puntos distintos de X. Supongamos que $\mathrm{cl}(\{y\}) \setminus \mathrm{cl}(\{x\}) \neq \emptyset$. Elijamos un punto $z \in \mathrm{cl}(\{y\}) \setminus \mathrm{cl}(\{x\})$. Como $z \notin \mathrm{cl}(\{x\})$, existe un subconjunto abierto U de X tal que $z \in U$ y $U \cap \{x\} =$

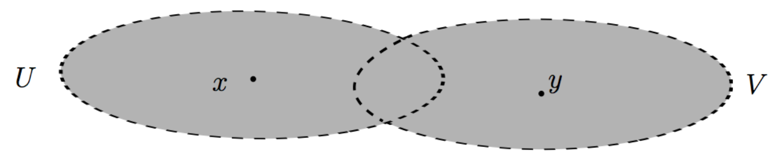

FIGURA 30. En espacios T_1, es posible que haya vecindades de un punto x que intersecten a cualquier vecindad de otro punto y. No obstante, existe una vecindad de x que no contiene a y y vice-versa

$\emptyset$. Entonces $y \in U$ y $x \notin U$. La demostración del otro posible caso es análoga. ⊠

Ahora introducimos al segundo axioma de separación que estudiaremos. Este axioma de separación, y las propiedades de la clase de los espacios que éste genera, fueron estudiados por primera vez en 1907 por F. Riesz [52].

5.5. DEFINICIÓN. Diremos que un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es un espacio T_1, o que $\mathcal{T}$ es una *topología* T_1, si para cualesquiera puntos distintos x y y de X, existen subconjuntos abiertos U y V de X tales que $x \in U \setminus V$ y $y \in V \setminus U$. (Véase figura **??**)

Es claro que todo espacio T_1 es un espacio T_0. Pero el recíproco no es cierto, y el espacio de los segmentos iniciales $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ (véase el inciso (2) del ejemplo 5.2) es un ejemplo de un espacio T_0 pero no T_1 porque si $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ son elementos para los cuales $n_1 < n_2$, entonces cualquier abierto que contenga al número natural n_2 siempre contiene al número n_1.

Uno de los ejemplos más importantes de una topología T_1 es la topología cofinita $\mathcal{T}_c$, definida en cualquier conjunto que posea al menos dos elementos. En efecto, supongamos que X tiene cardinalidad mayor o igual que dos, y que X tiene la topología cofinita. Si $x, y \in X$ son puntos distintos de X entonces podemos construir abiertos U y V con las propiedades deseadas simplemente definiendo a $U = X \setminus \{y\}$ y a $V = X \setminus \{x\}$.

La relevancia de los espacios T_1 es que en todos ellos los conjuntos unipuntuales son siempre subconjuntos cerrados; de hecho, como veremos a continuación, esto caracteriza a los espacios T_1.

5.6. Teorema. *Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es un espacio T_1 si y sólo si para todo $x \in X$, el conjunto $\{x\}$ es un subconjunto cerrado de X.*

Demostración. $\Rightarrow]$ Sean $x \in X$ y $y \in X \setminus \{x\}$ arbitrarios. Como X es un espacio T_1, existen abiertos U y V tales que $x \in U \setminus V$ y $y \in V \setminus U$. Note ahora que $y \in V \subseteq X \setminus \{x\}$. De esta forma, $X \setminus \{x\}$ es abierto.

$\Leftarrow]$ Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Entonces $U = X \setminus \{y\}$ y $V = X \setminus \{x\}$ son subconjuntos abiertos de X tales que $x \in U \setminus V$ y $y \in V \setminus U$. Por ello, X es un espacio T_1. ⊠

5.7. Corolario. *Un espacio topológico X es T_1 si y sólo si todo subconjunto finito de X es un subconjunto cerrado.*

5.8. Corolario. *$(X, \mathcal{T})$ es un espacio T_1 si y sólo si $\mathcal{T}$ contiene a la topología cofinita.*

5.9. Corolario. *Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio para el cual se tiene que toda sucesión definida en él tiene a lo más un límite entonces X es un espacio T_1.*

Demostración. Supongamos que $x \in X$ es arbitrario, y que $y \in \operatorname{cl}(\{x\})$. Puesto que tanto y como x son límites de la sucesión $x_n = x$ para toda $n \in \mathbb{N}$, la propiedad que posee X implica que $y = x$. Ello nos asegura en particular que $\operatorname{cl}(\{x\}) = \{x\}$. En consecuencia, X es un espacio T_1. ⊠

La caracterización de los espacios T_1 que obtuvimos en el teorema 5.6 es muy útil para poder establecer ejemplos relevantes de espacios T_0 que no son T_1. Este es el caso del espectro primo de un anillo. Este espacio topológico es tratado en el ejercicio 5.C.

En nuestra siguiente proposición se enuncia una útil caracterización de los espacios T_1 que es una consecuencia sencilla del teorema 5.6.

5.10. Proposición. *Las siguientes proposiciones son equivalentes para un espacio topológico X.*

(1) *X es un espacio T_1;*
(2) *cada $A \subseteq X$ es igual a la intersección de todos los subconjuntos abiertos de X que lo contienen;*

(3) *para cada $x \in X$, el conjunto $\{x\}$ es igual a la intersección de todos los subconjuntos abiertos de X que lo contienen.*

Como podrá darse cuenta el lector, es hasta ahora, al introducir el concepto de espacio T_1, que empezamos a recuperar las propiedades familiares de $\mathbb{R}$. Por ejemplo, es conocido que la recta real $\mathbb{R}$ satisface la propiedad establecida en el siguiente teorema.

5.11. Proposición. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio T_1. Un punto $x \in X$ es un punto de acumulación de un subconjunto E de X si, y sólo si, cada abierto que contiene a x contiene también una cantidad infinita de puntos del conjunto E.*

Demostración. Supongamos que x es un punto de acumulación de E. Consideremos un subconjunto abierto U de X que contenga a x. Si ocurriera que $U \cap E$ fuera un conjunto finito no vacío, entonces el conjunto $(U \setminus \{x\}) \cap E$ es también un subconjunto finito de X. Supongamos que $(U \setminus \{x\}) \cap E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ (es claro que $(U \setminus \{x\}) \cap E = \emptyset$ contradice ya la hipótesis sobre x). Como X es un espacio T_1, el conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es cerrado por ser un conjunto finito. Así, $B = U \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es un subconjunto abierto de X que contiene a x y satisface $B \cap (E \setminus \{x\}) = \emptyset$. Lo cual contradice nuestra hipótesis sobre x. Por lo cual, el conjunto $U \cap E$ debe ser infinito.

Por otro lado, si cada abierto que contiene a x contiene también una cantidad infinita de puntos del conjunto E, entonces para cualquier vecindad V de x, siempre se tiene que $(V \setminus \{x\}) \cap E \neq \emptyset$. Por tal motivo, x es un punto de acumulación de E. ⊠

Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio T_1, y si $(Y, \mathcal{T} \restriction Y)$ es un subespacio de X, entonces $(Y, \mathcal{T} \restriction Y)$ es T_1 ya que si $x, y \in Y$ son puntos distintos, podemos elegir abiertos $U, V \in \mathcal{T}$ tales que $x \in U \setminus V$ y $y \in V \setminus U$. Entonces tomando $A = U \cap Y$ y $B = V \cap Y$, tenemos que $A, B \in \mathcal{T} \restriction Y$ y $x \in A \setminus B$ y $y \in B \setminus A$.

Con respecto al producto topológico, el axioma T_1 también tiene un buen comportamiento. Dejamos la demostración de este resultado como un ejercicio al lector (vea 5.A.(14)).

5.12. Teorema. *Si $\{(X_j, \mathcal{T}_j) : j \in J\}$ es una familia de espacios topológicos no vacíos, entonces el producto $\prod_{j \in J} X_j$ es un espacio T_1 si y sólo si cada espacio X_j es un espacio T_1.*

Desafortunadamente el axioma T_1 no siempre se transmite a los espacios que son imágenes continuas de espacios T_1. A manera de ejemplo considere al espacio de los segmentos iniciales $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$. Observe que este espacio es imagen continua del espacio discreto $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, el cual sí es T_1.

A pesar de que el axioma T_1 no se preserva por funciones continuas (incluso ni siquiera por funciones continuas y abiertas, ejercicio 5.A.(11)), cumplir con este axioma de separación sí es una propiedad topológica porque está definido en términos de puntos y abiertos exclusivamente.

El axioma de separación T_1 no se preserva siempre cuando se consideran cocientes:

5.13. Proposición. *Un espacio partición* $(\mathcal{D}, \mathcal{T}_{\mathcal{D}})$ *de un espacio* X *satisface el axioma de separación* T_1 *si y sólo si los elementos de* $\mathcal{D}$ *son subconjuntos cerrados de* X.

Demostración. Si $\mathcal{D}$ es un espacio T_1 y $A \in \mathcal{D}$, entonces $\{A\}$ es cerrado en $\mathcal{D}$, por lo cual, $\mathcal{D} \setminus \{A\}$ es abierto en $\mathcal{D}$. Supongamos que $q : X \to \mathcal{D}$ es la proyección natural asociada al espacio partición $(\mathcal{D}, \mathcal{T}_{\mathcal{D}})$. Entonces $q^{-1}(\mathcal{D} \setminus \{A\}) = X \setminus A$ es abierto en X. Por lo tanto, A es un subconjunto cerrado de X.

Recíprocamente, supongamos que todo elemento de $\mathcal{D}$ es un subconjunto cerrado de X. Sea $A \in \mathcal{D}$ arbitrario. Como $X \setminus A = q^{-1}(\mathcal{D} \setminus \{A\})$ es abierto en X, tenemos que $\mathcal{D} \setminus \{A\}$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{D}$. Por ello, el conjunto $\{A\}$ es un subconjunto cerrado del espacio partición $\mathcal{D}$. Por lo tanto, $(\mathcal{D}, \mathcal{T}_{\mathcal{D}})$ es un espacio T_1. $\boxtimes$

Como mencionamos en la introducción al presente capítulo, F. Hausdorff introdujo en su definición de espacio topológico de 1914 (véase [33]) una condición que hoy día sabemos es posible omitir para la definición más abstracta y general de los espacios topológicos. La condición adicional que introdujo F. Hausdorff en la definición de sus espacios topológicos, no es más que una forma de separar puntos que son diferentes. Esa forma de separación se conoce hoy día como *axioma de separación* T_2 (o *axioma de separación de Hausdorff*).

5.14. Definición. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es un espacio de Hausdorff o T_2 si X satisface la siguiente condición: para cualesquiera puntos distintos x y y de X, existen abiertos U y V de X tales que $x \in U$, $y \in V$, y $U \cap V = \emptyset$. (Véase la figura 31).

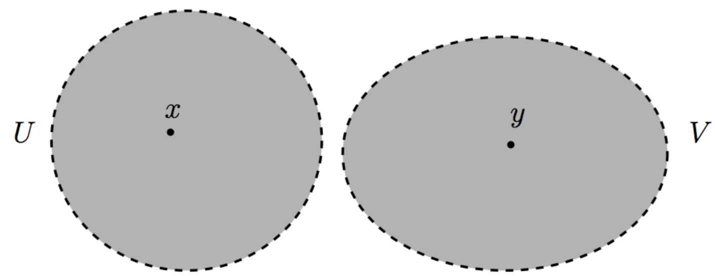

Figura 31. En los espacios Hausdorff, dos puntos diferentes x y y, siempre tienen vecindades ajenas que los contienen

No es difícil verificar que todo espacio T_2 es un espacio T_1 (y por lo tanto, también un espacio T_0). Pero la implicación $T_2 \Rightarrow T_1$ no puede ser revertida. Por ejemplo, si X es un conjunto infinito que posee la topología cofinita $\mathcal{T}_c$, entonces cualquier par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X siempre se intersectan, porque si ocurriera que $U \cap V = \emptyset$ entonces $X = X \setminus \emptyset = X \setminus (U \cap V) = (X \setminus U) \cup (X \setminus V)$, y por la definición de la topología cofinita, los subconjuntos $X \setminus U$ y $X \setminus V$ son finitos. En consecuencia, la topología $\mathcal{T}_c$ no es T_2; pero sabemos que sí es T_1.

5.15. Ejemplos.

(1) Todo espacio métrico es un espacio de Hausdorff. Efectivamente, supongamos que (X, d) es un espacio métrico y denotemos con el símbolo $\mathcal{T}_d$ a la topología generada por la métrica d. Si $x, y \in X$ son puntos distintos de X, entonces $\varepsilon = d(x, y) > 0$. Note ahora que $B(x, \frac{\varepsilon}{2})$ y $B(y, \frac{\varepsilon}{2})$ son subconjuntos abiertos ajenos de X que contienen a x y a y, respectivamente. Como consecuencia de esto, los espacios $\mathbb{R}^n$ y el espacio $(C(I), \mathcal{T}_\infty)$ (véase 1.37) son espacios de Hausdorff.
(2) Toda topología más fina que una topología T_2 es una topología T_2. Por ello, la línea de Michael $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_\mathbb{P})$ y la línea de Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ son espacios T_2 (recuerde que tanto la topología de la línea de Michael y la de la línea de Sorgenfrey son más finas que la topología usual $\mathcal{T}_e$ de $\mathbb{R}$). De igual forma, como la topología

del plano radial es más fina que la topología usual de $\mathbb{R}^2$, dicha topología es también T_2.

(3) *Todo conjunto no vacío linealmente ordenado es un espacio de Hausdorff con la topología inducida por el orden.* Recordemos que si $(X, \leqslant)$ es un conjunto linealmente ordenado, entonces la topología $\mathcal{T}_{\leqslant}$ inducida por el orden es aquella que es generada por la familia $\mathcal{S} = \{I_a : a \in X\} \cup \{D_a : a \in X\}$ como una subbase, donde $I_a = \{x \in X : x < a\}$ y $D_a = \{x \in X : a < x\}$ (ver ejemplo 1.38). Para demostrar que el espacio $(X, \mathcal{T}_{\leqslant})$ es Hausdorff, consideremos dos puntos arbitrarios diferentes x y y en X. Supongamos que $x < y$. Entonces tenemos los siguientes casos:

Caso (1). Existe un punto z con $x < z < y$. En este caso, note que los conjuntos I_z y D_z son subconjuntos abiertos ajenos de X que contienen a x y a y, respectivamente.

Caso (2). No existe z con $x < z < y$. Observe que los conjuntos I_y y D_x son subconjuntos abiertos de X que contienen a x y y, respectivamente. Además estos conjuntos son ajenos.

Ya es bien conocido por nosotros que la condición *“X es un espacio T_1”* es necesaria para poder garantizar la propiedad: *“toda sucesión en el espacio X converge a lo más a un punto”*. Debemos mencionar ahora que esta última condición no es suficiente para poder garantizar T_1. Por ejemplo, en un conjunto infinito X que posee la topología cofinita $\mathcal{T}_c$ cualquier sucesión converge a todos los puntos de X, y X es un espacio T_1. Por todo esto, el resultado en el siguiente teorema es relevante.

5.16. Proposición. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio de Hausdorff. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un solo punto.*

Demostración. Supongamos, por el contrario, que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a dos puntos distintos x y y. Como el espacio X es T_2, y $x \neq y$, existen subconjuntos abiertos A y B de X tales que $x \in A$, $y \in B$ y $A \cap B = \emptyset$. Ahora, aplicando el hecho de que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x, podemos garantizar la existencia de un número natural N tal que $x_m \in A$ para toda $m \geqslant N$. De igual manera, existe un número natural M tal que para toda $m \geqslant M$ se tiene que $x_m \in B$. Consideremos ahora un número natural $k \geqslant \max\{N, M\}$. Entonces sucede que $x_k \in A \cap B$. Pero esto último contradice el hecho de que A y B sean ajenos, por lo cual tenemos que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sólo puede converger a un punto de X. ⊠

Como una aplicación directa del teorema anterior, obtenemos el siguiente resultado en el que se obtiene una caracterización de los espacios primero numerables T_2.

5.17. Corolario. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio primero numerable. X es un espacio de Hausdorff si y sólo si toda sucesión en X tiene a lo más un límite.*

Demostración. Es claro que sólo hay que probar la suficiencia. Para ello supongamos que X no es T_2. Entonces existen dos puntos $x, y \in X$, con $x \neq y$, tales que cualquier par de abiertos U y V de X que contengan a x y a y, respectivamente, se intersectan. Como X es primero numerable, podemos considerar bases locales numerables $\mathcal{B}(x) = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $\mathcal{B}(y) = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$, para los puntos x y y respectivamente. Sin perder generalidad, podemos suponer que $U_{n+1} \subseteq U_n$ y que $V_{n+1} \subseteq V_n$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Como cada par de abiertos U_n y V_n se intersectan, podemos elegir $z_n \in U_n \cap V_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. No es difícil verificar que la sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en X tanto a x como a y. ⊠

Como es natural, el resultado anterior puede generalizarse cuando en lugar de sucesiones trabajamos con filtros como veremos en la proposición 5.19. Con la idea de motivar esta proposición analicemos el siguiente ejemplo de filtro convergente.

5.18. Ejemplo. En el conjunto $\mathbb{R}^2$ consideremos la colección

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{R}^2 : |\mathbb{R}^2 \setminus A| < \aleph_0\}.$$

No es difícil demostrar que $\mathcal{F}$ es un filtro en $\mathbb{R}^2$. Observe que cuando dotamos al conjunto $\mathbb{R}^2$ con la topología inducida por la norma euclidiana, el filtro $\mathcal{F}$ no converge a ningún punto de $\mathbb{R}^2$.

En contraste, si equipamos a $\mathbb{R}^2$ con la topología cofinita, resulta que el filtro $\mathcal{F}$ converge a cada uno de los puntos de $\mathbb{R}^2$. Efectivamente, si $\vec{x}$ es un punto cualquiera de $\mathbb{R}^2$ y V es una vecindad de $\vec{x}$ respecto de la topología cofinita, entonces $|\mathbb{R}^2 \setminus V| < \aleph_0$. Por lo cual $V \in \mathcal{F}$. Como toda vecindad de $\vec{x}$ (en la topología cofinita) pertenece a $\mathcal{F}$, tenemos que $\mathcal{F}$ converge a $\vec{x}$ en esta topología.

5.19. Proposición. *Un espacio topológico X es Hausdorff si y sólo si todo filtro en X tiene a lo más un límite.*

Demostración. $\Rightarrow]$ Supongamos que $\mathcal{F}$ es un filtro en X que converge a un punto $x \in X$. Consideremos un punto $y \in X$ con $y \neq x$. Probaremos que $\mathcal{F}$ no puede converger a y. Para ello consideremos dos abiertos ajenos A y B tales que $x \in A$ y $y \in B$. Como $\mathcal{F}$ converge a x, se tiene que $A \in F$. Pero debido a que $\mathcal{F}$ es un filtro, no puede suceder que $B \in \mathcal{F}$. En consecuencia, el filtro de vecindades de y no está contenido en $\mathcal{F}$. De esto se deduce que $\mathcal{F}$ no puede converger al punto y.

$\Leftarrow]$ Observe que si X no fuese un espacio T_2, entonces existirían un par de puntos diferentes x y y con la propiedad siguiente:

$(*)$ $A \cap B \neq \emptyset$ para todos los abiertos A y B tales que $x \in A$ y $y \in B$.

La propiedad $(*)$ garantiza que todos los elementos de la colección

$$\mathcal{B} = \{A \cap B : A \text{ y } B \text{ son abiertos con } x \in A \text{ y } y \in B\}$$

son diferentes del conjunto vacío. Como $X \in \mathcal{B}$, tenemos que $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Pero más aún, es sencillo verificar que $\mathcal{B}$ es cerrada bajo intersecciones finitas. Por lo tanto, $\mathcal{B}$ es una base de filtro. Si consideramos ahora al filtro $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ generado por $\mathcal{B}$, obtenemos un filtro en X que converge a dos puntos diferentes de X, x y y. ⊠

En nuestro siguiente resultado contestamos algunas de las preguntas naturales que surgen al ser considerado el axioma de separación T_2 en subespacios y producto de espacios topológicos.

5.20. Teorema.

(1) *T_2 es una propiedad hereditaria.*
(2) *Sea $X = \prod_{j \in J} X_j$ el producto topológico de una familia de espacios topológicos no vacíos X_j $(j \in J)$. Entonces el producto X es un espacio T_2 si y sólo si cada espacio X_j es un espacio T_2.*

Demostración.

(1) Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio T_2 y $Y \subseteq X$ un subespacio de X. Si x y y son puntos de Y diferentes entonces, como X es de Hausdorff, existen subconjuntos abiertos A y B de X tales que $x \in A$, $y \in B$ y $A \cap B = \emptyset$. Por definición de la topología relativa, tenemos que $A \cap Y$ y $B \cap Y$ son subconjuntos abiertos de Y. Además se tiene que $x \in A \cap Y$, $y \in B \cap Y$ y $(A \cap Y) \cap (B \cap Y) = \emptyset$.

(2) $\Rightarrow$] Fijemos un índice $i \in J$. Seleccionemos, para cada índice $j \in J \setminus \{i\}$, un punto $a_j \in X_j$, y consideremos el siguiente subespacio Y de X:

$$Y = \{x \in X : x(j) \in X_j \text{ y } x(j) = a_j \text{ si } j \neq i \text{ y } x(i) \in X_i\}.$$

El subespacio Y es homeomorfo al espacio X_i (véase el ejercicio 4.C.2). Entonces, aplicando el inciso anterior, tenemos que Y es un espacio de Hausdorff. En consecuencia, X_i es un espacio T_2 (la propiedad de ser un espacio Hausdorff es una propiedad topológica).

$\Leftarrow$] Sean $x, y \in X$ puntos distintos. Entonces existe un índice $i \in J$ para el cual se tiene que $x(i) \neq y(i)$. Como el espacio X_i es un espacio T_2, podemos elegir subconjuntos abiertos U y V de X_i tales que $x(i) \in U$, $y(i) \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Consideremos ahora los subconjuntos abiertos $A = \pi_i^{-1}(U)$ y $B = \pi_i^{-1}(V)$ del producto topológico X. Es claro que A y B son ajenos porque U y V lo son. Además, como $x(i) \in U$ y $y(i) \in V$, se tiene que $x \in A$ y $y \in B$. Con todo lo anterior podemos concluir que X es un espacio T_2. ⊠

Debido a que el espacio usual de los números reales $\mathbb{R}$ es un espacio T_2, aplicando el inciso (2) del teorema anterior obtenemos que el espacio producto $\mathbb{R}^{[0,1]}$ es un espacio T_2. Asimismo, como $C([0,1])$ con la topología $\mathcal{T}_p$ definida en el ejemplo 1.37 es un subespacio de $\mathbb{R}^{[0,1]}$, es, él mismo, un espacio T_2.

5.21. Observación. Desafortunadamente el axioma de separación T_2 también puede perderse en el proceso de construcción de un espacio cociente. Incluso, aun cuando dicha construcción se realiza en espacios topológicos con propiedades muy fuertes. Consideremos, por ejemplo, al intervalo unitario $[0,1]$ equipado con la topología de subespacio respecto de la recta real $\mathbb{R}$. Dicho espacio es un T_2, y por ello, el producto $[0,1] \times [0,1]$ también lo es. Consideremos ahora la siguiente partición de $[0,1] \times [0,1]$.

$$\mathcal{D} = \{\{r\} \times [0,1] : r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]\} \cup \{\{(r,y)\} : r \in \mathbb{P} \cap [0,1] \text{ y } y \in [0,1]\}$$

El axioma de separación T_2 no se satisface en el espacio partición $(\mathcal{D}, \mathcal{T}_{\mathcal{D}})$, puesto que no es posible separar puntos diferentes de tipo (r, y), con $r \in \mathbb{P} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Terminamos esta sección con una útil caracterización de los espacios T_2.

5.22. Proposición. *Las siguientes proposiciones son equivalentes para un espacio topológico* $(X, \mathfrak{T})$.

(1) X *es un espacio* T_2*;*
(2) *para cada* $x \in X$*, el conjunto* $\{x\}$ *es igual a la intersección de las cerraduras de todos los subconjuntos abiertos de* X *que lo contienen; esto es,* $\{x\} = \cap\{\mathrm{cl}\,(U) : x \in U \in \mathfrak{T}\}$.
(3) *la diagonal* $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ *es un subconjunto cerrado de* $X \times X$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Supongamos que X es un espacio T_2, y consideremos $x \in X$. Claramente bastará demostrar que si $y \in \bigcap\{\mathrm{cl}\,(U) : x \in U \in \mathfrak{T}\}$ entonces $y = x$. Supongamos lo contrario; entonces, existen subconjuntos abiertos ajenos A y B tales que $x \in A$ y $y \in B$. Por la forma en que y fue elegido, tenemos que $y \in \mathrm{cl}\, A$. Como B es un subconjunto abierto de X que contiene a y, $B \cap A \neq \emptyset$; lo cual contradice la elección de A y de B. Por lo tanto, $x = y$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Supongamos que $(x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta$. Entonces $x \neq y$. Utilizando la hipótesis, podemos garantizar la existencia de un subconjunto abierto U de X tal que $x \in U$ y $y \notin \mathrm{cl}\,(U)$. Como $y \notin \mathrm{cl}\,(U)$, existe un abierto W de X tal que $y \in W$ y $W \cap U = \emptyset$. Entonces $(x, y) \in U \times W \subseteq (X \times X) \setminus \Delta$ y $U \times W$ es un abierto de $X \times X$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Sean x, y puntos diferentes de X. Entonces $(x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta$. Como Δ es cerrado en $X \times X$, $(X \times X) \setminus \Delta$ es abierto en $X \times X$. Por ello, podemos elegir subconjuntos abiertos U y V de X tales que $(x, y) \in U \times V \subseteq (X \times X) \setminus \Delta$. Obsérvese que $U \cap V = \emptyset$, porque si ocurriera que $z \in U \cap V$ entonces $(z, z) \in U \times V$. En consecuencia, $(z, z) \in \Delta \cap \big((X \times X) \setminus \Delta\big)$, lo cual no es posible. Por lo tanto, podemos concluir que X es T_2. $\boxtimes$

2. Espacios regulares

Los axiomas de separación que han sido introducidos hasta este momento permiten la separación de puntos diferentes utilizando subconjuntos abiertos. Intuitivamente uno puede pensar que los objetos topológicos que siguen en grado de complejidad a los puntos de un espacio

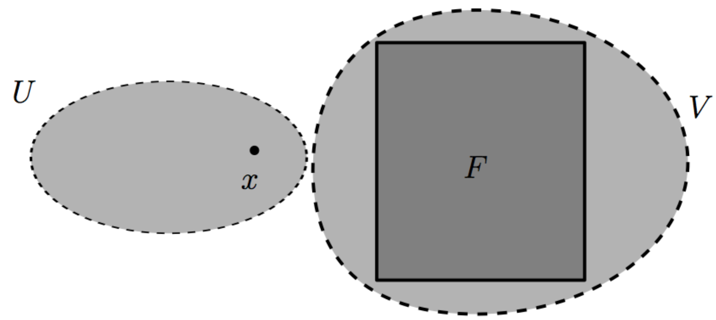

Figura 32. Axioma de separación T_3: el conjunto F es cerrado y $x \notin F$.

topológico son los subconjuntos cerrados del mismo (esto es así, por lo menos, en los espacios T_1 ya que, recuerde, en dichos espacios los conjuntos unipuntuales son siempre subconjuntos cerrados).

Por ello una pregunta muy natural es: ¿en cuáles espacios topológicos es posible separar puntos de subconjuntos cerrados, utilizando para ello a subconjuntos abiertos ajenos? O en forma mucho más general podemos preguntarnos: ¿en cuáles espacios topológicos es siempre posible hallar subconjuntos abiertos ajenos que separen a subconjuntos cerrados que son ajenos?

Ambas preguntas fueron estudiadas por L. Vietoris, quien en 1921 introdujo los llamados espacios *regulares* o espacios T_3.

5.23. Definición. Un espacio topológico X es un espacio regular o T_3 si satisface las siguientes condiciones:

(1) X es un espacio T_1;
(2) para cualquier $F \subseteq X$ cerrado y $x \in X \setminus F$ existen conjuntos abiertos ajenos U y V tales que $x \in U$ y $F \subseteq V$. (Véase la figura 32)

Debido a que todo espacio regular es un espacio T_1, todos los conjuntos unipuntuales de un espacio regular son subconjuntos cerrados del mismo. Podemos entonces aplicar la condición (2) de la definición de espacio T_3, y concluir que dos puntos diferentes en un espacio regular siempre pueden ser separados por medio de abiertos ajenos, es decir, todo espacio T_3 es un espacio T_2. El recíproco no es cierto. Consideremos el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ con la topología $\mathcal{T}$ que tiene como subbase a los intervalos abiertos (a,b) y al conjunto $\mathbb{Q}$ de números racionales; es decir, una base para $\mathcal{T}$ son los intervalos abiertos y los conjuntos de la forma $\mathbb{Q} \cap (a,b)$, con $a,b \in \mathbb{R},\ a < b$. Observe también que $\mathbb{Q}$ es un abierto básico en este espacio. En particular, la topología usual $\mathcal{T}_e$ de $\mathbb{R}$ está contenida en $\mathcal{T}$, y por ello $(\mathbb{R},\mathcal{T})$ es un espacio de Hausdorff. Sin embargo, este espacio no es un espacio regular porque el conjunto $X \setminus \mathbb{Q}$ es un subconjunto cerrado de X que no se puede separar por medio de abiertos ajenos del punto 0.

El ejemplo anterior también sirve para mostrar que si $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ son dos topologías en un conjunto X tales que $\mathcal{T}_1 \leqslant \mathcal{T}_2$, entonces la regularidad de $(X,\mathcal{T}_1)$ no necesariamente implica que $\mathcal{T}_2$ sea regular. Tampoco es siempre cierto que la regularidad de $\mathcal{T}_2$ implique la regularidad de la topología $\mathcal{T}_1$. Para mostrar esto basta suponer que $\mathcal{T}_1$ es la topología cofinita en $\mathbb{R}$ y $\mathcal{T}_2$ la topología usual $\mathcal{T}_e$ de $\mathbb{R}$.

Otro hecho que es valioso comentar aquí es que la condición (2) de la definición de espacio regular no implica por sí sola que los subconjuntos unipuntuales $\{x\}$ sean cerrados; es decir, que el espacio sea T_1 (note que esto fue utilizado fuertemente para demostrar que todo espacio regular es un espacio T_2). Un espacio con la topología indiscreta ejemplifica esto, ya que estos espacios topológicos satisfacen la condición (2) pero no la condición (1).

5.24. Ejemplo. Cualquier espacio métrico es un espacio regular. En efecto, sea (X,d) un espacio métrico, $F \subseteq X$ cerrado y $x \in X \setminus F$. Como $X \setminus F$ es un subconjunto abierto, existe $r > 0$ tal que $x \in B(x,r) \subseteq X \setminus F$; de tal forma que $x \in B(x,\frac{r}{2}) \subseteq \operatorname{cl}(B(x,\frac{r}{2})) \subseteq B(x,r)$. Por lo tanto, si $A_1 = B(x,\frac{r}{2})$ y $A_2 = X \setminus \operatorname{cl}(B(x,\frac{r}{2}))$ se tiene que A_1 y A_2 son subconjuntos abiertos ajenos tales que $F \subseteq A_2$ y $x \in A_1$. Como X es T_1, tenemos que X es regular.

5.25. Ejemplo. El *plano de Moore* (o *plano de Niemytzki*). Este espacio está constituido por el conjunto X de todos los puntos del semiplano superior de $\mathbb{R}^2$ incluyendo a todos los puntos del conjunto $X_0 = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$, esto es,

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant 0\}.$$

Para definir la topología que consideraremos en el conjunto X, definimos los siguientes tipos de conjuntos (véase la figura 33):

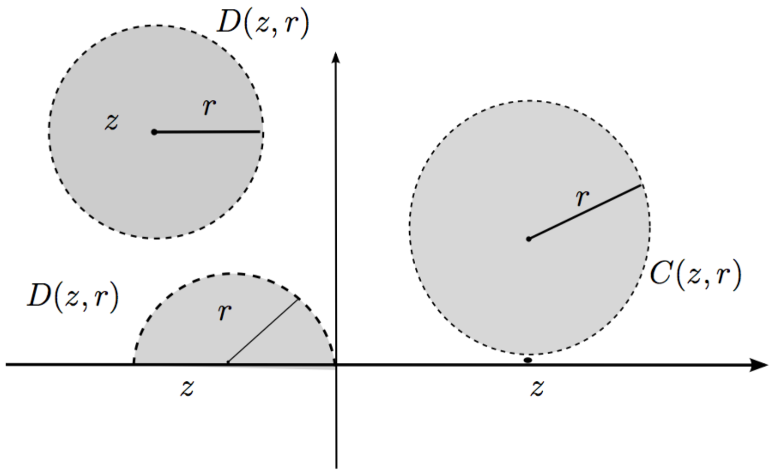

FIGURA 33. Abiertos básicos del plano de Moore

(1) Para cada $z = (a, b) \in X \setminus X_0$ y $r > 0$ definimos

$$D(z, r) = X \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2\};$$

(2) para cada $z = (a, 0) \in X_0$ y $r > 0$, definimos

$$C(z, r) = \{z\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a)^2 + (y - r)^2 < r^2\}.$$

No es difícil demostrar que la familia

$$\mathcal{B} = \{D(z, r) : z \in X \setminus X_0,\, r > 0\} \cup \{C(z, r) : z \in X_0,\, r > 0\}$$

genera una topología $\mathcal{T}$ que tiene a $\mathcal{B}$ como base. El espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es llamado *plano de Moore* o *plano de Niemytzki*. A continuación enunciamos y demostramos algunas de las propiedades básicas del plano de Moore.

(1) Supongamos que $\mathcal{T}_1$ es la topología de subespacio del conjunto X inducida por la topología usual de $\mathbb{R}^2$. Si $A \in \mathcal{T}_1$ entonces A es un subconjunto abierto de X respecto de la topología del plano de Moore.
(2) El plano de Moore $(X, \mathcal{T})$ es un espacio regular.
(3) Todo subconjunto A de X_0 es un subespacio cerrado y discreto del plano de Moore.

Demostración. (1) Supongamos que $A \subseteq X$ es un subconjunto abierto de $(X, \mathcal{T}_1)$. Entonces existe un subconjunto abierto B de $\mathbb{R}^2$ (se está considerando a $\mathbb{R}^2$ con su topología usual) tal que $A = X \cap B$. Para cada $z = (a, b) \in A$, existe una $r_z > 0$ tal que $B(z, r_z) \subseteq B$ (porque $z \in B$ y B es abierto en $\mathbb{R}^2$). Entonces,

$$A = \Big(\bigcup_{z \in A \cap (X \setminus X_0)} D(z, r_z) \Big) \cup \Big(\bigcup_{z \in A \cap X_0} C(z, \tfrac{r_z}{2}) \Big).$$

Por lo cual, A es un subconjunto abierto del plano de Moore.

(2) Una sencilla manipulación de la propiedad (1) permite demostrar que el plano de Moore es un espacio T_1. Así que para demostrar la regularidad del plano de Moore es suficiente verificar que éste satisface la condición (2) de la definición de espacio regular. Para probarlo, supongamos que $F \subseteq X$ es un subconjunto cerrado y que $z = (a, b) \notin F$. Como $X \setminus F$ es un subconjunto abierto que contiene a z, podemos elegir un abierto básico del plano de Moore U tal que $z \in U \subseteq X \setminus F$.

Si $z = (a, 0)$, podemos suponer que $U = C(z, r) = \{z\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-a)^2 + (y-r)^2 < r^2\}$ donde $r > 0$; y en el caso en que $b \neq 0$, podemos suponer sin perder generalidad que $U = D(z, r) = X \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2\}$ donde $r > 0$.

Para el caso en que $U = C(z, r)$, consideremos al conjunto $B = \{z\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-a)^2 + (y - \frac{r}{2})^2 \leqslant \left(\frac{r}{2}\right)^2\}$. El conjunto B es un subconjunto cerrado del plano de Moore (aplique la propiedad (1) al complemento de B para convencerse de esto). Además $z \in C(z, \frac{r}{2}) \subseteq B \subseteq U \subseteq X \setminus F$. Entonces $C(z, \frac{r}{2})$ y $X \setminus B$ son subconjuntos abiertos del plano de Moore que son ajenos y que cumplen que $z \in C(z, \frac{r}{2})$ y $F \subseteq X \setminus B$.

En el caso en que $z = (a, b)$ y $b \neq 0$, consideremos al subconjunto $B = X \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-a)^2 + (y-b)^2 \leqslant \left(\frac{r}{2}\right)^2\}$. El conjunto B es un subconjunto cerrado del plano de Moore. Además, $z \in D(z, \frac{r}{2}) \subseteq B \subseteq U \subseteq X \setminus F$. En consecuencia, los conjuntos $D(z, \frac{r}{2})$ y $X \setminus B$ son subconjuntos abiertos ajenos del plano de Moore tales que $z \in D(z, \frac{r}{2})$ y $F \subseteq X \setminus B$. En conclusión, X es un espacio regular.

Para demostrar (3), notemos que si $z = (a, b) \in X \setminus X_0$ entonces $z \in D(z, \frac{|b|}{2})$ y $D(z, \frac{|b|}{2}) \cap X_0 = \emptyset$. En consecuencia z no puede ser punto de acumulación de A. Por otro lado, si $z \in X_0$ es arbitrario entonces $z \in C(z, 1)$ y $C(z, 1) \cap X_0 = \{z\}$. Por lo cual, ningún punto z de X_0

puede ser punto de acumulación de A. Así, $der(A) = \emptyset$. En conclusión A es cerrado y discreto . ⊠

En el siguiente teorema establecemos formulaciones equivalentes a la regularidad.

5.26. Proposición. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *un espacio* T_1. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *El espacio* X *es regular.*
(2) *Para cualquier punto* $x \in X$ *y cualquier abierto* U *de* X *tal que* $x \in U$, *existe un abierto* V *tal que* $x \in V \subseteq \text{cl}(V) \subseteq U$.
(3) *Cada punto* x *de* X *tiene una base local de vecindades formada por subconjuntos cerrados.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Si X es regular y $x \in U$, donde U es abierto, entonces $X \setminus U$ es un subconjunto cerrado que no contiene a x. Como X es regular, existen abiertos ajenos V_1 y V_2 tales que $x \in V_1$ y $X \setminus U \subseteq V_2$. De esta forma tenemos que $X \setminus V_2$ es un subconjunto cerrado de X tal que $X \setminus V_2 \subseteq U$. Definamos $V = V_1$. Es claro que $x \in V \subseteq \text{cl}(V) \subseteq X \setminus V_2 \subseteq U$, como se quería demostrar.

(2) $\Rightarrow$ (3). Sea $x \in X$ arbitrario. Definamos $\mathcal{V}(x) = \{\text{cl}(V) : V \in \mathcal{T} \text{ con } x \in V\}$. Claramente todos los elementos de $\mathcal{V}(x)$ son vecindades del punto x. Es fácil comprobar que la condición (2) implica que la familia $\mathcal{V}(x)$ es una base local de vecindades de x.

(3) $\Rightarrow$ (1). Sean $x \in X$ y F un subconjunto cerrado de X tal que $x \notin F$. Por hipótesis, existe una base local de vecindades $\mathcal{V}(x)$ para x formada por subconjuntos cerrados de X. Como $X \setminus F$ es un abierto que contiene a x, podemos elegir un elemento $V \in \mathcal{V}(x)$ con $x \in V \subseteq X \setminus F$. Como V es una vecindad de x, existe un abierto U tal que $x \in U \subseteq V$. Observe ahora que los conjuntos U y $X \setminus V$ son subconjuntos abiertos ajenos de X tales que $x \in U$ y $F \subseteq X \setminus V$. En consecuencia, X es un espacio regular. ⊠

No es muy complicado demostrar que todo subespacio de un espacio regular es un espacio regular (dejamos la verificación de esta afirmación como un ejercicio para el lector). Naturalmente la regularidad es una propiedad topológica. Una confirmación detallada de esto es: Sea X un espacio regular y sea $h : X \to Y$ un homeomorfismo. Como la propiedad T_1 es una propiedad topológica, bastará demostrar que Y satisface la condición (2) en la definición 5.23. Para ello, supongamos que $F \subseteq Y$

es un subconjunto cerrado de Y y que $y \in Y \setminus F$ es un punto arbitrario. Entonces, existe $x \in X$ tal que $h(x) = y$ y $x \notin h^{-1}(F)$. Note ahora que $h^{-1}(F)$ es un subconjunto cerrado de X. Por la regularidad de X, podemos concluir que existen subconjuntos abiertos ajenos A_1 y A_2 de X tales que $x \in A_1$ y $h^{-1}(F) \subseteq A_2$. Como h es un homeomorfismo, tenemos que $h(A_1)$ y $h(A_2)$ son abiertos ajenos de Y. Además, se tiene que $y \in h(A_1)$ y $F \subseteq h(A_2)$. Por lo tanto, Y es un espacio regular.

A continuación contruimos un espacio cociente de un espacio regular que no es regular.

5.27. Ejemplo. Consideremos en $\mathbb{R}^2$ al subespacio $X = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x,1) : x \in \mathbb{R}\}$, y sea Y el espacio partición $(\mathcal{D}, \mathcal{T}_{\mathcal{D}})$, donde

$$\mathcal{D} = \{\{(x,0),(x,1)\} : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \cup \{\{(0,0)\},\{(0,1)\}\}.$$

Por la proposición 5.13 el espacio partición $(\mathcal{D}, \mathcal{T}_{\mathcal{D}})$ es un espacio T_1. Debido a ello, el conjunto $F = \{\{(0,0)\}\}$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{D}$. El conjunto F no se puede separar por medio de subconjuntos abiertos ajenos de $\mathcal{D}$ del punto $x = \{(0,1)\}$. Verifique el lector que la proyección natural $p : X \to \mathcal{D}$ es una función continua y abierta.

5.28. Teorema. *Sea $\{X_j : j \in J\}$ una familia de espacios topológicos no vacíos. El espacio producto $\prod_{j \in J} X_j$ es regular si y sólo si cada factor es un espacio regular.*

Demostración. Supongamos que $X = \prod_{j \in J} X_j$ es un espacio regular. Como cada espacio X_j es homeomorfo a un subespacio de $\prod_{j \in J} X_j$ para cada $j \in J$ (véase ejercicio 4.C.2), podemos concluir que cada espacio X_j es un espacio regular.

Por otro lado, supongamos que cada factor X_j es un espacio regular. Consideremos un subconjunto abierto A de $X = \prod_{j \in J} X_j$ y un punto arbitrario $x \in A$. Como A es abierto y $x \in A$, existe un subconjunto abierto básico $B = \pi_{j_1}^{-1}(A_{j_1}) \cap \pi_{j_2}^{-1}(A_{j_2}) \cap \cdots \cap \pi_{j_n}^{-1}(A_{j_n})$ de X tal que $x \in B \subseteq A$. Entonces $x_{j_k} = \pi_{j_k}(x) \in A_{j_k}$ para toda $k = 1, 2, \ldots, n$. Como cada uno de los espacios X_{j_k} es un espacio regular (y cada A_{j_k} es un subconjunto abierto de X_{j_k}), para el punto x_{j_k} de A_{j_k}, existe un subconjunto abierto B_{j_k} en X_{j_k} tal que $x_{j_k} \in B_{j_k} \subseteq \operatorname{cl} B_{j_k} \subseteq A_{j_k}$ (para toda $k = 1, 2, \ldots, n$). Tenemos entonces que el conjunto $B = \pi_{j_1}^{-1}(B_{j_1}) \cap \pi_{j_2}^{-1}(B_{j_2}) \cap \cdots \cap \pi_{j_n}^{-1}(B_{j_n})$ es un subconjunto abierto de X con las siguientes propiedades

$$x \in B \subseteq \pi_{j_1}^{-1}(\operatorname{cl} B_{j_1}) \cap \pi_{j_2}^{-1}(\operatorname{cl} B_{j_2}) \cap \cdots \cap \pi_{j_n}^{-1}(\operatorname{cl} B_{j_n}) \subseteq A.$$

Podemos entonces concluir que B es un subconjunto abierto de X tal que $x \in B \subseteq \mathrm{cl}\, B \subseteq A$. En consecuencia, X es un espacio regular. $\boxtimes$

Ejercicios

5.A. Espacios T_0, T_1, y T_2

(1) La diferencia entre métrica y pseudométrica se puede expresar en terminos del axioma T_0:

Recordemos que una *pseudométrica* en un conjunto X es una función $\rho : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ con las siguientes propiedades:

(a) Para todo $x \in X$, $\rho(x, x) = 0$,

(b) Para todo $x, y \in X$, $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,

(c) Para todo $x, y, z \in X$, $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geqslant \rho(x, z)$.

Al igual que en el caso de los espacios métricos, para todo $x \in X$ y $r > 0$, se define la *bola abierta de radio r con centro en x* en el espacio pseudométrico (X, ρ), como el conjunto

$$B(x, r) = \{\, y \in X : \rho(x, y) < r \,\}.$$

Es fácil verificar (la verificación es similar al caso de métricas) que la familia

$$\mathcal{T}_\rho = \{\emptyset\} \cup \{E \subseteq X \ : \ E \text{ es unión de algunas bolas abiertas } \}$$

es una topología en X; y esta topología es la *topología generada por la pseudométrica ρ en X*.

Demuestre que una pseudométrica ρ definida en un conjunto X es una métrica si y sólo si la topología que genera es una topología T_0.

(2) Aplicando el resultado del problema anterior, demuestre que el espacio topológico $(C(I), \mathcal{T}_\rho)$, donde ρ es $\rho(f, g) = \text{máx}\{|f(x) - g(x)| : x \in \mathrm{cl}(E)\}$, E no es subconjunto denso de I y $C(I)$ es el conjunto de todas las funciones reales continuas definida en el intervalo cerrado $I = [0, 1]$, no es un espacio T_0. (Véase el ejercicio 1.A.(9)).

(3) Dé un ejemplo de un espacio T_0 tal que $\{x\}$ no es cerrado para todo $x \in X$.

(4) Podemos verificar que la imagen continua y abierta de espacios T_0 no siempre es un espacio T_0, considerando al conjunto $\{0,1\}$ dotado de la topología indiscreta y a la función $f : \mathbb{R} \to \{0,1\}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

donde $\mathbb{R}$ está considerado con su topología usual $\mathcal{T}_e$. Observe que f es una función continua y abierta, pero que $\{0,1\}$ no es un espacio T_0.

(5) Todo espacio topológico tiene asociado un espacio cociente que es T_0. Esto fue demostrado por M. H. Stone en 1936. Dicho espacio cociente lleva el nombre de *T_0-identificación*.

La T_0-identificación de un espacio topológico X, es el espacio partición generado por la relación de equivalencia en el conjunto X definida por la fórmula $x \sim y$ *si y sólo si* $\operatorname{cl}\{x\} = \operatorname{cl}\{y\}$. Verifique que en efecto el espacio cociente $X/\sim$ es T_0.

(6) Consideremos un conjunto X con por lo menos dos elementos. Fijemos un punto x_0 de X y definamos, para cada $A \subseteq X$, al conjunto $\operatorname{cl} A$ de la siguiente manera:

$$\operatorname{cl} A = \begin{cases} A \cup \{x_0\} & \text{si } A \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{si } A = \emptyset. \end{cases}$$

Verifique que el operador $A \to \operatorname{cl} A$ que hemos definido de esta forma satisface todos los axiomas de Kuratowski y por ello genera una topología $\mathcal{T}$ en X (ver 2.24). Pruebe que la topología $\mathcal{T}$ generada por este operador cerradura es T_0 pero no T_1.

(7) Verifique que los subconjuntos finitos de un espacio topológico T_1 son subconjuntos cerrados.

(8) Dé un ejemplo de un espacio X que satisfaga la condición (2) de la definición 5.23, y de una función continua, abierta, y sobreyectiva f definida en X y con valores en un espacio Y que no es T_1.

(9) Pruebe que todo espacio finito T_1 es un espacio discreto (es decir, su topología es la discreta).

(10) Suponga que X es un espacio T_1. Compruebe que un espacio cociente $X/\sim$ es un espacio T_1 si y sólo si cada elemento de $X/\sim$ es un subconjunto cerrado de X.

(11) Verifique que la imagen continua de un espacio topológico T_i, donde $i = 0, 1, 2$, no es necesariamente un espacio T_i.

(12) Demuestre que si X es un espacio T_i y $Y \subseteq X$ entonces Y también es un espacio T_i, donde $i = 0, 1, 2$.

(13) Sea $i \in \{0, 1, 2\}$. La suma topológica libre $\oplus_{j \in J} X_j$ es T_i si y sólo si cada X_j es T_i.

(14) Sea $i \in \{0,1\}$. Suponga que $X = \prod_\alpha X_\alpha$ es el producto topológico de una familia de espacios topológicos X_α, donde cada X_α es un espacio T_i para toda $\alpha \in J$. Demuestre que X es un espacio T_i.

Por otro lado, pruebe que si el producto $X = \prod_\alpha X_\alpha$ es un espacio T_i entonces cada factor también lo es.

(15) Sea B un subconjunto fijo de un conjunto X. Para cada $A \subseteq X$ no vacío, defina $\mathrm{cl}(A) = A \cup B$ y $\mathrm{cl}\,\emptyset = \emptyset$. Demuestre que lo anterior permite definir una topología en X. ¿Bajo qué condiciones en B el espacio resultante es un espacio T_0 (respectivamente, T_1 y T_2)?

(16) Pruebe que el espacio de Sierpinski (ver 5.2 inciso (1)) y cualquier espacio indiscreto con más de un punto no son espacios T_2.

(17) Sean $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ dos topologías en un conjunto X con la propiedad $\mathcal{T}_1 \leqslant \mathcal{T}_2$. Demuestre que si $(X, \mathcal{T}_1)$ es un espacio Hausdorff entonces $(X, \mathcal{T}_2)$ también es un espacio de Hausdorff.

(18) Sea $f : X \to Y$ continua, abierta y sobreyectiva. Entonces Y es Hausdorff si y sólo si el conjunto $\{(x_1, x_2) : f(x_1) = f(x_2)\}$ es un subconjunto cerrado de $X \times X$.

(19) Sean $f, g : X \to Y$ funciones continuas, donde Y es Hausdorff. Compruebe que el conjunto $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ es un subconjunto cerrado de X. Concluya que si $f : X \to X$ es continua y X es T_2 entonces el conjunto de puntos fijos $\{x \in X : f(x) = x\}$ es un subconjunto cerrado de X.

(20) Sean $f, g : X \to Y$ funciones continuas, donde Y es Hausdorff. Suponga que f y g tienen los mismos valores en un subconjunto denso de X. Demuestre que $f = g$.

(21) Verifique que cada retracto (véase la definición de retracto en 3.A.(15)) de un espacio T_2 es un subconjunto cerrado del espacio.

(22) (*El espacio de Fort modificado*). Sea $X = \mathbb{N} \cup \{x_1, x_2\}$, con $x_1, x_2 \notin \mathbb{N}$ y $x_1 \neq x_2$. La topología de X es establecida declarando sistemas de vecindades para cada uno de los puntos de X. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\{n\} \in \mathcal{T}_X$. Ahora, $A \subseteq X$ es vecindad abierta de x_i si $x_i \in A$ y $|\mathbb{N} \setminus A| < \aleph_0$ (para $i = 1, 2$). El espacio es T_1 pero los puntos x_1 y x_2 no pueden ser separados con abiertos ajenos. Sea $f : \mathbb{N} \to X$ dada por $f(m) = m$ para toda $m \in \mathbb{N}$. Pruebe que la sucesión f converge en X tanto a x_1 como a x_2.

5.B. Espacios regulares

(1) Verifique que la imagen continua de un espacio topológico T_3 no es necesariamente un espacio T_3.

(2) Demuestre que si X es un espacio T_3 y $Y \subseteq X$ entonces Y también es un espacio T_3.

(3) Demuestre que la suma topológica libre $\oplus_{j\in J} X_j$ es T_3 si y sólo si cada X_j es T_3.
(4) Verifique que la línea de Sorgenfrey, la línea de Michael, y cualquier espacio linealmente ordenable, son ejemplos de espacios regulares.
(5) Demuestre que un espacio T_1 $(X, \mathcal{T})$ es un espacio T_3 si y sólo si para todo $F \subseteq X$ cerrado existe una familia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ tal que $F \subseteq U$ para toda $U \in \mathcal{B}$ y $F = \bigcap\{\operatorname{cl} U : U \in \mathcal{B}\}$.
(6) Pruebe que un espacio T_0 que satisfaga la condición (2) de la definición 5.23 debe ser T_2.
(7) Sea $\mathcal{T}_e$ la topología usual de $\mathbb{R}$, y definamos $\mathcal{B} = \mathcal{T}_e \cup \{\mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}\}$. Consideremos la topología $\mathcal{T}$ en $\mathbb{R}$ que genera $\mathcal{B}$ como una subbase. Demuestre que el espacio topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ es un espacio T_2 que no es T_3.
(8) Compruebe que el cociente de un espacio regular no es necesariamente un espacio regular.
(9) Recordemos que para todo espacio topológico X, un subconjunto $Y \subseteq X$ es discreto si Y con la topología heredada de X es un espacio discreto. Sea X un espacio T_2 infinito.
   (a) Corrobore que en X existe un punto x y un abierto V tal que $x \in V$ y $X \setminus V$ es infinito.
   (b) Demuestre que X contiene un subespacio discreto numerable. Es decir, cada espacio T_2 infinito contiene como subespacio a los números naturales $\mathbb{N}$.
   (Sugerencia: Por (1), existen $x_1 \in X$ y V_1 abierto en X tales que $x_1 \in V_1$ y $X \setminus V_1$ es infinito. Ahora, como $X \setminus V_1$ es un espacio T_2 infinito, aplicando nuevamente (1) podemos garantizar la existencia de un punto $x_2 \in X \setminus V_1$ y un abierto en $X \setminus V_1$ V_2 tales que $x_2 \in V_2$ y $X \setminus (V_1 \cup V_2)$ es infinito. Continue en forma inductiva).
(10) Suponga que $(X, \mathcal{T})$ es un espacio regular. Sea $\mathcal{T}_1$ otra topología en X tal que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_1$ ¿Sucederá entonces que $(X, \mathcal{T}_1)$ es un espacio T_3?
(11) Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $Y \subseteq X$. No es difícil demostrar que si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio T_i $(i \leqslant 2)$ entonces $(X, \mathcal{T}_Y)$ (véase el ejemplo 1.12) también satisface T_i. Pruebe que este resultado permanece cierto si consideramos $i = 3$.
(12) Sea X un espacio regular tal que para cada abierto V de X, se tiene que $|X \setminus V| < \aleph_0$. Verifique que X debe ser finito.

   Ahora suponga que X es un espacio regular infinito. Demuestre que X contiene una familia celular (véase el ejercicio 3.F.(2)) de cardinalidad $\aleph_0$ cuyos elementos son cerrados regulares de X (véase el ejercicio 2.D.(13)). (Use inducción).

(13) Sea X un conjunto no vacío, y sea τ una cadena de topologías para X tal que si $\mathcal{T} \in \tau$ entonces $\mathcal{T}$ es una topología T_3. Corrobore que la topología en X generada por $\bigcup \tau$ es también una topología T_3.

(14) (*Productos Caja*). Sea $\{X_j : j \in J\}$ una familia infinita de espacios topológicos. Pruebe que si cada espacio X_j $(j \in J)$ es un espacio T_2 (respectivamente, regular), entonces el producto caja $\square_{j\in J} X_j$ es un espacio T_2 (respectivamente, regular).

(15) (*Topología de Vietoris*). Sea $\mathcal{F}(X)$ el espacio de subconjuntos cerrados no vacíos del espacio topológico X, provisto con su topología de Vietoris definida en el ejercicio 1.G.(4). Pruebe que $\mathcal{F}(X)$ es Hausdorff si y sólo si X es un espacio regular.

(Sugerencia: Supongamos que X no es regular. Sean $x \in X$ y F un cerrado en X que no contiene a x tales que no pueden ser separados por abiertos ajenos en X. Demuestre que $F \cup \{x\}$ y F son puntos en $\mathcal{F}(X)$ que no pueden ser separados por abiertos ajenos en $\mathcal{F}(X)$.)

Ejercicios adicionales del capítulo 5

5.C. El espectro primo $Spec(A)$ de un anillo A

Sea A un anillo conmutativo con elemento identidad 1, y sea X el conjunto de todos los ideales primos de A. Para cada subconjunto E del anillo A, definimos $V(E) = \{\mathfrak{p} \in X : E \subseteq \mathfrak{p}\}$; es decir, $V(E)$ es el conjunto de todos los ideales primos de A que contienen al conjunto E. Demuestre que la familia de conjuntos $\mathcal{F} = \{V(E) : E \subseteq A\}$ tiene las siguientes propiedades:

(1) Si $E \subseteq A$ es arbitrario y $\mathfrak{a}_E$ es el ideal de A generado por el conjunto E, entonces $V(E) = V(\mathfrak{a}_E)$.

(2) $V(\{0\}) = X$ y $V(\{1\}) = \emptyset$;

(3) si $\{E_j : j \in J\}$ es una colección arbitraria de subconjuntos de A, entonces $V(\bigcup_{j\in J} E_j) = \bigcap_{j\in J} V(E_j)$;

(4) $V(E) \cup V(F) = V(\mathfrak{a}_E \cap \mathfrak{a}_F)$.

Las propiedades (1)–(3) de la familia $\mathcal{F}$ permiten demostrar que la colección $\mathcal{T} = \{A \setminus V(E) : E \subseteq A\}$ es una topología para X, la cual es llamada *topología de Zariski*. Obsérvese que los elementos de la familia $\mathcal{F}$ son los subconjuntos cerrados de X. El espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se denomina *espectro primo de* A, y se denota usualmente con $Spec(A)$. El espectro primo de un anillo A es siempre un espacio T_0; pero no es T_1 cuando el anillo A tiene por lo menos un ideal primo que no sea maximal. La razón de ello son las siguientes propiedades del espectro primo de un anillo (demuéstrelas).

(1) Para todo $\mathfrak{p} \in X$ (*i.e*, para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de A), $\text{cl}\,\{\mathfrak{p}\} = V(\mathfrak{p})$;
(2) Para todo $\mathfrak{p} \in X$, el conjunto $\{\mathfrak{p}\}$ es cerrado si y sólo si $\mathfrak{p}$ es un ideal maximal de A.

5.D. Grupos topológicos

(1) Sea $(G, *, \mathcal{T})$ un grupo topológico y sea e el elemento idéntico en G. Demuestre que para cada vecindad U de e, existe una vecindad V de e tal que $V^2 = \{x * y : x, y \in V\}$ está contenida en U.
(Sugerencia: Use la continuidad de $*$ en el punto (e, e)).
(2) Use el inciso anterior para demostrar que para cada vecindad U de e, podemos encontrar una segunda vecindad V de e que satisface $\text{cl}_G V \subseteq U$.
(3) Demuestre que todo grupo topológico T_0 es T_1, y concluya que todo grupo topológico T_0 es regular.
(4) Sea G un grupo topológico y H un subgrupo. Pruebe que si existe una vecindad U de la identidad e en G tal que $\text{cl}_G U \cap H$ es cerrado en G, entonces H es cerrado.
(Sugerencia: Tome una vecindad V de e tal que $V^2 \subseteq U$, y tome $x \in \text{cl}_G H$. Para demostrar que x pertenece a H, observe que $x^{-1} \in \text{cl}_G H$ (vea el ejercicio 4.9.(9)). Tome $y \in (x^{-1} * V) \cap H$. Demuestre que $x * y \in \text{cl}_G U \cap H$.)
(5) Demuestre que cualquier subgrupo discreto H de un grupo topológico G es cerrado en G.

5.E. Funciones Cardinales Topológicas

(1) Sea X un espacio topológico T_1 y sea $x \in X$. Una colección $\mathcal{V}_x$ de vecindades de x es una *pseudobase* de x si $\{x\} = \bigcap \mathcal{V}_x$. El *pseudocarácter de X en el punto x*, el cual denotaremos por $\psi(x, X)$, es el mínimo número cardinal τ tal que x tiene una pseudobase de cardinalidad τ. Por último, el *pseudocarácter de X*, $\psi(X)$, se define como el $\sup_{\mathrm{x}\in\mathrm{X}}\psi(\mathrm{x},\mathrm{X})$. Demuestre que para cada $x \in X$, $\psi(x, X) \leqslant \chi(x, X)$.
(2) Una *red* en un espacio topológico X es una colección $\mathcal{R}$ de subconjuntos de X tal que cada subconjunto abierto no vacío de X es la unión de elementos de alguna subcolección de $\mathcal{R}$. El *peso de red $nw(X)$ de* X es el menor cardinal τ tal que X tiene una red de cardinalidad τ. Demuestre que siempre se cumple $d(X) \leqslant nw(X) \leqslant \min\{w(X), |X|\}$. (Observe que tanto en este ejercicio como en 3.H. estamos usando la palabra red para designar ciertos objetos matemáticos, y es importante mencionar que designan objetos diferentes),

(3) Demuestre que si $f : X \to Y$ es una función continua suprayectiva, entonces $nw(Y) \leqslant nw(X)$.
(4) Para cualquier subespacio Y de X se cumple $nw(Y) \leqslant nw(X)$.
(5) El abanico $V(\aleph_0)$, definido en 4.E.(7), satisface las relaciones: $\chi(V(\aleph_0)) > \aleph_0 = \psi(V(\aleph_0))$ y $w(V(\aleph_0)) > \aleph_0 = nw(V(\aleph_0))$.
(6) Pruebe que si X es un espacio topológico linealmente ordenado, entonces $\psi(x, X) = \chi(x, X)$ para todo $x \in X$.

(Sugerencia: Sea $\mathcal{V}$ una pseudobase local de x en X. Para cada $V \in \mathcal{V}$, existe un intervalo abierto J_V tal que $x \in J_V \subseteq V$. Pruebe que la colección $\{J_V : V \in \mathcal{V}\}$ es una base local de x en X.)
(7) Pruebe que si X es un espacio topológico linealmente ordenado, entonces $nw(X) = w(X)$.

(Sugerencia: Considere una red $\mathcal{R}$ en X de mínima cardinalidad. Para cada $N \in \mathcal{R}$, tómese
$$\widetilde{N} = \mathrm{cl}_X(\bigcup_{a,b \in N, a \leqslant b} [a, b]).$$
Demuestre que $\widetilde{N}$ es un intervalo cerrado en X para toda $N \in \mathcal{R}$. Observe que $\widetilde{N}$ es un conjunto unipuntual si N lo es. Tomemos los conjuntos $A = \{a \in X : a \text{ es un máximo de algún } \widetilde{N}\}$ y $B = \{b \in X : b \text{ es un mínimo de algún } \widetilde{N}\}$. Pruebe que $\widetilde{\mathcal{R}} = \{\widetilde{N} : N \in \mathcal{R}\}$ es una red de X y que $\{(a, b) : a \in A, b \in B\} \cup \{(\leftarrow, b) : b \in B\} \cup \{(a, \to) : a \in A\}$ es una base de X.)
(8) Verifique que las igualdades $\psi(x, X) = \chi(x, X)$ (para todo $x \in X$) y $nw(X) = w(X)$ también se cumplen si X es un espacio métrizable.

5.F. Axiomas de separación y funciones cardinales

Véase el ejercicio 3.E para consultar las definiciones de las funciones cardinales d y w.

(1) Sea X un espacio T_0, demuestre que $|X| \leqslant 2^{w(X)}$.
(2) Sea X un espacio T_2. Pruebe que $|X| \leqslant 2^{2^{d(X)}}$.
(3) Demuestre que no existe cota superior para las cardinalidades de los espacios separables T_1 (compare con el problema anterior).
(4) Verifique que para un espacio regular X siempre se cumple la desigualdad $w(X) \leqslant 2^{d(X)}$.

(Sugerencia: Sea D un subconjunto denso tal que $|D| = d(X)$. Demuestre que el conjunto $\mathcal{B} = \{\mathrm{int}\,\mathrm{cl}\, B : B \subseteq D\}$ es una base para X).

5.G. Límites de funciones respecto de filtros

(1) Sean X un conjunto, $\mathcal{F}$ un filtro en X, y $f : X \to Y$ una función a un espacio topológico Y. Diremos que un punto $y_0 \in Y$ es *límite de f con respecto al filtro* $\mathcal{F}$ si para toda vecindad V de y_0 en Y existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $f(F) \subseteq V$.

Al hecho que y_0 es un límite de f con respecto a $\mathcal{F}$ se le denota $y_0 \in \lim\limits_{\mathcal{F}} f$.

(a) Dé ejemplos de espacios topológicos X, de filtros $\mathcal{F}$ y de funciones f para los cuales el conjunto $\lim\limits_{\mathcal{F}} f$ tenga cardinalidad igual a cero, igual a 1 y sea exactamente igual a X, respectivamente.

(b) Sean X un conjunto, $\mathcal{F}$ un filtro en X, y $f : X \to Y$ una función a un espacio de Hausdorff Y. Demuestre que si existe un límite de f con respecto a $\mathcal{F}$, entonces éste es único.

(c) Demuestre que si Y es un espacio topologico que tiene la propiedad que para todo conjunto X, todo filtro $\mathcal{F}$ en X y toda función $f : X \to Y$ existe a lo más un límite de f con respecto a $\mathcal{F}$, entonces Y es de Hausdorff.
(Sugerencia: Suponga que Y no es de Hausdorff; para demostrar la afirmación es suficiente construir un conjunto X, un filtro $\mathcal{F}$ en X y una función $f : X \to Y$ tal que f tiene dos límites diferentes con respecto a $\mathcal{F}$.
Considere para ello $X = Y$, y sean y_1, y_2 dos puntos distintos de Y que no tienen vecindades ajenas. Sea

$$\mathcal{F} = \{ V_1 \cap V_2 : V_1 \text{ es vecindad de } y_1 \text{ y } V_2 \text{ es vecindad de } y_2 \}.)$$

Capítulo 6

Espacios normales y completamente regulares

En el capítulo anterior estudiamos algunos axiomas en espacios topológicos que nos garantizan separar, por medio de subconjuntos abiertos, parejas de puntos y subconjuntos cerrados de puntos. Nuestra experiencia hasta ahora ha sido que cuando aumentamos algunos axiomas de separación a aquellos que definen a un espacio topológico, obtenemos clases de espacios que tienen mayor riqueza en su estructura topológica.

En el presente capítulo estudiaremos axiomas de separación definidos por funciones continuas. Es decir, analizaremos espacios topológicos en los cuales están definidas una gran variedad de funciones continuas con valores en los números reales. Serán ahora esas funciones continuas las que permitirán separar puntos de cerrados y cerrados entre sí. Introduciremos estos axiomas, llamados de normalidad y regularidad completa, en las secciones 6.1 y 6.2.

En la sección 6.3 estudiaremos el Lema de Urysohn, el Teorema de extensión de Tietze y el Teorema de inmersión de Tychonoff. Éstos constituyen tres de los teoremas fundamentales y fundacionales de la topología general, muestran la riqueza de la estructura topológica de los axiomas de separación presentados en las secciones 6.1 y 6.2, y son la culminación de toda la teoría desarrollada en este libro hasta esa sección.

1. Espacios normales

Un axioma de separación más fuerte que el axioma de separación T_3 es el axioma T_4 o axioma de normalidad. El axioma de normalidad fue introducido por Heinrich Tietze en el primero de una serie de tres artículos que aparecieron en 1923 (véase la referencia [63]). Este axioma de separación también fue introducido y estudiado independientemente por P. Alexandroff y P. Urysohn en 1924 en su artículo [1].

6.1. Definición. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es normal o T_4 si X tiene las siguientes propiedades:

(1) X es un espacio T_1; y
(2) para cualesquiera subconjuntos cerrados y ajenos F_1 y F_2 de X, existen abiertos ajenos A_1 y A_2 de X tales que $F_1 \subseteq A_1$ y $F_2 \subseteq A_2$.

Debido a que en cualquier espacio T_1 los conjuntos formados por un sólo punto son subconjuntos cerrados, si F es un subconjunto cerrado de un espacio normal X y $x \notin F$, podemos aplicar la condición (2) de la definición 6.1 a los subconjuntos cerrados $F_1 = \{x\}$ y $F_2 = F$, para poder concluir la existencia de un par de subconjuntos abiertos ajenos A_1 y A_2 tales que $x \in A_1$ y $F \subseteq A_2$. De esta forma obtenemos que los espacios normales son espacios regulares. Pero el recíproco no es cierto (ver 6.6).

6.2. Ejemplos.

(1) *Todo espacio métrico es un espacio normal.* Supongamos que (X, d) es un espacio métrico, y sean F_1, F_2 subconjuntos cerrados ajenos en X. Como $F_1 \subseteq X \setminus F_2$, para cada punto $x \in F_1$ podemos elegir $\delta_x > 0$ tal que $x \in B(x, \delta_x) \subseteq X \setminus F_2$. Análogamente, para todo punto $y \in F_2$ podemos elegir $\epsilon_y > 0$ tal que $y \in B(y, \epsilon_y) \subseteq X \setminus F_1$. Definamos

$$A_1 = \bigcup_{x \in F_1} B(x, \tfrac{\delta_x}{3}) \quad \text{y} \quad A_2 = \bigcup_{y \in F_2} B(y, \tfrac{\epsilon_y}{3}).$$

Claramente los conjunto A_1 y A_2 son subconjuntos abiertos de (X, d) que contienen a F_1 y a F_2, respectivamente. Además, A_1 y A_2 son ajenos ya que si $z \in A_1 \cap A_2$ entonces existen $x \in F_1$ y $y \in F_2$ tales que $z \in B(x, \frac{\delta_x}{3}) \cap B(y, \frac{\epsilon_y}{3})$. Pero entonces $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y) < \frac{\delta_x}{3} + \frac{\epsilon_y}{3} < \text{máx}\{\delta_x, \epsilon_y\}$, y en consecuencia $x \in B(y, \epsilon_y)$ o bien $y \in B(x, \delta_x)$, lo cual no es posible. De esta manera, A_1 y A_2 son ajenos.

En particular, cualquier espacio de Baire κ^ω es normal (véase el ejercicio 4.C.(9)).

(2) *Cualquier conjunto no vacío bien ordenado* $(X, \leqslant)$ *es un espacio normal cuando se considera en* X *la topología inducida por el orden* (véase el ejemplo 1.38). Supongamos que $(X, \leqslant)$ es un conjunto bien ordenado. Primeramente notemos que X es un espacio de Hausdorff por lo dicho en el ejemplo 5.15, y que además, para todo $x, y \in X$ con $x < y$ el conjunto $(x, y] = \{z \in X : x < z \leqslant y\}$ es siempre un subconjunto abierto de X. Efectivamente, simplemente observe que si X tiene último elemento y dicho elemento es y, entonces $(x, y]$ es el segmento final $D_x = \{z \in X : x < z\}$, el cual es un abierto básico de la topología del orden. Si y no es el último elemento de X, entonces $(x, y] = (x, y')$, donde y' es el sucesor inmediato de y.

Demostremos ahora que X es un espacio normal. Supongamos que F_1 y F_2 son subconjuntos cerrados ajenos no vacíos de X, y sea $x_0 = \text{mín}\, X$. Observe que $\{x_0\}$ es siempre un subconjunto abierto y cerrado de X.

Caso 1. $x_0 \notin F_1 \cup F_2$. Consideremos un punto arbitrario $y \in F_1$. Como $y \in F_1 \subseteq X \setminus F_2$ y F_2 es cerrado en X, existe un subconjunto abierto básico (x_y, z) tal que $y \in (x_y, z) \subseteq X \setminus F_2$. Observe que el intervalo (x_y, z) contiene al conjunto $(x_y, y]$. De esta manera, para cada $y \in F_1$ podemos seleccionar un intervalo de tipo $(x_y, y]$ que contiene a y y que es ajeno del subconjunto cerrado F_2. Similarmente, para cada $b \in F_2$ podemos elegir un conjunto de tipo $(a_b, b]$ ajeno de F_1. Definamos

$$U = \bigcup_{y \in F_1} (x_y, y] \qquad \text{y} \qquad V = \bigcup_{b \in F_2} (a_b, b].$$

Los conjunto U y V son abiertos ajenos de X que contienen a los subconjuntos cerrados F_1 y F_2, respectivamente.

Caso 2. $x_0 \in F_1 \cup F_2$. Supongamos que $x_0 \in F_1$. Aplicando el mismo argumento al hecho en el caso 1, podemos construir subconjuntos abiertos ajenos U y V tales que $F_1 \setminus \{x_0\} \subseteq U$ y $F_2 \subseteq V$. Entonces $F_1 \subseteq U \cup \{x_0\}$ y $F_2 \subseteq V$, y los conjuntos $U \cup \{x_0\}$ y V son abiertos ajenos de X.

En particular, los espacios bien ordenados $[0, \omega_1)$ y $[0, \omega_1]$ son normales.

El siguiente teorema proporciona una caracterización de la normalidad análoga a la que se establece en el teorema 5.26 para el caso de la regularidad (dejamos la demostración del teorema como un ejercicio; vea 6.A.(3)).

6.3. Proposición. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *un espacio* T_1. *El espacio* X *es un espacio normal si y sólo si para todo subconjunto cerrado* F *de* X *y para cada subconjunto abierto* A *de* X *tal que* $F \subseteq A$, *existe un abierto* B *de* X *tal que* $F \subseteq B \subseteq \operatorname{cl} B \subseteq A$.

Hemos mostrado hasta aquí que los axiomas de separación T_0, T_1, T_2 y T_3 tienen un "buen comportamiento" cuando se trata de subespacios y productos; es decir, para $i = 0, 1, 2, 3$ cualquier subespacio de un espacio T_i es un espacio T_i y el producto de espacios T_i conserva también esta propiedad. Desafortunadamente, en el caso de los espacios normales, este buen comportamiento desaparece. Los siguientes ejemplos de espacios topológicos muestran el comportamiento errático que tiene la normalidad con respecto a productos y subespacios.

6.4. Ejemplo. *El espacio producto* $[0, \omega_1) \times [0, \omega_1]$. Consideremos a los conjuntos $[0, \omega_1) = \{\alpha : \alpha < \omega_1\}$ y $[0, \omega_1] = \{\alpha : \alpha \leqslant \omega_1\}$ (véase la sección A.8). Como ya se ha mencionado, consideramos en ambos conjuntos la topología del orden inducida por el orden de los números ordinales (consulte el ejemplo 1.38). Resulta que ambos espacios son espacios T_4 y que $[0, \omega_1)$ es un subespacio de $[0, \omega_1]$.

Afirmación. El espacio producto $[0, \omega_1) \times [0, \omega_1]$ no es normal.

En efecto, el espacio $[0, \omega_1]$ es un espacio de Hausdorff (cf. ejemplo 5.15), por ello la diagonal $\Delta = \{(\alpha, \alpha) : \alpha \in [0, \omega_1]\}$ es un subespacio cerrado de $[0, \omega_1] \times [0, \omega_1]$. Entonces el subespacio $A = \Delta \setminus \{(\omega_1, \omega_1)\}$ es un subespacio cerrado de $[0, \omega_1) \times [0, \omega_1]$. Definamos $B = [0, \omega_1) \times \{\omega_1\}$. Resulta que B es un subespacio cerrado de $[0, \omega_1) \times [0, \omega_1]$ que es ajeno de A. En seguida demostraremos que para estos dos subespacios de $[0, \omega_1) \times [0, \omega_1]$ no existen abiertos ajenos U y V de $[0, \omega_1) \times [0, \omega_1]$ tales que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$. Supongamos, por el contrario, que existen tales subconjuntos abiertos U y V. Entonces sucede lo siguiente:

Para cada $\alpha < \omega_1$, *existe un ordinal* β *con* $\alpha < \beta < \omega_1$ *para el cual el punto* (α, β) *no pertenece a* U.

Para demostrar esta última afirmación fijemos un punto $\alpha < \omega_1$, si ocurriera que para todos los puntos $\beta \in (\alpha, \omega_1)$ se tuviera que $(\alpha, \beta) \in U$, entonces necesariamente el punto (α, ω_1) pertenecería a la cerradura de U; esto es, $(\alpha, \omega_1) \in \operatorname{cl}(U)$ (la cerradura es tomada en el producto

$[0,\omega_1)\times[0,\omega_1])$. Esto es así porque (α,ω_1) es punto de acumulación del conjunto $\{(\alpha,\beta) : \alpha < \beta < \omega_1\}$. Pero entonces los abiertos U y V se intersectan porque el subconjunto abierto V contiene a B, y por ello, contiene a (α,ω_1). Es claro que esto contradice la elección de U y V. Por esta razón no todos los elementos de tipo (α,β) pertenecen a U. Esto demuestra la afirmación.

Definamos ahora, para cada $\alpha < \omega_1$, a $\beta(\alpha) = \text{mín}\{\beta \in (\alpha,\omega_1) : (\alpha,\beta) \notin U\}$. Sea $\alpha_1 < \omega_1$ fijo, y definamos $\alpha_{n+1} = \beta(\alpha_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en ω_1. Note que debido a que $\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto numerable de ordinales menores que ω_1, este conjunto es un subconjunto acotado de $[0,\omega_1)$, y por ello existe $\alpha^* = \sup\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ en $[0,\omega_1)$. Como la sucesión $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente, ésta converge a α^* en $[0,\omega_1)$. Entonces $\lim \beta(\alpha_n) = \alpha^*$. En consecuencia, $(\alpha_n,\beta(\alpha_n))$ es una sucesión que converge a (α^*,α^*) en el espacio $[0,\omega_1)\times[0,\omega_1]$. Ahora observe que $(\alpha^*,\alpha^*) \in A \subseteq U$ y que ningún punto de tipo $(\alpha_n,\beta(\alpha_n))$ pertenece a U; esto es una contradicción. Por lo anterior, el espacio $[0,\omega_1)\times[0,\omega_1]$ no es un espacio normal. ⊠

Las propiedades del espacio $[0,\omega_1)\times[0,\omega_1]$ fueron estudiadas por primera vez por Jean Dieudonné en 1939. Este mismo espacio topológico fue construido, y estudiado, independientemente por A. P. Morse.

Como hemos verificado en el ejemplo anterior, la normalidad no es una propiedad productiva. Pero este ejemplo trata con el producto de dos espacios diferentes. Como una aplicación del siguiente resultado, conocido como el Lema de Jones, demostraremos que la Línea de Sorgenfrey es un espacio normal cuyo cuadrado no es un espacio normal. El resultado que utilizaremos para hacer esto fue demostrado por F. B. Jones en 1937, y es de gran relevancia en la topología general. Es importante mencionar también que él mismo tiene una versión más general en términos de funciones cardinales (véase el ejercicio 6.A.(4)).

6.5. Teorema (F. B. Jones). *Sea X un espacio normal separable. Si X contiene un subespacio discreto y cerrado de cardinalidad κ, entonces $2^\kappa \leqslant 2^{\aleph_0}$.*

Demostración. Sea Y un subespacio discreto y cerrado de X de cardinalidad κ y sea D un subespacio denso numerable de X. Como cada subconjunto de Y es un subconjunto cerrado de X, tenemos que para cada $A \subseteq Y$ existen subconjuntos abiertos ajenos U_A y V_A de

X tales que $A \subseteq U_A$ y $Y \setminus A \subseteq V_A$. Para todo $A \subseteq Y$, definamos $C_A = U_A \cap D$. Notemos primeramente que si $A, B \subseteq Y$ son diferentes, entonces $\mathrm{cl}\, U_A \neq \mathrm{cl}\, U_B$. En efecto, como $A \neq B$ se tiene que $A \setminus B \neq \emptyset$ o $B \setminus A \neq \emptyset$ (o ambos casos). Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $A \setminus B \neq \emptyset$. Entonces $\mathrm{cl}\,(U_A) \cap V_B \neq \emptyset$ (porque $A \setminus B \subseteq \mathrm{cl}\,(U_A) \cap V_B$). De esto último podemos ya concluir que $\mathrm{cl}\,(U_A) \neq \mathrm{cl}\, U_B$ porque $\mathrm{cl}\,(U_B) \cap V_B = \emptyset$.

Observe ahora que para cada $A \subseteq Y$ se tiene que

$$\mathrm{cl}\,(U_A) = \mathrm{cl}\,(U_A \cap D) = \mathrm{cl}\,(C_A)$$

(esto debido a que D es un subconjunto denso de X). En consecuencia, podemos concluir que si $A, B \subseteq Y$ son tales que $A \neq B$, entonces $C_A \neq C_B$ (puesto que si $C_A = C_B$ entonces se tendría que $\mathrm{cl}\,(U_A) = \mathrm{cl}\,(U_B)$). De esta manera tenemos una función inyectiva $\psi : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(D)$ dada por $\psi(A) = C_A$ para todo $A \in \mathcal{P}(Y)$. La existencia de esta función nos permite concluir que $2^\kappa = |\mathcal{P}(Y)| \leqslant |\mathcal{P}(D)| = 2^{\aleph_0}$. ⊠

Como hemos mencionado, utilizando el Lema de Jones podemos demostrar que el cuadrado de la Línea de Sorgenfrey no es un espacio normal de manera muy sencilla. Efectivamente, primero observemos que el cuadrado de la Línea de Sorgenfrey es un espacio separable (el subespacio $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ es un subespacio denso); note ahora que la diagonal $\{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio discreto y cerrado de cardinalidad $\mathfrak{c}$; por lo tanto, $\mathcal{L}_S \times \mathcal{L}_S$ no puede ser un espacio normal.

6.6. Observación. Con un argumento similar al anterior, podemos demostrar que el plano de Moore $(X, \mathcal{T})$ es un espacio que no es normal. Para ello simplemente observemos que el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in \mathbb{Q}$ y $y > 0\}$ es un subconjunto denso numerable del plano de Moore y que el subespacio X_0 (véase ejemplo 5.25) es un subespacio cerrado y discreto de cardinalidad igual al continuo $\mathfrak{c}$.

El espacio dado en el ejemplo 6.4 no es normal pero es un subespacio del espacio normal $[0, \omega_1] \times [0, \omega_1]$ (véase el corolario 1.8.(2) y el teorema 7.10 más adelante). Esto establece que la normalidad no es una propiedad hereditaria. No obstante, la propiedad T_4 es heredada por los subespacios cerrados y también es una propiedad topológica. En la siguiente proposición se demuestran estas afirmaciones.

6.7. Proposición.

(1) *Si* $(X, \mathcal{T})$ *es un espacio normal y* $F \subseteq X$ *es un subconjunto cerrado, entonces* F *con la topología relativa es un espacio normal.*

(2) *La propiedad de normalidad es una propiedad topológica.*

Demostración. (1) Como la propiedad T_1 es hereditaria, el subespacio F es un espacio T_1. Por otro lado, si F_1, F_2 son subconjuntos cerrados ajenos de F, entonces F_1 y F_2 son subconjuntos cerrados ajenos de X. Como X es un espacio normal, existen subconjuntos abiertos ajenos A_1 y A_2 de X tales que $F_1 \subseteq A_1$ y $F_2 \subseteq A_2$. Entonces los conjuntos $A_1 \cap F$ y $A_2 \cap F$ son subconjuntos abiertos ajenos de F tales que $F_1 \subseteq A_1 \cap F$ y $F_2 \subseteq A_2 \cap F$. Por lo tanto, F es un espacio normal.

No es difícil demostrar (2) a partir de la definición de normalidad que está dada en términos de abiertos y cerrados. Véase el ejercicio 6.A.(5). ⊠

2. Espacios completamente regulares

Ahora trataremos un último axioma de separación, intermedio entre el axioma de regularidad y el axioma de normalidad. Este nuevo axioma de separación determina una nueva clase de espacios topológicos que son llamados *espacios completamente regulares* o *espacios de Tychonoff*, o simplemente, *espacios Tychonoff*.

La clase de los espacios completamente regulares fue introducida poco tiempo después de que H. Tietze introdujera la clase de los espacios normales. En 1930 el matemático ruso Andrei Nikolaevich Tychonoff demostró en su artículo [65] que todo espacio normal es homeomorfo a un subespacio de un espacio producto de tipo $[0,1]^M$, para un adecuado conjunto M (los espacios $[0,1]^M$ son conocidos hoy en día como *cubos de Tychonoff*); y preguntó si la condición de normalidad en su resultado era una condición necesaria. En [65], A. N. Tychonoff notó que esto no era así e introdujo los espacios completamente regulares, haciendo ver que dichos espacios topológicos, y únicamente ellos, tienen la propiedad de ser homeomorfos a subespacios de cubos de Tychonoff (véase el teorema 6.23 más adelante).

6.8. Definición. Un espacio topológico $(X, \mathfrak{T})$ es completemente regular (o Tychonoff) si satisface las siguientes condiciones:

(1) $(X, \mathfrak{T})$ es un espacio T_1; y
(2) para cualquier subconjunto cerrado F de X y cualquier punto $x \notin F$, existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f[F] \subseteq \{1\}$ y $f(x) = 0$.

De la misma definición de espacio completamente regular podemos deducir fácilmente que los espacios completamente regulares son espacios regulares. En efecto, si X es un espacio completamente regular, $F \subseteq X$ es un subconjunto cerrado y $x \notin F$ es arbitrario, entonces existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f[F] \subseteq \{1\}$ y $f(x) = 0$. Entonces, los subconjuntos $A_1 = f^{-1}[(\frac{1}{2}, 1]]$ y $A_2 = f^{-1}[[0, \frac{1}{2})]$ son subconjuntos abiertos de X ajenos y satisfacen $F \subseteq A_1$ y $x \in A_2$.

En la sección siguiente demostraremos que todo espacio normal es un espacio completamente regular, utilizando para ello un relevante resultado debido a P. S. Urysohn (véase teorema 6.17). Como una consecuencia de ello, veremos que la clase de los espacios completamente regulares es una clase "intermedia" entre la clase de los espacios regulares o espacios T_3 y la clase de los espacios normales o espacios T_4. Este hecho justifica la muy usada denominación de espacios topológicos $T_{3.5}$ para los espacios completamente regulares (también son llamados espacios topológicos $T_{3\frac{1}{2}}$).

6.9. Observación. Algunos autores definen la regularidad, normalidad y regularidad completa como aquellos espacios que satisfacen la condición (2) en 5.23, 6.1 y 6.8, respectivamente, excluyendo la propiedad T_1. Sugerimos al lector tener cuidado en lo referente a la nomenclatura de estos axiomas de separación en otros textos.

6.10. Ejemplos.

(1) Como la suma y el producto de funciones reales continuas definidas en un espacio topológico arbitrario son continuas, podemos dar una prueba directa y sencilla de que todo espacio métrico es un espacio completamente regular.

    Supongamos que (X, d) es un espacio métrico. Consideremos un subconjunto cerrado F y un punto $p \notin F$. Definamos a $f : X \to [0, 1]$ por medio de la fórmula

$$f(x) = \frac{d(x, p)}{d(x, p) + d(x, F)},$$

donde $d(x,F) = \inf\{d(x,a) : a \in F\}$. Obsérvese que $d(x,F) > 0$ para todo $x \notin F$. Note también que $f(p) = 0$ y que $f(x) = 1$ para toda $x \in F$. Para notar que f es continua, simplemente recuerde que las funciones de tipo $g : X \to \mathbb{R}$, donde $g(x) = d(x,A)$ para toda $x \in X$, y $A \subseteq X$ es fijo, son siempre funciones continuas. Entonces f es continua siendo el cociente de funciones continuas.

(2) No todo espacio completamente regular es un espacio normal. El plano de Moore $(X, \mathcal{T})$ no es un espacio normal (véase 6.6); sin embargo, sí es un espacio completamente regular. Demostrémoslo. Usaremos la notación usada en el ejemplo 5.25. Sean $F \subseteq X$ un cerrado y $z \notin F$. Si $z \in X \setminus X_0$, entonces existe $r > 0$ tal que $D(z,r) \cap F = \emptyset$.

La función $f : X \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \text{mín}\{\frac{d(x,z)}{r}, 1\}$$

es una función continua en X (debido a que f es continua con respecto a la topología euclideana. Aquí, $d(x,z)$ denota la distancia euclidiana de x a z), además $f(z) = 0$ y $f(F) \subseteq \{1\}$.

Por otro lado, si $z = (x_0, 0) \in X_0$, entonces existe $r > 0$ tal que $C(z,r) \cap F = \emptyset$. Sea $S = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : (u-x_0)^2 + (v-r)^2 = r^2\}$ la circunferencia de $C(z,r)$. Para todo $x \in X \setminus X_0$ sea $s(x)$ el punto de intersección de la línea recta que une a z con x con la circunferencia S. Definamos $f : X \to [0,1]$ de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = z, \\ 1 & \text{si } x \in X_0 \setminus \{z\}, \\ \text{mín}\{1, \frac{d(x,z)}{d(s(x),z)}\} & \text{si } x \in X \setminus X_0. \end{cases}$$

Para todo $a \in (0,1)$, los conjuntos $f^{-1}([0,a)) = C(z,ra)$ y $f^{-1}((a,1]) = X \setminus \operatorname{cl} C(z,ra)$ son subconjuntos abiertos de X, de donde f es continua. Es claro que $f(z) = 0$ y $f(F) \subseteq f(X) \setminus C(z,r) = \{1\}$.

En 1946, E. Hewitt construyó un ejemplo de un espacio topológico regular X cuyas únicas funciones continuas $f : X \to \mathbb{R}$ son las funciones constantes. En el caso de los espacios completamente regulares, con más de un punto, siempre es posible garantizar la existencia de funciones continuas de valores reales no constantes. Veamos por qué: Si $(X, \mathcal{T})$

es un espacio completamente regular y $x, y \in X$ son tales que $x \neq y$, entonces $x \notin \{y\}$ y el conjunto unipuntual $\{y\}$ es un subconjunto cerrado de X. Como X es completamente regular, existe una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$ y $f(\{y\}) = \{1\}$. Es claro que f no es una función constante. Como conclusión podemos decir que el espacio construido por E. Hewitt no puede ser un espacio completamente regular. Esto muestra entonces la existencia de espacios regulares que no son completamente regulares.

En la lista de problemas que aparecen al final del capítulo, dejamos como ejercicio las demostraciones de los resultados relacionados a subespacios e imágenes continuas de espacios completamente regulares. Nuestro siguiente resultado es el relacionado al producto de espacios completamente regulares.

6.11. Teorema. *Sea $\{(X_j, \mathfrak{T}_j) : j \in J\}$ una familia de espacios topológicos no vacíos. $\prod_{j\in J} X_j$ es un espacio completamente regular si y sólo si cada espacio X_j es un espacio completamente regular.*

Demostración. $\Rightarrow$] Supóngase que $\prod_{j\in J} X_j$ es un espacio completamente regular. Como cada espacio X_i es homeomorfo a un subespacio de $\prod_{j\in J} X_j$, entonces el espacio X_i es un espacio completamente regular.

$\Leftarrow$] Supongamos ahora que cada espacio X_j es un espacio completamente regular. Debido a que cada espacio X_j es un espacio T_1, el producto $\prod_{j\in J} X_j$ también es un espacio T_1. Consideremos ahora un punto $x \in \prod_{j\in J} X_j$ y un subconjunto cerrado F de $\prod_{j\in J} X_j$ que no contenga a x. Como $x \in (\prod_{j\in J} X_j)\setminus F$ y F es cerrado, existe un subconjunto abierto canónico B de $\prod_{j\in J} X_j$ tal que $x \in B \subseteq (\prod_{j\in J} X_j) \setminus F$. Como B es un abierto canónico del producto de los espacios X_j, existe una cantidad finita de índices $j_1, j_2, \ldots, j_n$ en el conjunto J y subconjuntos abiertos $U_{j_i} \in \mathfrak{T}_{j_i}$ para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tales que $B = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{j_i}^{-1}[U_{j_i}]$. Como $x \in B$, entonces la j_i-ésima coordenada de x, $x_{j_i} = \pi_{j_i}(x)$, pertenece al abierto U_{j_i} (para toda $i = 1, 2, \ldots, n$). Como cada espacio X_{j_i} es un espacio completamente regular, para toda $i = 1, 2, \ldots, n$, existe una función continua $f_i : X_{j_i} \to [0, 1]$ tal que $f_i(x_{j_i}) = 1$ y $f_i(X_{j_i}\setminus U_{j_i}) = \{0\}$. Definamos $g_i : \prod_{j\in J} X_j \to [0, 1]$ como la composición $g_i = f_i \circ \pi_{j_i}$ para toda $i = 1, 2, \ldots, n$, y definamos $g : \prod_{j\in J} X_j \to [0, 1]$ como la función

$$g(y) = \text{mín}\{g_i(y) : i = 1, 2, \ldots, n\}$$

para toda $y \in \prod_{j\in J} X_j$; esto es, $g = \text{mín}\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$. Como cada una de las funciones g_i es una función continua, la función g es una función continua. Además, sucede que

$$g(x) = \text{mín}\{g_i(x) : i = 1, 2, \dots, n\} = \text{mín}\{f_i(x_{j_i}) : i = 1, 2, \dots, n\} = 1$$

y si $y \in \prod_{j\in J} X_j \setminus B$ entonces $y_{j_i} = \pi_{j_i}(y) \notin U_{j_i}$ para alguna i, por lo cual $f_i(y_{j_i}) = 0$ para alguna $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. En consecuencia, $g(y) = \text{mín}\{g_i(y) : i = 1, 2, \dots, n\} = \text{mín}\{f_i(y_{j_i}) : i = 1, 2, \dots, n\} = 0$. Por lo tanto, se ha mostrado la existencia de una función continua $g : \prod_{j\in J} X_j \to [0, 1]$ tal que $g(x) = 1$ y $g(F) = \{0\}$. Esto es, $\prod_{j\in J} X_j$ es un espacio completamente regular. ⊠

6.12. Ejemplo. Como todo espacio discreto es metrizable, cualquier espacio de Cantor 2^κ (y cualquier espacio de Baire κ^ω) es completamente regular.

Nuestro propósito ahora es demostrar una caracterización de los espacios completamente regulares que tiene relación con la noción de topología débil.

6.13. Definición. Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $\{(Y_j, \mathcal{T}_j) : j \in J\}$ una colección de espacio topológicos y $\mathcal{F} = \{f_j : X \to Y_j : j \in J\}$ una familia de funciones (no necesariamente continuas).

(1) Diremos que la familia de funciones $\mathcal{F}$ *separa (o distingue) puntos del espacio* X si para cada par de puntos distintos x y y de X, existe un índice $i \in J$ tal que $f_i(x) \neq f_i(y)$.
(2) Por otro lado, diremos que la familia de funciones $\mathcal{F}$ *genera la topología* de X si la colección $\{f_j^{-1}(U) : U \in \mathcal{T}_j,\ j \in J\}$ es una subbase para la topología de X.

Recuerde que una inmersión es una función continua $f : X \to Y$ tal que $f : X \to f[X]$ es un homemorfismo, donde $f[X]$ tiene la topología de subespacio respecto de Y. Es fácil notar que si $f : X \to Y$ es una inmersión entonces la familia $\mathcal{F} = \{f\}$ separa puntos de X y además genera la topología de X.

Si $\{(X_j, \mathcal{T}_j) : j \in J\}$ es una familia de espacios topológicos, y si $\mathcal{F} = \{f_j : X \to X_j : j \in J\}$ es una familia de funciones definidas sobre un conjunto X, entonces sabemos que ${}_{\mathcal{F}}\mathcal{T}$ es la menor de las topologías en X que convierten a cada función $f \in \mathcal{F}$ en una función continua, resulta entonces que la familia de funciones $\mathcal{F}$ genera la topología ${}_{\mathcal{F}}\mathcal{T}$ en el sentido de la definición 6.13 (véase la proposición 4.5). De esta manera, el concepto de familia (de funciones continuas) que genera la topología de un espacio topológico es la noción que resuelve el problema de conocer, dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, cuándo la topología $\mathcal{T}$ es una topología débil inducida por una colección de funciones continuas. En la proposición 6.15 damos una caracterización de aquellos espacios para los cuales su topología es de este tipo.

El siguiente lema será de utilidad para el resultado antes mencionado. En este lema vemos la relación que hay entre los conceptos de familia de funciones que separa puntos y familia de funciones que genera una topología.

6.14. Lema. *Si la familia de funciones* $\mathcal{F} = \{f_j : X \to Y_j : j \in J\}$ *genera la topología de un espacio topológico* $(X, \mathcal{T})$ *que es* T_0*, entonces* $\mathcal{F}$ *también separa los puntos de* X*.*

Demostración. Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Como X es T_0, existe $U \in \mathcal{T}$ tal que $|U \cap \{x, y\}| = 1$. Sin perder generalidad podemos suponer que $x \in U$ y $y \notin U$. Debido a que $\mathcal{F}$ genera la topología de X, existen $j_1, \ldots, j_n \in J$ y subconjuntos abiertos U_{j_i} en Y_{j_i} tales que $x \in \bigcap_{i=1}^{n} f_{j_i}^{-1}(U_{j_i}) \subseteq U$. Como $y \notin U$, existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $y \notin f_{j_k}^{-1}(U_{j_k})$. Es claro que entonces $f_{j_k}(x) \neq f_{j_k}(y)$. ⊠

La siguiente proposición nos proporciona una interesante caracterización de los espacios completamente regulares en términos de la topología débil inducida por una familia de funciones.

6.15. Proposición. *Sea* X *un espacio topológico* T_0*. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) X *es un espacio completamente regular;*
(2) *Existe una familia de funciones continuas* $\mathcal{F}$ *de* X *a* $[0, 1]$ *que genera la topología de* X *(donde* $[0, 1]$ *tiene la topología de subespacio respecto de la recta usual).*

Demostración.
(1) $\Rightarrow$ (2). Definamos $\mathcal{F} = C(X, [0, 1]) = \{g : X \to [0, 1] : g$ es continua en $X\}$. Demostraremos que $\mathcal{F}$ genera la topología de X. Sea U un abierto no vacío de X y x un punto arbitrario de U. Como X es completamente regular y $x \notin X \setminus U$, existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f[X \setminus U] \subseteq \{1\}$ y $f(x) = 0$. Entonces $x \in f^{-1}[[0, 1)] \subseteq U$. De esta forma, la colección $\mathcal{H} = \{g^{-1}[[0, 1)] : g \in \mathcal{F}\}$ es una base para la topología de X. Como $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{B} = \{g^{-1}[W] : g \in \mathcal{F}, W \subseteq [0, 1]$ es abierto $\}$, tenemos

que $\mathcal{B}$ es también una base para la topología de X. En particular, es una subbase. Esto muestra que $\mathcal{F}$ genera la topología de X.
(2) $\Rightarrow$ (1). Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones continuas de X en $[0,1]$ que genera la topología de X.

Primero verifiquemos que X es Hausdorff: Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Por el lema 6.14, $\mathcal{F}$ separa puntos de X. Por ello, existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Como $[0,1]$ es Hausdorff, existen abiertos ajenos U y V de $[0,1]$ tales que $f(x) \in U$ y $f(y) \in V$. Debido a que $\mathcal{F}$ genera la topología de X, $f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(V)$ son abiertos en X. Además, es claro que $x \in f^{-1}(U)$, $y \in f^{-1}(V)$ y que $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$. De esta forma X es un espacio T_2.

Para demostrar que X es completamente regular, consideremos un subconjunto cerrado F de X y un punto $z \notin F$. Debido a que $\mathcal{F}$ genera la topología de X, existen funciones $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{F}$ y subconjuntos abiertos $U_1, \ldots, U_n$ de $\mathbb{R}$ tales que $z \in \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(U_i) \subseteq X \setminus F$ (vea el corolario 3.5). Como para cada $i = 1, \ldots, n$, se tiene que $f_i(z) \in U_i$, podemos elegir $\epsilon > 0$ tal que $(f_i(z)-\epsilon, f_i(z)+\epsilon) \subseteq U_i$ para cada i. Definamos, para cada $i = 1, \ldots, n$, $g_i : X \to \mathbb{R}$ por medio de la regla: $g_i(x) = \frac{f_i(x)-f_i(z)}{\epsilon}$ $(x \in X)$. Es fácil verificar que cada función g_i es continua. Además, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, se tiene que $g_i^{-1}[(-1,1)] \subseteq f_i^{-1}[(f_i(z) - \epsilon, f_i(z) + \epsilon)] \subseteq f_i^{-1}[U_i]$ y $g_i(z) = 0$. Entonces $\bigcap_{i=1}^{n} g_i^{-1}[(-1,1)] \subseteq X \setminus F$.

Definamos ahora, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, a la función $h_i : X \to \mathbb{R}$ por medio de $h_i = \min\{|g_i(x)|, 1\}$ $(x \in X)$. Las funciones h_i son continuas, $h(z) = 0$ y además $\bigcap_{i=1}^{n} h_i^{-1}[[0,1)] \subseteq X \setminus F$. Finalmente definamos $f = \max\{h_1, \ldots, h_n\}$. Entonces f es continua y $f[X] \subseteq [0,1]$. Así $f : X \to [0,1]$ es una función continua, $f(z) = 0$ y $f(F) \subseteq \{1\}$ porque $\bigcap_{i=1}^{n} h_i^{-1}[[0,1)] \subseteq X \setminus F$. Por lo tanto X es completamente regular. $\boxtimes$

3. El Lema de Urysohn y los Teoremas de Tietze y de Tychonoff

El Lema de Urysohn. De todos los axiomas de separación que hemos estudiado hasta este momento, el axioma que define a los espacios completamente regulares es el que más difiere de los restantes. Ello es así porque en la forma en que lo hemos introducido, el axioma de regularidad completa es el único axioma que postula la existencia de objetos externos a un espacio topológico, que sirven para crear separaciones, a saber, las funciones continuas con valores en $[0,1]$. Una pregunta muy natural es saber si hay alguna forma de introducirlo sin usar objetos externos. En el ejercicio 6.B.(7) damos una definición alternativa de esta noción en términos del concepto de base para un espacio topológico.

6.16. Definición. Sean A y B subconjuntos ajenos de un espacio topológico X, diremos que A es *funcionalmente separado* de B si existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f[A] \subseteq \{0\}$ y $f[B] \subseteq \{1\}$.

De esta forma un espacio topológico X es completamente regular si es un espacio T_1 y si cada subconjunto cerrado F de X está funcionalmente separado de cada punto x que no está en F.

Uno de nuestros propósitos en esta sección es demostrar que todo espacio normal es un espacio completamente regular, y para ello debemos de ser capaces de demostrar que si en un espacio topológico X un par de subconjuntos cerrados ajenos A y B pueden ser separados por medio de abiertos ajenos, entonces hay una función que los separa. Como podemos intuir, llevar a cabo una demostración de esto requiere de un alto grado de creatividad. Las ideas para la demostración se deben al genio de Pavel Samuelovich Urysohn.

P. S. Urysohn demostró este resultado en [66] (véase también [67]) como un lema auxiliar para demostrar que *todo espacio normal segundo numerable es metrizable*.

El Lema de Urysohn, como es conocido hoy en día este resultado, es uno de los hechos de la Topología General más relevantes, no sólo por la originalidad en las ideas en su prueba sino también por las importantes consecuencias del mismo. Dicho resultado está relacionado con dos de los problemas fundamentales de la Topología General: el problema de metrización y el problema de extensión de funciones continuas. Antes de entrar en detalles acerca de estos problemas, demostraremos el Lema de Urysohn.

6.17. Teorema (Lema de Urysohn). *Sea X un espacio normal. Supongamos que F y G son subconjuntos cerrados ajenos de X. Entonces existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f[F] \subseteq \{0\}$ y $f[G] \subseteq \{1\}$.*

Demostración. Sea $D = \{q_n : n = 0,1,2,\ldots\}$ una enumeración del conjunto $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ tal que $q_0 = 0$ y $q_1 = 1$. Primeramente, construiremos una familia $\mathcal{U} = \{U_{q_n} : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ de subconjuntos abiertos de X que tiene las siguientes dos propiedades:

(1) $F \subseteq U_0$ y $U_1 \subseteq X \setminus G$; y

(2) si $r < s$ con $r, s \in D$ entonces $\mathrm{cl}\,(U_r) \subseteq U_s$.

Construcción de la familia $\mathcal{U}$. Defínase $U_1 = X \setminus G$. Como X es un espacio normal, existen subconjuntos abiertos U y V de X tales que $F \subseteq U$, $G \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$. Definamos $U_0 = U$. Entonces, $U_0 \subseteq X \setminus V$; por lo cual, $\mathrm{cl}\,(U_0) \subseteq X \setminus V \subseteq X \setminus G = U_1$. De esta forma hemos demostrado que los subconjuntos abiertos U_0 y U_1 satisfacen las condiciones (1) y (2).

Supongamos ahora que $n \geqslant 2$ y que hemos construido los subconjuntos abiertos $U_{q_0=0}, U_{q_1=1}, U_{q_2}, \ldots, U_{q_n}$ de tal forma que ellos satisfacen las condiciones (1) y (2). Sea $r = \text{máx}\{q_k : k \leqslant n \text{ y } q_k < q_{n+1}\}$ y $s = \text{mín}\{q_l : l \leqslant n \text{ y } q_{n+1} < q_l\}$. Entonces $r, s \in \{q_0, q_1, \ldots, q_n\}$ y son tales que $r < s$. Por nuestra hipótesis de inducción, tenemos que $\mathrm{cl}\,(U_r) \subseteq U_s$. Como X es un espacio normal, para los subconjuntos cerrados $\mathrm{cl}\,(U_r)$ y $X \setminus U_s$, existen abiertos ajenos A y B tales que $\mathrm{cl}\,(U_r) \subseteq A$ y $X \setminus U_s \subseteq B$. Definamos $U_{q_{n+1}} = A$. Entonces $\mathrm{cl}\,(U_{q_{n+1}}) \subseteq X \setminus B \subseteq U_s$. No es difícil verificar ahora que los conjuntos $\{U_{q_0=0}, U_{q_1=1}, U_{q_2}, \ldots, U_{q_n}, U_{q_{n+1}}\}$ satisfacen las condiciones requeridas. Esto completa la construcción inductiva de la familia $\mathcal{U} = \{U_r : r \in D\} \subseteq \mathcal{T}_X$ que satisface las condiciones (1) y (2).

Ahora utilizaremos a la familia $\mathcal{U}$ para construir una función continua $f : X \to [0, 1]$. Para este propósito, definamos

$$f(x) = \begin{cases} \text{ínf}\{r \in D : x \in U_r\} & \text{si } x \in X \setminus G; \\ 1 & \text{si } x \in G. \end{cases}$$

Afirmación. La función f antes definida es una función continua. Además, $f[F] \subseteq \{0\}$ y $f[G] \subseteq \{1\}$

Demostración de la afirmación. Es claro que f es en efecto una función y, por la misma definición de f, se tiene que $f(G) \subseteq \{1\}$. Ahora, si $x \in F$ entonces $x \in U_0$ y $x \in X \setminus G$; por lo cual, $f(x) = 0$. Así, bastará verificar que la función f es una función continua. Para ello, es suficiente comprobar que los conjuntos $f^{-1}[[0, a)]$ y $f^{-1}[(b, 1]]$ son subconjuntos abiertos de X para cualesquiera puntos $a, b \in (0, 1)$.

Primeramente notemos que $f^{-1}[[0, a)] = \bigcup\{U_r : r < a\}$ puesto que por la definición de la función f, se tiene que $f(x) < a$ si y sólo si existe un $r \in D$, con $r < a$, tal que $x \in U_r$. Por otro lado, $f(x) > b$ si y sólo si existe un $r \in D$ con $r > b$ y tal que $x \notin U_r$. Aplicando la propiedad (2), podemos concluir que $f(x) > b$ si y sólo si existe un $r \in D$ con $r > b$ y tal que $x \notin \mathrm{cl}\,(U_r)$. En consecuencia,

$$f^{-1}[(b,1]] = \bigcup\{X \setminus \mathrm{cl}\,(U_r) : r > b\}.$$

De esta manera, los conjuntos $f^{-1}[[0,a)]$ y $f^{-1}[(b,1]]$ son siempre subconjuntos abiertos de X para cualquier elección de los puntos $a, b \in (0,1)$. Por lo tanto, f es una función continua. ⊠

6.18. Corolario. *Un espacio T_1 X es un espacio normal si y sólo si para cualesquiera subconjuntos cerrados ajenos F_1 y F_2 de X existe una función $f : X \to [0,1]$ tal que $f[F_1] \subseteq \{0\}$ y $f[F_2] \subseteq \{1\}$.*

Otra interesante consecuencia del Lema de Urysohn es que la clase de los espacios normales está contenida en la clase de los espacios completamente regulares.

6.19. Corolario. *Todo espacio normal es un espacio completamente regular.*

El teorema de extensión de Tietze. El problema de metrización establece la tarea de hallar condiciones bajo las cuales la topología de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es generada por una métrica. Una de las implicaciones del Lema de Urysohn es que todo espacio normal segundo numerable es metrizable. Este teorema fue demostrado por P. Urysohn en [66]. En este mismo artículo Urysohn preguntó si era posible debilitar la hipótesis de normalidad a la propiedad de regularidad. A. N. Tychonoff contestó positivamente esta pregunta en su artículo [64], demostrando que todo espacio regular segundo numerable es un espacio normal (véase el ejercicio 6.A.(2)). Por esta razón el Teorema de metrización de Urysohn es enunciado de la siguiente forma: *Todo espacio regular segundo numerable es metrizable*.

Otro problema importante en el que tiene relevantes implicaciones el Lema de Urysohn es el problema de extensión de funciones continuas. Propiamente, el Lema de Urysohn es una herramienta fundamental para demostrar el llamado Teorema de Extensión de Tietze. Este teorema es una solución al siguiente problema:

6.20. Problema. *(De extensión de funciones reales continuas). Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y sea $f : E \to \mathbb{R}$ una función continua, donde E es un subespacio de X y $\mathbb{R}$ está considerado con su topología*

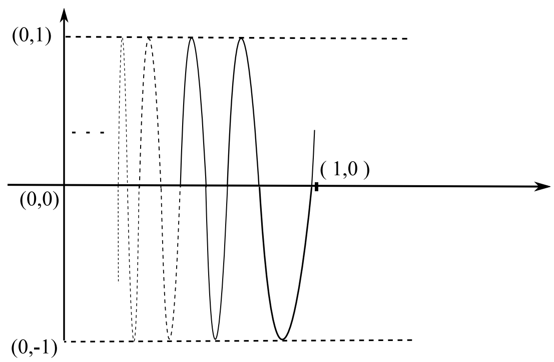

Figura 34. Gráfica de la función $f(x) = \mathrm{sen}(\frac{1}{x})$.

usual. ¿Bajo qué condiciones podemos hallar una función continua $g : X \to \mathbb{R}$ *tal que* $g(x) = f(x)$ *para toda* $x \in E$*?*

La función g en 6.20 es llamada *extensión continua de la función* f *al espacio* X. Por ello, el problema de extensión de funciones continuas puede ser expresado de la siguiente manera: ¿Bajo qué condiciones existe una extensión continua de f a todo X?

Antes de presentar el Teorema de Tietze y su prueba, es valioso hacer algunos comentarios al respecto.

Primeramente debemos notar que el problema de extensión de funciones continuas no es un problema trivial. Es difícil que dada una función continua definida sobre un subconjunto E de un espacio X se pueda extender continuamente a todo X, incluso cuando la diferencia entre el subespacio E y el espacio X sea un solo punto, y de hecho, aún cuando el espacio topológico X sea un espacio topológico con propiedades muy fuertes. Por ejemplo, la función $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \mathrm{sen}(\frac{1}{x})$ es continua en $E = (0, 1]$, pero no es posible extenderla a una función continua definida sobre todo el espacio $[0, 1]$ (ver figura 34).

En segundo término, se debe observar que el Lema de Urysohn es de hecho una solución muy particular al problema de extensión de funciones reales continuas. Efectivamente, notemos que si F y G son subconjuntos cerrados ajenos de un espacio normal X, entonces la función $h : F \cup G \to$

$[0,1]$ dada por

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in F; \\ 0 & \text{si } x \in G \end{cases}$$

es una función continua al considerar en $F \cup G$ la topología relativa. Observe ahora que el Lema de Urysohn establece que esta función continua tiene una extensión continua a todo el espacio X.

Estamos ya en posición de enunciar y demostrar el Teorema de extensión de Tietze.

6.21. Teorema (de extensión de Tietze). *Un espacio topológico T_1 X es un espacio normal si y sólo si toda función continua*

$$f : F \to [a,b],$$

definida en algún subconjunto cerrado F de X, tiene una extensión continua a todo X; esto es, existe $g : X \to [a,b]$ continua tal que $f(x) = g(x)$ para toda $x \in F$.

Demostración. $\Rightarrow]$ Basta demostrar el resultado para el caso cuando $[a,b] = [-1,1]$ ya que para todo $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, $[a,b]$ es homeomorfo a $[-1,1]$. Para ello verificaremos primero la siguiente afirmación.

Afirmación Sea F un subconjunto cerrado de X, y sea $k : F \to \mathbb{R}$ una función continua acotada; es decir, existe un número real α tal que $|k(x)| \leqslant \alpha$ para toda $x \in F$. Entonces existe una función continua $h : X \to \mathbb{R}$ que tiene las siguientes propiedades:

(1) $|h(x)| \leqslant \frac{\alpha}{3}$ para toda $x \in X$;

(2) $|k(x) - h(x)| \leqslant \frac{2\alpha}{3}$ para toda $x \in F$.

Demostración de la afirmación: Consideremos los conjuntos

$$A = k^{-1}[-\alpha, -\tfrac{\alpha}{3}] \quad \text{y} \quad B = k^{-1}[\tfrac{\alpha}{3}, \alpha].$$

Ambos conjuntos son subconjuntos cerrados y ajenos de F. Como F es cerrado en X, A y B son subconjuntos cerrados y ajenos de X. Debido a que X es un espacio normal, aplicando el Lema de Urysohn, podemos garantizar la existencia de una función continua $t : X \to [0,1]$ tal que $t[A] \subseteq \{0\}$ y $t[B] \subseteq \{1\}$. Definamos $h : X \to \mathbb{R}$ de la manera siguiente: $h(x) = \frac{2\alpha}{3} t(x) - \frac{1}{3}\alpha = \frac{2\alpha}{3}(t(x) - \frac{1}{2})$ para toda $x \in X$. Como h es la diferencia de dos funciones reales continuas, h misma es una función continua. Verifiquemos que h tiene las propiedades (1) y (2).

Sea $x \in X$. Como $t(x) \in [0,1]$, tenemos que $t(x) - \frac{1}{2} \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Por lo cual, $h(x) \in [-\frac{2\alpha}{3} \cdot \frac{1}{2}, \frac{2\alpha}{3} \cdot \frac{1}{2}] = [-\frac{\alpha}{3}, \frac{\alpha}{3}]$.

Para demostrar que h tiene la propiedad (2), consideremos un elemento $x \in F$ arbitrario. Entonces ó $x \in A$, ó $x \in B$, o bien $x \in F \setminus (A \cup B)$. En el primer caso tenemos que $k(x) \in [-\alpha, -\frac{\alpha}{3}]$ y $h(x) = -\frac{\alpha}{3}$. En consecuencia, $k(x) - h(x) \in [-\frac{2\alpha}{3}, 0]$ y por lo cual $|k(x) - h(x)| \leqslant \frac{2\alpha}{3}$. Por otro lado, si $x \in B$ entonces $k(x) \in [\frac{\alpha}{3}, \alpha]$ y $h(x) = \frac{\alpha}{3}$. Por lo cual $k(x) - h(x) \in [0, \frac{2\alpha}{3}]$ y entonces tenemos que $|k(x) - h(x)| \leqslant \frac{2\alpha}{3}$. Finalmente, si $x \in F \setminus (A \cup B)$ entonces $k(x) \in (-\frac{\alpha}{3}, \frac{\alpha}{3})$ y $|h(x)| \leqslant \frac{\alpha}{3}$ (por (1)). Entonces $|k(x) - h(x)| \leqslant |k(x)| + |h(x)| \leqslant \frac{2\alpha}{3}$. ⊠

Ahora, aplicaremos la anterior afirmación para construir una sucesión de funciones $h_1, h_2, h_3 \ldots$ que satisfagan las siguientes condiciones:

(1) $|h_n(x)| \leqslant \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ para toda $x \in X$;
(2) $|f(x) - (h_1(x) + h_2(x) + \cdots + h_n(x))| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$ para toda $x \in F$.

Aplicando la afirmación anterior para $k = f$ y $\alpha = 1$, podemos elegir una función continua $h_1 : X \to \mathbb{R}$ tal que $|h_1(x)| \leqslant \frac{1}{3}$ para toda $x \in X$ y $|f(x) - h_1(x)| \leqslant \frac{2}{3}$ para toda $x \in F$. Supongamos que tenemos ya construidas las funciones $h_1, h_2, \ldots, h_n$ de tal manera que éstas satisfacen las siguientes condiciones para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$:

(1) $|h_i(x)| \leqslant \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}$ para toda $x \in X$;
(2) $|f(x) - (h_1(x) + h_2(x) + \cdots + h_n(x))| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$ para toda $x \in F$.

Consideramos ahora la función $h : F \to \mathbb{R}$ definida por

$$h = [f - (h_1 + h_2 + \cdots + h_n)] \restriction F.$$

Por la afirmación anterior, podemos elegir una función continua $h_{n+1} : X \to \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades: $|h_{n+1}(x)| \leqslant \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ para cada $x \in X$ y $|h(x) - h_{n+1}(x)| \leqslant \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ para cada $x \in F$. De esta manera, tenemos construida inductivamente la sucesión anunciada de funciones $h_1, h_2, h_3 \ldots$.

Consideremos ahora la serie $\sum_{k=1}^{\infty} h_k$. Obsérvese que para cada $x \in X$, la sucesión $H_n(x) = \sum_{k=1}^{n} h_k(x)$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$. Por esta razón, existe un número real $F(x) \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty} H_n(x) = F(x)$ para toda $x \in X$. La forma de construcción de las funciones h_n permite argumentar que la sucesión de funciones H_n converge uniformemente en X a la función $F : X \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \lim_{n\to\infty} H_n(x)$ para toda $x \in X$. Por esta razón la función F es una función continua. Además, se tiene que $F(x) = f(x)$ para toda $x \in F$ porque si $x \in F$ entonces se tiene que $|f(x) - H_n(x)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Como $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$, tenemos que $f(x) = \lim_{n\to\infty} H_n(x) = F(x)$.

Note ahora que en realidad $F : X \to [-1, 1]$ puesto que si $x \in X$, entonces $|F(x)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1$.

$\Leftarrow$]. Sean F_1, F_2 subespacios cerrados y ajenos de X. Consideremos la función $f : F \to [-1, 1]$ definida en el subconjunto cerrado $F = F_1 \cup F_2$ de X y con la siguiente regla de asociación

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in F_1 \\ -1 & \text{si } x \in F_2 \end{cases}$$

No es difícil verificar que f es continua. Así que f tiene una extensión continua $g : X \to [-1, 1]$ y $g[F_1] = \{1\}$, $g[F_2] = \{-1\}$. ⊠

El Teorema de inmersión de Tychonoff. En 1930, A. N. Tychonoff demostró que los espacios normales pueden sumergirse en espacios de tipo $[0, 1]^M$, y demostró también la existencia de espacios topológicos no normales que pueden ser sumergidos en productos $[0, 1]^M$. Fue Tychonoff quien llamó a los espacios que son homeomorfos a un subespacio de un cubo $[0, 1]^M$ espacios completamente regulares. El método creado por Tychonoff para la demostración de sus resultados es conocido como producto diagonal de funciones, y es una herramienta muy importante en Topología General para construir inmersiones.

Recuerde que si X un espacio topológico, $\{Y_j : j \in J\}$ es una familia de espacios topológicos y $\mathcal{F} = \{f_j : X \to Y_j : j \in J\}$ es una familia de funciones entonces el *producto diagonal* de las funciones f_j es la función $\Delta\mathcal{F} = \Delta f_j : X \to \prod_{j\in J} Y_j$ cuya regla de asociación es:

$$\forall\, x \in X \;\forall\, i \in J \;\; (\Delta\mathcal{F})(x)(i) = f_i(x).$$

Es sencillo demostrar que en el caso en que cada una de las funciones f_j es continua, la función $\Delta\mathcal{F}$ es también una función continua (cuando en $\prod_{j\in J} Y_j$ se considera la topología producto); este y otros resultados sobre el producto diagonal de funciones continuas son demostrados en el siguiente lema.

6.22. Lema. *Sean X un espacio topológico, $\{Y_j : j \in J\}$ una familia de espacios topológicos y $\mathcal{F} = \{f_j : X \to Y_j : j \in J\}$ una familia de funciones.*

(1) *Cada elemento de $\mathcal{F}$ es una función continua si y sólo si el producto diagonal $\Delta\mathcal{F} : X \to \prod_{j\in J} Y_j$ es una función continua (en $\prod_{j\in J} Y_j$ se considera la topología producto).*
(2) *La familia de funciones $\mathcal{F}$ separa puntos de X si y sólo si $\Delta\mathcal{F}$ es una función inyectiva.*
(3) *Si la familia de funciones $\mathcal{F}$ está formada por funciones continuas, genera la topología de X y también separa puntos de X, entonces la función $\Delta\mathcal{F}$ es una inmersión*

Demostración.

(1) Es fácil notar, a partir de la definición de $\Delta\mathcal{F}$, que si $i \in J$ es arbitrario y $\pi_i : \prod_{j\in J} Y_j \to Y_i$ es la proyección sobre el i-ésimo factor entonces $\pi_i \circ \Delta\mathcal{F} = f_i$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Delta\mathcal{F}"] \arrow[dr, "f_i"'] & \prod_{j\in J} Y_j \arrow[d, "\pi_i"] \\ & Y_i \end{tikzcd}$$

Aplicando ahora la proposición 4.15 podemos concluir que cada elemento de $\mathcal{F}$ es continuo si y sólo si $\Delta\mathcal{F}$ es continua.

(2) Supongamos que $\mathcal{F}$ separa puntos de X. Sean $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. Entonces existe $i \in J$ tal que $f_i(x) \neq f_i(y)$. Pero $\pi_i \circ \Delta\mathcal{F} = f_i$. Entonces $\pi_i(\Delta\mathcal{F}(x)) \neq \pi_i(\Delta\mathcal{F}(y))$. Esto último implica que $\Delta\mathcal{F}(x) \neq \Delta\mathcal{F}(y)$. Por lo tanto, $\Delta\mathcal{F}$ es inyectiva.

Supongamos ahora que $\Delta\mathcal{F}$ es una función inyectiva. Sean $x, y \in X$ puntos distintos. La inyectividad de $\Delta\mathcal{F}$ implica que $\Delta\mathcal{F}(x) \neq \Delta\mathcal{F}(y)$. Como $\Delta\mathcal{F}(x), \Delta\mathcal{F}(y) \in \prod_{j\in J} Y_j$, lo anterior implica que existe $i \in J$ tal que $\Delta\mathcal{F}(x)(i) \neq \Delta\mathcal{F}(y)(i)$. Pero como $\Delta\mathcal{F}(x)(i) = f_i(x)$ y $\Delta\mathcal{F}(y)(i) = f_i(y)$, podemos concluir que $\mathcal{F}$ separa los puntos de X.

(3) Por los incisos (1) y (2), la función $f = \Delta\mathcal{F} : X \to \Delta\mathcal{F}[X]$ es una biyección continua (el conjunto $\Delta\mathcal{F}[X]$ tiene la topología de subespacio respecto del producto topológico $\prod_{j\in J} Y_j$). Como f es biyectiva, existe su función inversa $h = f^{-1} : \Delta\mathcal{F}[X] \to X$.

Afirmación. La función $h = f^{-1} : \Delta\mathcal{F}[X] \to X$ es una función continua.

Demostración de la afirmación: Primero note que la igualdad $\pi_j \circ \Delta\mathcal{F} = f_j$ implica que $(\pi_j \circ \Delta\mathcal{F}) \circ h = f_j \circ h$ (para cada $j \in J$). Entonces $\pi_j \upharpoonright \Delta\mathcal{F}[X] = f_j \circ h$ para toda

$j \in J$. Además cada función $\pi_j \restriction \Delta\mathcal{F}[X]$ es continua porque $\Delta\mathcal{F}[X]$ tiene la topología de subespacio $\mathcal{T} \restriction \Delta\mathcal{F}[X]$ respecto del producto topológico $\prod_{j\in J} Y_j$. De esta manera la composición $f_\beta \circ h$ es continua para cada $j \in J$. Por esta raón es que:

$$\forall\, j \in J\, \forall\, U \in \mathcal{T}_j\, (\, h^{-1}[f_j^{-1}[U]] = (f_j \circ h)^{-1}[U] \in \mathcal{T} \restriction \Delta\mathcal{F}[X]).$$

Ahora recuerde que la familia $\mathcal{F}$ genera la topología de X y que ello significa que la colección $\mathcal{B} = \{f_j^{-1}(U) : U \in \mathcal{T}_j,\, j \in J\}$ es una subbase para la topología de X. Esto último, y la observación 3.6, nos permiten concluir la continuidad de la función h. ⊠

Finalmente, como $f = \Delta\mathcal{F} : X \to \Delta\mathcal{F}[X]$ y su inversa son funciones continuas, el producto diagonal $\Delta\mathcal{F} : X \to \prod_{i\in J} Y_\alpha$ es una inmersión. ⊠

El siguiente teorema muestra la anunciada caracterización de los espacios completamente regulares como subespacios de cubos de Tychonoff.

6.23. Teorema (de Tychonoff sobre la inmersión). *Un espacio topológico X es completamente regular si, y sólo si, X es homeomorfo a un subespacio de un espacio producto $[0,1]^M$, para algún conjunto M.*

Demostración. $\Rightarrow$] Supongamos que X es un espacio completamente regular. Sea $\mathcal{F} = C(X,[0,1]) = \{f : X \to [0,1] \;\; : \text{f es continua}\,\}$. Indicamos los elementos de $\mathcal{F} = \{f_j : j \in J\}$. Ya sabemos que la familia $\mathcal{F}$ genera la topología de X (véase la demostración de la proposición 6.15). Además, como X es T_0, tenemos que $\mathcal{F}$ también separa puntos de X (vea 6.14) . Por el lema 6.22, el producto diagonal $\Delta\mathcal{F} : X \to [0,1]^J$ es una inmersión, es decir, es un homeomorfismo sobre el subespacio $\Delta\mathcal{F}[X]$ de $[0,1]^J$.

$\Leftarrow$] Supongamos ahora que X es homeomorfo a un subespacio de un espacio de tipo $[0,1]^M$ para algún conjunto M. Como $[0,1]$ es un espacio completamente regular, y el producto de espacios completamente regulares es un espacio completamente regular, el espacio $[0,1]^M$ es un espacio completamente regular. Pero X es homeomorfo a un subespacio de $[0,1]^M$, digamos Y. Entonces Y es completamente regular y así lo es X ya que la regularidad completa es hereditaria y una propiedad que se preserva por homeomorfismos. ⊠

Hay otra versión del Teorema de inmersión de Tychonoff que hace alusión a la "cantidad mínima de factores iguales a $[0,1]$" que son "necesarios" para poder sumergir en un cubo de Tychonoff, a un espacio completamente regular X.

Con el propósito de evitar confusiones cuando demostremos esta segunda versión del Teorema de inmersión de Tychonoff, debemos recordar que cuando X_j es igual al espacio X para toda $j \in J$, al producto $\prod_{j\in J} X_j$ lo denotamos por X^J o con el símbolo X^τ, en donde τ es la cardinalidad del conjunto J.

Por otro lado, para la demostración del teorema también vamos a necesitar algunos resultados sencillos relacionados a la función cardinal peso. Recuerde que el peso de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se define como el número cardinal $w(X) = \text{mín}\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ es base de } \mathcal{T}\} + \aleph_0$ (véase el ejercicio 3.F).

6.24. Lema. *Sean $(X,\mathcal{T})$ es un espacio topológico y κ un número cardinal infinito tal que $w(X) \leqslant \kappa$.*

(1) *Si $\mathcal{U}$ es una colección de subconjuntos abiertos de X, entonces existe una subcolección $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$ tal que $|\mathcal{V}| \leqslant \kappa$ y $\bigcup \mathcal{V} = \bigcup \mathcal{U}$.*
(2) *Si $\mathcal{C}$ es una base de $\mathcal{T}$ entonces existe una subcolección $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ tal que $|\mathcal{D}| \leqslant \kappa$ y $\mathcal{D}$ es una base de $\mathcal{T}$.*

Demostración. (1) Sea $\mathcal{B}$ una base de $\mathcal{T}$ tal que $|\mathcal{B}| \leqslant \kappa$. Definamos $\mathcal{B}_0 = \{B \in \mathcal{B} : \exists U \in \mathcal{U}\,(B \subseteq U)\}$. Para cada $B \in \mathcal{B}_0$, fijemos un único elemento $U_B \in \mathcal{U}$ tal que $B \subseteq U_B$. Sea $\mathcal{V} = \{U_B : B \in \mathcal{B}_0\}$. Claramente $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$. Definamos ahora la función $f : \mathcal{B}_0 \to \mathcal{V}$ por medio de la regla: $f(B) = U_B$ $(B \in \mathcal{B}_0)$. Es fácil notar que f es sobreyectiva. Entonces $|\mathcal{V}| \leqslant |\mathcal{B}_0| \leqslant |\mathcal{B}| \leqslant \kappa$. Así que para terminar restaría demostrar que $\bigcup \mathcal{V} = \bigcup \mathcal{U}$. Como $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ es suficiente demostrar que $\bigcup \mathcal{U} \subseteq \bigcup \mathcal{V}$. Sea $x \in \bigcup \mathcal{U}$. Entonces existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$. Como $\mathcal{B}$ es una base para X y U es abierto, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$. Es claro esto último implica que $B \in \mathcal{B}_0$. Resulta entonces $x \in B \subseteq U_B \in \mathcal{V}$. Entonces $x \in \bigcup \mathcal{V}$. Por lo tanto, $\bigcup \mathcal{U} \subseteq \bigcup \mathcal{V}$.

(2) Sea $\mathcal{B}$ una base para $\mathcal{T}$ tal que $|\mathcal{B}| \leqslant \kappa$. Para cada $B \in \mathcal{B}$, definamos $\mathcal{C}_B = \{C \in \mathcal{C} : C \subseteq B\}$. Veamos primero que $B = \bigcup \mathcal{C}_B$. Consideremos $x \in B$ arbitrario. Como $\mathcal{C}$ es una base de $\mathcal{T}$, existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C \subseteq B$. Entonces $C \in \mathcal{C}_B$. En consecuencia $x \in \bigcup \mathcal{C}_B$. Y por ello, $B = \bigcup \mathcal{C}_B$. Aplicando ahora el inciso (1) a la familia de abiertos

$\mathcal{C}_B$, podemos garantizar la existencia de una familia $\mathcal{V}_B \subseteq \mathcal{C}_B$ tal que $|\mathcal{V}_B| \leqslant \kappa$ y $\bigcup \mathcal{V}_B = \bigcup \mathcal{C}_B$.

Afirmación. La familia $\mathcal{D} = \{C : C \in \mathcal{V}_B, B \in \mathcal{B}\}$ es una base de $\mathcal{T}$. Además $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ y $|\mathcal{D}| \leqslant \kappa$.

Demostración de la afirmación. Es claro que $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$. Como $\mathcal{D} = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} \mathcal{V}_B$ es fácil darse cuenta que $|\mathcal{D}| \leqslant \kappa$. Verifiquemos que $\mathcal{D}$ es base de $\mathcal{T}$. Supongamos que $x \in U \in \mathcal{T}$. Como $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T}$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$. Debido a que $B = \bigcup \mathcal{V}_B$, existe $C \in \mathcal{V}_B$ tal que $x \in C$. Claramente $C \in \mathcal{D}$ y $x \in C \subseteq U$. Por lo tanto $\mathcal{D}$ es base de $\mathcal{T}$. ⊠

6.25. Teorema (de inmersión de Tychonoff. Segunda versión). *Un espacio topológico X es completamente regular si, y sólo si, X es homeomorfo a un subespacio del espacio producto* $[0,1]^{w(X)}$.

Demostración. (1) ⇒ (2) Supongamos que X es un espacio completamente regular. Sabemos ya que la colección $C(X,[0,1]) = \{f : X \to [0,1]$: f es continua$\}$ genera a la topología de X; más aún, la colección $\mathcal{B} = \{f^{-1}[[0,1)] : f \in C(X,[0,1]\}$ es una base para la topología de X (véase la demostración de (1) ⇒ (2) en la proposición 6.15). Por el lema 6.24, existe una subcolección $\mathcal{D}$ de $\mathcal{B}$, que sigue siendo base de X, tal que $|\mathcal{D}| \leqslant w(X)$. Para cada $U \in \mathcal{D}$, fijemos una función $f_U \in C(X,[0,1])$ tal que $U = f^{-1}[[0,1)]$. Entonces la colección $\mathcal{F} = \{f_U : U \in \mathcal{D}\}$ genera la topología de X. Observe que $|\mathcal{F}| = |\mathcal{D}|$. Como X es T_0, la familia $\mathcal{F}$ también separa puntos de X. Entonces, por el lema 6.22, la función $\Delta\mathcal{F} : X \to [0,1]^{\mathcal{F}}$ es una inmersión. Resta notar que como $|\mathcal{F}| \leqslant w(X)$, se tiene que $[0,1]^{\mathcal{F}}$ es homeomorfo a un subespacio de $[0,1]^{w(X)}$.

(2) ⇒ (1) Traslade la demostración de la implicación (2) ⇒ (1) del teorema 6.23 ⊠

Ejercicios

6.A. Espacios normales

(1) Demuestre que cualquier espacio linealmente ordenable es un espacio normal. En particular, cualquier espacio de ordinales $[0, \alpha)$ y el cuadrado lexicográfico son espacios normales.

(2) Pruebe que todo espacio regular segundo numerable X es un espacio normal.

(Sugerencia: Consideremos subconjuntos cerrados ajenos A y B de X, y sea $\mathcal{B}$ una base numerable de X. Use la proposición 5.26 para cubrir a A con una subcolección $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots\}$ de $\mathcal{B}$ tal que la cerradura de cada uno de los elementos de $\mathcal{C}$ no intersecta a B. De manera análoga cubra a B con una subcolección $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots\}$ de $\mathcal{B}$ tal que la cerradura de cada uno de los elementos de $\mathcal{D}$ no intersacta a A. Definamos ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, a los siguientes conjuntos:

$$U_n = C_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{cl} D_i \qquad \text{y} \qquad V_n = D_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{cl} C_i$$

Compruebe que los conjuntos $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_n$ y $V = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_n$ son subconjuntos abiertos ajenos de X con la propiedad $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$.)

(3) Demuestre la Proposición 6.3.

(4) (*Teorema de Jones*) Demuestre, usando técnicas semejantes a las que se muestran en la prueba del teorema 6.5, que un espacio X que contiene un subconjunto denso D y un discreto cerrado S que satisfacen $|S| \geqslant 2^{|D|}$, no es normal.

(5) Pruebe que la normalidad es una propiedad topológica.

(6) (*El cuadrado de la línea de Sorgenfrey no es un espacio normal*) En la primera sección de este capítulo 6 (veáse la página 180) se ha demostrado que el cuadrado de la línea de Sorgenfrey no es un espacio normal, utilizando para ello el Lema de Jones. En este ejercicio se proporciona otra demostración de este resultado, exhibiendo para ello un par de subconjuntos cerrados ajenos de $\mathcal{L}_S \times \mathcal{L}_S$ que no pueden ser separados por medio de abiertos ajenos. De hecho se verificará que los subconjuntos $F_1 = \{(x, -x) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}\}$ y $F_2 = \{(x, -x) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{P}\}$ son dichos subconjuntos cerrados ajenos de $\mathcal{L}_S \times \mathcal{L}_S$.

(a) El subespacio $Y = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio discreto y cerrado de $\mathcal{L}_S \times \mathcal{L}_S$.
(Sugerencia: Note que, para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$(x, -x) = Y \cap [x, x+1) \times [-x, 1-x).$$

Para comprobar que Y es un subespacio cerrado de $\mathcal{L}_S \times \mathcal{L}_S$ considere un punto cualquiera (x, y) de su complemento. Si $-x < y$ demuestre que el abierto básico $[x, x+1) \times [y, y+1)$ contiene a (x, y) y no intersecta a Y. Si $y < -x$ entonces el abierto básico $[x, \frac{x-y}{2}) \times [y, \frac{y-x}{2})$ contiene a (x, y) y no intersecta a Y).

(b) Concluya que los conjuntos F_1 y F_2 son subconjuntos cerrados de Y, y que en consecuencia F_1 como F_2 son subconjuntos cerrados de $\mathcal{L}_S \times \mathcal{L}_S$. Claramente estos conjuntos son ajenos.

(c) Verifique que si U_1 y U_2 son subconjuntos abiertos de $\mathcal{L}_S \times \mathcal{L}_S$ tales que $F_1 \subseteq U_1$ y $F_2 \subseteq U_2$, entonces $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. (Sugerencia: Defina, para cada número natural n, a

$$P_n = \{x \in \mathbb{P} : [x, x + \tfrac{1}{n}) \times [-x, -x + \tfrac{1}{n}) \subseteq U_2\}.$$

Verifique que $\mathbb{P} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n$. Entonces $\mathbb{P} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{cl}_{\mathbb{R}}(P_n)$. Consecuentemente

$$\mathbb{R} = \Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{cl}_{\mathbb{R}}(P_n) \Big) \cup \Big(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\} \Big).$$

Demuestre que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{int}(\mathrm{cl}_{\mathbb{R}}(P_n)) \neq \emptyset$ (recuerde que $\mathbb{R}$ no es igual a la unión numerable de subconjuntos densos en ninguna parte de $\mathbb{R}$, cf. ejercicio 2.H). Concluya que existe un intervalo abierto $(a, b) \subseteq \mathrm{cl}_{\mathbb{R}}(P_n)$. Pruebe ahora que el conjunto

$$R = \{(x, y) : a < x < b, -x < y < -x + \tfrac{1}{n}\}$$

está completamente contenido en la unión

$$\bigcup_{p \in P_n} [p, p + \tfrac{1}{n}) \times [-p, -p + \tfrac{1}{n}).$$

Note que por la definición de P_n, se tiene que

$$\bigcup_{p \in P_n} [p, p + \tfrac{1}{n}) \times [-p, -p + \tfrac{1}{n}) \subseteq U_2.$$

Para demostrar que $R \subseteq \bigcup_{p \in P_n} [p, p+\frac{1}{n}) \times [-p, -p+\frac{1}{n})$, considere un punto arbitrario $(x, y) \in R$. Como $(a, b) \subseteq \mathrm{cl}_{\mathbb{R}}(P_n) \neq \emptyset$ y $(d, x) \subseteq (a, b)$ donde $d = \text{máx}\ \{a, -y\}$, se tiene que $(d, x) \cap P_n \neq \emptyset$. Fije un elemento $p \in (d, x) \cap P_n$. Entonces $p < x$ y $-p < y < -x + \frac{1}{n}$. En consecuencia $(x, y) \in [p, p + \frac{1}{n}) \times [-p, -p + \frac{1}{n})$. Consideremos ahora un número racional $q \in (a, b)$. Es fácil comprobar que $(q, -q) \in \mathrm{der}_{\mathcal{L}_S \times \mathcal{L}_S}(R)$, y como $R \subseteq U_2$, entonces $(q, -q) \in \mathrm{cl}_{\mathcal{L}_S \times \mathcal{L}_S}(U_2)$. Como $(q, -q) \in F_1 \subseteq U_1$, tenemos que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$).

6.B. Espacios completamente regulares

(1) Pruebe que la regularidad completa es una propiedad hereditaria y topológica.

(2) Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $A \subseteq X$. Consideremos la colección $\mathcal{T}_A = \{U \cup (V \cap A) : U, V \in \mathcal{T}\}$. Verifique que $\mathcal{T}_A$ es una topología en X. Compruebe además que si $\mathcal{T}$ es regular o completamente regular, y A es cerrado, entonces $\mathcal{T}_A$ tiene la propiedad correspondiente. Muestre, por medio de un ejemplo, que esto no es necesariamente cierto si A no es cerrado.

(3) Demuestre que el duplicado de Alexandroff (véase el ejercicio 2.B.(10)) $AD(X)$ de un espacio X que satisface el axioma de separación T_i es también un espacio T_1, para toda $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$. ¿Que se puede decir de la normalidad de $AD(X)$ cuando X es normal?

(4) ¿Es la línea de Michael $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathcal{P}})$ un espacio completamente regular (respectivamente, normal)?

(5) Demuestre que $\oplus_{j \in J} X_j$ es completamente regular (resp., normal) si y sólo si cada X_j es completamente regular (resp., normal).

(6) (*Conjuntos nulos y conjuntos conulos*) Un subconjunto Z de un espacio topológico X es un *conjunto nulo* (o *conjunto cero*) si existe una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $Z = f^{-1}(\{0\})$. Un subconjunto C de X es un *conjunto conulo* de X si es el complemento de algún subconjunto nulo de X.

(a) Demuestre que todo conjunto nulo es un subconjunto cerrado, y que cualquier conjunto conulo es abierto. Pruebe además que el conjunto vacío y el total X son conjuntos que son a la vez nulos y conulos.

(b) Pruebe que la unión y la intersección de dos conjuntos nulos (respectivamente, conjuntos conulos) son conjuntos nulos (respectivamente, conulos).
(Sugerencia: considere la suma y el producto de valores absolutos de funciones.)

(c) Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua. Muestre que los conjuntos $\{x \in X : f(x) \geqslant a\}$, $\{x \in X : f(x) \leqslant a\}$ y $\{x \in X : a \leqslant f(x) \leqslant b\}$ son conjuntos nulos. (Reflexione en la función $g(x) = \max\{f(x) - a, 0\}$.)
Concluya que los conjuntos $\{x \in X : f(x) > a\}$, $\{x \in X : f(x) < a\}$ y $\{x \in X : a < f(x) < b\}$ son conjuntos conulos.

(d) Demuestre que si $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ son subconjuntos nulos (respectivamente, conulos) de un espacio X, entonces $\bigcap_{n<\omega} A_n$ es un conjunto nulo (respectivamente, $\bigcup_{n<\omega} A_n$ es un conjunto conulo).

(e) Muestre que un espacio T_1 X es completamente regular si y sólo si para cada punto $x \in X$ la colección de vecindades conulas de x forman una base local de vecindades.

(f) Demuestre que un espacio T_1 X es completamente regular si y sólo si cada cerrado de X es la intersección de vecindades nulas en X (respectivamente, cada abierto en X es la unión de conulos en X).

(7) Pruebe que un espacio T_1 X es un espacio completamente regular si y sólo si existe una base $\mathcal{B}$ para X que satisface las siguientes condiciones:
(a) Para cada $x \in X$, y cualquier $U \in \mathcal{B}$ que contiene a x, existe un $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \notin V$ y $X = U \cup V$;
(b) Para todos los $U, V \in \mathcal{B}$ tales que $X = U \cup V$, existen $A, B \in \mathcal{B}$ tales que $X \setminus V \subseteq A$, $X \setminus U \subseteq B$ y $A \cap B = \emptyset$.

(8) (*Topología de las cajas*) Sea $\{X_j : j \in J\}$ una familia infinita de espacios topológicos. Demuestre que si cada espacio X_j ($j \in J$) es un espacio completamente regular, entonces el producto con la topología de las cajas $\square_{j\in J} X_j$ es un espacio completamente regular.

(9) (*Topología de Vietoris*) Sea $\mathcal{F}(X)$ el espacio de subconjuntos cerrados no vacíos del espacio topológico X equipado con su topología de Vietoris definida en el ejercicio 1.G.(4). Pruebe que $\mathcal{F}(X)$ es regular si y sólo si X es un espacio normal. (Sugerencia: Verifique que para cualquier colección finita $V_1, ..., V_k$ de subconjuntos de X,

$$cl_{\mathcal{F}(X)} \mathcal{V}(V_1, ..., V_k) = \mathcal{V}(cl_X V_1, ..., cl_X V_k),$$

en donde, para cualquier colección finita $B_1, ..., B_n$ de subconjuntos de X, $\mathcal{V}(B_1, ..., B_n)$ es el conjunto $\{F \in \mathcal{F}(X) : F \subseteq \bigcup_{i=1}^{i=n} B_i$ y $F \cap B_i \neq \emptyset \; \forall \, i \in \{1, ..., n\}\}$.) (Se puede demostrar aún más: $\mathcal{F}(X)$ es Tychonoff si y sólo si X es un espacio normal.)

(10) (*Un ejemplo de un espacio T_3 que no es $T_{3\frac{1}{2}}$*) El primer ejemplo de un espacio regular no completamente regular fue construido por Tychonoff. En este ejercicio reproducimos una construcción más sencilla de un espacio de este tipo realizada por A. Mysior.

Sean $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant 0\}$ y $L = \{(x, 0) \in Y : x \in \mathbb{R}\}$. Para cada $z = (x, 0) \in L$, definimos

$$\mathcal{N}_z = \{(x, t) : 0 < t \leqslant 2\} \cup \{(t + x, t) : 0 < t \leqslant 2\}.$$

Si $z \in Y \setminus L$, hacemos $\mathcal{B}_z = \{z\}$, y si $z \in L$ defimos

$$\mathcal{B}_z = \{\{z\} \cup (\mathcal{N}_z \setminus A) : A \text{ es un subconjunto finito de } \mathcal{N}_z\}.$$

Hagamos ahora $p = (0, -1)$ y $X = Y \cup \{p\}$; y denotemos por $\mathcal{B}_p$ la familia $\{\{p\} \cup O_n : n \in \mathbb{N}\}$, donde $O_n = \{z = (x, y) \in Y : x > n\}$ para toda $n \in \mathbb{N}$.
(a) Demuestre que la familia $\{\mathcal{B}_z : z \in Y\} \cup \mathcal{B}_p$ satisfacen las condiciones de la proposición 1.40, y que por lo tanto generan una

topología $\mathcal{T}$ en X. Denotemos con $\mathcal{T}_Y$ a la topología de subespacio de Y.

(b) Verifique que el subespacio $\{z\} \cup \mathcal{N}_z$ es homeomorfo a la compactación de Alexandroff $A(\mathcal{N}_z)$ de $\mathcal{N}_z$, para toda $z \in L$ (vea el ejercicio 1.B inciso 7).

(c) Demuestre que para cada $z \in Y$, cada conjunto $U \in \mathcal{B}_z$ es un subconjunto abierto y cerrado de X. Concluya a partir de este hecho que el espacio $(Y, \mathcal{T}_Y)$ es un espacio de Tychonoff.

(d) Suponga que $f : Y \to \mathbb{R}$ es una función continua, y que $f(z) = 0$ para algún $z \in L$. Pruebe que existe un conjunto numerable $N(f, z) \subseteq \mathcal{N}_z$, tal que $f(y) = 0$ para toda $y \in \mathcal{N}_z \setminus N(f, z)$.

(e) Suponga que $f : Y \to \mathbb{R}$ es una función continua, y que $z \in L$ y $f(y) = 0$ para toda $y \in A$, donde $A \subseteq \mathcal{N}_z$ es infinito. Demuestre que $f(z) = 0$.

(f) Sea $r \in \mathbb{R}$. Suponga que $f : Y \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que $f(y) = 0$ para toda $y \in A$, donde $A \subseteq [r, r+1] \times \{0\}$. Muestre que existe un conjunto infinito $B \subseteq [r+1, r+2]$ para el cual $f(y) = 0$ para toda $y \in B$.

(g) Demuestre que $\mathrm{cl}_X\, O_{n+2} \subseteq O_n \cup \{p\}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Deduzca que X es un espacio T_3.

(h) Sea $F = \{(t, 0) : t \in (-\infty, 0]\}$. Compruebe las siguientes afirmaciones:

   (i) El conjunto F es cerrado en X.

   (ii) Para cada función continua $f : X \to \mathbb{R}$, se tiene que $f(p) = 0$ si $f(F) = \{0\}$. Deducir de esta propiedad que el espacio X no es completamente regular.

6.C. El Lema de Urysohn y los Teoremas de Tietze y de Tychonoff

(1) Una familia $\mathcal{C}$ de subconjuntos de un espacio topológico X es *localmente finita* si para cada $x \in X$ existe una vecindad V de x que intersecta sólamente una subcolección finita de elementos en $\mathcal{C}$.

   (a) Si $\mathcal{C}$ es una colección localmente finita de subconjuntos de X, entonces $\{\mathrm{cl}_X C : C \in \mathcal{C}\}$ es también localmente finita en X.

   (b) Sea $\mathcal{C}$ es una colección localmente finita de subconjuntos de X. Demuestre que $\mathrm{cl}_X \bigcup_{C\in\mathcal{C}} C = \bigcup_{C\in\mathcal{C}} \mathrm{cl}_X C$.

   (c) Generalizamos el ejercicio 3.A.(14).(a): Sea $\mathcal{C}$ una cubierta cerrada localmente finita de X. Sea $f : X \to Y$ una función. Demuestre que f es continua si y sólo si $f \restriction C : C \to f[C]$ es continua para cada $C \in \mathcal{C}$.

(2) Sean X un espacio topológico, $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in J}$ una familia de espacios topológicos y $\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \to Y_\alpha : \alpha \in J\}$ una familia de funciones.

Si la familia de funciones $\mathcal{F}$ distingue puntos, entonces la función $f = \Delta_{g\in\mathcal{F}} g$ es una función inyectiva.

Ejercicios adicionales del capítulo 6

6.D. Funciones cardinales topológicas

(1) Demuestre que si X es un espacio regular, entonces para toda red $\mathcal{P}$ de X se tiene que $\overline{\mathcal{P}} = \{\operatorname{cl} N : N \in \mathcal{P}\}$ es también una red para X.

(2) Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio de Tychonoff. Demuestre que existe una topología $\mathcal{T}_1$ para X tal que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_1$, $(X, \mathcal{T}_1)$ es un espacio Tychonoff y $w((X, \mathcal{T}_1)) \leqslant nw((X, \mathcal{T}))$.

(3) Pruebe que para todo espacio Tychonoff X, y todo cardinal $\tau \geqslant \omega$, se tiene que $nw(X) \leqslant \tau$ si y sólo si X es la imagen continua de un espacio de Tychonoff cuyo peso no excede a τ.

(4) Como ya sabemos, para dos conjuntos X y Y, el producto de tantas veces como elementos tiene X del conjunto Y, Y^X, es el conjunto de funciones con dominio X y rango contenido en Y. En el caso en que X y Y son espacios topológicos, podemos considerar el subconjunto $C(X, Y)$ del espacio producto Y^X formado por las funciones continuas. Cuando consideramos a $C(X, Y)$ con la topología heredada de Y^X, lo denotamos como $C_p(X, Y)$. Para el espacio euclidiano $\mathbb{R}$, se suele denotar a $C_p(X, \mathbb{R})$ como $C_p(X)$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:
   (a) $|X| \leqslant \aleph_0$.
   (b) $C_p(X)$ es primero numerable.
   (c) $C_p(X)$ es segundo numerable.

(5) Generalice el resultado en el inciso anterior, pruebe que

$$w(C_p(X)) = \chi(C_p(X)) = |X|$$

para cualquier espacio Tychonoff X.

(6) Pruebe que si X es Tychonoff, entonces $C_p(X)$ es denso en $\mathbb{R}^X$; y use el corolario en 4.C.(10) para demostrar que $c(C_p(X)) \leqslant \aleph_0$ para cualquier espacio Tychonoff X.

(7) Sea X un espacio Tychonoff. Demuestre que $\psi(C_p(X)) = d(X)$. (Sugerencia: Sea f la función en $C_p(X)$ identicamente cero. Tome una familia $\mathcal{V}$ de abiertos canónicos que contienen a f y tal que $\{f\} = \bigcap \mathcal{V}$. Cada $V \in \mathcal{V}$ es de la forma $[f; x_1, ..., x_n; \epsilon] = \{g \in C_p(X) : |g(x_i) - f(x_i)| < \epsilon \ \forall\ i \in \{1, ..., n\}\}$. Denotamos por $K(V)$ al conjunto de puntos $\{x_1, ..., x_n\}$. Demuestre que $\bigcup_{V\in\mathcal{V}} K(V)$ debe ser denso en

X. Esto prueba que $\psi(C_p(X)) \geqslant d(X)$ Ahora, para demostrar que $\psi(C_p(X)) \leqslant d(X)$, considere un subconjunto denso Y de X de cardinalidad $\leqslant d(X)$. Pruebe que la aplicacion $\pi : C_p(X) \to C_p(Y)$ que manda a cada $f \in C_p(X)$ en $f \upharpoonright Y$ es continua. Además demuestre que si $\mathcal{B}$ es una base local de la función cero en $\pi[C_p(X)]$, entonces $\{\pi^{-1}[B] : B \in \mathcal{B}\}$ es una pseudobase de la función cero en $C_p(X)$.)

(8) Para cualquier espacio Tychonoff X, $nw(C_p(X)) = nw(X)$.
(Sugerencia: Para demostrar que $nw(C_p(X)) \leqslant nw(X)$, fije una red $\mathcal{R}$ en X y fije una base numerable $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}$. Para cualesquiera colecciónes finitas $R_1, ..., R_k \in \mathcal{R}$ y $B_1, ..., B_k \in \mathcal{B}$, definimos
$$[R_1, ..., R_k; B_1, ..., B_k] = \{g \in C_p(X) : g[R_i] \subseteq B_i \ \forall\ i \in \{1, ..., k\}\}.$$
Verifique que la colección $\{[R_1, ..., R_k; B_1, ..., B_k] : k \in \mathbb{N}, R_i \in \mathcal{R}, B_i \in \mathcal{B}\ \forall\ i \in \{1, ..., k\}\}$ es una red en $C_p(X)$. Para demostrar $nw(C_p(X)) \geqslant nw(X)$, compruebe que la aplicación $\phi : X \to C_p(C_p(X))$ dada por $\phi(x)(f) = f(x)$ es un encaje, y use el ejercicio 5.E.(4) y la relación $nw(C_p(X)) \leqslant nw(X)$. Tenga en cuenta que $C_pC_p(X)$ es el subespacio del producto $\mathbb{R}^{C_p(X)}$ de todas las posibles funciones continuas con dominio $C_p(X)$ y rango $\mathbb{R}$.)

Capítulo 7

Espacios compactos

Además de los trabajos de G. Cantor y R. Baire sobre las propiedades topológicas de la recta real, hay aportaciones de Bolzano, Borel, Weierstrass y Lebesgue al conocimiento de la topología de los espacios euclidianos $\mathbb{R}^n$. Entre otras cosas, ellos demostraron que para un subconjunto F de $\mathbb{R}^n$ las siguientes condiciones son equivalentes (1894, 1903, 1904):

(1) F es cerrado y acotado en $\mathbb{R}^n$.
(2) (Borel-Lebesgue) Cada cubierta de F formada por bolas abiertas contiene una subcolección finita que aún cubre a F.
(3) (Bolzano-Weierstrass) Cada sucesión en F tiene un punto de acumulación.

Los resultados de Borel, Lebesgue, Bolzano, y Weierstrass caracterizan la compacidad de subconjuntos de los espacios euclidianos y constituyen el origen de la definición de compacidad en toda su generalidad. R. Engelking nos dice al respecto lo siguiente en [26]:

> *...cuando la Topogía General estaba en su infancia, para definir nuevas clases de espacios topológicos se consideraba una propiedad del intervalo* $[0,1]$ *o de* $\mathbb{R}$ *y se analizaba la clase de espacios que satisfacían esa propiedad. La compacidad, la separabilidad y la conexidad fueron definidas siguiendo ese patrón.*

En 1923 y 1924 ([6], [8]), P. S. Alexandroff y P. S. Urysohn introdujeron, en forma independiente a otros matemáticos de la época, el concepto de compacidad y anunciaron también varios resultados importantes que tiempo después publicaron en su ahora célebre artículo de 1929 *Mémoire sur les espaces topologiques compacts* [1]. Ellos definen a la compacidad inspirándose en la caracterización de Borel y Lebesgue de los subconjuntos cerrados y acotados de $\mathbb{R}^n$, y llaman a sus espacios topológicos *bicompactos*. Además de todo ello, introducen también la noción de compacidad local, definen la compactación por un punto de un espacio localmente compacto no compacto, y dan una serie de ejemplos de espacios que son ahora clásicos como el Duplicado de Alexandroff del círculo, el cuadrado lexicográfico, el espacio de la doble flecha, y lo que ahora llamamos la línea de Alexandroff-Sorgenfrey.

En este capítulo estudiaremos las propiedades más relevantes de la compacidad en espacios topológicos arbitrarios e introduciremos algunos otros conceptos relacionados a ella. Demostraremos el importante teorema de Tychonoff sobre la compacidad de un producto de espacios topológicos, y trataremos temas estrechamente relacionados como la compactación de Stone-Čech.

1. Espacios compactos

La formulación de la noción de compacidad como la conocemos hoy en día es debida a los matemáticos rusos P. S. Alexandroff y P. S. Urysohn [1].

7.1. Definición.

(1) Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Una colección $\mathcal{U}$ de subconjuntos de X es una *cubierta* de X si $X = \bigcup \mathcal{U}$. Si además cada uno de los elementos de $\mathcal{U}$ es un subconjunto abierto de X, entonces a $\mathcal{U}$ le llamaremos *cubierta abierta* de X. Por otro lado, si $\mathcal{U}$ es una cubierta de X y $\mathcal{V}$ es una subcolección de $\mathcal{U}$, diremos que $\mathcal{V}$ es una *subcubierta* de $\mathcal{U}$ si $\bigcup \mathcal{V} = X$.

(2) Un espacio topológico X es un espacio *compacto* si toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita.

Diremos que *un subconjunto F de un espacio topológico X es compacto* si al ser considerado con la topología relativa, es un espacio compacto. Por ejempo, todo subconjunto finito de un espacio topológico es siempre un subconjunto compacto.

No es difícil darse cuenta que un espacio discreto X es compacto únicamente en el caso en que es finito puesto que la familia $\{\{x\} : x \in X\}$ es una cubierta abierta de X. Por otro lado, es sencillo notar que todo espacio indiscreto es siempre compacto, no importando su cardinalidad.

7.2. Ejemplos.

(1) El intervalo cerrado $[a,b]$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$. En efecto, considere una cubierta abierta $\mathcal{U}$ del intervalo $[a,b]$. Podemos suponer sin perder generalidad que $\mathcal{U}$ está formada por subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$. Consideremos ahora el siguiente conjunto:

$$A = \{x \in [a,b] : \text{el intervalo } [a,x] \text{ puede ser cubierto por una cantidad finita de elementos de } \mathcal{U}\}.$$

Existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $a \in U$. Como U es abierto en $\mathbb{R}$ existe $r > 0$ tal que $(a-r, a+r) \subseteq U$. Consideremos un número real x_0 tal que $a < x_0 < \text{mín}\{a+r, b\}$. Entonces $[a, x_0] \subseteq U$, y por ello, $x_0 \in A$; es decir, $A \neq \emptyset$. Por otro lado, el conjunto A es acotado superiormente por el número b. Entonces por el axioma del supremo existe $\alpha = \text{sup}A$. Observe que $\alpha > a$ ya que $a < x_0$ y $x_0 \in A$.

Demostremos que $\alpha = b$. Como b es una cota superior de A, tenemos que $\alpha \leqslant b$. Si ocurriera que $\alpha < b$, entonces $\alpha \in (a,b)$. Como $\mathcal{U}$ es cubierta abierta de $[a,b]$, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $\alpha \in V$. Pero V y (a,b) son abiertos de $\mathbb{R}$ y $\alpha \in (a,b) \cap V$, así que existe $\delta > 0$ tal que $(\alpha - \delta, \alpha + \delta) \subseteq V \cap (a,b)$. Como $\alpha - \delta < \alpha$, existe una $z \in A$ tal que $\alpha - \delta < z$. Debido que $z \in A$, existen $V_1, V_2, \ldots, V_n \in \mathcal{U}$ tales que $[a,z] \subseteq V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_n$. Entonces $[a, \alpha + \delta] \subseteq V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_n \cup V$. En consecuencia, $\alpha + \delta \in A$; y por ello $\alpha + \delta \leqslant \alpha$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $b = \alpha$.

Análogamente (y usando el hecho de que $\alpha = b$), se puede demostrar que $b \in A$. Por lo tanto $[a,b]$ es compacto.

Contrario a lo que sucede con los intervalos cerrados y acotados de $\mathbb{R}$, la recta real con su topología usual no es un espacio compacto. Por ejemplo, la cubierta abierta $\{(-n,n) : n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{R}$ no tiene subcubiertas finitas.

(2) El espacio de ordinales $[0, \omega_1]$ es compacto. En efecto, sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de $[0, \omega_1]$. Para algún $U_0 \in \mathcal{U}$, $\omega_1 \in U_0$. Entonces, existe $\alpha_0 < \omega_1$ tal que $(\alpha_0, \omega_1] \subseteq U_0$. Sea $U_1 \in \mathcal{U}$ tal que $\alpha_0 \in U_1$. Si $\alpha_0 > 0$, entonces podemos encontrar $\alpha_1 < \alpha_0$ tal que $(\alpha_1, \alpha_0] \subseteq U_1$. Tomemos ahora $U_2 \in \mathcal{U}$ que contiene a α_1. Si $\alpha_1 > 0$, existe $\alpha_2 < \alpha_1$ tal que $(\alpha_2, \alpha_1] \subseteq U_2$. De esta manera podemos continuar. Note que para algún $n \in \mathbb{N}$, deberá ocurrir que $\alpha_n = 0$, puesto que de lo contrario obtendríamos

una sucesión estrictamente decreciente $\cdots < \alpha_{n+1} < \alpha_n < \cdots < \alpha_1 < \alpha_0$. Esto significaría que el conjunto $\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ no tiene un primer elemento, lo cual contradice la buena ordenabilidad de $[0, \omega_1]$.

Observe ahora que la existencia de $n \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_n = 0$ implica que la subcolección finita $U_0, \dots, U_{n+1}$ de elementos de $\mathcal{U}$ cubre a $[0, \omega_1]$.

(3) Una demostración análoga a la del inciso anterior, nos permitiría demostrar que el espacio $[0, \alpha]$ es compacto, para cualquier número ordinal α. Además, si α es un ordinal límite, $[0, \alpha)$ no es compacto pues la colección $\{[0, \beta) : \beta < \alpha\}$ es una cubierta abierta de $[0, \alpha)$ que carece de subcubiertas finitas.

En algunas ocasiones es útil la siguiente formulación de la compacidad en términos de las intersecciones finitas de subespacios cerrados. Recuérdese que una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de un conjunto X tiene *la propiedad de la intersección finita* (o es una *familia centrada*) si para toda subfamilia finita $\mathcal{F}'$ no vacía de $\mathcal{F}$, sucede que $\bigcap \mathcal{F}' \neq \emptyset$.

7.3. Proposición. *Un espacio X es compacto si y sólo si toda familia de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de intersección finita tiene intersección no vacía.*

Demostración. Sea X compacto, y sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos cerrados en X. Si $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$, entonces la familia $\mathcal{U} = \{ X \setminus F : F \in \mathcal{F} \}$ es una cubierta abierta de X. Por la compacidad de X, la cubierta $\mathcal{U}$ tiene una subcubierta finita $\mathcal{U}'$. Sea $\mathcal{F}' = \{ X \setminus U : U \in \mathcal{U}' \}$. Entonces $\bigcap \mathcal{F}' = \emptyset$, y $\mathcal{F}$ no tiene la propiedad de intersección finita.

Ahora supongamos que toda familia de conjuntos cerrados en X con la propiedad de la intersección finita tiene intersección no vacía. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Entonces $\mathcal{F} = \{ X \setminus U : U \in \mathcal{U} \}$ es una familia de conjuntos cerrados en X, y $\bigcap \mathcal{F} = X \setminus \bigcup \mathcal{U} = \emptyset$. Esto implica que $\mathcal{F}$ no tiene la propiedad de la intersección finita, y entonces existe $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ finito tal que $\bigcap \mathcal{F}' = \emptyset$. Entonces la familia $\mathcal{V} = \{ X \setminus F : F \in \mathcal{F}' \}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{U}$. ⊠

La compacidad no es una propiedad hereditaria (el intervalo abierto $(0, 1)$ es un subespacio no compacto del espacio compacto $[0, 1]$), no obstante sí se preserva cuando consideramos subespacios cerrados.

7.4. Proposición. *Sean X un espacio compacto y F un subespacio cerrado de X. Entonces F es compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{V}$ una cubierta abierta de F. Para todo $V \in \mathcal{V}$ sea U_V un conjunto abierto en X tal que $V = U_V \cap F$. Entonces $\mathcal{U} = \{ U_V : V \in \mathcal{V} \} \cup \{X \setminus F\}$ es una cubierta abierta de X. Sea $\mathcal{U}'$ una subcubierta finita de $\mathcal{U}$. La familia $\{ U \cap F : U \in \mathcal{U}' \}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{V}$. $\boxtimes$

Uno de los ejemplos clásicos de subconjunto compacto de la recta real $\mathbb{R}$ es el famoso conjunto ternario de Cantor.

7.5. Ejemplo (*Conjunto ternario de Cantor*). Construyamos una sucesión $F_0, F_1, F_2, \ldots$ de subconjuntos cerrados del intervalo $[0,1]$ de la siguiente manera:

$$F_0 = [0,1]$$

$$F_1 = [0, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, 1]$$

$$F_2 = [0, \tfrac{1}{9}] \cup [\tfrac{2}{9}, \tfrac{3}{9}] \cup [\tfrac{6}{9}, \tfrac{7}{9}] \cup [\tfrac{8}{9}, 1]$$

$$\vdots$$

En general, F_n se obtiene de F_{n-1} descartando los intervalos abiertos que son el intervalo abierto tercio medio de cada uno de los intervalo cerrados que forman F_{n-1}, esto es,

$$F_n = F_{n-1} \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} \left(\tfrac{1+3^k}{3^n}, \tfrac{2+3^k}{3^n} \right) \qquad n \geqslant 1.$$

Note que cada F_n es cerrado en $[0,1]$ y que la sucesión es anidada, es decir, $F_0 \supseteq F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots$. El *conjunto de Cantor* $\mathbf{C}$ es el conjunto $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$, el cual, por lo ya estudiado hasta aquí, es un espacio no vacío compacto y métrico.

El conjunto de Cantor se puede describir de otra forma. Como bien se sabe, cada punto $x \in [0,1]$ tiene una representación ternaria $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i}$ en donde cada x_i es un número en $\{0,1,2\}$. Así a cada $x \in [0,1]$ le podemos asociar la sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de su representación ternaria. Se sabe también que existen números en $[0,1]$ que tienen dos representaciones ternarias, una constante 0 a partir de un cierto momento, y la otra constante 2 también en una cola. Por ejemplo, a $\frac{1}{3}$ se le pueden asociar las sucesiones $1, 0, 0, \ldots$ y $0, 2, 2, \ldots$. El conjunto de Cantor $\mathbf{C}$ es igual a la colección de todos los puntos en $[0, 1]$ que tienen una representación ternaria en la cual no aparece ningún 1, es decir, $\mathbf{C}$ es el conjunto de todos los puntos x en $[0, 1]$ cuya expansión ternaria puede escribirse en la forma: $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i}$, donde $x_i \in \{0, 2\}$ para cada $i \in \mathbb{N}$.

En el problema 7.A.(6) se pide demostrar al lector que el conjunto de Cantor es homeomorfo al producto 2^ω, donde 2 denota al espacio discreto $\{0, 1\}$ (véase el ejemplo 4.16 inciso (1)).

La compacidad es una propiedad de suma importancia y gran fuerza. Por ejemplo, ella se preserva por funciones continuas y es una propiedad aditiva (en el sentido siguiente).

7.6. Proposición.

(1) *Si X es un espacio compacto, Y es un espacio, y existe una función continua $f : X \to Y$ tal que $f[X] = Y$, entonces Y es compacto.*
(2) *Sean X un espacio topológico . Si $X_1, \ldots, X_n$ son subespacios compactos de X tales que $X = X_1 \cup \cdots \cup X_n$, entonces X es compacto.*

Demostración. (1) Sea $\mathcal{V}$ una cubierta abierta de Y. Entonces $\mathcal{U} = \{ f^{-1}[V] : V \in \mathcal{V} \}$ es una cubierta abierta de X. Sea $\mathcal{U}'$ una subcubierta finita de $\mathcal{U}$. Entonces la familia $\mathcal{V}' = \{ f[U] : U \in \mathcal{U}' \}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{V}$.

(2) Si $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X, entonces para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, la familia $\mathcal{U}_i = \{ U \cap X_i : U \in \mathcal{U} \}$ es una cubierta abierta de X_i. Como cada X_i es compacto, existe una subfamilia finita $\mathcal{U}'_i \subseteq \mathcal{U}$ tal que $\{ U \cap X_i : U \in \mathcal{U}'_i \}$ cubre a X_i. Entonces la familia $\mathcal{U}'_1 \cup \cdots \cup \mathcal{U}'_n$ es una subcubierta finita de $\mathcal{U}$. ⊠

Por la proposición anterior, todo espacio cociente de un espacio compacto es también un espacio compacto. También es fácil notar que la propiedad del inciso (2) de 7.6 no es necesariamente cierta cuando se tiene una cantidad numerable de subespacios compactos. Por ejemplo, el espacio usual de los números reales $\mathbb{R}$ es igual a la unión de los intervalos cerrados $[-n, n]$ (donde $n \in \mathbb{N}$); pero $\mathbb{R}$ no es compacto.

En el siguiente teorema se puede apreciar cómo los subconjuntos compactos de un espacio de Hausdorff satisfacen propiedades de separación análogas a las que cumplen los puntos.

7.7. Teorema.

(1) *Sean X un espacio de Hausdorff, y $K_1, K_2 \subseteq X$ subespacios compactos de X. Si $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ entonces existen subconjuntos abiertos ajenos U y V en X tales que $K_1 \subseteq U$ y $K_2 \in V$.*
(2) *Sea X un espacio regular. Si $F \subseteq X$ es cerrado y $K \subseteq X$ es compacto y $F \cap K = \emptyset$, entonces existen abiertos ajenos U y V tales que $F \subseteq U$ y $K \subseteq V$.*

Demostración.

(1) Fijamos un punto $y \in K_1$. Para todo $x \in K_2$, sean U_x^y, V_x^y abiertos tales que $x \in U_x^y$, $y \in V_x^y$ y $U_x^y \cap V_x^y = \emptyset$. La familia $\mathcal{U} = \{U_x^y \cap K : x \in K_2\}$ es una cubierta abierta de K_2. Sea $\{U_{x_1}^y \cap K, \ldots, U_{x_m}^y \cap K\}$ una subcubierta finita de $\mathcal{U}$. Hagamos $A_y = U_{x_1}^y \cup \cdots \cup U_{x_m}^y$ y $B_y = V_{x_1}^y \cap \cdots \cap V_{x_m}^y$.

    Note ahora que la colección $\mathcal{W} = \{B_y \cap K_1 : y \in K_1\}$ es una cubierta abierta de K_1. Como K_1 es compacto, existen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ en K_1 tales que $\{(B_{y_1} \cap K_1), \ldots, (B_{y_n} \cap K_1)\}$ es un subcubierta finita de $\mathcal{W}$. Definamos $U = B_{y_1} \cup \cdots \cup B_{y_n}$ y $V = A_{y_1} \cap \cdots \cap A_{y_n}$. Entonces $K_1 \subseteq U$, $K_2 \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.

(2) Como X es regular, para cada $x \in K$ existen abiertos ajenos U_x y V_x tales que $F \subseteq U_x$ y $x \in V_x$. Note que la familia $\mathcal{V} = \{V_x \cap K : x \in K\}$ es una cubierta abierta de K. Siendo K compacto, existen $x_1, \ldots, x_n$ en K tales que $\{V_{x_1} \cap K, \ldots, V_{x_n} \cap K\}$ es una subcubierta abierta de $\mathcal{U}$. Definamos ahora a $U = U_{x_1} \cap \cdots \cap U_{x_n}$ y $V = V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_n}$. Entonces U y V son abiertos ajenos tales que $F \subseteq U$ y $K \subseteq V$. ⊠

Como una consecuencia de las anteriores propiedades, podemos demostrar, entre otras cosas, que todo espacio compacto Hausdorff es un espacio normal.

7.8. Corolario.

(1) *Si X es un espacio de Hausdorff y K es subespacio compacto de X, entonces K es cerrado en X.*
(2) *Todo espacio Hausdorff compacto es normal.*

(3) *Sean X un espacio compacto, Y un espacio de Hausdorff, y $f : X \to Y$ una función.*
   (a) *Si f es continua entonces f es una función cerrada.*
   (b) *Si f es biyectiva y continua entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración.

(1) Si $x \in X \setminus K$, aplicando el teorema 7.7 a los compactos $K_1 = \{x\}$ y $K_2 = K$, podemos concluir que existen subconjuntos abiertos ajenos U y V tales que $K_1 \subseteq U$ y $K_2 \subseteq V$. Entonces $x \in U \subseteq X \setminus K$. De esta manera hemos comprobado que K es cerrado.

(2) Sean X un espacio compacto T_2 y F_1, F_2 suconjuntos cerrados ajenos de X. Como X es compacto, tanto F_1 como F_2 son subespacios compactos. Como F_1 es ajeno de F_2, podemos aplicar el teorema 7.7 (inciso (1)) y concluir que existen abiertos ajenos U y V que satisfacen $F_1 \subseteq U$ y $F_2 \subseteq V$. Esto muestra que X es normal.

(3) (a) Si $F \subseteq X$ es cerrado, entonces F es compacto. La función $f \restriction F : F \to f[F]$ es continua y sobreyectiva. Siendo F compacto, $f[F]$ es compacto. Pero todo subespacio compacto de un espacio Hausdorff, es un subconjunto cerrado.
(b) Toda función biyectiva continua y cerrada es un homeomorfismo. ⊠

2. Producto de espacios compactos

En esta sección demostraremos el célebre teorema de Tychonoff que asegura la compacidad del producto topológico de espacios compactos. El primer resultado de esta sección engloba algunas de las caracterizaciones, en términos de convergencia de filtros, de la compacidad.

7.9. Proposición. *Sea X un espacio topológico. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *X es un espacio compacto.*
(2) *Todo filtro en X tiene un punto de acumulación.*
(3) *Todo ultrafiltro en X tiene un punto de acumulación.*
(4) *Todo ultrafiltro en X converge.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Sea $\mathcal{F}$ un filtro en X. Consideremos la colección $\mathrm{cl}(\mathcal{F}) = \{\mathrm{cl}(F) : F \in \mathcal{F}\}$. Como $\mathcal{F}$ es un filtro, se tiene que

$$\emptyset \neq F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n \subseteq \mathrm{cl}(F_1) \cap \mathrm{cl}(F_2) \cap \cdots \cap \mathrm{cl}(F_n)$$

para cualesquiera $F_1, F_2, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$. Entonces la colección $\mathrm{cl}(\mathcal{F})$ es una familia centrada de subconjuntos cerrados de X. Por la proposición 7.3, tenemos que $\emptyset \neq \bigcap \mathrm{cl}(\mathcal{F})$. Observe ahora que cualquier punto en el conjunto $\bigcap \mathrm{cl}(\mathcal{F})$ es un punto de acumulación para $\mathcal{F}$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Esta implicación se cumple ya que cualquier ultrafiltro es un filtro.

(3) $\Rightarrow$ (4) Supongamos que $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro en X. Por hipótesis existe $x \in \bigcap\{\mathrm{cl}(F) : F \in \mathcal{F}\}$. Probaremos ahora que $\mathcal{F} \to x$. Consideremos una vecindad cualquiera de x, digamos V. Como $x \in \mathrm{cl}(F)$ para toda $F \in \mathcal{F}$ y $V \in \mathcal{V}(x)$, tenemos que $V \cap F \neq \emptyset$. El teorema 3.53 implica ahora que $V \in \mathcal{F}$. Con lo cual podemos concluir que $\mathcal{V}(x) \subseteq \mathcal{F}$. Esto demuestra que $\mathcal{F} \to x$.

(4) $\Rightarrow$ (1) Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta para X. Supongamos que $\mathcal{U}$ no tiene subcubiertas finitas. Entonces la colección $\mathcal{C} = \{X \setminus U : U \in \mathcal{U}\}$ es una colección centrada de subconjuntos de X. Por la proposición 3.51 podemos considerar un ultrafiltro $\mathcal{F}$ que contiene a $\mathcal{C}$. Aplicando nuestra hipótesis, podemos garantizar la existencia de un punto $x \in X$ tal que $\mathcal{F} \to x$. Pero entonces x es un punto de acumulación de $\mathcal{F}$. Así que $x \in \mathrm{cl}_X(X \setminus U)$ para cada $U \in \mathcal{U}$. Pero como cada elemento de $\mathcal{U}$ es abierto, lo anterior implica que $x \in X \setminus U$ para toda $U \in \mathcal{U}$, contradiciendo el hecho de que $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta para X. Entonces debe existir una subcolección finita de $\mathcal{U}$ que cubre a X. Por lo tanto X es un espacio compacto. ⊠

7.10. Teorema (Tychonoff). *Sea $\{X_j : j \in J\}$ una colección no vacía de espacios topológicos no vacíos. El producto de Tychonoff $X = \prod_{j\in J} X_j$ es un espacio compacto si y sólo si el espacio X_j es compacto para cada $j \in J$.*

Demostración. $\Rightarrow$] Sea $j \in J$ arbitraria. Como cada proyección $\pi_j : X \to X_j$ es una función continua y sobreyectiva, el espacio X_j es compacto.

$\Leftarrow$] Supongamos que cada elemento en $\{X_j : j \in J\}$ es un espacio compacto. Vamos a demostrar que $X = \prod_{j\in J} X_j$ es compacto probando que todo ultrafiltro en X converge. Sea $\mathcal{F}$ un ultrafiltro en X.

Afirmación. Para cada $j \in J$, la base de filtro $\pi_j[\mathcal{F}] = \{\pi_j[F] : F \in \mathcal{F}\}$ es un ultrafiltro en X_j.

Demostración de la afirmación. Sea $j \in J$ fijo. Es claro que $\pi_j[\mathcal{F}] \neq \emptyset$ y que cada elemento de $\pi_j[\mathcal{F}]$ es diferente del vacío. Por otra parte, si $\pi_j[F] \in \pi_j[\mathcal{F}]$ y $\pi_j[F] \subseteq A$, entonces $F \subseteq \pi_j^{-1}[\pi_j[F]] \subseteq \pi_j^{-1}[A]$. Como $F \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ es cerrado bajo superconjuntos, $\pi_j^{-1}[A] \in \mathcal{F}$. Entonces $A = \pi_j[\pi_j^{-1}[A]] \in \pi_j[\mathcal{F}]$.

Para verificar que $\pi_j[\mathcal{F}]$ es cerrada bajo intersecciones finitas, consideremos un par de elementos $\pi_j[F_1], \pi_j[F_2] \in \pi_j[\mathcal{F}]$. Como $\mathcal{F}$ es filtro y $F_i, F_2 \in \mathcal{F}$, tenemos que $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$. Note ahora que $F_1 \cap F_2 \subseteq \pi_j^{-1}[\pi_j[F_1] \cap \pi_j[F_2]]$. Entonces, $\pi_j^{-1}[\pi_j[F_1] \cap \pi_j[F_2]] \in \mathcal{F}$. Consecuentemente,

$$\pi_j[F_1] \cap \pi_j[F_2] = \pi_j\left[\pi_j^{-1}[\pi_j[F_1] \cap \pi_j[F_2]]\right] \in \pi_j[\mathcal{F}].$$

Finalmente, probemos que $\pi_j[\mathcal{F}]$ es un ultrafiltro. Supongamos que $U \subseteq X_j$ es tal que $U \cap \pi_j[F] \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$. Entonces, $\pi_j^{-1}[U] \cap F \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro, $\pi_j^{-1}[U] \in \mathcal{F}$. Entonces, $U = \pi_j[\pi_j^{-1}[U]] \in \pi_j[\mathcal{F}]$.

Por lo tanto, $\pi_j[\mathcal{F}]$ es un ultrafiltro en X_j. $\boxtimes$.

Ahora, aplicando nuestra hipótesis y la proposición 7.9, podemos garantizar la existencia de un punto $x_j \in X_j$ tal que $\pi_j[\mathcal{F}] \to x_j$ en X_j, para toda $j \in J$. Definamos $x : J \to \bigcup_{j \in J} X_j$ por medio de la regla: $x(j) = x_j$ para toda $j \in J$. Claramente la función x es un elemento de X.

Probaremos ahora que $\mathcal{F} \to x$ en X. Tomemos una vecindad V de x en X. Entonces existe un abierto canónico $\pi_{j_1}^{-1}[B_{j_1}] \cap \cdots \cap \pi_{j_n}^{-1}[B_{j_n}]$ tal que

$$x \in \pi_{j_1}^{-1}[B_{j_1}] \cap \cdots \cap \pi_{j_n}^{-1}[B_{j_n}] \subseteq V.$$

Como cada $x_{j_i} = \pi_{j_i}(x) \in B_{j_i}$ y cada B_{j_i} es un abierto en X_{j_i}, tenemos que $B_{j_i} \in \pi_{j_i}[\mathcal{F}]$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ (puesto que $\pi_{j_i}[\mathcal{F}] \to x_{j_i}$). De donde, existen $F_{j_i} \in \mathcal{F}$ tales que $B_{j_i} = \pi_{j_i}[F_{j_i}]$ para toda i. Entonces $F_{j_i} \subseteq \pi_{j_i}^{-1}[B_{j_i}]$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Como $\mathcal{F}$ es un filtro, lo anterior implica que $\pi_{j_i}^{-1}[B_{j_i}] \in \mathcal{F}$ para toda i. Pero entonces, siendo $\mathcal{F}$ cerrado bajo intersecciones finitas, sucede que $\pi_{j_1}^{-1}[B_{j_1}] \cap \cdots \cap \pi_{j_n}^{-1}[B_{j_n}] \in \mathcal{F}$. Y como $\mathcal{F}$ es cerrado con respecto a superconjuntos, $V \in \mathcal{F}$. Podemos entonces concluir que toda vecindad de x en X pertenece al filtro $\mathcal{F}$. Esto último demuestra que $\mathcal{F} \to x$. ⊠

7.11. Ejemplo. Del teorema anterior resulta que ningún espacio $\mathbb{R}^n$ es un espacio compacto. Contrariamente, todo n-cubo $[a,b]^n$, o más generalmente, todo espacio de tipo $[a,b]^M$, donde M es un conjunto arbitrario, es un espacio compacto.

De igual forma, todo espacio de tipo 2^M, donde M es un conjunto arbitrario y $2 = \{0,1\}$ tiene la topología discreta, es un espacio compacto. Los espacios de este tipo son llamados *cubos de Cantor*. En el ejercicio 7.A.(6) se le pide al lector demostrar que el cubo de Cantor 2^ω es homeomorfo al conjunto ternario de Cantor $\mathbf{C}$.

A continuación demostraremos uno de los teoremas relevantes del análisis clásico relacionado con los subconjuntos compactos de los espacios euclidianos: el teorema de Heine-Borel-Lebesgue.

Recordemos que un subconjunto A de un espacio métrico (X,d) es *acotado en X* si el conjunto $\{d(x,y) : x,y \in A\}$ es un subconjunto de $\mathbb{R}$ acotado superiormente. Es decir, si existe una $r > 0$ y un punto $x_0 \in X$ tales que $A \subseteq B(x_0,r)$.

7.12. Corolario (Teorema de Heine-Borel-Lebesgue). *Un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ es compacto si y sólo si A es un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. $\Rightarrow$] Como los espacios $\mathbb{R}^n$ son espacios de Hausdorff, siendo A un subconjunto compacto, A es cerrado en $\mathbb{R}^n$. Para probar que A es acotado, consideremos la cubierta $\mathcal{U} = \{B(\vec{0},n) : n \in \mathbb{N}\}$. Como A es compacto, existen $n_1, n_2, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$ tales que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B(\vec{0}, n_i).$$

Resulta entonces que $A \subseteq B(\vec{0},k)$ donde $k = \text{máx}\{n_1, n_2, \ldots, n_m\}$. Por lo tanto A es acotado.

$\Leftarrow$] Si A es acotado, entonces existe un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y una $r > 0$ tales que $A \subseteq B(x_0,r)$. Entonces $A \subseteq [a,b]^n$ donde $a = -(\|x_0\| + r)$ y $b = \|x_0\| + r$. Como A es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$, es también un subconjunto cerrado del espacio $[a,b]^n$, el cual es compacto por el teorema de Tychonoff. Aplicando la proposición 7.4, podemos concluir que A es compacto. ⊠

Utilizando el teorema anterior concluimos fácilmente que los espacios topológicos $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{N}^n$ y $\mathbb{Q}^n$ no son espacios compactos ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Q}$ tienen aquí la topología de subespacio respecto de $\mathbb{R}$). Claramente podemos también aplicar el teorema de Heine-Borel-Lebesgue para concluir que los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^n$ son compactos: $\overline{B}(\mathbf{0}, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant r\}$ y $S^n_r = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = r\}$, donde $r > 0$.

3. Espacios localmente compactos

En esta sección estudiaremos la versión local de la noción de compacidad. La compacidad local, como es común llamar a esta propiedad, fue introducida por P. S. Alexandroff en 1923 en [5].

7.13. Definición. Un espacio X se llama *localmente compacto* si todo punto de X tiene una vecindad compacta.

Como todo espacio topológico es vecindad de cada uno de sus puntos, todo espacio compacto es localmente compacto.

7.14. Ejemplos.

(1) Ya sabemos que para cada número ordinal $\alpha \in [0, \omega_1)$, $[0, \alpha]$ es compacto. Por lo tanto, $[0, \omega_1)$ es localmente compacto.

(2) Por el teorema de Heine-Borel-Lebesgue, toda bola cerrada en el espacio $\mathbb{R}^n$, considerado con su topología usual, es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto, cualquier espacio $\mathbb{R}^n$ es localmente compacto.

(3) Es fácil verificar que todo subespacio cerrado de un espacio localmente compacto es localmente compacto, pero la compacidad local no es una propiedad hereditaria. Por ejemplo, el espacio $\mathbb{R}$ con su topología usual es localmente compacto, pero no así el subespacio de los números racionales $\mathbb{Q}$. En efecto, supóngase que $q \in \mathbb{Q}$ y que K es una vecindad compacta de q en $\mathbb{Q}$. Tenemos que $q \in \operatorname{int}_{\mathbb{Q}}(K) \subseteq K$. Como K es compacto en $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}$ es subespacio de $\mathbb{R}$, K es compacto, y por lo tanto cerrado, en $\mathbb{R}$. Como $q \in \operatorname{int}_{\mathbb{Q}}(K)$, existe un intervalo (a, b) de $\mathbb{R}$ tal que $q \in (a, b) \cap \mathbb{Q} \subseteq \operatorname{int}_{\mathbb{Q}}(K) \subseteq K$. Note ahora que cualquier punto $y \in (a, b) \setminus \mathbb{Q}$ es un punto de acumulación de K en $\mathbb{R}$ que no pertenece a K. Esto contradice el que K sea un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$.

La siguiente caracterización de la compacidad local en los espacios de Hausdorff es sencilla de demostrar y es muy útil.

7.15. Proposición. *Sea X un espacio Hausdorff. El espacio X es localmente compacto si y sólo si todo $x \in X$ tiene una vecindad abierta U tal que la cerradura de U es compacta.*

Demostración. Supóngase que X es localmente compacto y que $x \in X$. Sea V una vecindad compacta de x. Entonces existe U, abierto en X, tal que $x \in U \subseteq V$. Como X es T_2, el subespacio compacto V de X es cerrado en X. De este modo, $\text{cl}(U) \subseteq V$, y por ello $\text{cl}(U)$ es compacto.

El recíproco es obviamente cierto. ⊠

7.16. Proposición. *Sea X un espacio Hausdorff. El espacio X es localmente compacto si y sólo si cada punto de X tiene un sistema de vecindades compactas.*

Demostración. Supongamos que X es localmente compacto, que $x \in X$ y que V es un abierto de X tal que $x \in V$. Sea K una vecindad compacta de x en X. Entonces $V \cap \text{int}_X(K)$ es un abierto en el compacto K. Como K es T_2 (porque X lo es), K es un espacio T_4. Por la regularidad de K, existe un abierto B en K tal que $x \in B \subseteq \text{cl}_K(B) \subseteq V \cap \text{int}_X(K)$. Podemos elegir entonces un abierto U de X tal que $K \cap U = B$. Como K es una vecindad de x en X, tenemos que $x \in \text{int}_X(K) \cap U \subseteq B \subseteq \text{cl}_K(B)$. Note ahora que $\text{int}_X(K) \cap U$ es un abierto de X y que $\text{cl}_K(B)$ es compacto. Entonces $\text{cl}_K(B)$ es una vecindad compacta de x contenida en V.

La prueba de la implicación contraria es trivial. ⊠

7.17. Proposición. *Sea X un espacio Hausdorff localmente compacto, y sea Y un subespacio de X.*

(1) *Si Y es abierto en X entonces Y es localmente compacto.*
(2) *Si Y es localmente compacto y denso en X, entonces Y es abierto en X.*

Demostración.

(1) Sea $y \in Y$ arbitrario. Siendo X un espacio localmente compacto, existe una vecindad compacta V de y en X. Como Y es abierto en X, $Y \cap V$ es una vecindad de y en X. Pero X es, además de localmente compacto, un espacio T_2, por lo cual

podemos encontrar una vecindad compacta W de y en X contenida en $Y \cap V$ (véase la proposición 7.16). Resulta entonces que W es una vecindad compacta de y en Y. Como y fue elegido de manera arbitraria, concluimos que Y es localmente compacto.

(2) Sea $y \in Y$ arbitrario. Como Y es localmente compacto, existe un subconjunto abierto A de Y y un subconjunto compacto K de Y tales que $y \in A \subseteq K \subseteq Y$. Tomemos un subconjunto abierto V de X tal que $A = Y \cap V$. Demostraremos que $y \in V \subseteq Y$. Claramente $y \in V$. Por otro lado, notemos que

$$\mathrm{cl}_X(Y \cap V) \cap Y = (\mathrm{cl}_X A) \cap Y = \mathrm{cl}_Y A.$$

Como el conjunto $\mathrm{cl}_Y A$ es compacto, también lo es $\mathrm{cl}_X(Y \cap V) \cap Y$; y por ello, este conjunto es un subconjunto cerrado de X. Además, $\mathrm{cl}_X(Y \cap V) \cap Y$ contiene a $Y \cap V$. Por lo tanto

$$\mathrm{cl}_X(Y \cap V) \subseteq \mathrm{cl}_X(Y \cap V) \cap Y,$$

lo que significa que $\mathrm{cl}_X(Y \cap V) \subseteq Y$. Pero $\mathrm{cl}_X(Y) \cap V \subseteq \mathrm{cl}_X(Y \cap V)$, y como Y es denso en X tenemos además que $\mathrm{cl}_X(Y) = X$. Por lo cual obtenemos que $V \subseteq \mathrm{cl}_X(Y \cap V) \subseteq Y$

Con todo lo anterior podemos concluir que Y es abierto en X ya que el punto y fue elegido arbitrariamente. ⊠

En lo que sigue probaremos que la compacidad local es preservada por funciones continuas abiertas.

7.18. Proposición. *Si $f : X \to Y$ es una función continua abierta y sobreyectiva, y X es un espacio localmente compacto, entonces Y también es un espacio localmente compacto.*

Demostración. Sea $y \in Y$ arbitrario. Como f es sobreyectiva, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Dado que X es localmente compacto existe una vecindad compacta K de x en X. Consideremos ahora un abierto U de X tal que $x \in U \subseteq K$. Note ahora que $y \in f(U) \subseteq f(K)$, y que siendo f continua y abierta, el conjunto $f(K)$ y el conjunto $f(U)$ son compacto y abierto, respectivamente. Entonces $f(K)$ es una vecindad compacta de y en Y. ⊠

Con la proposición anterior es muy sencillo verificar que la compacidad local es un propiedad topológica.

Ahora veremos que los espacios localmente compactos Hausdorff son siempre espacios Tychonoff. Para ello utilizaremos algunas propiedades de la llamada compactación de Alexandroff de un espacio no compacto.

7.19. DEFINICIÓN. Sea X un espacio no compacto. La *compactación de Alexandroff* $A(X)$ (ó *compactación por un punto*) de X es el espacio $X \cup \{\infty\}$, donde ∞ es un punto que no pertenece a X, con la siguiente topología:

$$\mathcal{T} = \{\, U \subseteq X \cup \{\infty\} : U \cap X \text{ es abierto en } X \text{ y } U \subseteq X \\ \text{ó } X \setminus U \text{ es subespacio compacto de } X \,\}$$

Es fácil ver que $\mathcal{T}$ es efectivamente una topología en el conjunto $A(X)$ y que la topología que el conjunto X hereda de $A(X)$ coincide con su topología original. Además, el espacio $A(X)$ es un espacio compacto. Efectivamente, suponga que $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de $A(X)$. Sea $U_0 \in \mathcal{U}$ tal que $\infty \in U_0$. Por la definición de la topología de $A(X)$, $X \setminus U_0$ es compacto. Sean $U_1, \ldots, U_n \subseteq \mathcal{U}$ tales que $X \setminus U_0 \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n$ Entonces $\{U_0, \ldots, U_n\}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{U}$.

Note que el espacio de ordinales $[0, \omega_1]$ es la compactación de Alexandroff del espacio $[0, \omega_1)$ ya que $[0, \omega_1)$ es un subespacio de $[0, \omega_1]$ que no es compacto, y además si V es una vecindad abierta de ω_1 entonces ella contiene a un conjunto de la forma $(\alpha, \omega_1]$. Luego $[0, \omega_1] \setminus V$ es un subconjunto cerrado, y por ello compacto, de $[0, \alpha]$.

Una pregunta interesante es saber cuándo la compactación de Alexandroff de un espacio no compacto X es un espacio Hausdorff. Evidentemente, si X no es Hausdorff entonces $A(X)$ no puede ser un espacio Hausdorff, pero lo curioso es que cuando X es un espacio Hausdorff, el que $A(X)$ sea T_2, o no, depende de si X es localmente compacto.

7.20. PROPOSICIÓN. *Sea X un espacio Hausdorff no compacto. La compactación de Alexandroff $A(X)$ de X es un espacio de Hausdorff si y sólo si X es localmente compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Si $A(X) = X \cup \{\infty\}$ es de Hausdorff, entonces para todo $x \in X$ existen conjuntos U_x, V_x abiertos en $A(X)$ tales que $x \in U_x$, $\infty \in V_x$ y $U_x \cap V_x = \emptyset$. Por la definición de la topología de $A(X)$, el conjunto $X \setminus V_x$ es compacto; pero $x \in U_x \subseteq X \setminus V_x$ y U_x es abierto en X. Entonces $X \setminus V_x$ es una vecindad compacta de x en X.

Supongamos ahora que X es localmente compacto, y sean $x_1, x_2 \in A(X)$. Si $x_1, x_2 \in X$, entonces existen conjuntos abiertos U_1, U_2 en X

tales que $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Por la definición de la topología de $A(X)$, los conjuntos U_1, U_2 también son abiertos en $A(X)$.

Si $x_1 \in X$ y $x_2 = \infty$, elijamos una vecindad abierta U de x_1 cuya cerradura $\mathrm{cl}(U)$ en X es compacta, y sea $V = A(X) \setminus \mathrm{cl}(U)$. Entonces $U \cap V = \emptyset$, $x_1 \in U$, $x_2 = \infty \in V$, y U y V son abiertos en $A(X)$. ⊠

Un espacio discreto infinito X es un ejemplo de un espacio no compacto que es localmente compacto. Para este tipo de espacios topológicos, la topología de su compactación de Alexandroff $A(X) = X \cup \{\infty\}$ puede ser descrita fácilmente (vea el ejercicio 1.B.(7)). Recuerde que en un espacio discreto, los únicos subconjuntos compactos son los subconjuntos finitos, por ello la topología de $A(X)$ es la siguiente: $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X) \cup \{U \cup \{\infty\} : U \subseteq X \text{ y } |X \setminus U| < \aleph_0\}$.

Estamos ya en posición de demostrar que todo espacio localmente compacto T_2 es completamente regular.

7.21. Corolario. *Todo espacio localmente compacto Hausdorff es un espacio de Tychonoff.*

Demostración. Si X es un espacio compacto, entonces X, siendo además Hausdorff, es un espacio T_4 y, por lo tanto, Tychonoff.

Si X no es compacto, entonces X es homeomorfo a un subespacio de su compactación de Alexandroff $A(X)$, la cual es un espacio compacto Hausdorff. En consecuencia X es Tychonoff siendo un subespacio del espacio normal, y por lo cual de Tychonoff, $A(X)$. ⊠

El último resultado de esta sección muestra el comportamiento de la compacidad local en los productos de Tychonoff.

7.22. Proposición. *Sea $\{X_j : j \in J\}$ una colección no vacía de espacios topológicos no vacíos. El espacio producto $\prod_{j \in J} X_j$ es un espacio localmente compacto si y sólo si*

(1) *el espacio X_j es localmente compacto para toda $j \in J$, y*
(2) *todos los espacios X_j son compactos con excepción quizas de un número finito de ellos.*

Demostración. $\Rightarrow$] Como cada proyección $\pi_j : \prod_{j \in J} X_j \to X_j$ es una función continua, abierta y sobreyectiva, la proposición 7.18 nos dice que cada espacio X_j es un espacio localmente compacto. Tomemos ahora un punto $x \in \prod_{j \in J} X_j$. Como $\prod_{j \in J} X_j$ es un espacio localmente compacto, existe una vecindad compacta W de x en $\prod_{j\in J} X_j$. Debido a que W es vecindad de x, existen $j_1, j_2, \ldots, j_n \in J$ tales que $x \in \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{j_i}^{-1}(U_{j_i}) \subseteq W$, donde cada U_{j_i} es un abierto en X_{j_i}. Entonces para cada $j \in J \setminus \{j_1, \ldots, j_n\}$ se tiene que $\pi_j(W) = X_j$. Ahora, siendo W compacto, X_j es compacto para todo $j \in J \setminus \{j_1, j_2, \ldots, j_n\}$. Lo cual demuestra (2).

$\Leftarrow$] Supongamos que para todo $j \in J \setminus F$ se tiene que X_j es un espacio compacto, donde $F \subseteq J$ es un subconjunto finito. Note que si F es vacío entonces el espacio $\prod_{j\in J} X_j$ es compacto, y en consecuencia, es localmente compacto. Supongamos entonces que $F \neq \emptyset$. Digamos que F es igual a $\{j_1, j_2, \ldots, j_n\}$. Para demostrar que $\prod_{j\in J} X_j$ es localmente compacto tomemos un punto $x \in \prod_{j\in J} X_j$. Elijamos ahora, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, una vecindad compacta K_{j_i} de $x(j_i)$ en X_{j_i}. Entonces el conjunto $U = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{j_i}^{-1}(K_{j_i})$ es una vecindad compacta de x en el espacio producto $\prod_{j\in J} X_j$. ⊠

Aplicando la anterior proposición podemos concluir que tanto $\mathbb{R}^n$ como $\mathbb{N}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) son espacios localmente compactos, pero no lo son los espacios $\mathbb{R}^\omega$ y $\mathbb{N}^\omega$.

4. Espacios topológicos numerablemente compactos y espacios Lindelöf

Hemos escogido analizar tanto la noción de espacio numerablemente compacto como la de espacio Lindelöf en la misma sección debido a que para la definición de estos dos tipos de espacios topológicos, la numerabilidad juega un papel muy importante.

7.23. Definición.

(1) Un espacio topológico X es un *espacio numerablemente compacto* si toda cubierta abierta numerable de X tiene una subcubierta finita.
(2) Se dice que un espacio topológico X es un *espacio Lindelöf* (o que *tiene la propiedad de Lindelöf*) si de toda cubierta abierta es posible extraer una subcubierta numerable.

7.24. Observaciones.

(1) De las definiciones resulta claro que cualquier espacio compacto es numerablemente compacto y Lindelöf.
(2) No es difícil verificar que todo espacio Lindelöf numerablemente compacto es un espacio compacto.

7.25. Ejemplos.

(1) Si X es un espacio discreto infinito, entonces X no es numerablemente compacto. Efectivamente, si N es un subconjunto numerable infinito de X, entonces la colección $\mathcal{U} = \{\{x\} : x \in N\} \cup \{X \setminus N\}$ es una cubierta numerable para X que no admite subcubiertas finitas.

    Por otro lado, note que si X es más que numerable entonces la familia $\mathcal{V} = \{\{x\} : x \in X\}$ es una cubierta abierta para X que no admite una subcubierta numerable. De esta manera si X es un espacio discreto de cardinalidad más que numerable, entonces X no es un espacio Lindelöf.
(2) Claramente cualquier espacio numerable es Lindelöf. De tal manera que cualquier espacio discreto numerable es un ejemplo de un espacio Lindelöf que no es numerablemente compacto.

La compactación de Alexandroff $A(X)$ de un espacio discreto más que numerable X es un espacio compacto Hausdorff. Note que X no es ni numerablemente compacto ni Lindelöf, pero $A(X)$ sí lo es. De todo esto podemos concluir que ni la propiedad de Lindelöf ni la compacidad numerable son propiedades hereditarias.

7.26. Observación. Con una argumentación semejante a la dada en la proposición 7.4 no es complicado demostrar que todo subespacio cerrado de un espacio numerablemente compacto (respectivamente, de un espacio Lindelöf) es un espacio numerablemente compacto (respectivamente, Lindelöf). Dejamos al lector la tarea de verificar esto.

7.27. Ejemplo. Los espacios que tienen todos sus subespacios Lindelöf se llaman *hereditariamente Lindelöf*. Todos los espacios segundo numerables son ejemplos de espacios hereditariamente Lindelöf. Para convencernos de esto es suficiente demostrar ellos son espacios Lindelöf puesto que el segundo axioma de numerabilidad se hereda a cualquier subespacio. Pero observe que esto último es una simple aplicación del inciso (1) del lema 6.24, puesto que si X es un espacio segundo numerable su peso es numerable, así que si $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X

por el lema 6.24 existe una subcolección $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$ tal que $\bigcup\mathcal{U} = \bigcup\mathcal{V}$ y $|\mathcal{V}| \leqslant w(X) \leqslant \aleph_0$.

Según lo anterior todos los espacios euclidianos $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) son espacios hereditariamente Lindelöf. Pero ninguno de estos espacios es numerablemente compacto porque, por ejemplo, la cubierta abierta $\mathcal{U} = \{B(\vec{0}, m) : m \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{R}^n$ no tiene subcubiertas finitas.

Otro ejemplo de espacio Lindelöf de especial relevancia es la línea de Sorgenfrey $\mathcal{L}_S = (\mathbb{R}, \mathcal{S})$. No obstante que este espacio no tiene propiedades muy fuertes, por ejemplo no satisface el segundo axioma de numerabilidad (veáse problema 3.F.(1)), él es Lindelöf (de hecho, es hereditariamente Lindelöf).

7.28. Ejemplo. Consideremos una colección $\mathcal{U}$ de subconjuntos abiertos de la línea de Sorgenfrey $\mathcal{L}_S$ tal que $\mathbb{R} = \bigcup\mathcal{U}$. Sin perdida de generalidad se puede suponer que los elementos de la familia $\mathcal{U}$ son abiertos básicos canónicos del espacio $\mathcal{L}_S$. Definamos $\mu = \{(a, b) : [a, b) \in \mathcal{U}\}$, y sea $Z = \bigcup\mu$.

Dado que el espacio usual de los números reales $\mathbb{R}$ es segundo-numerable, el subespacio Z de $\mathbb{R}$ es un espacio Lindelöf. Por lo tanto de la cubierta abierta μ de Z podemos extraer una subcubierta numerable η. Sea $\mathcal{G} = \{[a, b) : (a, b) \in \eta\}$.

Afirmación. El conjunto $\mathbb{R} \setminus \bigcup\mathcal{G}$ es a lo más numerable.

Demostración de la afirmación. Supongamos lo contrario, i.e., supongamos que $|\mathbb{R} \setminus \bigcup\mathcal{G}| > \aleph_0$. Dado que $\mathcal{U}$ es una cubierta de $\mathbb{R}$, para cada $x \in \mathbb{R}\setminus\bigcup\mathcal{G}$, podemos elegir un elemento $[a_x, b_x)$ en $\mathcal{U}$ de tal manera que $x \in [a_x, b_x)$. Obsérvese que $x = a_x$, para cada $x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup\mathcal{G}$. Ahora si x y y son elementos distintos de $\mathbb{R} \setminus \bigcup\mathcal{G}$, entonces los correspondientes intervalos abiertos (a_x, b_x) y (a_y, b_y) son ajenos. Veamos por qué sucede esto: supóngase que $x < y$ y que existe $z \in (a_x, b_x) \cap (a_y, b_y)$. Entonces $a_x = x < y < z < b_x$; de donde, $y \in \cup\mathcal{G}$, lo cual es una contradicción. Entonces la familia $\mathcal{C} = \{(a_x, b_x) : x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup\mathcal{G}\}$ es una familia de subconjuntos abiertos no vacíos del espacio $\mathbb{R}$ que son ajenos dos a dos, y cuya cardinalidad excede $\aleph_0$. Note ahora que esto último contradice la separabilidad de $\mathbb{R}$. Por lo tanto $|\mathbb{R} \setminus \bigcup\mathcal{G}| \leqslant \aleph_0$. ⊠

De todo lo anterior es ya fácil demostrar que $\mathcal{U}$ posee una subcubierta numerable. En consecuencia podemos decir que $\mathcal{L}_S$ es un espacio Lindelöf.

Observe que uno puede modificar la anterior demostración para probar que cualquier subespacio de la línea de Sorgendrey es un espacio Lindelöf, y con esto concluir que la línea de Sorgenfrey es en verdad un espacio hereditariamente Lindelöf. En el problema 7.D. inciso (2) se pide al lector escribir estos detalles.

A continuación mostramos la relación que hay entre la propiedad de Lindelöf y los axiomas de separación T_3 y T_4.

7.29. Proposición. *Si X es un espacio regular y Lindelöf entonces X es un espacio T_4.*

Demostración. Sean F_1 y F_2 subconjuntos cerrados ajenos de X. Para cada $x \in F_1$, existe por la regularidad del espacio X un conjunto abierto A_x que contiene a x y para el cual sucede que $\mathrm{cl}(A_x) \cap F_2 = \emptyset$. De la misma manera, para cada $y \in F_2$ existe un conjunto abierto B_y que contiene a y tal que $\mathrm{cl}(B_y) \cap F_1 = \emptyset$. Note ahora que las colecciones $\mathcal{C}_1 = \{A_x : x \in F_1\}$ y $\mathcal{C}_2 = \{B_y : y \in F_2\}$ son cubiertas abiertas de F_1 y F_2, respectivamente. Como F_1 y F_2 son espacios de Lindelöf (puesto que son subespacios cerrados de un espacio Lindelöf), existen subcolecciones numerables $\{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\}$ y $\{B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots\}$ de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, respectivamente, que cubren a F_1 y F_2. Consideremos ahora la siguiente colección de conjuntos abiertos.

$$\begin{array}{ll}
S_1 = A_1 & T_1 = B_1 \setminus \mathrm{cl}(S_1) \\
S_2 = A_2 \setminus \mathrm{cl}(T_1) & T_2 = B_2 \setminus \mathrm{cl}(S_1 \cup S_2) \\
S_3 = A_3 \setminus \mathrm{cl}(T_1 \cup T_2) & T_3 = B_3 \setminus \mathrm{cl}(S_1 \cup S_2 \cup S_3) \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

Dejamos al lector verificar que los conjuntos $S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ y $T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n$ son subconjuntos abiertos ajenos de X que contiene a F_1 y a F_2, respectivamente. ⊠

7.30. Corolario. *La Línea de Sorgenfrey es un espacio T_4.*

Dejamos como un ejercicio al lector la demostración de la siguiente proposición.

7.31. Proposición. *La imagen continua de cualquier espacio Lindelöf (respectivamente, numerablemente compacto) es un espacio Lindelöf (respectivamente, numerablemente compacto).*

En la siguiente proposición obtenemos una útil caracterización en la clase de los espacios T_1 de la compacidad numerable.

7.32. PROPOSICIÓN. *Sea X un espacio topológico T_1. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *X es numerablemente compacto.*
(2) *Cada subconjunto infinito de X tiene un punto de acumulación.*
(3) *Cada subconjunto numerable (infinito) de X tiene un punto de acumulación.*

DEMOSTRACIÓN. (1)$\Rightarrow$ (2). Supongamos que G es un subconjunto infinito de X que no tiene puntos de acumulación. Sea F un subconjunto numerable infinito de G. Como G no tiene puntos de acumulación, tampoco los tiene F. En consecuencia, F es un subconjunto cerrado de X, y además, para cada $x \in F$ existe una vecindad abierta V_x de x tal que $V_x \cap F = \{x\}$. Resulta ahora que la colección $\mathcal{U} = \{V_x : x \in F\} \cup \{X \setminus F\}$ es una cubierta abierta numerable de X que no tiene subcubiertas finitas. Por lo tanto X no es numerablemente compacto.

(2) $\Rightarrow$ (3). Trivialmente (2) implica (3).

(3) $\Rightarrow$ (1). Supongamos que X no es numerablemente compacto. Entonces existe $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ cubierta abierta numerable de X que no tiene subcubiertas finitas.

Elijamos $x_1 \in X$ y un elemento $U_{n_1} \in \mathcal{U}$ tal que $x_1 \in U_{n_1}$. Por nuestra hipótesis sobre la cubierta $\mathcal{U}$, $X \setminus \bigcup_{i=1}^{n_1} U_i \neq \emptyset$. Elijamos un elemento $x_2 \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n_1} U_i$. Como $\mathcal{U}$ es cubierta de X, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $x_2 \in U_{n_2}$ (note que $n_1 < n_2$). Supongamos que hemos construido $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ y $x_1, \dots, x_k \in X$ tales que $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$, $x_1 \in U_{n_1}$ y $x_j \in U_{n_j} \setminus \bigcup_{i=1}^{n_{j-1}} U_i$ para cada $j \in \{2, \dots, k\}$. Como $\bigcup_{i=1}^{n_k} U_i$ no es igual a X, existen $x_{n_{k+1}} \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n_k} U_i$ y $n_{k+1} \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2, \dots, n_k\}$ tales que $x_{n_{k+1}} \in U_{n_{k+1}}$. De esta manera hemos construido recursivamente al punto $x_{k+1} \in U_{n_{k+1}} \setminus \bigcup_{i=1}^{n_k} U_i$.

El anterior proceso recursivo nos permite definir un conjunto infinito $F = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ y una sucesión $\{U_k : k \in \mathbb{N}\}$ de elementos de $\mathcal{U}$. Probaremos ahora que el conjunto F no tiene puntos de acumulación en X. En efecto, para cada $x \in X$ existe una $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in U_n$ y U_n contiene a lo más una colección finita G de puntos de F. Así, $(U_n \setminus G) \cup \{x\}$ es una vecindad de x que no tiene puntos de F, a excepción posiblemente de x. ⊠

El espacio de ordinales $[0, \omega_1)$ es numerablemente compacto pues si $F \subseteq [0, \omega_1)$ es infinito y numerable, entonces el supremo de F pertenece a $[0, \omega_1)$ y es un punto de acumulación de F. Observe que $[0, \omega_1)$ no es Lindelöf pues la colección de abiertos $\{[0, \alpha) : \alpha < \omega_1\}$ no tiene subcubierta numerable.

7.33. Proposición.

(1) *En un espacio metrizable, la separabilidad, el segundo axioma de numerabilidad, y la propiedad de Lindelöf son equivalentes.*
(2) *En un espacio metrizable, compacidad y compacidad numerable son propiedades equivalentes.*

Demostración. (1) Si D es un subconjunto denso numerable de un espacio metrizable X es muy fácil probar que la colección

$$\mathcal{B} = \{B(d, \tfrac{1}{n}) : d \in D, n \in \mathbb{N}\}$$

es una base numerable para X.

Por otro lado, el resultado en el ejemplo 7.27 muestra que todo espacio segundo numerable tiene la propiedad de Lindelöf. Así que para probar la equivalencia entre estas tres propiedades, bastará demostrar que cualquier espacio metrizable Lindelöf es un espacio separable.

Para ello suponga que X es un espacio metrizable Lindelöf. Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo y considere la cubierta abierta $\mathcal{U}_n = \{B(x, \frac{1}{n}) : x \in X\}$. Como X es un espacio Lindelöf, para la cubierta $\mathcal{U}_n$ podemos considerar una subcubierta $\mathcal{V}_n = \{B(d, \frac{1}{n}) : d \in D_n\}$ donde D_n es un subconjunto numerable de X. Sea $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$. Claramente D es numerable. Para finalizar probaremos que D es un subconjunto denso de X. En efecto, si que U un subconjunto abierto no vacío de X entonces existen $x \in U$ y $r > 0$ tales que $B(x, r) \subseteq U$. Tomemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < r$. Como $\mathcal{V}_n$ cubre a X, existe $d \in D_n$ tal que $x \in B(d, \frac{1}{n})$. Entonces $d \in B(x, r)$. Por lo cual $\emptyset \neq D \cap B(x, r) \subseteq D \cap U$.

(2) Sólo tenemos que demostrar que cualquier espacio metrizable numerablemente compacto es compacto. Para ello consideremos un espacio metrizable X. Supongamos que X es numerablemente compacto y que d es una métrica para X que genera su topología. Por la proposición 7.32, sabemos que todo subconjunto infinito de X tiene un punto de acumulación en X. A partir de esto podemos demostrar la siguiente afirmación.

Afirmación. Para cada $\delta > 0$, existe un subconjunto finito $A_\delta \subseteq X$ tal que $X = \bigcup_{x \in A_\delta} B(x, \delta)$.

Demostración de la afirmación. Si la afirmación no es verdadera, entonces existen una $\delta > 0$ y un conjunto numerable infinito $F = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ tales que $d(x_n, x_m) \geqslant \delta$ para todos los índices $m, n \in \mathbb{N}$ diferentes.

Pero entonces F es un conjunto infinito sin puntos de acumulación en X. Lo cual no es posible puesto que X es numerablemente compacto. ⊠

Consideremos ahora a los conjuntos finitos $A_1, A_{\frac{1}{2}}, A_{\frac{1}{3}}, \ldots, A_{\frac{1}{n}}, \ldots$ y al conjunto $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{\frac{1}{n}}$. Claramente A es un conjunto numerable. Más aún, el conjunto A es un subconjunto denso de X. Efectivamente, es suficiente demostrar que para todo $x \in X$ y toda $\epsilon > 0$, $B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$. Tomemos un punto $x \in X$ y una $\epsilon > 0$ y consideremos una $n \in \mathbb{N}$ de tal manera que $\frac{1}{n} < \epsilon$. Por la elección del conjunto $A_{\frac{1}{n}}$, se tiene que

$$X = \bigcup_{x\in A_{\frac{1}{n}}} B(x, \tfrac{1}{n}).$$

Entonces existe $y \in A_{\frac{1}{n}}$ tal que $x \in B(y, \frac{1}{n})$. De esta manera tenemos que $d(x, y) < \frac{1}{n} < \epsilon$, es decir, $y \in A \cap B(x, \epsilon)$. Hemos probado así que A es denso en X.

Debido a que A es numerable, podemos concluir que X es un espacio separable. Por el inciso (1), tenemos que X es un espacio Lindelöf. Recuerde ahora que esta última propiedad combinada con la compacidad numerable implica la compacidad de X. ⊠

7.34. Ejemplos.

(1) Como consecuencia interesante de las proposiciones 7.31 y 7.33 resulta que cada función continua $f : [0, \omega_1) \to \mathbb{R}$ es constante a partir de algún número $\alpha_0 < \omega_1$. En efecto, para cada $\alpha < \omega_1$, el subespacio $X_\alpha = [\alpha, \omega_1)$ es numerablemente compacto. De hecho, $[\alpha, \omega_1)$ es homeomorfo a $[0, \omega_1)$. Por lo tanto, la colección $\{f[X_\alpha] : \alpha < \omega_1\}$ es una familia centrada de compactos contenidos en el compacto $f[X_0]$. Por lo tanto, $F = \bigcap_{\alpha<\omega_1} X_\alpha$ es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$. Si $r \in F$, entonces $f^{-1}[\{r\}]$ es un subconjunto cerrado y no acotado de $[0, \omega_1)$. Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$ tomemos el subconjunto cerrado

$$G_n = \{\lambda < \omega_1 : |f(\lambda) - r| \geqslant 1/n\}.$$

Tenemos que $G_n \cap F = \emptyset$. El ejercicio 2.E.(4) nos dice que cada G_n es acotado, digamos por α_n. Ahora es claro que si $\lambda > \alpha_0 = \sup\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$, entonces $f(\lambda) = r$.

(2) El producto Tychonoff de espacios de Lindelöf, no es necesariamente un espacio Lindelöf. Para convencernos de ello basta considerar la línea de Sorgenfrey y su cuadrado. El cuadrado de la línea de Sorgenfrey no es un espacio normal (véase el ejercicio 6.A.(6)), por lo cual no puede ser un espacio Lindelöf (veáse la proposición 7.29); pero ya sabemos que la línea de Sorgenfrey sí lo es.

(3) Para el caso de los espacios numerablemente compactos también es sabido que el producto de espacios numerablemente compactos no es necesariamente un espacio numerablemente compacto lo cual puede consultarse en [26, pag. 208].

5. Compactaciones

Un problema clásico en topología está relacionado con la necesidad de extender un espacio topológico dado a un espacio con propiedades deseadas y ventajosas como la compacidad. En esta sección y en la siguiente trataremos este tema.

7.35. Definición. Sea X un espacio topológico. Una pareja (h, K) se llama *compactación* de X si K es un espacio compacto y $h : X \to K$ es un encaje topológico tal que $h[X]$ es un subespacio denso en K. Una compactación (h, K) de X es una compactación T_2 si el espacio compacto K es Hausdorff.

Es claro que todo espacio compacto X es una compactación de sí mismo. Por otro lado, en el ejercicio 1.B.(7) y en la definición 7.19 ya hablamos de la compactación de Alexandroff $A(X)$ de un espacio no compacto X. La pareja $(i, A(X))$, en donde i es la función inclusión, es un ejemplo de una compactación de X según la definición anterior. En particular $(i, [0, \omega_1])$ es la compactación por un punto del espacio de ordinales $[0, \omega_1)$.

En el caso particular de la recta real $\mathbb{R}$ con la topología usual, la pareja $(k, [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$ en donde $k : \mathbb{R} \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ está definida por

$$k(x) = \arctan(x)$$

es una compactación de $\mathbb{R}$ tal que el residuo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus k[\mathbb{R}]$ tiene exactamente dos puntos: $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$ (véase la figura 35).

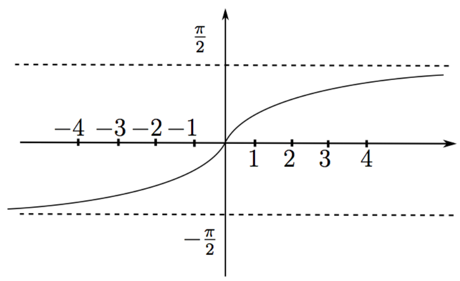

Figura 35. Gráfica de la función arcotangente.

Podemos notar, a partir de los anteriores ejemplos, que todo espacio topológico no compacto siempre tiene por lo menos una compactación, su compactación de Alexandroff, pero dichas compactaciones pueden no tener propiedades de separación fuertes. De hecho si el espacio no es Hausdorff, entonces no puede tener compactaciones T_2.

Así que vale la pena preguntarnos cuáles espacios topológicos tienen una compactación T_2. El siguiente teorema contesta esta pregunta.

7.36. Teorema. *Un espacio X tiene una compactación T_2 si y sólo si X es de Tychonoff.*

Demostración. Si X tiene una compactación T_2, entonces X es homeomorfo a un subespacio de un espacio compacto Hausdorff K. Todo espacio compacto T_2 es un espacio Tychonoff. Además, todo subespacio de un espacio de Tychonoff tiene también esta propiedad. Concluimos que X debe ser un espacio Tychonoff.

Para el recíproco, supongamos que X es Tychonoff, entonces, por el teorema de encaje de Tychonoff, marcado con el número 6.23, existe un encaje topológico $i : X \to [0,1]^{C(X,[0,1])}$. Por el teorema de Tychonoff sobre los productos de espacios compactos (ver 7.10), la potencia $[0,1]^{C(X,[0,1])}$ es compacta. Sea K la cerradura de $i[X]$ en $[0,1]^{C(X,[0,1])}$. La pareja (i, K) es una compactación T_2 de X. $\boxtimes$

De hecho sucede que para los espacios Tychonoff se puede hallar una compactación Hausdorff que tenga su mismo peso.

7.37. COROLARIO. *Todo espacio de Tychonoff X tiene una compactación Hausdorff (h, K) tal que $w(K) = w(X)$.*

DEMOSTRACIÓN. Hemos visto en el ejercicio 7.C.5 que cuando X es Tychonoff, la colección $\mathcal{C}$ de todos los abiertos conulos en X forman una base para la topología de X. Gracias al ejercicio 4.C.1.c podemos asegurar que existe una subcolección $\mathcal{B}$ de $\mathcal{C}$ cuya cardinalidad es igual a $w(X)$ y que aún es base de X. Cada $C \in \mathcal{C}$ está definido por una función continua $f_C : X \to [0, 1]$ de la siguiente manera: $C = f_C^{-1}[(0, 1]]$. La colección $\{f_C : C \in \mathcal{C}\}$ separa puntos de cerrados de X. Por lo tanto, la función diagonal $F = \Delta_{C \in \mathcal{C}} f_C$ es un encaje de X en $[0, 1]^{w(X)}$ (lema 6.22). Resulta ahora que $K = \text{cl}(F[X])$ es una compactación de X de peso $\leqslant w(X)$. Podemos ahora concluir que $w(K) = w(X)$ ya que el peso es una función monótona. ⊠

Ahora introduciremos una forma de relacionar a las compactaciones de un espacio topológico. La idea es preparar el camino para introducir la compactación Hausdorff máxima.

7.38. DEFINICIÓN. Sean (h_1, K_1), (h_2, K_2) dos compactaciones de un espacio X. Se escribe $(h_1, K_1) \preccurlyeq (h_2, K_2)$ si existe una función continua $p : K_2 \to K_1$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h_2"] \arrow[dr, "h_1"'] & K_2 \arrow[d, "p"] \\ & K_1 \end{tikzcd}$$

es conmutativo; es decir $p \circ h_2 = h_1$.

Las compactaciones (h_1, K_1) y (h_2, K_2) de X se llaman *equivalentes* si existe un homeomorfismo $p : K_2 \to K_1$ tal que $p \circ h_2 = h_1$.

7.39. EJEMPLO. Si X es un espacio localmente compacto T_2 y la pareja $(i, A(X))$ es su compactación por un punto, entonces $(i, A(X)) \preceq (h, K)$ para cualquier otra compactación (h, K) de X. Para demostralo, consideremos la función $p : K \to A(X)$ dada por

$$p(k) = \begin{cases} i(x) & \text{si } k = h(x) \text{ para alguna } x \in X \\ \infty & \text{si } k \in K \setminus h[X]. \end{cases}$$

Observe que $p \circ h = i$.

Veamos ahora que p es continua. Eligamos primero $y \in h[X]$. Existe $x \in X$ tal que $y = h(x)$ y $p(y) = ph(x)$. Sea V un abierto que contiene a $p(y)$. Como X es localmente compacto, $i[X]$ es abierto en $A(X)$ (véase la proposición 7.17). Por lo tanto, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $V \subseteq i[X]$. Tenemos que $W = (h \circ i^{-1})[V]$ es un subconjunto abierto de $h[X]$. Aplicando una vez más la Proposición 7.17, obtenemos que $h[X]$ es un subconjunto abierto de K, lo que implica que W es abierto en K, y es claro que $p[W] \subseteq V$. Con esto hemos demostrado que p es continua en $y = h(x)$.

Ahora tomemos $y \in K \setminus h[X]$. Tenemos que $p(y) = \infty$. Sea V una vecindad abierta de ∞. Resulta que $M = A(X) \setminus V$ es un subconjunto compacto de $i[X]$. Por lo tanto $(h \circ i^{-1})[M] = P$ es un subconjunto compacto de $h[X]$. El conjunto $K \setminus P$ es un conjunto abierto que contiene a y y $p[K \setminus P] \subseteq V$. Con esto concluimos que p es una función continua.

Como además el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "i"'] & K \arrow[d, "p"] \\ & A(X) \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces $(i, A(X)) \preceq (h, K)$.

Por otro lado, (h, S^1) en donde $h : \mathbb{R} \to S^1$ es la función

$$h(x) = e^{i(2k(x)+\pi)},$$

es una compactación de $\mathbb{R}$ equivalente a su compactación por un punto $A(\mathbb{R})$.

7.40. Observación. Si (h, K) es una compactación de X, es común identificar a X con el subespacio $h[X]$ de K puesto que h es un homeomorfismo de X sobre $h[X]$. Con esta identificación siempre podemos considerar a X como un subespacio denso de cualquiera de sus compactaciones.

Teniendo esta convención en mente, la relación $K_1 \preccurlyeq K_2$ significa que existe una función continua $p : K_2 \to K_1$ tal que $p \upharpoonright X = \mathrm{id}_X$.

Por otro lado, es fácil verificar que la relación $\preccurlyeq$ es transitiva y reflexiva. La siguiente proposición nos muestra otra interesante propiedad de esta relación.

7.41. Proposición. *Si K_1 y K_2 son dos compactaciones Hausdorff de un espacio X tales que $K_1 \preccurlyeq K_2$ y $K_2 \preccurlyeq K_1$, entonces K_1 y K_2 son equivalentes.*

Demostración. Sean $p_1 : K_2 \to K_1$ y $p_2 : K_1 \to K_2$ funciones continuas tales que $p_1 \restriction X = \mathrm{id}_X$ y $p_2 \restriction X = \mathrm{id}_X$. Entonces $p_1 \circ p_2 : K_1 \to K_1$ es continua, y $(p_1 \circ p_2) \restriction X = \mathrm{id}_X$. Ahora tenemos dos funciones continuas de K_1 a K_1, $p_1 \circ p_2$ y id_{K_1}, cuyas restricciones a X son iguales. Por la densidad de X en K_1, $p_1 \circ p_2 = \mathrm{id}_{K_1}$. Un argumento simétrico muestra que $p_2 \circ p_1 = \mathrm{id}_{K_2}$. De esto se desprende que $p_1 = p_2^{-1}$, y p_1 y p_2 son homeomorfismos. ⊠

Sea K una compactación de X. Denotaremos con

$$C(K \restriction X, [0,1]) = \{g \restriction X : g \in C(K, [0,1])\}$$

al conjunto de todas las restricciones a X de funciones continuas de K a $[0, 1]$.

Observe que por la densidad de X en su compactación K, la función de restricción $r : C(K, [0, 1]) \to C(K \restriction X, [0, 1])$, definida por $r(g) = g \restriction X$, es biyectiva.

7.42. Lema. *Sea K una compactación T_2 de X, y sea*

$$F = \Delta_{f \in C(K,[0,1])} f : K \to [0,1]^{C(K,[0,1])}$$

la función diagonal definida por la colección $C(K, [0, 1])$. Entonces

$$(F \restriction X, F[K])$$

es una compactación T_2 de X equivalente a K.

Demostración. Es obvio que el espacio $F[K]$ es compacto y T_2. Como K es un espacio de Tychonoff, la familia $C(K, [0, 1])$ separa puntos y genera la topología de K. De lo cual resulta que F es un encaje de K en $[0, 1]^{C(K,[0,1])}$, y entonces F es un homeomorfismo de K sobre $F[K]$. ⊠

7.43. Teorema. *Sean K_1 y K_2 dos compactaciones T_2 de X. Entonces $K_1 \preccurlyeq K_2$ si y sólo si $C(K_1 \restriction X, [0, 1]) \subseteq C(K_2 \restriction X, [0, 1])$.*

Demostración. Supongamos que $K_1 \preccurlyeq K_2$, y sea $p : K_2 \to K_1$ una función continua tal que $p \restriction X = \mathrm{id}_X$. Si $f \in C(K_1 \restriction X, [0, 1])$, entonces existe una extensión continua $f^* : K_1 \to [0,1]$ de f. Es fácil ver que

$$g^* = f^* \circ p : K_2 \to [0,1]$$

es una extensión continua de f a todo el espacio K_2, de donde $f \in C(K_2 \restriction X, [0,1])$.

Para demostrar la implicación contraria, suponga que K_1 y K_2 son dos compactaciones de X tales que

$$C(K_1 \restriction X, [0,1]) \subseteq C(K_2 \restriction X, [0,1]).$$

Sean

$$F_1 = \Delta_{f \in C(K_1,[0,1])} f : K_1 \to [0,1]^{C(K_1,[0,1])}$$

y

$$F_2 = \Delta_{g \in C(K_2,[0,1])} g : K_2 \to [0,1]^{C(K_2,[0,1])}$$

las funciones diagonales. Por el lema 7.42, las parejas $(F_1 \restriction X, F[K_1])$ y $(F_2 \restriction X, F_2[K_2])$ son compactaciones de X equivalentes a K_1 y K_2, respectivamente. Ahora es suficiente encontrar una función continua $p : F_2[K_2] \to F_1[K_1]$ tal que $p \circ (F_2 \restriction X) = F_1 \restriction X$.

Como las funciones de restricción

$$r_1 : C(K_1, [0,1]) \to C(K_1 \restriction X, [0,1])$$

y

$$r_2 : C(K_2, [0,1]) \to C(K_2 \restriction X, [0,1])$$

son biyecciones, podemos suponer que F_1 es un encaje de K_1 en el espacio $[0,1]^{C(K_1 \restriction X,[0,1])}$ y F_2 es un encaje de K_2 en $[0,1]^{C(K_2 \restriction X,[0,1])}$. Sea

$$\pi_{C(K_1 \restriction X,[0,1])} : [0,1]^{C(K_2 \restriction X,[0,1])} \to [0,1]^{C(K_1 \restriction X,[0,1])}$$

la proyección (que es continua, vea el ejercicio 4.C.(13)).

Definamos $p = \pi_{C(K_1 \restriction X,[0,1])} \restriction F_2[K_2]$. La función p es claramente continua y satisface que $p \circ (F_2 \restriction X) = F_1 \restriction X$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "F_2 \restriction X"] \arrow[dr] & & {[0,1]^{C(K_2 \restriction X,[0,1])}} \arrow[dd, "p = \pi_{C(K_1 \restriction X,[0,1])} \restriction F_2[K_2]"] \\
& {[0,1]^{C(K_1,[0,1])}} \arrow[dr, "F_1 \restriction X"'] & \\
& & {[0,1]^{C(K_1 \restriction X,[0,1])}}
\end{tikzcd}$$

Efectivamente, para todo $x \in X$ y $f \in C(K_1 \restriction X, [0,1])$ tenemos que

$$(p(F_1(x)))_f = (F_1(x))_f = f(x) = (F_2(x))_f,$$

de donde $p \circ (F_1 \restriction X) = F_2 \restriction X$. La función p es como se requería. ⊠

7.44. Corolario. *Sean K_1 y K_2 dos compactaciones T_2 de X. Si*

$$C(K_1 \restriction X, [0,1]) = C(K_2 \restriction X, [0,1]),$$

entonces K_1 y K_2 son equivalentes.

6. La compactación de Stone-Čech

En esta sección estudiaremos la compactación Hausdorff máxima de un espacio Tychonoff X. Es decir estudiaremos a la compactación de Stone-Čech de X.

7.45. Definición. Sean X un espacio de Tychonoff,

$$\beta = \Delta_{f \in C(X,[0,1])} f \ : X \to [0,1]^{C(X,[0,1])}$$

la función diagonal definida por la colección $C(X,[0,1])$, y βX la cerradura de $\beta[X]$ en $[0,1]^{C(X,[0,1])}$. La compactación $(\beta, \beta X)$ recibe el nombre de *compactación de Stone-Čech* de X.

Por el lema 6.22 sobre productos diagonales, β es un encaje de X en $[0,1]^{C(X,[0,1])}$, y la compactación de Stone-Čech es una compactación T_2 de X.

7.46. Teorema. *Para cualquier compactación Hausdorff (h, K) de X se cumple que $(h, K) \preccurlyeq (\beta, \beta X)$.*

Demostración. A causa del lema 7.42 podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que K es un subespacio de $[0,1]^{C(K,[0,1])}$. Consideremos la función

$$H : [0,1]^{C(X,[0,1])} \to [0,1]^{C(K,[0,1])}$$

definida por

$$H(\xi)(g) = \xi(g \circ h),$$

donde $g \in C(K,[0,1])$ y $\xi \in [0,1]^{C(X,[0,1])}$ (véase el siguiente diagrama).

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "h"'] & \beta X & \subseteq & {[0,1]^{C(X,[0,1])}} \arrow[d, "H"] \\ & K & \subseteq & {[0,1]^{C(K,[0,1])}} \end{tikzcd}$$

Note que si g es un elemento en $C(K,[0,1])$ y componemos la función H con la proyección $\pi_g : [0,1]^{C(K,[0,1])} \to [0,1]$ obtenemos la proyección $\pi_{g\circ h} : [0,1]^{C(\beta X,[0,1])} \to [0,1]$ como se muestra en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} {[0,1]^{C(X,[0,1])}} \arrow[r, "H"] \arrow[dr, "\pi_{g\circ h}"'] & {[0,1]^{C(K,[0,1])}} \arrow[d, "\pi_g"] \\ & {[0,1]} \end{tikzcd}$$

La proposición 4.15 nos garantiza ahora la continuidad de H.

Consideremos la función continua $p = H \restriction \beta X : \beta X \to [0,1]^{c(K,[0,1])}$. Probaremos ahora que $p \circ \beta = h$. Para ello, elijamos $x \in X$ y $g \in C(K,[0,1])$, entonces tenemos que

$$(p\circ\beta)(x)(g) = p(\beta(x))(g) = H(\beta(x))(g) = \beta(x)(g\circ h) = (g\circ h)(x) = h(x)(g).$$

Como g es arbitrario, lo anterior significa que $(p\circ\beta)(x) = h(x)$ para toda $x \in X$. Entonces se satisface que $p\circ\beta = h$. En particular, $(H \restriction \beta X)[\beta X] = K$.

Con esto último hemos establecido la relación $(h,K) \preccurlyeq (\beta,\beta X)$. $\boxtimes$

Del teorema 7.46 se deduce que βX es una compactación máxima de X, en el sentido que $K \preccurlyeq \beta X$ para toda compactación Hausdorff K de X.

A continuación mostraremos algunas propiedades que caracterizan a la compactación de Stone-Čech.

7.47. Definición. Sean Y un espacio y X un subespacio de Y. Se dice que X está C^*-*encajado* en Y si toda función acotada continua $f : X \to \mathbb{R}$ tiene una extensión continua sobre todo el espacio Y.

7.48. Lema. *Para un espacio Tychonof X, toda función continua $f : X \to [0,1]$ tiene una extensión continua $f^* : \beta X \to [0,1]$.*

Demostración. Sea $f \in C(X,[0,1])$. Por la definición de β como el producto diagonal de $C(X,[0,1])$, tenemos que $f = \pi_f \circ \beta$ donde $\pi_f : [0,1]^{C(X,[0,1])} \to [0,1]$ es la proyección correspondiente al elemento f de $C(X,[0,1])$. Sea $f^* = \pi_f \restriction \beta X$. La función f^* es la extensión requerida. ⊠

7.49. Proposición. *Cualquier espacio Tychonoff X está C^*-encajado en su compactación de Stone-Čech βX.*

Demostración. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua acotada, y sea $C \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leqslant C$ para todo $x \in X$. Sea $g : X \to [0,1]$ definida por
$$g(x) = \frac{f(x)+C}{2C}, \qquad x \in X.$$
Entonces $g \in C(X,[0,1])$, y por el lema 7.48, g tiene una extensión continua $g^* : \beta X \to [0,1]$. La función
$$f^*(x) = 2Cg^*(x) - C, \qquad x \in \beta X$$
es una extensión continua de f. ⊠

Del corolario 7.44 se deduce la siguiente caracterización de βX.

7.50. Teorema. *Si K es una compactación T_2 de X tal que X está C^*-encajado en K, entonces K es equivalente a βX.*

7.51. Teorema. *Sean X un espacio Tychonoff y K un espacio compacto Hausdorff. Entonces toda función continua $f : X \to K$ tiene una extensión continua $f^* : \beta X \to K$.*

Demostración. Sea $\beta : X \to \beta X$ el encaje de X en βX, y sea
$$g = f \Delta \beta : X \to K \times \beta X.$$
Es claro que la familia $\{f, \beta\}$ distingue puntos de subconjuntos cerrados de X; de donde g es un encaje de X en el espacio compacto $K \times \beta X$. Sea Y la cerradura de $g[X]$ en $K \times \beta X$. La pareja (g, Y) es una compactación T_2 de X. Por el teorema 7.46, existe una extensión continua $g^* : \beta X \to$

Y de g. Sea $\pi_K : K \times \beta X \to K$ la proyección al segundo factor. La función $f^* = \pi_K \restriction Y \circ g^*$ es una extensión continua de f. ⊠

7.52. Ejemplos.

(1) El intervalo cerrado $[0, 1]$ no es la compactación de Stone-Čech del intervalo $(0, 1)$ ya que la función continua $x \to \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ definida en $(0, 1)$, no tiene una extensión continua sobre $[0, 1]$.

(2) El espacio de ordinales $[0, \omega_1]$ es la compactación de Stone-Čech de $[0, \omega_1)$. En efecto, si $f : [0, \omega_1) \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces existe $\alpha_0 < \omega_1$ y $r \in \mathbb{R}$ tal que $f(\lambda) = r$ para todo $\lambda > \alpha_0$ (ejemplo 7.34.1). Por lo tanto, la función $g : [0, \omega_1] \to \mathbb{R}$ definida por $g(\lambda) = f(\lambda)$ para cualquier $\lambda < \omega_1$ y $g(\omega_1) = r$, es una extensión continua de f a todo $[0, \omega_1]$. Esto significa que $\beta[0, \omega_1) = [0, \omega_1]$ (proposición 7.50).

Ejercicios

7.A. Espacios compactos

(1) (*Puntos de acumulación completa*). Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Un punto $x \in X$ es un *punto de acumulación completa* de A si para toda vecindad U de x, se tiene que $|U \cap A| = |A|$.

Demuestre que un espacio topológico X es compacto si y sólo si todo conjunto infinito en X tiene un punto de acumulación completa.

(Sugerencia: Suponga que X es compacto. Si $A \subseteq X$ es infinito y no tiene puntos de acumulación completa, entonces para todo punto $x \in X$ existe una vecindad abierta U_x tal que $|U_x \cap A| < |A|$. Considere ahora a la cubierta $\mathcal{U} = \{U_x : x \in X\}$.)

(2) Sea X un espacio y Y un subespacio de X. Pruebe que un subconjunto K de Y es compacto si y sólo si K es un subconjunto compacto de X.

(3) Demuestre que el cuadrado lexicográfico y el duplicado de Alexandroff de cualquier espacio son espacios compactos.

(4) La suma topológica libre $\bigoplus_{j\in J} X_j$ es un espacio compacto (respectivamente, numerablemente compacto) si y sólo si cada X_j es compacto (respectivamente, numerablemente compacto) y $|J| < \aleph_0$.

(5) Sea X un espacio topológico y supongamos que $\mathcal{F}$ es una base para los subconjuntos cerrados de X (véase el ejercicio 1.D.(5)). Entonces, X es compacto si y sólo si cada subcolección $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$ que posee la propiedad de la intersección finita satisface $\bigcap_{G\in\mathcal{G}} G \neq \emptyset$. (Sugerencia: use la proposición 7.3).

(6) (*El conjunto ternario de Cantor.*) A cada elemento $x \in \mathbf{C}$ le asignamos una única representación ternaria $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$: Si x tiene dos de estas representaciones, elegimos sólo aquella que termina en una cola de 1. Consideremos ahora el espacio producto 2^ω, en donde 2 es el espacio discreto $\{0, 1\}$; es decir, 2^ω es el cubo de Cantor de peso numerable (véanse los ejemplos 4.16 inciso (1), 7.11 y el ejercicio 4.C.(9)). Sea $\phi : \mathbf{C} \to 2^\omega$ definida por $x \to (x_1, x_2, ...)$. Demuestre que ϕ es un homeomorfismo.

(7) Demuestre el siguiente resultado:

Teorema de Baire para espacios compactos.

Sea X un espacio compacto. Si $\{ A_n : n \in \mathbb{N} \}$ es una sucesión de conjuntos densos en ninguna parte de X, entonces $X \setminus \bigcup\{ A_n : n \in \mathbb{N} \}$ es un subconjunto denso de X.

Sugerencia: Sea G un abierto no vacío de X. Construya una sucesión $\{ U_n : n \in \mathbb{N} \}$ de conjuntos abiertos no vacíos en X tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\text{cl}(U_{n+1}) \subseteq U_n$ y $U_n \cap A_n = \emptyset$ y $U_1 \subseteq \text{cl}\, U_1 \subseteq G$. Use el hecho de que A_n es denso en ninguna parte de X y la regularidad de X para construir la sucesión de las U_n.

Ahora observe que la familia $\mathcal{F} = \{ \text{cl}(U_n) : n \in \mathbb{N} \}$ es una sucesión decreciente de conjuntos cerrados y no vacíos en el compacto X.

Lo anterior muestra que todo espacio compacto es un espacio de Baire. (cf. problema 2.H.(2).).

(8) (*Topología de Vietoris*).
   (a) Para un espacio X, denotemos con $\mathcal{K}(X)$ a la colección de subconjuntos compactos no vacíos contenidos en X. Equipemos a $\mathcal{K}(X)$ con su topología de Vietoris definida en 1.G.(4). Pruebe que las siguientes afirmaciones son ciertas:
      (i) $\mathcal{K}(X)$ es primero numerable si y sólo si X es primero numerable.
      (ii) $\mathcal{K}(X)$ es segundo numerable si y sólo si X es segundo numerable.

(b) Si X es metrizable y compacto, demuestre que la topología de Vietoris en $\mathcal{K}(X)$ coincide con la topología en $\mathcal{K}(X)$ generada por la métrica de Hausdorff definida en el ejercicio 1.G.(5).

7.B. Producto de espacios compactos

(1) (*Otra demostración del Teorema de Tychonoff*) En este ejercicio esbozaremos una demostración del Teorema de Tychonoff que en el fondo es equivalente a la dada en la sección 2.

(a) Sea $\mathcal{P}$ una cadena formada por familias de subconjuntos de un espacio X que tienen la propiedad de la intersección finita. Compruebe que la familia $\bigcup \mathcal{P}$ tiene también la propiedad de intersección finita.

(b) Corrobore que toda familia de subconjuntos de un espacio X con la propiedad de la intersección finita está contenida en una familia maximal con la propiedad de la intersección finita. (Sugerencia: Utilice el resultado anterior y el Lema de Kuratowski-Zorn.)

(c) Sea $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos de un espacio X que tiene la propiedad de la intersección finita y que es maximal con respecto a esta propiedad. Supongamos que $A \subseteq X$ es tal que $A \cap F \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$. Demuestre entonces que $A \in \mathcal{F}$.

(d) Pruebe que si $\mathcal{F}$ es una familia maximal de subconjuntos de un espacio X con la propiedad de la intersección finita. Entonces para cada $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$, se tiene que $F_1 \cap \cdots \cap F_n \in \mathcal{F}$.

(e) *(Teorema de Tychonoff)* Demuestre que si los elementos de una familia $\{X_j : j \in J\}$ de espacios son compactos, entonces el producto de Tychonoff $X = \prod_{j \in J} X_j$ es un espacio compacto. (Sugerencia: Tome una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de la intersección finita, y sea $\mathcal{F}_0$ una familia maximal con la propiedad de la intersección finita tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_0$. Definamos $\overline{\mathcal{F}}_0 = \{\, \mathrm{cl}(F) : F \in \mathcal{F}_0 \,\}$. Es claro que $\mathcal{F} \subseteq \overline{\mathcal{F}}_0$. Pruebe que $\bigcap \overline{\mathcal{F}}_0 \neq \emptyset$. Para ello note que, para todo $j \in J$, se tiene que $\overline{\mathcal{F}}_j = \{\, \mathrm{cl}(\pi_j(F)) : F \in \mathcal{F}_0 \,\}$ es una familia de conjuntos cerrados en X_j con la propiedad de la intersección finita. Ahora aplique la compacidad de cada X_j y los resultados proclamados en los ejercicios inmediatos anteriores.)

(2) (*Filtros en productos*).

(a) Sea $\{X_j : j \in J\}$ una familia de espacios no vacíos. Para cada $j \in J$, sea $\mathcal{C}_j$ una base de filtro en X_j. Sea κ un número cardinal $\leqslant |J|$. Pruebe que la coleccion $\mathcal{C}$ formada por todos los conjuntos de la forma

$$\bigcap_{j \in M} \pi_j^{-1}[C_j]$$

en donde $M \subseteq J$, $|M| \leqslant \kappa$ y $C_j \in \mathcal{C}_j$ para cada $j \in M$, es una base de filtro en $X = \prod_{j \in J} X_j$.

(b) Compruebe que si $\mathcal{C}$ es una base de filtro (respectivamente, un filtro, un ultrafiltro) en el producto $X = \prod_{j\in J} X_j$, y si $M \subseteq J$, entonces $\pi_M[\mathcal{C}] = \{\pi_M[C] : C \in \mathcal{C}\}$ es una base de filtro (respectivamente, un filtro, un ultrafiltro) en $\prod_{j\in M} X_j$.

(c) Sea x_j un punto límite (resp., punto de acumulación) de una base de filtro $\mathcal{C}_j$ en X_j para cada $j \in J$. Demuestre que el punto $(x_j)_{j\in J}$ en $X = \prod_{j\in J} X_j$ es un punto límite (resp., punto de acumulación) de la base de filtro $\mathcal{C}$ definida en (1).

(d) Sea M un subconjunto de J. Si $f \in X = \prod_{j\in J} X_j$ es un punto límite (resp., de acumulación) de una base de filtro $\mathcal{C}$ en X, entonces $\pi_M(f)$ es un punto límite (resp., de acumulación) de la base de filtro $\pi_M[\mathcal{C}]$.

7.C. Espacios localmente compactos

(1) Demuestre las siguientes afirmaciones.

(a) Sean Y un espacio de Hausdorff y X un subespacio denso de Y. Si X es localmente compacto, entonces X es abierto en Y. (Sugerencia: Use la proposición 2.33).

(b) Si Y es un espacio de Hausdorff, y X es un subespacio localmente compacto de X, entonces X es abierto en $\text{cl}_Y(X)$.

(c) Si X es localmente compacto Hausdorff, entonces X es abierto en βX.

(d) Sean Y un espacio compacto y X un subespacio abierto. Entonces X es localmente compacto.
(Sugerencia: Sea $x \in X$. Por la regularidad de Y, existe una vecindad abierta U de x en Y tal que $\text{cl}_Y(U) \subseteq X$. El conjunto $\text{cl}_Y(U)$ es compacto como un conjunto cerrado en el espacio compacto Y, y $\text{cl}_X(U) = \text{cl}_Y(U) \cap X$. Entonces U es una vecindad de x cuya cerradura en X es compacta.)

(2) Pruebe que la suma topológica libre de espacios localmente compactos también posee esta propiedad.

(3) Verifique que cualquier espacio de ordinales $[0, \alpha)$ es localmente compacto.

(4) El erizo metrizable definido en el ejercicio 1.A.(4) es un espacio localmente compacto. En cambio, el erizo no metrizable del ejemplo 4.35 no es localmente compacto.

(5) El producto caja de una familia no numerable de espacios con más de un punto no es un espacio localmente compacto.

(6) (*Teorema de categoría de Baire para espacios localmente compactos*).

Teorema de Baire para espacios localmente compactos. Todo espacio Hausdorff localmente compacto es un espacio de Baire.

Sugerencia: Observe que cada subespacio abierto y denso en X es también abierto y denso en βX.

7.D. Espacios numerablemente compactos y espacios Lindelöf

(1) Corrobore que cualquier subconjunto cerrado de un espacio de Lindelöf conserva esta propiedad.

(2) (*Espacios hereditariamente de Lindelöf*)
   (a) Demuestre que la línea de Sorgenfrey es un espacio hereditariamente Lindelöf.
   (Sugerencia: Intente adaptar la prueba dada en el ejemplo 7.28).
   (b) Sea X un espacio cuya topología está generada por una métrica. Verifique que las condiciones siguientes son equivalentes.
      (i) X es segundo numerable.
      (ii) X es hereditariamente separable.
      (iii) X es separable.
      (iv) X es hereditariamente de Lindelöf.
      (v) X es de Lindelöf.

(3) (*Espacios σ-compactos*). Por un espacio *σ-compacto* entenderemos un espacio topológico que es la unión de una colección numerable de subespacios compactos.
   (a) Todo espacio compacto es, trivialmente, un espacio σ-compacto, y cada espacio euclideano $\mathbb{R}^n$ es σ-compacto.
   (b) Verifique que cada espacio σ-compacto es Lindelöf.
   (c) Proporcione un ejemplo de un espacio Lindelöf que no sea σ-compacto.
   (d) ¿Es σ-compacto cualquier espacio localmente compacto? ¿Es σ-compacto cualquier espacio numerablemente compacto?
   (e) Demuestre que un producto $\prod_{j\in J} X_j$ de espacios σ-compactos y no compactos es σ-compacto si y sólo si $|J| < \aleph_0$. En particular, $\mathbb{R}^\omega$ no es σ-compacto. ¿Es $\mathbb{R}^\omega$ un espacio de Lindelöf?

(4) (*Espacios Pseudocompactos*). Un espacio topológico X es *pseudocompacto* si cualquier función continua $f : X \to \mathbb{R}$ es acotada, es decir, $f[X]$ es un subconjunto de algún intervalo $[-m, m]$.
   (a) Verifique que $\mathbb{R}$ no es pseudocompacto y que la imagen continua de un espacio pseudocompacto satisface esta misma propiedad.
   (b) Pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes para cualquier subespacio X de $\mathbb{R}$:
      (i) X es compacto,
      (ii) X es numerablemente compacto,
      (iii) X es pseudocompacto.

(c) Demuestre que un espacio X es pseudocompacto si y sólo si $f[X]$ es un compacto para cualquier función continua f con valores reales y con dominio igual a X.
(d) Corrobore que cualquier espacio numerablemente compacto es pseudocompacto. En particular, el espacio de ordinales $[0,\omega_1)$ es pseudocompacto.
(e) Si X es normal y pseudocompacto, entonces X es numerablemente compacto.
(Sugerencia: Utilice el teorema de extensión de Tietze.)
(f) Demuestre que un espacio Tychonoff X es pseudocompacto si y sólo si cada colección de subconjuntos abiertos localmente finita (vea el ejercicio 6.C.(1)) es finita.
(Sugerencia: Necesidad: Suponga que X contiene una familia de abiertos $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$ localmente finita. Para cada $i \in \mathbb{N}$ elija un punto $x_i \in U_i$ y una función continua $f_i : X \to [0,i]$ tal que $f_i(x_i) = i$ y $f_i[X \setminus U_i] \subseteq \{0\}$. Demuestre que la función $f(x) = \Sigma_{i\in\mathbb{N}} f_i(x)$ es continua y no acotada.
Suficiencia: Sea $f : X \to \mathbb{R}$ continua. Pruebe que $\{f^{-1}[(i-1, i+1)] : i \in \mathbb{Z}\}$ es una colección localmente finita en X.)
(g) La pseudocompacidad en espacios Tychonoff es una propiedad que heredan los cerrados regulares pero no necesariamente los abiertos o los cerrados.

7.E. Compactaciones

(1) Demuestre que cualesquiera dos compactaciones Hausdorff de un espacio compacto T_2 son equivalentes. En particular, cualquier compactación T_2 de un espacio compacto Hausdorff X es equivalente a la compactación Hausdorff (id_X, X).
(2) Demuestre que si (h_j, K_j) es una compactación del espacio X_j para toda $i \in J$, entonces el producto $\prod_{j\in J} K_j$ es una compactación del producto $\prod_{j\in J} X_j$.
(3) Demuestre que cualesquiera dos compactaciones K_1 y K_2 del espacio discreto $D(\aleph_0)$ de cardinalidad $\aleph_0$ con la propiedad de que $|K_1 \setminus D(\aleph_0)| = |K_2 \setminus D(\aleph_0)| < \aleph_0$, son homeomorfas.

Dé un ejemplo de dos compactaciones no homeomorfas K_1 y K_2 del espacio discreto $D(\mathfrak{c})$ de cardinalidad $\mathfrak{c}$ con la propiedad de que $|K_1 \setminus D(\mathfrak{c})| = |K_2 \setminus D(\mathfrak{c})| = 2$.

7.F. La compactación de Stone-Čech

(1) (*z-filtros y z-ultrafiltros*) Sea X un espacio Tychonoff. Denotaremos por $\mathcal{Z}(X)$ a la colección de subconjuntos nulos de X (ver el ejercicio 6.C.(6)). Un *z-filtro* de X es una colección $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{Z}(X)$ tal que (a)

$\mathcal{F} \neq \emptyset$ y $\emptyset \notin \mathcal{F}$; si $A, B \in \mathcal{F}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$; y (c) si $A \in \mathcal{F}$, $A \subseteq B$ y $B \in \mathcal{Z}(X)$, entonces $B \in \mathcal{F}$.

Un z-filtro en X $\mathcal{F}$ es un *z-ultrafiltro* si no está contenido propiamente en ningún z-filtro de X; es decir, $\mathcal{F}$ es un z-ultrafiltro si es un z-filtro maximal.

Por el ejercicio 6.C.(6) sabemos que para cada Tychonoff X la colección $\mathcal{Z}(X)$ es una base para los subconjuntos cerrados de X.

Un punto $x \in X$ es *un punto de acumulación de un z-filtro* $\mathcal{F}$ si $x \in F$ para todo $F \in \mathcal{F}$, y $\mathcal{F}$ converge a x si cada vecindad nula de x pertenece a $\mathcal{F}$. Demuestre que:

(a) cada z-filtro en X está contenido en un z-ultrafiltro,

(b) si $\mathcal{F}$ es un z-ultrafiltro en X, $A, B \in \mathcal{Z}(X)$ y $A \cup B \in \mathcal{F}$, entonces o $A \in \mathcal{F}$ o $B \in \mathcal{F}$.

(c) Un z-filtro en X es *primo* si cada vez que suceda $A \cup B \in \mathcal{F}$ con $A, B \in \mathcal{Z}(X)$, se cumple que o $A \in \mathcal{F}$ o $B \in \mathcal{F}$. Pruebe que cada z-filtro primo está contenido en un único z-ultrafiltro.

(d) Si x y y son puntos de acumulación de un z-filtro primo $\mathcal{F}$, entonces $x = y$.

(e) Para un espacio Tychonoff X, las siguientes condiciones son equivalentes:

  (i) X es compacto;

  (ii) cualquier z-filtro en X tiene un punto de acumulación en X;

  (iii) cualquier z-ultrafiltro en X converge a un punto en X.

(2) (*Descripción de βX usando z-ultrafiltros*). Recordemos que para un espacio Tychonoff X, $\mathcal{Z}(X)$ es la colección de sus subconjuntos nulos. Denotemos por $B(X)$ al conjunto de z-ultrafiltros en X (véase el ejercicio 7.F.(1)). Para cada $Z \in \mathcal{Z}(X)$ definimos

$$Z^* = \{\mathcal{F} \in B(X) : Z \in \mathcal{F}\}.$$

(a) Para $A, B \in \mathcal{Z}(X)$ se cumple $A^* \cup B^* = (A \cup B)^*$. Además, $\emptyset^* = \emptyset$.

Definimos ahora una topología $\mathcal{T}^*$ en $B(X)$: $F \subseteq B(X)$ es cerrado si y sólo si F es la intersección de los elementos de una subcolección de $\mathcal{Z}^* = \{Z^* : Z \in \mathcal{Z}(X)\}$. Es decir, el inciso (1) nos garantiza que $\mathcal{Z}^*$ es base de los cerrados para una topología $\mathcal{T}^*$ en $B(X)$ (véase el ejercicio 2.F).

(b) Verifique que para cada $x \in X$, la colección $\mathcal{F}_x = \{Z \in \mathcal{Z}(X) : x \in Z\}$ es un z-ultrafiltro en X que converge a x.

(c) Pruebe que la aplicación $h : X \to B(X)$ definida por $h(x) = \mathcal{F}_x$ es un encaje.

(d) Por el inciso anterior, podemos suponer a X como subespacio de $B(X)$. Demuestre que para cada $Z \in \mathcal{Z}(X)$, $Z^* = cl_{B(X)}Z$. Concluya que, en particular, X es denso en $B(X)$.

(e) Para $A, B \in \mathcal{Z}(X)$,

$$cl_{B(X)}(A \cap B) = (cl_{B(X)}A) \cap (cl_{B(X)}B).$$

(f) $B(X)$ es un espacio de Hausdorff.

(g) $B(X)$ es un espacio compacto. (Sugerencia: aplique el ejercicio 7.A.(5) a la familia $\mathcal{Z}^*$).

(h) X está C^*-encajado en $B(X)$. (Sugerencia: Sea $f : X \to [0,1]$ una función continua. Vamos a definir una extención continua F de f a todo $B(X)$. Para cada $p \in B(X) \setminus X$ considere la colección $\mathcal{F} = \{Z \in \mathcal{Z}([0,1]) : f^{-1}[Z] \in p\}$. Demuestre que $\mathcal{F}$ es un z-filtro primo en $[0,1]$. Por lo tanto, $\mathcal{F}$ posee un sólo punto de acumulación q en $[0,1]$ (véase el inciso (c) del ejercicio 7.F.(1)). Definimos $F(p) = q$.)

(i) $B(X)$ es equivalente a la compactación de Stone-Čech de X. (Aplique el inciso anterior y el teorema 7.49).

(3) (*Espacios casi compactos*). A un espacio Tychonoff X se le llama *casi compacto* si $|\beta X \setminus X| \leqslant 1$. (Por lo dicho en el ejemplo 7.52 inciso (2), el espacio $[0, \omega_1)$ es casi compacto.)

(a) Demuestre que un espacio X es casi compacto si y sólo si de cada dos subconjuntos nulos de X ajenos uno de ellos debe ser compacto (Sugerencia: Use el inciso (e) del ejercicio 7.F.(2))

(b) Compruebe que todo casi-compacto es pseudocompacto.

(4) (*C^*-encajamientos de X y βX*). Consideremos un espacio Tychonof T. Supongamos que X es un subespacio en T, y sea $\mathcal{F}$ un z-filtro en X (véase 7.F.(1)). Diremos que un punto $y \in T$ es un *punto de acumulación* de $\mathcal{F}$ si $y \in cl_T Z$ para cada $Z \in \mathcal{F}$. Más aún, si cada vecindad V de y en T contiene un elemento de $\mathcal{F}$, entonces diremos que $\mathcal{F}$ converge a y (y y es un punto límite de $\mathcal{F}$). (Compare con las definición de punto de acumulación y convergencia dadas en las definiciones 3.55 y 3.54 y en el ejercicio 7.F.(1)).

(a) Si X es denso en T y si $y \in T$ es un punto de acumulación de un z-ultrafiltro $\mathcal{F}$ en X, entonces $\mathcal{F}$ converge a y.

(b) Si X es denso en T, demuestre que cada punto y en T es el límite de un z-ultrafiltro en X.

(c) Dado un punto $y \in T$ es posible encontrar más de dos z-ultrafiltros en X que convergen a y. En efecto, sea $T = A(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \cup \{p\}$ la compactación por un punto de los naturales. ($\mathbb{N}$ considerado con su topología discreta). Sea $\mathcal{U}_1$ un ultrafiltro en $X = \mathbb{N}$ que contiene a todos los subconjuntos F de $\mathbb{N}$ que tienen la propiedad de contener a todos los números impares con excepción de una colección finita de ellos. Sea $\mathcal{U}_2$ un ultrafiltro en $\mathbb{N}$ que contiene a todos los subconjuntos F de $\mathbb{N}$ con la propiedad de contener a todos los números pares con excepción de una colección finita de ellos. Observe que $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ son dos diferentes z-ultrafiltros en $\mathbb{N}$ (cada subconjunto de $\mathbb{N}$ es nulo en $\mathbb{N}$) que convergen a p.

(d) Con respecto al inciso anterior, observe que $\mathbb{N}$ no está C^*-encajado en $A(\mathbb{N})$.

(e) Demuestre que si X es denso y está C^*-encajado en T, entonces para cada y existe un único z-ultrafiltro en X que converge a y.

(f) Demuestre que si X está C^*-encajado y es denso en T, entonces existe un encaje $H : T \to \beta X$ que deja fijos los puntos de X (Para definir H use la descripción de βX dada en el ejercicio 7.F.(2)).

(g) Por el inciso anterior, si X está C^*-encajado en T, entonces X está C^*-encajado y es denso en $cl_{\beta T}X$. Demuestre entonces que βX es homeomorfo a $cl_{\beta T}X$.

(5) ($\beta\mathbb{N}$, $\beta\mathbb{Q}$ y $\beta\mathbb{R}$).

(a) Compruebe que $|\beta\mathbb{N}| \geqslant |\beta\mathbb{Q}|$ (Considere una función biyectiva de $\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{Q}$ y aplique el teorema 7.51).

(b) Demuestre que $|\beta\mathbb{Q}| \geqslant |\beta\mathbb{R}|$ (Considere la función inclusión de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ y aplique el teorema 7.51).

(c) Pruebe que $|\beta\mathbb{N}| = |\beta\mathbb{Q}| = |\beta\mathbb{R}|$. (Recuerde que $\mathbb{N}$ está C^*-encajado en $\mathbb{R}$ y use el inciso (g) del ejercicio 7.F.(4)).

(d) Demuestre que $|\beta\mathbb{N}| = 2^{\mathfrak{c}}$.
(Sugerencia: Observe que $|C(\mathbb{N}, [0,1])| = 2^{\omega}$ y use la definición 7.45 para obtener $|\beta\mathbb{N}| \leqslant 2^{\mathfrak{c}}$. Para obtener la otra desigualdad, use el Teorema de Hewitt-Marczewski-Pondiczeri (véase el ejercicio 4.C.10) para concluir que $[0,1]^{\mathfrak{c}}$ es separable. Así, si $f : \mathbb{N} \to D$ es una función biyectiva, en donde D es un subconjunto numerable y denso de $[0,1]^{\mathfrak{c}}$, podemos encontrar una extensión continua y suprayectiva $\widetilde{f} : \beta\mathbb{N} \to [0,1]^{\mathfrak{c}}$.)

Ejercicios adicionales del capítulo 7

7.G. Familias casi ajenas y espacios de Mrówka.

(1) Una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de $\mathbb{N}$ es *casi ajena* si cada elemento en $\mathcal{A}$ es infinito, y para cualesquiera dos elementos distintos $A, B \in \mathcal{A}$ se cumple que $|A \cap B| < \aleph_0$.

(a) Muestre una familia casi ajena en $\mathbb{N}$ de cardinalidad $\aleph_0$.
(b) Observe que la cardinalidad de cualquier familia casi ajena en $\mathbb{N}$ no excede al número $\mathfrak{c}$.
(c) Existe una familia casi ajena en $\mathbb{N}$ de cardinalidad $\mathfrak{c}$. (Sugerencia: Sea $h : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ una función biyectiva. Para cada número irracional r, fijemos una sucesión $s_r = (q^r_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de números racionales que converge a r y tal que cada par de elementos en s_r son diferentes. Sea $\mathcal{A} = \{h[\{q^r_m : m \in \mathbb{N}\}] : r \in \mathbb{P}\}$. La colección $\mathcal{A}$ satisface lo deseado.)
(d) Use el Lema de Zorn para demostrar que cada familia casi ajena $\mathcal{A}$ en $\mathbb{N}$ está contenida en una familia casi ajena $\mathcal{B}$ que es maximal; es decir, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ y si H es un subconjunto infinito de números naturales que no pertenece a $\mathcal{B}$, entonces, para algún $B \in \mathcal{B}$, $H \cap B$ es infinito.
(e) Pruebe que ninguna familia casi ajena numerable en $\mathbb{N}$ es maximal.

(2) (*Espacios de Mrówka*). Dada una familia casi ajena $\mathcal{A}$ en $\mathbb{N}$, podemos asociarle un espacio topológico $\Psi(\mathcal{A})$ como sigue: Para cada elemento $A \in \mathcal{A}$ tomamos un punto $e_A \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ de tal modo que $e_A \neq e_B$ si $A \neq B$. El conjunto base $\Psi(\mathcal{A})$ es igual a $\{e_A : A \in \mathcal{A}\} \cup \mathbb{N}$; y a cada $x \in \Psi(\mathcal{A})$ le asociamos una colección $\mathcal{V}(x)$ de subconjuntos de $\Psi(\mathcal{A})$ como sigue: si $x \in \mathbb{N}$, $\mathcal{V}(x) = \{\{x\}\}$, y si $x = e_A$ $\mathcal{V}(x) = \{\{e_A\} \cup D : D \subseteq A \text{ y } |A \setminus D| < \aleph_0\}$.
(a) Demuestre que las colecciones $\mathcal{V}(x)$, $x \in \Psi(\mathcal{A})$, satisfacen las condiciones de la proposición 1.30 y por lo tanto esta familia de colecciones define en $\Psi(\mathcal{A})$ una topología $\mathcal{T}$ en la cual cada $\mathcal{V}(x)$ es una base de vecindades de x, como se demuestra en 1.40. Al espacio topológico $(\Psi(\mathcal{A}), \mathcal{T})$ se le conoce como *espacio de Mrówka* definido por $\mathcal{A}$.
(b) Sea $\mathcal{A}$ una familia casi ajena en $\mathbb{N}$. Verifique que $\Psi(\mathcal{A})$ es un espacio T_2, primero numerable y localmente compacto. Además, si $\mathcal{A}$ es infinita, $\Psi(\mathcal{A})$ no es numerablemente compacto.
(c) Para una familia casi ajena $\mathcal{A}$ en $\mathbb{N}$ y cada $x \in \Psi(\mathcal{A})$, cualquier elemento en $\mathcal{V}(x)$ es abierto y cerrado en $\Psi(\mathcal{A})$. Concluya que el espacio $\Psi(\mathcal{A})$ es completamente regular.
(d) Demuestre que si $\mathcal{A}$ es una familia casi ajena maximal en $\mathbb{N}$, entonces el espacio $\Psi(\mathcal{A})$ es un espacio pseudocompacto. Concluya que, en este caso, $\Psi(\mathcal{A})$ no es normal.
(e) Sea $\mathcal{A}$ una familia casi ajena numerable. Compruebe que $\Psi(\mathcal{A})$ es homeomorfo al espacio de ordinales $[0, \omega \cdot |\mathcal{A}|]$ si $\mathcal{A}$ es finita, y $\Psi(\mathcal{A})$ es homeomorfo a $[0, \omega \cdot |\mathcal{A}|)$ si $\mathcal{A}$ es infinita numerable. Es decir, si para cada $n \in \mathbb{N}$, $J_n = \{x^n_k\}_{k<\omega} \cup \{n\}$ en donde

$(x^n_k)_{k<\omega}$ es una sucesión en $\mathbb{R}$ que converge a n, entonces $\Psi(\mathcal{A})$ es homeomorfo al subespacio $\bigcup_{i=1}^{i=m} J_i$ de $\mathbb{R}$ si $|\mathcal{A}| = m$, y $\Psi(\mathcal{A})$ es homeomorfo al subespacio $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} J_i$ de $\mathbb{R}$ si $|\mathcal{A}| = \aleph_0$.

(f) Sea $\mathcal{A}$ una familia casi-ajena maximal infinita, y sea X la compactación por un punto de un espacio de Mrówka $\Psi(\mathcal{A})$. Demuestre que X no es un espacio de Fréchet.

7.H. Funciones perfectas

Una función suprayectiva $f : X \to Y$ entre espacios topológicos X y Y es *perfecta* si es continua, cerrada y sus fibras son compactas. Una función perfecta es, en algunos sentidos, parecida a un homeomorfismo, y si dos espacios están relacionados a través de una función perfecta, ellos deben tener algunas propiedades topológicas similares.

(1) Observe que cualquier función perfecta inyectiva es un homeomorfismo.

(2) Cualquier función continua y suprayectiva entre dos espacios compactos T_2 es perfecta.

(3) Sea $f : X \to Y$ una función perfecta, y sea C un subespacio compacto de Y. Pruebe que $f^{-1}[C]$ es un subespacio compacto de X.

(Sugerencia: Digamos que $\{U_j : j \in J\}$ es una colección de subconjuntos abierto en X que cubre a $f^{-1}[C]$. Para cada subconjunto finito $M \subseteq J$, sea $U_M = \bigcup_{j\in M} U_j$. Para cada $z \in C$ la fibra $f^{-1}(z)$ está contenida en un U_M; por lo tanto, $z \in Y \setminus f[X \setminus U_M]$.)

(4) Demuestre que el dominio de una función perfecta es un espacio compacto (resp., localmente compacto, Lindelöf, numerablemente compacto, σ-compacto) si su rango es compacto (resp., localmente compacto, Lindelöf, numerablemente compacto, σ-compacto).

(5) ¿Se podrá decir lo mismo que en el inciso anterior cuando tratamos con la separabilidad y el primer y segundo axiomas de numerabilidad?

(6) ¿Conserva el rango de una función perfecta las cualidades del dominio cuando nos referimos a alguna de las propiedades enumeradas en los dos incisos anteriores?

(7) Sean X y Y dos espacios inmersos en Z y W como subespacios densos, respectivamente. Supongamos que $X \neq Z$ y que Z es T_2. Supongamos además que $f : X \to Y$ es perfecta y que $\phi : Z \to W$ es una extensión continua de f. Demuestre que $\phi[Z \setminus X] \subseteq W \setminus Y$.

(Sugerencia: Suponga que $z \in Z \setminus X$ y $\phi(z) \in Y$. Sin perdida de generalidad podemos pensar que $Z = X \cup \{z\}$. Existen abiertos ajenos U y V en Z tales que $z \in U$ y $f^{-1}(\phi(z)) \subseteq V$. Pruebe ahora que $\phi^{-1}[f(X \setminus V)]$ es cerrado en Z y $cl_Z(X \setminus V) \subseteq \phi^{-1}[f(X \setminus V)] = f^{-1}[f(X \setminus V)] \subseteq X$. Lo que significa que X no es denso en Z.)

7.I. Lema de Fodor

Sea $\phi : [0, \omega_1) \to [0, \omega_1)$ una función que satisface: $\phi(0) = 0$ y para cualquier $\alpha \in (0, \omega_1)$, $\phi(\alpha) < \alpha$. (A una función así se le conoce como *regresiva*.) Para cada $\alpha < \omega_1$ escribimos $\phi^n(\alpha)$ al número ordinal que se obtiene al aplicar n veces la función ϕ a α. Así, $\phi^0(\alpha) = \alpha$, $\phi^1(\alpha) = \phi(\alpha)$, $\phi^2(\alpha) = \phi(\phi(\alpha))$, $\phi^3(\alpha) = \phi(\phi(\phi(\alpha)))$, etc. Demuestre:

(1) Para cada $\alpha < \omega_1$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\phi^n(\alpha) = 0$.
(2) Para $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n = \{\alpha < \omega_1 : n$ es el menor número natural tal que $\phi^n(\alpha) = 0\}$. Para alguna $k \in \mathbb{N}$, $|A_k| = \aleph_1$.
(3) Si k es como en el inciso anterior, k debe ser estrictamente mayor a 0.
(4) Existe $s < k$ tal que $|\phi^s[A_k]| = \aleph_1$ y $|\phi^{s+1}[A_k]| < \aleph_1$.
(5) Para $x \in \phi^{s+1}[A_k]$, $|\phi^{-1}(x)| = \aleph_1$.
(6) Concluya la veracidad de la siguiente proposición:
Lema de Fodor. Para cada función regresiva $\phi : [0, \omega_1) \to [0, \omega_1)$ existe $\alpha_0 < \omega_1$ tal que $|\phi^{-1}(\alpha_0)| = \aleph_1$.

7.J. Espacios Paracompactos

Un *refinamiento* $\mathcal{D}$ de una cubierta $\mathcal{C}$ de un espacio X, es una cubierta de X que satisface: para cada $D \in \mathcal{D}$ existe un $C \in \mathcal{C}$ tal que $D \subseteq C$.

Un espacio X es *paracompacto* si es regular y cada cubierta abierta de X posee un refinamiento abierto localmente finito. Este concepto fue introducido por Jean Dieudonné en 1944 y ha demostrado su importancia en varias ramas de la matemática. La clase de los espacios paracompactos contiene, como veremos más adelante, a los espacios compactos y a los espacios metrizables y está contenida en la clase de los espacios normales.

(1) Verifique que cada espacio compacto T_2 es paracompacto.
(2) Si $\mathcal{C}$ es una colección localmente finita en X, entonces
$$\bigcup_{C \in \mathcal{C}} \mathrm{cl}(C) = \mathrm{cl}(\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C).$$
(3) Demuestre que todo espacio paracompacto es normal, y concluya que el plano de Moore no es paracompacto.
(Sugerencia: Sean F y G dos cerrados ajenos en el espacio paracompacto X. Tómese para cada $x \in G$ dos abiertos ajenos A_x y B_x tales que $F \subseteq A_x$ y $x \in B_x$. Sea $\mathcal{W}$ un refinamiento abierto localmente finito de $\{B_x : x \in G\} \cup \{X \setminus G\}$. Demuestre que $\bigcup\{W \in \mathcal{W} : W \cap G \neq \emptyset\}$ y $X \setminus \bigcup\{\mathrm{cl}(W) : W \in \mathcal{W}$ y $W \cap G \neq \emptyset\}$ son dos abiertos ajenos que separan a F de G.)
(4) Si $\mathcal{C}$ es una cubierta abierta del espacio de ordinales $[0, \omega_1)$, entonces existe $\gamma < \omega_1$ tal que $|\{C \in \mathcal{C} : \gamma \in C\}| = \aleph_1$.

(Sugerencia: Para cada $\alpha < \omega_1$, existe $C_\alpha \in \mathcal{C}$ tal que $\alpha \in C_\alpha$. Así, para cada $\alpha \in (0, \omega_1)$ existe $\phi(\alpha) < \alpha$ tal que $\alpha \in (\phi(\alpha), \alpha] \subseteq C_\alpha$. Definimos $\phi(0) = 0$. La función ϕ es regresiva. Aplique ahora el Lema de Fodor.)

(5) Deduzca del inciso anterior que el espacio numerablemente compacto de ordinales $[0, \omega_1)$ no es paracompacto.

(6) Sea $f : X \to Y$ una función perfecta. Pruebe que si Y es paracompacto, así también lo es X.

(7) Pruebe que todo espacio Lindelöf regular es paracompacto.

(Sugerencia: Tome una cubierta abierta $\mathcal{C}$ de X. Para cada $x \in X$ elija abiertos $V_x \in \mathcal{C}$ y U_x tales que $x \in U_x \subseteq cl(U_x) \subseteq V_x$. Ahora, hay una subcolección numerable $\{U_{x_i} : i \in \mathbb{N}\}$ de $\{U_x : x \in X\}$ que cubre a X. Sea $W_1 = V_{x_1}$ y para cada $i \in \mathbb{N}$ mayor que 1, tómese el conjunto $W_i = V_{x_i} \setminus (cl(U_{x_1}) \cup cl(U_{x_2}) \cup \cdots \cup cl(U_{x_{i-1}})$. La colección $\{W_i : i \in \mathbb{N}\}$ es un refinamiento abierto de $\mathcal{C}$ localmente finito.)

(8) Deduzca que la línea de Sorgenfrey $\mathcal{L}_\mathcal{S}$ es un espacio paracompacto cuyo cuadrado $\mathcal{L}_\mathcal{S}^2$ no es paracompacto (véase el párrafo posterior al teorema 6.5).

7.K. El Teorema de A. H. Stone

Una colección $\mathcal{U}$ de subconjuntos de un espacio topológico X es *σ-localmente finita* si $\mathcal{U} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_n$ y cada $\mathcal{U}_n$ es localmente finita.

(1) Sea X un espacio regular. Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
   (a) X es paracompacto.
   (b) Cualquier cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto σ-localmente finito.
   (c) Cada cubierta abierta de X posee un refinamiento localmente finito cuyos elementos no son necesariamente abiertos.
   (d) Cada cubierta abierta de X tiene un refinamiento cerrado localmente finito.

(Sugerencias. Para demostrar (b) $\Rightarrow$ (c): Sea $\mathcal{U} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_n$ una cubierta abierta de X en donde cada $\mathcal{U}_n$ es localmente finita. Sea $\mathcal{U}_n = \{U_s^n : s \in J_n\}$. Para cada n, tomamos $W_n = \bigcup_{s\in J_n} U_s^n$. Definimos $A_n = W_n \setminus \bigcup_{i<n} W_i$. Demuestre que la colección $\{A_n \cap U_s^n : n \in \mathbb{N}, s \in J_n\}$ es una cubierta localmente finita de X que refina a $\mathcal{U}$.

Para demostrar (c) $\Rightarrow$ (d): Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Para cada $x \in X$ sea U_x un elemento de $\mathcal{U}$ que contiene a x. Tomemos una vecindad V_x de x tal que $x \in V_x \subseteq cl_X V_x \subseteq U_x$. Por hipótesis, existe un refinamiento localmente finito $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de $\mathcal{V} = \{V_x :$

$x \in X\}$. Demuestre que $\{cl_X A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es un refinamiento cerrado localmente finito de $\mathcal{U}$.

Para demostrar (d) $\Rightarrow$ (a): Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Sea $\mathcal{V}$ un refinamiento cerrado localmente finito de $\mathcal{U}$. Para cada $x \in X$ sea W_x una vecindad abierta de x que intersecta sólo una colección finita de elementos de $\mathcal{V}$. Sea ahora $\mathcal{A}$ un refinamiento cerrado localmente finito de $\{W_x : x \in X\}$. Para cada $V \in \mathcal{V}$ tomamos el conjunto $V^* = X \setminus \bigcup\{A \in \mathcal{A} : A \cap V = \emptyset\}$. Demuestre que $\{V^* : V \in \mathcal{V}\}$ es una cubierta abierta de X localmente finita.

Ahora bien, para cada $V \in \mathcal{V}$ fijamos $U_V \in \mathcal{U}$ tal que $V \subseteq U_V$. Demuestre que la colección $\{V^* \cap U_V : V \in \mathcal{V}\}$ es un refinamiento abierto localmente finito de $\mathcal{U}$.)

(2) (*Teorema de A. H. Stone.*) Cualquier espacio metrizable es paracompacto.

(Sugerencias. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de un espacio métrico (X, d). Sea $\sqsubseteq$ un buen orden en $\mathcal{U}$. Para cada $(n, U) \in \mathbb{N} \times \mathcal{U}$, definimos:

(a) $U_n = \{x \in U : d(x, X \setminus U) \geqslant 1/2^n\}$,
(b) $U_n^* = U_n \setminus \bigcup\{V_{n+1} : V \in \mathcal{U}, V \sqsubset U\}$, y
(c) $\widetilde{U}_n = \{x \in X : d(x, U_n^*) < 1/2^{n+3}\}$.

Demuestre que para $U, V \in \mathcal{U}$ diferentes se cumple:

(a) $d(U_n, X \setminus U_{n+1}) \geqslant 1/2^{n+1}$,
(b) $d(U_n^*, V_n^*) \geqslant 1/2^{n+1}$, y
(c) $d(\widetilde{U}_n, \widetilde{V}_n) \geqslant 1/2^{n+2}$.

Sea $\mathcal{V}_n = \{\widetilde{U}_n : U \in \mathcal{U}\}$. Demuestre que $\mathcal{V} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n$ es un refinamiento abierto σ-localmente finito de $\mathcal{U}$.)

Capítulo 8

Espacios conexos y disconexos

En este último capítulo analizaremos uno de los conceptos fundamentales en topología, el cual puede considerarse de naturaleza más geométrica que otras de las propiedades estudiadas hasta este momento. Nos referimos a la conexidad en espacios topológicos.

La conexidad es una propiedad introducida por C. Jordan en 1893 para la clase de subespacios compactos del plano; su generalización a espacios abstractos se debe a Riesz (1907, [52]), Lennes (1911, [48]) y Hausdorff (1914, [33]). Un primer estudio sistemático de la conexidad en espacios topológicos fue realizada por Hausdorff en su *Grundzüge der Mengenlehre* de 1914 y por Knaster y Kuratowski en su *Sur les ensembles connexes* de 1921 ([43]).

Además de analizar las ideas básicas sobre espacios conexos, veremos también en este capítulo algunas propiedades emparentadas con la conexidad, tales como la conexidad local y la conexidad por trayectorias. El estudio de esta última es el preámbulo a temas como las teorías de homotopía y de estructuras algebraicas asociadas a ciertos espacios topológicos (grupo fundamental). Estos temas pueden ser consultados en [55] y en [51].

Terminaremos el capítulo hablando de algunas variantes de espacios con propiedades muy opuestas a la conexidad, como son los espacios totalmente disconexos, los espacios hereditariamente disconexos y los espacios 0-dimensionales.

1. Espacios conexos

Consideremos en la recta real $\mathbb{R}$ al subespacio $A = [-1, 0] \cup [2, 3]$ que está formado por la unión de dos intervalos, y al subespacio $B = [0, 1]$. De la simple observación podemos captar una diferencia entre estos dos subespacios, como se aprecia en la figura 1

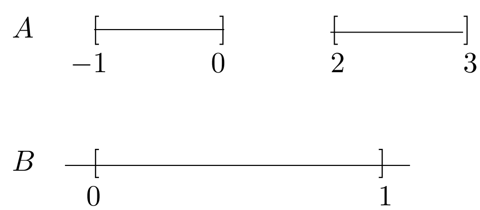

Figura 36. conexidad vs disconexidad

El subespacio A está constituido por dos piezas bien diferenciadas y ajenas en la recta real: el conjunto $[-1, 0]$ y el conjunto $[2, 3]$. A diferencia de esto, el conjunto $B = [0, 1]$ está formado por una sola pieza. Uno puede llegar a pensar que esta diferencia conjuntista puede ser eliminada si logramos separar también a B en dos piezas ajenas; y es claro que esto siempre lo podemos hacer. Por ejemplo, podemos partir a B en los siguientes dos conjuntos ajenas $[0, \frac{1}{2}]$ y $(\frac{1}{2}, 1]$. A pesar de poder hacer lo anterior, la diferencia entre A y B persiste.

La diferencia entre los conjuntos A y B no sólo está en el hecho de que A es la unión de dos conjuntos ajenos y B no, sino que aún cuando a B lo podamos separar en dos piezas ajenas, éstas siempre estarán *pegadas o conectadas*, en el sentido de que la cerradura de una de ellas intersectará a la otra. Note por ejemplo que en la separación $[0, \frac{1}{2}]$, $(\frac{1}{2}, 1]$ de B, el punto $\frac{1}{2}$ está en $[0, \frac{1}{2}]$ y en la cerradura de $(\frac{1}{2}, 1]$. Para las piezas de A no sucede esto porque cada una de ellas es un subconjunto cerrado de A, y ellas son ajenas. Podemos entonces decir que en A no hay conexión entre sus piezas, en B siempre la hay. Esta propiedad que posee B es lo que se conoce como conexidad.

8.1. Definición. Diremos que un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es *conexo* si no puede expresarse como la unión de dos subconjuntos cerrados ajenos y no vacíos. De lo contrario, decimos que $(X, \mathcal{T})$ es *disconexo*.

Observe que en la definición de espacio conexo es equivalente pedir que los subespacios sean cerrados a pedir que sean abiertos. Note también que si un espacio X es la unión de dos subconjuntos cerrados ajenos, entonces estos subconjuntos (siendo cada uno el complemento del otro) son también abiertos. Por otro lado, la noción de piezas de un espacio topológico puede ser formalizada de la siguiente manera.

8.2. Definición. Una pareja (U, V) de subconjuntos de un espacio X es una *separación* de X si U y V son abiertos, $X = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$ y $U \neq \emptyset \neq V$.

Claramente, un espacio X es conexo si y sólo si no existe una separación de X.

Naturalmente, la expresion "el subconjunto A de X es conexo (o disconexo)" se referirá al conjunto A con la topología relativa heredada de X. En algunas ocasiones también se usará la expresión: "A es un subespacio conexo de X". Observe que si $A \subseteq Y \subseteq X$, entonces A es un subespacio conexo de Y cuando y sólo cuando A es un subespacio conexo de X.

Analizamos a continuación la conexidad o disconexidad de algunos espacios muy familiares. Aquí cabe señalar que la definición 8.1 incluye al espacio vacío dentro de la clase de los espacios conexos.

8.3. Ejemplos.

(1) Es trivial que cualquier conjunto con la topología indiscreta es un espacio conexo, ya que estos espacios no contienen dos subconjuntos abiertos no vacíos diferentes. En el otro extremo, si X es cualquier conjunto con más de un punto y con la topología discreta y $x \in X$, entonces los conjuntos $\{x\}$ y $X \setminus \{x\}$ son abiertos, ajenos, no vacíos y cubren a X, lo que significa que X es disconexo. Más aún, si un espacio T_1 X contiene un punto aislado x, entonces el conjunto $\{x\}$ es a la vez abierto y cerrado en X y por lo tanto, en este caso, si X tiene por lo menos dos puntos, X es disconexo.

(2) El conjunto de los racionales $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ no es un espacio conexo ya que los conjuntos $\mathbb{Q} \cap (\sqrt{2}, \rightarrow)$ y $\mathbb{Q} \cap (\leftarrow, \sqrt{2})$ son subconjuntos abiertos, ajenos, no vacíos de $\mathbb{Q}$ cuya unión es igual a $\mathbb{Q}$.

(3) El espacio de Sierpinski X que consiste del conjunto de dos puntos $\{0, 1\}$ con la topología $\{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$ es un espacio conexo pues la única descomposición de X por subconjuntos ajenos no vacíos está formada por los subconjuntos $\{0\}$ y $\{1\}$, pero el segundo no es abierto.

(4) Cualquier conjunto infinito X con la topología cofinita es conexo pues cualesquiera dos subconjuntos abiertos en él tienen intersección no vacía.

(5) No es difícil verificar que si $(X, \mathcal{T})$ es conexo y $\mathcal{S}$ es una topología en X que satisface $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$, entonces $(X, \mathcal{S})$ es conexo.

A continuación determinaremos cuáles son los subespacios conexos de la recta real. Para ello necesitamos la siguiente definición.

8.4. Definición. Un subconjunto A de $\mathbb{R}$ es *convexo* si cada $x \in \mathbb{R}$ que satisface $a \leqslant x \leqslant b$ pertenece a A cuando $a, b \in A$.

Los conjuntos convexos de $\mathbb{R}$ son el vacío, los subconjuntos unipuntuales y los *intervalos*. Estos últimos son exactamente los conjuntos de la forma

$$\mathbb{R},\ (a,b),\ [a,b),\ (a,b],\ [a,b],\ (\leftarrow,b),\ (\leftarrow,b],\ (a,\rightarrow) \text{ y } [a,\rightarrow)$$

en donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$.

8.5. Proposición. *Los subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$ son exactamente los subconjuntos convexos de $\mathbb{R}$, es decir, el vacío, los subconjuntos unipuntuales y los intervalos.*

Demostración. Si $Y \subseteq \mathbb{R}$ tiene más de un punto y no es un intervalo, entonces deben existir $a, b \in Y$ y $c \notin Y$ tales que $a < c < b$. Así obtenemos que los conjuntos $Y \cap (\leftarrow, c)$ y $Y \cap (c, \rightarrow)$ forman una descomposición de Y en dos subconjuntos abiertos ajenos y diferentes del vacío. Esto significa que Y no es conexo.

Supongamos ahora, con miras a obtener una contradiccción, que Y es un intervalo en $\mathbb{R}$ y que Y no es conexo. Podemos entonces representar a Y como $A \cup B$, en donde A y B son subconjuntos abiertos de Y diferentes del vacío y ajenos. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que hay un elemento $a \in A$ y uno en B, digamos b, tales que $a < b$. Tomemos $\alpha \in \mathbb{R}$ definido como el supremo de los números reales x tales que $[a, x) \cap Y$ está contenido en A. Resulta entonces que $\alpha \leqslant b$. Por lo cual, como Y es un intervalo, $\alpha \in Y$. Por definición de α, $\alpha \in \mathrm{cl}_Y(A)$. Pero A es un subconjunto cerrado de Y; en consecuencia, $\alpha \in A$. Como A es abierto en Y, Y es un intervalo, $b \in Y \setminus A$ y $\alpha < b$, existe un número real positivo r tal que $(\alpha - r, \alpha + r) \cap Y \subseteq A$. Podemos concluir facilmente que $[a, \alpha + r) \cap Y \subseteq A$. Pero esto último contradice la definición de α. Por lo tanto, el intervalo Y debe ser conexo. ⊠

Del teorema anterior se infiere que la conexidad no es una propiedad hereditaria. Incluso hay subespacios densos o cerrados o abiertos de $\mathbb{R}$ que no tienen esta propiedad, como por ejemplo $\mathbb{Q}$, $\{0, 1\}$ y $(0, 1) \cup (2, 3)$, respectivamente.

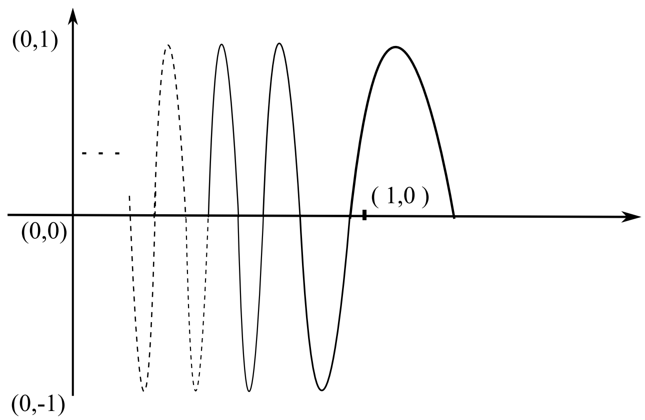

Figura 37. La imagen de $(0,1]$ bajo la función F es un conexo en $\mathbb{R}^2$.

Por otro lado, la conexidad es una propiedad topológica; aún más, la conexidad se conserva bajo funciones continuas.

8.6. Proposición. *Sea X un espacio conexo y $g : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Entonces Y es un espacio conexo.*

Demostración. Supongamos que $Y = U \cup V$ en donde U y V son subconjuntos abiertos de Y, $U \cap V = \emptyset$, $U \cup V = Y$ y $U \neq \emptyset \neq V$. Tenemos que

$$X = g^{-1}[U] \cup g^{-1}[V] \text{ y } g^{-1}[U] \cap g^{-1}[V] = \emptyset.$$

Además, como g es continua y suprayectiva, $g^{-1}[U]$ y $g^{-1}[V]$ son subconjuntos abiertos no vacíos de X. Es decir, X no es conexo. ⊠

8.7. Ejemplo. La función $F : (0,1] \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$F(x) = (x, \operatorname{sen}(\tfrac{1}{x}))$$

es continua y $(0,1]$ es un subespacio conexo de $\mathbb{R}$, de tal manera que

$$Y = \{(x, \operatorname{sen}(\tfrac{1}{x})) : x \in (0,1]\}$$

es un subespacio conexo de $\mathbb{R}^2$ (véase la figura 37).

Como una consecuencia de la proposición 8.5 y de la proposición 8.6 obtenemos que si X es un espacio topológico conexo tal que $|X| > 1$ y $f : X \to \mathbb{R}$ es una función continua y no constante, entonces $|X| \geqslant 2^\omega$

ya que $f[X]$ debe ser un subconjunto conexo con más de un punto. En particular, cualquier espacio conexo Tychonoff X con más de un punto tiene cardinalidad $\geqslant 2^\omega$ ya que, siendo X un espacio Tychonoff, existen funciones continuas y no constantes de X en $[0,1]$. Además, como una consecuencia del mismo resultado 8.6, obtenemos el teorema del valor intermedio:

8.8. Corolario. *Sea X un espacio conexo y $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua. Si $x, y \in X$ y $r \in \mathbb{R}$ son tales que $f(x) < r < f(y)$, entonces existe $z \in X$ con la propiedad $f(z) = r$.*

Demostración. Bajo las hipótesis, el conjunto $f[X]$ es un convexo o intervalo en $\mathbb{R}$, por lo cual $r \in f[X]$; es decir, existe $z \in X$ que cumple $f(z) = r$. ⊠

Veremos en el resultado que sigue diversas formas de expresar la conexidad. Antes, haremos una convención: un subconjunto A de un espacio topológico X que es a la vez abierto y cerrado en X recibirá el nombre de subconjunto *cerrado-abierto*.

8.9. Teorema. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) *el espacio X es conexo;*
(2) *los únicos subconjuntos cerrado-abiertos de X son X y $\emptyset$;*
(3) *si $A \subseteq X$ es tal que $\emptyset \neq A \neq X$, entonces $\operatorname{fr}(A) \neq \emptyset$;*
(4) *no existe función continua y suprayectiva de X sobre el espacio discreto $\{0,1\}$.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Si A es cerrado-abierto diferente del vacío y del total, entonces $(A, X \setminus A)$ es una separación de X; es decir, X no es conexo.

(2) $\Rightarrow$ (3). Se cumple siempre que

$$\operatorname{int}(A) \subseteq A \subseteq \operatorname{cl}(A) = \operatorname{int}(A) \cup \operatorname{fr}(A).$$

Si $\operatorname{fr}(A) = \emptyset$, entonces

$$\operatorname{int}(A) \subseteq A \subseteq \operatorname{cl}(A) = \operatorname{int}(A).$$

Por lo anterior, A es un subconjunto propio no vacío que es a la vez cerrado y abierto en X.

(3) $\Rightarrow$ (4). Si $f : X \to \{0,1\}$ es una función continua y suprayectiva, entonces $A = f^{-1}[\{0\}]$ es un subconjunto propio no vacío de X que satisface $\operatorname{fr}(A) = \emptyset$.

(4) $\Rightarrow$ (1). Si (A, B) es una separación de X, entonces la relación que asocia a cada $a \in A$ con 0 y a cada $b \in B$ con 1, es una función continua y suprayectiva de X en $\{0, 1\}$. ⊠

8.10. Proposición. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Si (U, V) es una separación de X y A es un subespacio conexo de X, entonces ó $A \subseteq U$ ó $A \subseteq V$.*

Demostración. Si $A \cap U \neq \emptyset$ y $A \cap V \neq \emptyset$, entonces $(A \cap U, A \cap V)$ es una separación para A, lo cual contradice la hipótesis sobre A. ⊠

8.11. Ejemplo. Sea y un número real. El espacio $\mathbb{R} \setminus \{y\}$ es disconexo pues la pareja $((\leftarrow, y), (y, \rightarrow))$ constituye una separación de $\mathbb{R} \setminus \{y\}$. De manera semejante, el subespacio $[a, b] \setminus \{y\}$ es disconexo si y sólo si y pertenece al interior de $[a, b]$.

Con la proposición 8.9 disponible, podemos demostrar el siguiente teorema que tiene consecuencias importantes.

8.12. Proposición. *Sea $\{A_j : j \in J\}$ una familia de subconjuntos conexos de un espacio X. Si $\bigcap_{j \in J} A_j \neq \emptyset$, entonces $\bigcup_{j \in J} A_j$ es conexo.*

Demostración. Al conjunto $\bigcup_{j \in J} A_j$ le llamaremos B. Elijamos un punto $x_0 \in \bigcap_{j \in J} A_j$ y sea $f : B \to \{0, 1\}$ una función continua, donde $\{0, 1\}$ tiene la topología discreta. Para $j \in J$, f debe mandar a cada elemento en A_j al valor $f(x_0)$ ya que A_j es conexo y contiene a x_0 (véase el teorema 8.9). Pero esta conclusión es cierta sin importar cual $j \in J$ fue tomada. Por lo tanto, f es la función constante $f(x_0)$. Esto significa que B es conexo. ⊠

Sea n un número natural mayor que 1. Ya sabemos que $\mathbb{R}$ es un espacio conexo (proposición 8.5). También es cierto que cualquier línea recta que pase por el origen (es decir, que pase por el punto cuyas coordenadas coinciden con 0) en $\mathbb{R}^n$ es homeomorfa a $\mathbb{R}$ y por lo tanto es un espacio conexo. Como $\mathbb{R}^n$ es igual a la unión de estas líneas y todas ellas comparten al origen como uno de sus elementos, entonces, por la proposición 8.12, $\mathbb{R}^n$ es un espacio conexo. Para cualquier $n \in \mathbb{N}$, cualquier $x \in \mathbb{R}^n$ y cualquier $r > 0$, la bola $B(x, r)$ es homeomorfa a $\mathbb{R}^n$. Así tenemos que $B(x, r)$ es también un espacio conexo.

8.13. Proposición. *Supongamos que X es un espacio topológico tal que cualquiera dos de sus elementos están contenidos en algún subespacio conexo de X. Entonces X es conexo.*

Demostración. Fijemos un punto $x \in X$. Para cada $y \in X \setminus \{x\}$, sea A_y un subespacio conexo de X que contiene a los puntos x y y. Resulta entonces que X es igual a $\bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} A_y$. Aplicamos ahora la proposición 8.12 y obtenemos la conclusión deseada. ⊠

El resultado anterior nos permite dar una demostración de que la recta real y el plano euclideano no son homeomorfos, como se aprecia en el siguiente ejemplo.

8.14. Ejemplos.

(1) Sea $n \in \mathbb{N}$, y sean a, b dos puntos diferentes del espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$. Al conjunto $\{ta + (1-t)b : t \in [0,1]\}$ le llamamos *segmento cerrado de línea recta que une al punto a con b en $\mathbb{R}^n$*. Cualquier segmento cerrado I de línea recta en $\mathbb{R}^n$ es homeomorfo al intervalo cerrado $[0,1]$ en $\mathbb{R}$ (vea la figura 38)

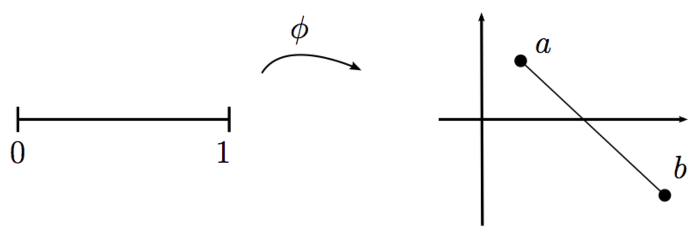

Figura 38. Segmento en $\mathbb{R}^n$ homeomorfo a $[0,1]$

Una *poligonal* en $\mathbb{R}^n$ es una sucesión finita de segmentos de línea cerrados $I_1, I_2, ..., I_n$ tales que un extremo de I_1 está unido a uno de los extremos de I_2, el extremo de I_2 que no pertenece a I_1 está unido con uno de los extremos de I_3, etc. (vea la figura 39).

Usando inducción matemática y la proposición 8.12, podemos probar que cada poligonal es un subespacio conexo de $\mathbb{R}^n$. Ahora bien, para cualquier $p \in \mathbb{R}^n$, con $n > 1$, cualesquiera dos

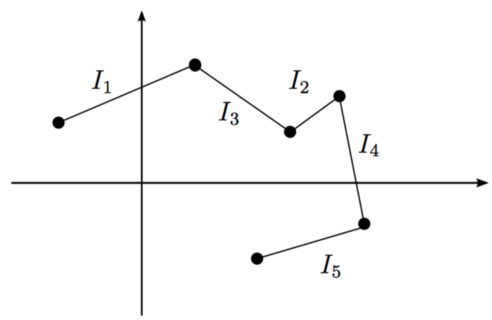

FIGURA 39. Poligonal en $\mathbb{R}^2$

puntos a y b en $\mathbb{R}^n \setminus \{p\}$ pueden ser unidos por una poligonal (ver figura 40). Como consecuencia obtenemos que, para $n > 1$, $\mathbb{R}^n \setminus \{p\}$ es conexo.

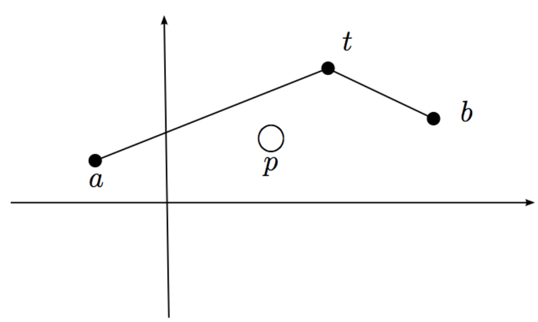

FIGURA 40. Dos puntos en $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ pueden ser unidos por una poligonal.

(2) La línea Euclideana $\mathbb{R}$ no es homeomorfa a ningún $\mathbb{R}^n$ para $n > 1$. En efecto, si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ fuera un homeomorfismo y $p \in \mathbb{R}$, entonces

$$h \upharpoonright (\mathbb{R} \setminus \{p\}) : \mathbb{R} \setminus \{p\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{h(p)\}$$

sería también un homeomorfismo. Pero $\mathbb{R} \setminus \{p\}$ es un espacio disconexo y $\mathbb{R}^n \setminus \{h(p)\}$ es un espacio conexo; esto es un absurdo. Luego, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$ no son homeomorfos. De hecho sucede que $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ no son homeomorfos cuando $n \neq m$, pero la demostración de este hecho más general no la haremos en este texto puesto que requiere de técnicas que no desarrollaremos.

La siguiente proposición es un resultado clave y lo usaremos constantemente en nuestros razonamientos referentes a la conexidad.

8.15. Proposición. *Supongamos que A es un subespacio conexo de X y que Y es un subespacio de $\mathrm{cl}_X(A)$ que contiene a A. Entonces Y es también un subespacio conexo de X. En particular, la cerradura de un conjunto conexo es un espacio conexo.*

Demostración. Sea $f : Y \to \{0,1\}$ una función continua, en donde $\{0,1\}$ está siendo considerado con su topología discreta. Como A es conexo, $f \restriction A$ es una función no suprayectiva. Pero A es un subconjunto denso de Y; así, como f es continua, $f[Y] = f[cl_Y A] \subseteq cl_{\{0,1\}} f[A] = f[A]$; es decir, f no es suprayectiva. Por el teorema 8.9, el espacio Y es conexo. $\boxtimes$

8.16. Ejemplo. Como se hizo notar en el ejemplo 8.7, el subespacio

$$Y = \{(x, \mathrm{sen}(\tfrac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leqslant 1\}$$

es un espacio conexo. Observe ahora que la gráfica de la función $\mathrm{sen}(\frac{1}{x})$ (con $x \in (0,1]$) se acerca al eje vertical $\{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R}\}$ en la medida en que $x \in (0,1]$ se aproxima a 0 (véase la figura 9.2). Por ello, cualquier punto de la forma $(0,y)$ en el plano $\mathbb{R}^2$ con y en el intervalo $[-1,1]$, es un punto de acumulación de Y en $\mathbb{R}^2$. Así, por el teorema anterior, concluimos que

$$\mathrm{cl}_{\mathbb{R}^2}(Y) = Y \cup \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1,1]\}$$

es conexo. Además, cualquier A tal que $Y \subseteq A \subseteq \mathrm{cl}_{\mathbb{R}^2}(Y)$ también es conexo; en particular, $Y \cup \{(0,0)\}$ es conexo (véase la figura 41).

Otras consecuencias importantes de la proposición 8.15 son las siguientes: si un espacio X contiene un subespacio denso conexo, entonces X mismo es conexo; y claro, si X es conexo y Tychonoff, entonces la compactación de Stone-Čech de X, βX, es conexo. El recíproco de este último resultado es cierto y se deja como ejercicio en 8.A.(5).

Como veremos a continuación, la conexidad es una de esas propiedades especiales que se conservan cuando tomamos producto de espacios.

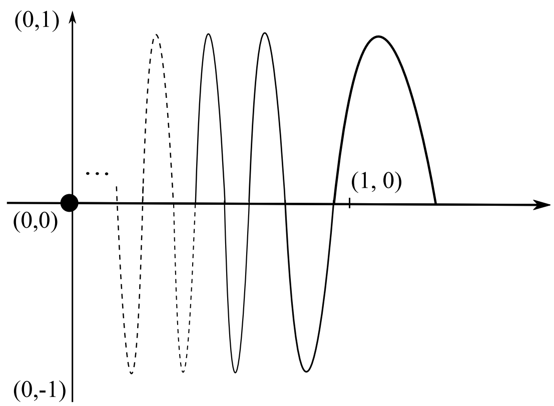

FIGURA 41. El subespacio $Y \cup \{(0,0)\}$ es conexo.

8.17. TEOREMA. *El espacio producto $\prod_{j \in J} X_j$ es un espacio conexo si y sólo si cada X_j es conexo.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos primero que el espacio $\prod_{j \in J} X_j$ es conexo. Como cada proyección $\pi_i : \prod_{j \in J} X_j \to X_i$ es continua y suprayectiva, entonces cada X_i es conexo por lo dicho en la proposición 8.6.

Supongamos ahora que cada X_j es un espacio conexo. Tomemos un elemento x en el producto $\prod_{j \in J} X_j$. Definimos

$$C = \{y \in \textstyle\prod_{j \in J} X_j : \ \exists\ D \subseteq \prod_{j \in J} X_j \text{ conexo tal que } x, y \in D\}.$$

Por la proposición 8.12, C es un espacio conexo. Para demostrar lo propuesto basta con probar que C es denso en $\prod_{j \in J} X_j$ (proposición 8.15).

Tomemos pues un abierto canónico no vacío arbitrario $A = \pi_{j_1}^{-1}(A_1) \cap ... \cap \pi_{j_n}^{-1}(A_n)$ de $\prod_{j \in J} X_j$. Elegimos un elemento $a_i \in A_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, y definimos

$$C_1 = \{y \in \prod_{j \in J} X_j : \pi_{j_1}(y) \in X_{j_1}, \text{ y } \pi_j(y) = \pi_j(x)\ \forall\ j \neq j_1\}.$$

En general, para $i \in \{2, ..., n\}$, definimos C_i como el conjunto de todos los puntos $y \in \prod_{j \in J} X_j$ tales que $\pi_{j_k}(y) = a_k$ si $k \in \{1, ..., i-1\}$, $\pi_{j_i}(y) \in X_{j_i}$, y $\pi_j(y) = \pi_j(x)$ para toda $j \in J \setminus \{j_1, ..., j_{i-1}\}$.

Del ejercicio 4.C.(2) se sigue que C_i es homeomorfo a X_{j_i} para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Por lo tanto, C_i es conexo para cualquier $i \in \{1, ..., n\}$.

Ahora bien, para cada $k \in \{1, ..., n-1\}$, el punto $y \in \prod_{j\in J} X_j$ con coordenadas $\pi_{j_i}(y) = a_i$ para cada $i \in \{1, ..., k\}$ y $\pi_j(y) = \pi_j(x)$ para cualquier $j \in J \setminus \{1, ..., k\}$ pertenece a $C_k \cap C_{k+1}$. Concluimos que $D = \bigcup_{i=1}^n C_i$ es conexo y contiene a x. Así, $D \subseteq C$. Pero $A \cap D \neq \emptyset$; por lo tanto $A \cap C \neq \emptyset$. Con esto hemos demostrado que C es un subconjunto denso de $\prod_{j\in J} X_j$, con lo cual terminamos nuestra demostración. $\boxtimes$

Hasta aquí nos hemos limitado básicamente a aplicar nuestros teoremas de conexidad a subespacios euclideanos. Reflexionemos ahora un poco sobre estas propiedades en algunos espacios cuyas características son muy diferentes a aquellas de los subespacios de $\mathbb{R}^n$.

8.18. Ejemplos.

(1) La línea de Sorgenfrey $\mathcal{L}_{\mathbb{S}}$, definida en el ejemplo 1.42, es un espacio disconexo. En efecto, cada subconjunto de la forma $[a, b)$, en donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$, es a la vez abierto y cerrado como se demostró en el ejemplo 2.7. Como los conjuntos de esta forma constituyen una base para $\mathcal{L}_{\mathbb{S}}$, tenemos que la línea de Sorgenfrey tiene la peculiaridad de poseer una base para su topología formada por conjuntos cerrado-abiertos. En la sección 5 estudiaremos algunas propiedades de este tipo de espacios.

(2) El espacio de ordinales $[0, \omega_1]$ tiene también una base constituida por cerrado-abiertos. En efecto, para cada $\beta < \alpha \leqslant \omega_1$, el conjunto $(\beta, \alpha]$ es cerrado-abierto (véase el ejercicio 1.G.(6).(a). Por esta razón, $[0, \omega_1]$ es disconexo.

(3) Sea κ un número cardinal cualquiera y sea 2 el espacio discreto con dos puntos $\{0, 1\}$. Del teorema 8.17 podemos concluir que los espacios productos $[0, 1]^\kappa$ y $\mathbb{R}^\kappa$ son conexos, y los espacios 2^κ, $\mathbb{N}^\kappa$ y κ^ω no lo son.

2. Espacios localmente conexos

Analicemos ahora los espacios que localmente se comportan como espacios conexos.

8.19. Definición. Se dice que un espacio X es *localmente conexo* si para cada $x \in X$ podemos encontrar un sistema básico de vecindades

$\mathcal{B}(x)$ de x cuyos elementos son subespacios conexos. Equivalentemente, X es localmente conexo si (y sólo si) para cada $x \in X$ y cualquier vecindad U de x, existe una vecindad conexa V de x tal que $V \subseteq U$.

El concepto anterior fue introducido por Hahn en 1914 ([33]) y desarrollado posteriormente (alrededor del 1920) por Tietze ([62]), Kuratowski ([45]) y el propio Hahn ([34]).

Veamos ahora algunos ejemplos que nos muestran que la conexidad no implica, ni es consecuencia de, la conexidad local.

8.20. Ejemplos.

(1) Ya vimos que los espacios euclidianos $\mathbb{R}^n$ son espacios conexos. Son también localmente conexos pues cada bola abierta en $\mathbb{R}^n$ es conexo.

(2) Un espacio puede ser localmente conexo y disconexo, como sucede con cualquier espacio discreto formado por más de un punto. En efecto, para cada punto x en un espacio discreto X, el conjunto $\{x\}$ es una vecindad conexa de x y la colección $\mathcal{B}(x) = \{\{x\}\}$ es una base local para x.

(3) También podemos encontrar espacios que son conexos pero no localmente conexos. Un ejemplo de esto lo da el espacio

$$Y = \{(x, \mathrm{sen}(\tfrac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0,1]\} \cup \{(0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

(véase la figura 41). En el ejemplo 8.16 se vió que Y es un espacio conexo. Veamos ahora que Y no es localmente conexo en el punto $(0,0)$. En efecto, cualquier vecindad de $(0,0)$ en Y contenida en la bola abierta $Y \cap B((0,0), \frac{1}{4})$ contiene piezas separadas de la gráfica Y, como se puede apreciar en la figura 42. Este ejemplo muestra que en la definición de conexidad local dada en 8.19, no puede ser substituida la expresión "cada vecindad de x contiene una vecindad conexa de x" por "cada x tiene una vecindad conexa".

Un concepto de particular importancia y que está relacionado con la conexidad local es la noción de *componente conexa* de un punto.

8.21. Definición. Dado un punto x en un espacio X, podemos considerar la colección de todos los subconjuntos conexos de X que contienen a x. La unión de todos ellos es un espacio conexo (proposición 8.12) que denotaremos por C_x. El conjunto C_x es el mayor subespacio conexo de X que contiene a x. Le llamaremos *componente conexa de x en X*.

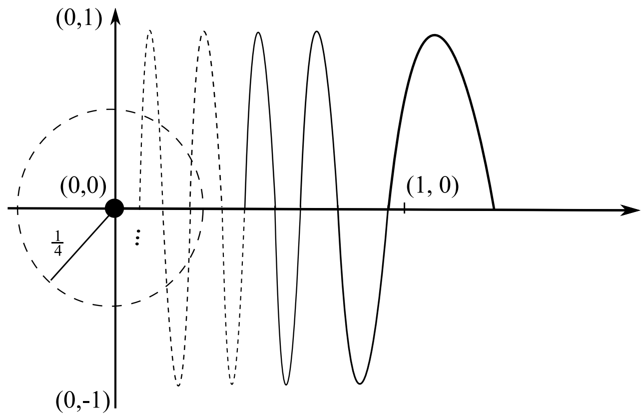

Figura 42. La intersección $Y \cap B((0,0), \frac{1}{4})$ contiene piezas separadas de Y.

Como $\{x\}$ es conexo, C_x no es vacío. Además C_x es un subespacio cerrado de X por el teorema 8.15. Es importante también hacer notar que si $x, y \in X$ y $x \neq y$, entonces ó $C_x = C_y$ ó $C_x \cap C_y = \emptyset$ (ver ejercicio 8.B.(2)). Es decir, el conjunto de componentes conexas en X determina una partición de X.

8.22. Ejemplo.

(1) Si X es un espacio conexo, entonces es claro que $C_x = X$ para cualquier $x \in X$.
(2) Cualquier subespacio de un espacio discreto es un espacio discreto. Por lo cual, para cada x en el espacio discreto X, $C_x = \{x\}$. En la sección 5 analizaremos a los espacios cuyas componentes conexas son conjuntos unipuntuales.
(3) Ya mencionamos que las componentes conexas en un espacio X forman una partición y en consecuencia definen una relación de equivalencia $\sim$. Esto nos hace pensar en formar un espacio cociente $X/\sim$ en donde cada componente conexa de X se convierte en un elemento en $X/\sim$. Se puede demostrar que para cada $\overline{x} \in X/\sim$, se tiene que $C_{\overline{x}} = \{\overline{x}\}$ (ver ejercicio 8.B.(3)).

Ahora expresemos la conexidad local en términos de las componentes conexas de sus subespacios abiertos.

8.23. Proposición. *Un espacio X es localmente conexo si y sólo si las componentes conexas de cada subconjunto abierto de X son conjuntos abiertos de X.*

Demostración. Sea X un espacio localmente conexo y sea $A \subseteq X$ abierto. Sea C una componente conexa de A. Vamos a demostrar que C es abierto en X. Tomemos $x \in C$; entonces, $x \in A$. Como A es abierto en X y X es localmente conexo, existe una vecindad conexa U de x en X que satisface $x \in U \subseteq A$. Pero C es el conjunto conexo en A más grande que contiene a x. Esto implica que U debe estar contenido en C. Esto significa que C es una vecindad de x. Como esto es cierto para cada $x \in C$, el conjunto X es abierto en X.

Vamos ahora a demostrar la implicación inversa de la proposición. Sea $x \in X$ y supongamos que U es cualquier vecindad abierta de x en X. La componente conexa C de x en U es un subconjunto abierto de X a causa de nuestra hipótesis. Pero entonces C es una vecindad conexa de x contenida en U. Por lo tanto X es localmente conexo. ⊠

El siguiente corolario es una consecuencia inmediata de la proposición 8.23; su demostración se deja como un ejercicio (8.B.(4)).

8.24. Corolario. *Cualquier subespacio abierto de un espacio localmente conexo es también localmente conexo.*

Si bien la conexidad local es heredada por subespacios abiertos, como acabamos de ver, esta propiedad no es hereditaria. Por ejemplo, el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ y el conjunto de Cantor $\mathbf{C}$ son subespacios del espacio localmente conexo $\mathbb{R}$, denso uno y compacto el segundo, que no son localmente conexos.

La conexidad local tampoco se preserva bajo imágenes continuas. En efecto, cualquier biyección h definida sobre $\mathbb{N}$ y con valores en $\mathbb{Q}$ es continua; $\mathbb{N}$ es localmente conexo pero, como ya mencionamos, $\mathbb{Q}$ no lo es. Sin embargo, la propiedad en cuestión se conserva bajo funciones continuas y abiertas.

8.25. Proposición. *Si f es una función continua y abierta definida sobre un espacio localmente conexo X y con valores que cubren al espacio Y, entonces Y es localmente conexo.*

Demostración. Sea y un elemento de Y y sea U una vecindad de y en Y. Como f es suprayectiva, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. El conjunto $f^{-1}[U]$ es una vecindad de x en X ya que f es continua. Como

X es localmente conexo, existe una vecindad conexa V de x contenida en $f^{-1}[U]$. Como f es una función abierta, el conjunto $f[V]$ es una vecindad de y en Y contenida en U. Por la proposición 8.6, la vecindad $f[V]$ es conexa. Esto termina nuestra demostración. ⊠

Como es costumbre, una de nuestras preocupaciones sistemáticas cuando introducimos un nuevo concepto en este texto, es saber si la propiedad en cuestión es productiva. A continuación analizamos este problema en el caso de la conexidad local.

8.26. Teorema. *Sea $\{X_j : j \in J\}$ una familia de espacios topológicos no vacíos. El espacio producto $\prod_{j\in J} X_j$ es localmente conexo si, y sólo si, cada X_j es localmente conexo y todos los X_j son conexos, con excepción, quizás, de un número finito de ellos.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que $\prod_{j\in J} X_j$ es localmente conexo. Como cada proyección $\pi_i : \prod_{j\in J} X_j \to X_i$ es una función continua, abierta y suprayectiva, entonces la proposición 8.25 nos garantiza que cada X_j es localmente conexo.

Ahora consideremos una vecindad conexa V de algún punto $x \in \prod_{j\in J} X_j$. Debe entonces existir un básico canónico $B = \pi_{j_1}^{-1}(A_1) \cap ... \cap \pi_{j_n}^{-1}(A_n)$ tal que $x \in B \subseteq V$. Tenemos que para cada j, $\pi_j[B]$ está contenido en $\pi_j[V]$ y $\pi_j[V]$ es conexo. Además, si $j \in J \setminus \{j_1, ..., j_n\}$, $\pi_j[B] = X_j$. Es decir, X_j es conexo para cualquier $j \in J \setminus \{j_1, ..., j_n\}$.
$\Leftarrow$) Sea $\{j_1, ..., j_n\}$ el subconjunto de J con la propiedad: X_j es conexo si y sólo si $j \notin \{j_1, ..., j_n\}$. Tomamos un punto fijo arbitrario $x \in \prod_{j\in J} X_j$; tomamos también una vecindad V de x cualquiera. Sabemos que podemos encontrar una vecindad B de x de la forma $\pi_{s_1}^{-1}(A_1) \cap ... \cap \pi_{s_k}^{-1}(A_k)$ contenida en V, en donde A_i es un subconjunto abierto de X_{j_i} que contiene a $\pi_{s_i}(x) = x_{s_i}$ para cada $i \in \{1, ..., k\}$. Como para cada $i \in \{1, ..., k\}$, X_{s_i} es un espacio localmente conexo, podemos tomar una vecindad conexa B_i de x_{j_i} contenida en A_i. Ahora, para cada $j \in \{j_1, ..., j_n\} \setminus \{s_1, ..., s_k\} = L$, tomamos una vecindad conexa cualquiera C_j del punto $\pi_j(x)$. Resulta que el conjunto

$$(\bigcap_{j\in L} \pi_j^{-1}[C_j]) \cap \pi_{s_1}^{-1}(B_1) \cap ... \cap \pi_{s_k}^{-1}(B_k)$$

es una vecindad de x contenida en V y es conexa pues es el producto de una familia de espacios conexos. ⊠

Terminamos esta sección analizando algunos ejemplos adicionales.

8.27. Ejemplos.

(1) Es claro que cualquier espacio con más de un punto que posee una base formada por conjuntos cerrado-abiertos no es localmente conexo (ver ejercicio 8.B.(5)). Así resulta que ni la línea de Sorgenfrey ni los espacios de ordinales son espacios localmente conexos (véase el ejemplo 8.18).

(2) Más aún, si un espacio X es T_1 y contiene un subespacio denso y discreto D, y si $X \setminus D$ no es vacío, entonces X no es localmente conexo en ningún punto de $X \setminus D$. En efecto, para cada $y \in X \setminus D$ y cada vecindad V de y, podemos encontrar $x \in D \cap V$ tal que $\{x\}$ es un cerrado-abierto de V. Por lo dicho hasta aquí concluimos que V no es conexo. Así, por ejemplo, el espacio $\mathbb{R}_{\mathbb{P}}$ (ver ejemplo 1.12) no es localmente conexo en ningún $r \in \mathbb{Q}$.

(3) Por el teorema 8.26 tenemos que los espacios productos $[0,1]^\kappa$ y $\mathbb{R}^\kappa$ son localmente conexos, y los espacios 2^κ y $\mathbb{N}^\kappa$ son localmente conexos cuando, y sólo cuando, κ es finito. El espacio κ^ω es conexo (localmente conexo) sólo cuando $\kappa = 1$.

3. Espacios conexos por trayectoria

Veamos ahora en esta sección otra clase de espacios topológicos relacionados con los espacios conexos y que llamaremos espacios conexos por trayectorias. Hemos visto que el intervalo cerrado $[0,1]$ es un espacio conexo; luego, las imágenes continuas de $[0,1]$ son también espacios conexos.

8.28. Definición. Un espacio X es *conexo por trayectorias* si para $x, y \in X$, existe una función continua $f : [0,1] \to X$ tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$.

Si $f : [0,1] \to X$ es continua y $f(0) = x$, $f(1) = y$, diremos que f es una *trayectoria que une a x con y*. Cuando no haya posibilidad de confusión, al subespacio $Y = f[[0,1]]$ le llamaremos también trayectoria en X que une a x con y. No es díficil demostrar que un espacio X es conexo por trayectorias si, y sólo si, para cada dos puntos x y y de X, existe una trayectoria Y en X que contiene a ambos puntos.

8.29. Ejemplos.

(1) Como cualquier función definida en $[0,1]$ y con valores en un espacio indiscreto es continua, entonces cualquier espacio indiscreto es conexo por trayectorias. En cambio, las únicas funciones continuas definidas en $[0,1]$ y con valores en un espacio discreto son las funciones constantes. Por esto, un espacio discreto con más de un punto no es conexo por trayectorias.

(2) Sea $n \in \mathbb{N}$. Como cualquier segmento cerrado de recta en $\mathbb{R}^n$ es una imagen continua de $[0,1]$ (véase el ejemplo 8.14), $\mathbb{R}^n$ es un espacio conexo por trayectorias. También lo es la esfera

$$S^n = \{(x_1, ..., x_{n+1}) : \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$$

cuando $n \geqslant 1$, ya que si a y b son elementos de S^n, la función $\beta : [0,1] \to S^n$ definida por

$$\beta(t) = \frac{ta + (1-t)b}{||ta + (1-t)b||}$$

es continua y une a a con b (véase la figura 43)

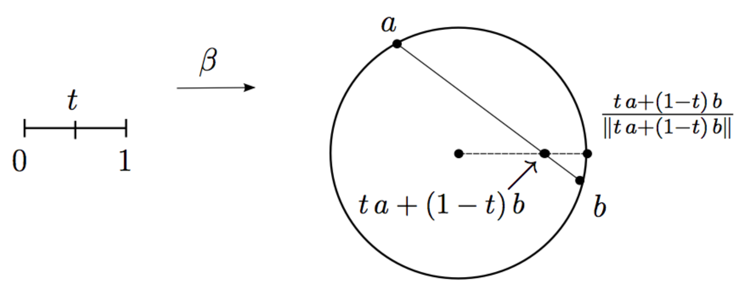

Figura 43. La función $\beta : [0,1] \to S^1$ es continua y une a los puntos a y b de S^1

(3) Recordemos que un subconjunto E de $\mathbb{R}^n$ es *convexo* si para cualesquiera dos puntos x y y en E se cumple que el conjunto

$$E(x,y) = \{tx + (1-t)y : t \in [0,1]\}$$

está contenido en E. Como la función $s : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ definida por $s(t) = tx + (1-t)y$ es continua, entonces cualquier subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ es conexo por trayectorias.

Aplicando la proposición 8.12 veremos que todo espacio conexo por trayectorias es conexo. El recíproco no es cierto.

8.30. Teorema. *Cualquier espacio conexo por trayectorias es conexo.*

Demostración. Supongamos que X es un espacio conexo por trayectorias. Fijemos un punto x de X. Para cada $y \in X \setminus \{x\}$, fijemos una trayectoria Y_y que contenga a x y a y. Resulta que cada Y_y es conexo y el espacio X es igual a $\bigcup_{y \in X\setminus\{x\}} Y_y$. Por la proposición 8.12 concluimos que X es conexo. ⊠

El espacio

$$X = \{(x, \operatorname{sen}(\tfrac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0,1]\} \cup \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1,1]\}\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

es un espacio conexo (véase el ejemplo 8.16 y la proposición 8.15). Demostraremos que X no es conexo por trayectorias. Supongamos lo contrario; entonces existe $f : [0,1] \to X$ continua con $f(0) = (0,0)$ y $f(1) = (1, \operatorname{sen}(1))$. Como $[0,1]$ es conexo, así lo es $f[[0,1]]$, por lo tanto $Z = \{(x, \operatorname{sen}(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0,1]\} \subseteq f[[0,1]]$. Como $[0,1]$ es compacto y cada $(0,y) \in Y = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1,1]\}\}$ es el límite de una sucesión contenida en Z, entonces $Y \subseteq f[[0,1]]$. Es decir, $X = f[[0,1]]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $g^{-1}[\{\frac{1}{n}\}]$ es un subconjunto compacto de $[0,1]$ en donde $g = \pi_1 \circ f$ y π_1 es la proyección sobre la primera coordenada. Por lo tanto tiene sentido definir $\alpha_n = \max g^{-1}[\{\frac{1}{n}\}]$. Resulta que para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_{n+1} < \alpha_n$. En efecto, si $\alpha_n \leqslant \alpha_{n+1}$, existiría un $t \in (\alpha_{n+1}, 1)$ tal que $g(t) = \frac{1}{n}$ (corolario 8.8), contradiciendo la definición de α_n. Sea $l = \inf\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$. Como g es continua, $g(l) = \lim g(\alpha_n) = 0$. Esto significa que existe $y_0 \in [-1,1]$ tal que $f(l) = (0, y_0)$. Sea $y_1 \in [-1,1]$ diferente de y_0. Existe una sucesión decreciente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(0,1]$ que converge a 0 tal que $(x_n, \operatorname{sen}(\frac{1}{x_n})) \to (0, y_1)$. Usando una vez más el corolario 8.8 aplicado a g y por la definición de las α_n, se puede probar que $f[(l,1]] = Z$. Sea $t_n = \max g^{-1}[\{x_n\}]$. Como $f[(l,1]] = Z$, $t_n \in (l,1]$ para toda n. Usando argumentos semejantes a los ya empleados, se obtiene que $t_{n+1} < t_n$ para cualquier n, y que $\lim t_n = l$. Resulta que $f(t_n) = (x_n, \operatorname{sen}(\frac{1}{x_n}))$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Pero entonces $f(l) = \lim f(t_n) = (0, y_1) \neq (0, y_0)$, lo cual es una contradicción. ⊠

Las trayectorias en un espacio X se pueden concatenar en el siguiente sentido: si $a, b, c \in X$, y $f_1 : [0,1] \to X$ es una trayectoria tal que $f_1(0) = a$ y $f_1(1) = b$, y f_2 es una trayectoria que cumple $f_2(0) = b$ y $f_2(1) = c$, entonces la función $f : [0,1] \to X$ definida por

$$f(t) = \begin{cases} f_1(2t) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1/2; \\ f_2(2t-1) & \text{si } 1/2 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

es una trayectoria que une a a con c. Usando esta idea damos a continuación una caracterización sencilla e importante de los espacios conexos por trayectorias.

8.31. Proposición. *Sea X un espacio topológico y sea x_0 un punto de X. Entonces, el espacio X es conexo por trayectorias cuando, y sólo cuando, para cada $x \in X$ existe una trayectoria Y_x que contiene tanto a x como a x_0.*

Demostración. La necesidad es inmediata. Para demostrar la suficiencia, supongamos que para cada $x \in X$ existe $f_x : [0,1] \to X$ continua tal que $x, x_0 \in f_x([0,1])$. Claramente podemos suponer que $x \neq x_0$. Fijemos, para cada $x \in X$, puntos $a_x, b_{x_0} \in [0,1]$ tales que $f_x(a_x) = x$ y $f_x(b_{x_0}) = x_0$. Sin perder generalidad podemos suponer que $a_x < b_{x_0}$. Consideremos también, para cada $x \in X$, las funciones $t_x, s_x : [0,1] \to [a_x, b_{x_0}]$ dadas por $t_x(z) = a_x + z(b_{x_0} - a_x)$ y $s_x(z) = b_{x_0} + z(a_x - b_{x_0})$ para cada $z \in [0,1]$. Claramente tanto t_x como s_x son funciones continuas. Además se tiene que $t_x(0) = a_x$, $t_x(1) = b_{x_0}$, $s_x(0) = b_{x_0}$, y $s_x(1) = a_x$.

Sean ahora x_1 y x_2 dos puntos de X cualesquiera. Definimos la función $f : [0,1] \to X$ como

$$f(t) = \begin{cases} (f_{x_1} \circ t_{x_1})(2t) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1/2; \\ (f_{x_2} \circ s_{x_2})(2t-1) & \text{si } 1/2 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

Resulta que la función f es continua y $f(0) = x_1$, $f(1) = x_2$. Esto muestra que X es conexo por trayectorias. ⊠

La conexidad por trayectorias es un concepto que apareció incluso antes que la conexidad. Se puede encontrar ya de manera explícita en algún trabajo de K. Weierstrass del año 1880.

La versión local de la conexidad por trayectorias es una condición que aunada a la conexidad produce conexidad por trayectorias, como veremos en el teorema 8.34.

8.32. Definición. Un espacio X es *localmente conexo por trayectorias* si cada uno de sus puntos posee una base local de vecindades formada por subespacios conexos por trayectoria.

8.33. Observación. En relación a la anterior definición se debe notar lo siguiente: un subespacio Y de un espacio X es conexo por trayectorias si y sólo si cada dos puntos en Y están contenidos en una trayectoria *contenida en* Y.

8.34. Teorema. *Un espacio conexo y localmente conexo por trayectorias es conexo por trayectorias.*

Demostración. Supongamos que X es conexo y localmente conexo por trayectorias. Sea $x \in X$ y sea G el conjunto de puntos de X que están unidos con x por medio de una trayectoria. El conjunto G no es vacío pues x pertenece a G. Vamos a demostrar que G es abierto y cerrado en X, lo que implicará la igualdad $X = G$ a causa de la conexidad de X. De esta forma terminará la demostración.

Veamos primero que G es abierto. Sea $a \in G$ cualquiera. Como X es localmente conexo por trayectorias, existe una vecindad V de a en X que es conexa por trayectorias. Ahora bien, para $z \in V$ existe, por definición, una trayectoria en V que une a a con z. Esto significa que $z \in G$. Es decir, $V \subseteq G$. Concluimos que G es abierto en X.

Ahora veamos que G es cerrado. Tomemos un punto $a \in \mathrm{cl}_X(G)$ y sea V una vecindad conexa por trayectorias de a. Resulta entonces que $V \cap G \neq \emptyset$. Sea $z \in V \cap G$. Entonces existe una trayectoria que une a a con z y existe otra trayectoria que une a z con x. Concatenando estas dos trayectorias (véase el comentario anterior al teorema 8.31), podemos concluir que existe una trayectoria que une a a con x, lo que significa que $a \in G$. ⊠

Terminamos esta sección presentando algunos ejemplos más de espacios conexos por trayectorias.

8.35. Ejemplos.

(1) Un *espacio vectorial topológico sobre* $\mathbb{R}$ es una cuarteta $(V, +, *, \mathcal{T})$ en donde V es un conjunto, $+$ es una operación binaria en V tal que la pareja $(V, +)$ es un grupo abeliano, $*$ es una función de $\mathbb{R} \times V$ en V que cumple

(a) $\lambda * (x + y) = (\lambda * x) + (\lambda * y)$ para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$ y cualesquiera $x, y \in V$.

(b) $(\lambda +_{\mathbb{R}} \xi) * x = (\lambda * x) + (\xi * x)$ para cualesquiera $\lambda, \xi \in \mathbb{R}$ y $x \in V$.
(c) $\lambda * (\xi * x) = (\lambda *_{\mathbb{R}} \xi) * x$ para cualesquiera $\lambda, \xi \in \mathbb{R}$ y $x \in V$.
(d) $1 * x = x$ para cualquier $x \in V$.

Además $\mathcal{T}$ es una topología en X que hace continuas las operaciones $+$ y $*$ (aquí se está considerando la topología euclideana en $\mathbb{R}$ y las operaciones usuales del campo $\mathbb{R}$, $+_{\mathbb{R}}$ y $*_{\mathbb{R}}$). Los espacios vectoriales normados que se vieron en 1.A.10, son ejemplos de espacios vectoriales topológicos.

Para cualquier $x \in V$, la función f que manda a cada $t \in [0,1]$ a

$$t * x + (1-t) * e,$$

es una trayectoria que une al elemento neutro (con respecto a $+$) e de V al punto x, y claro, f es continua. Esto demuestra que cualquier espacio vectorial topológico es un espacio conexo por trayectorias. Ejemplos clásicos de este tipo de espacios son los espacios de funciones continuas $C_\infty(I)$ y $C_u(I)$ (véanse el ejemplo 1.7 y el ejercicio 1.A.10). Lo mismo se puede decir del espacio de funciones continuas $C_p(X)$ definido en el ejemplo 1.37 y en el ejercicio 6.D.(4).

(2) El cuadrado lexicográfico $(I^2, \leqslant)$ (véase el ejercicio 1.G.(6).(b)) es un ejemplo de espacio conexo, localmente conexo pero no es conexo por trayectorias. En efecto, para cada $x \in [0,1]$, el conjunto

$$I_x = \{(x,y) \in I^2 : y \in [0,1]\}$$

es homeomorfo a $[0,1]$ y por lo tanto es conexo. Supongamos que A y B son dos abiertos que satisfacen $I^2 \subseteq A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$. Supongamos también que el punto $(0,0)$ pertenece a A. Por lo dicho antes, $I_0 \subseteq A$. Sea $T = \{z \in [0,1] : [(0,0),(z,1)] \subseteq A\}$. Como $0 \in T$, $T \neq \emptyset$. Sea z_0 el supremo del conjunto T en $[0,1]$. El punto $(z_0, 0)$ pertenece a la cerradura de $\bigcup_{y \in T} I_y \subseteq A$. Como A es cerrado, entonces $(z_0,0) \in A$. Esto significa que $I_{z_0} \subseteq A$. Como A es abierto, si $z_0 < 1$, existiría un intervalo abierto $((z_0,\epsilon),(z_0+\delta,\epsilon))$ que contiene al punto $(z_0,1)$ y el cual está contenido en A. Pero esto significa que $z_0 + \frac{\delta}{2} \in T$, lo cual contradice la definición de z_0; por lo tanto z_0 debe ser igual a 1. Es decir, $B = \emptyset$ y $(I^2, \leqslant)$ es conexo. Una demostración

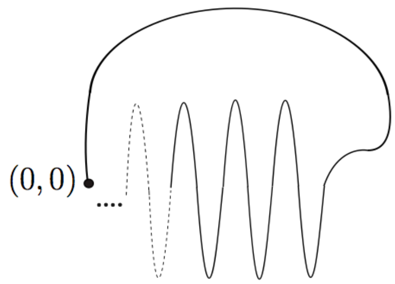

Figura 44. Ejemplo de un espacio conexo por trayectorias no localmente conexo.

semejante prueba que todo intervalo en $(I^2, \leqslant)$ es conexo. Así tenemos que $(I^2, \leqslant)$ es también localmente conexo.

Ahora bien, si $a \in I^2 \setminus \{(0,0),(1,1)\}$ entonces $(\leftarrow, a)$ y $(a, \rightarrow)$ son dos intervalos abiertos que separan al subespacio $I^2 \setminus \{a\}$ de $(I^2, \leqslant)$; por lo tanto $I^2 \setminus \{a\}$ no es conexo. Así, si $f : [0,1] \to (I^2, \leqslant)$ es una función continua que satisface $f(0) = (0,0)$ y $f(1) = (1,1)$, entonces $f[[0,1]] = I^2$. Como f es continua y $[0,1]$ es separable, entonces $(I^2, \leqslant)$ es separable (véase la proposición 3.30 y 3.F.(3).(f)). Pero esto no es cierto por lo dicho en los ejercicios 3.F.(2).(c) y 3.F.(3).(a). Así, concluimos que $(I^2, \leqslant)$ no es conexo por trayectorias.

8.36. Ejemplos.

(1) La figura 44 muestra un ejemplo de un espacio conexo por trayectorias que no es localmente conexo.
(2) La suma libre de dos o más copias de $\mathbb{R}$ es un ejemplo de un espacio localmente conexo que no es conexo (y por lo tanto, no es conexo por trayectorias).

4. Continuos

G. Cantor fue el primero en utilizar el nombre de continuo para designar a los subconjuntos conexos y cerrados de los espacios euclideanos. Más tarde, Janiszewski obtuvo los primeros resultados sobre subconjuntos conexos compactos de espacios euclideanos. La definición de continuo que utilizaremos es aún más general.

8.37. Definición. Un espacio topológico X es un *continuo* si X es T_2, compacto y conexo.

Como la imagen continua de un compacto es un espacio compacto, y la imagen continua de un conexo es conexo, entonces toda imagen continua T_2 de un continuo es también un continuo. Así cualquier curva cerrada en $\mathbb{R}^n$ es un continuo. Por ejemplo, la circunferencia unitaria en el plano, $S^1 = \{e^{ix} : x \in [0, 2\pi]\}$, es un continuo. También sabemos que el axioma de separación T_2, la compacidad y la conexidad son propiedades productivas, por lo cual el producto de una familia arbitraria de continuos es también un continuo. Por esta razón, los espacios $[0,1]^\kappa$ y $(S^1)^\kappa$ son continuos para cualquier número cardinal κ. En particular, el *toro* $S^1 \times S^1$ es un continuo (véase la figura 45).

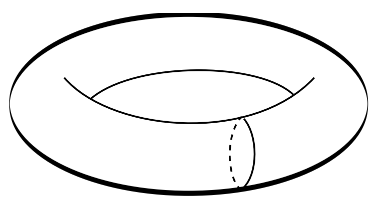

Figura 45. El toro topológico es un continuo.

8.38. Ejemplos.

(1) Los subespacios conexos de $\mathbb{R}$ son el vacío, los subconjuntos unipuntuales y los intervalos; y los intervalos compactos en $\mathbb{R}$ son los intervalos cerrados acotados. Así, los subconjuntos continuos de $\mathbb{R}$ son exactamente el vacío, los subconjuntos unipuntuales y todos los intervalos $[a, b]$ con $a < b$.

(2) Como ya vimos en 8.30, los espacios conexos por trayectorias son conexos, pero es claro que no necesariamente son compactos como es el caso de $\mathbb{R}$. Por otro lado, los subconjuntos convexos

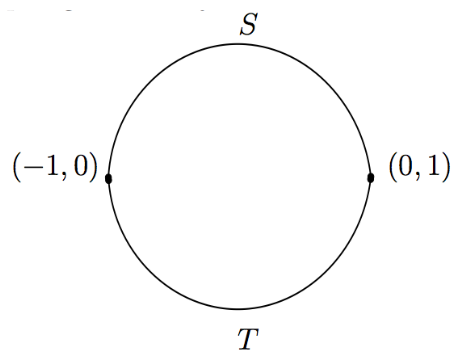

FIGURA 46. La intersección de dos continuos puede ser incluso un conjunto disconexo.

de $\mathbb{R}^n$ son conexos, y por el teorema de Heine-Borel todo cerrado y acotado en $\mathbb{R}^n$ es compacto. Por lo tanto, todo convexo cerrado y acotado en $\mathbb{R}^n$ es un continuo. En particular, cualquier bola cerrada en $\mathbb{R}^n$ es un continuo.

La intersección de dos continuos no necesariamente es un espacio conexo. Por ejemplo, los semicírculos unitarios $S = \{e^{ix} : x \in [0, \pi]\}$ y $T = \{e^{ix} : x \in [\pi, 2\pi]\}$ son conexos pero su intersección es el conjunto disconexo $\{(-1, 0), (1, 0)\}$, como se puede apreciar en la figura 46. Sin embargo, cuando intersectamos continuos relacionados de manera conveniente, obtenemos espacios conexos como veremos en lo que sigue.

Recordemos que una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de un conjunto X es *dirigida* (con respecto a la relación $\subseteq$) si para cada $F, G \in \mathcal{F}$, existe $H \in \mathcal{F}$ tal que $H \subseteq F \cap G$ (observe que una familia dirigida no vacía formada por conjuntos no vacíos es una base de filtro). La familia $\mathcal{F}$ es una *cadena* (con respecto a la relación $\subseteq$) si para cada $F, G \in \mathcal{F}$, ó $F \subseteq G$ ó $G \subseteq F$.

8.39. LEMA. *Sea $\mathcal{K} = \{K_j : j \in J\}$ una colección de subconjuntos compactos de un espacio Hausdorff X tal que $\bigcap_{j \in J} K_j \neq \emptyset$. Si U es un abierto de X que contiene a $\bigcap_{j \in J} K_j$, entonces existe un subconjunto S de J finito, tal que $\bigcap_{j \in S} K_s \subseteq U$.*

Demostración. Fijemos $K \in \mathcal{K}$ y supongamos que el lema es falso. Sea $\mathfrak{H}$ la colección de subfamilias finitas de $\mathcal{K}$. La colección $\{(\bigcap \mathcal{H}) \cap (K \setminus U) : \mathcal{H} \in \mathfrak{H}\}$ es una colección de cerrados con la propiedad de la intersección finita del compacto Hausdorff K. Por la proposición 7.3 existe un punto en $(\bigcap \mathcal{K}) \cap (K \setminus U)$, lo cual es una contradicción pues habíamos supuesto que $\bigcap \mathcal{K}$ está contenido en U. ⊠

8.40. Proposición. *Sea $\mathcal{C} = \{C_j : j \in J\}$ una familia dirigida de continuos no vacíos en un espacio Hausdorff X. Entonces $\bigcap_{j \in J} C_j$ es un continuo no vacío.*

Demostración. Por la proposición 7.3, el conjunto $Z = \bigcap_{j \in J} C_j$ no es vacío y además es un espacio Hausdorff compacto. De esta manera, sólo resta probar que Z es conexo. Fijemos un $Y \in \mathcal{C}$ y sea (U, V) una separación de Z. El espacio Z es un compacto T_2 y U y V son subconjuntos compactos y ajenos de Y. Por el corolario 7.8 (inciso (2)) podemos encontrar dos subconjuntos abiertos ajenos en Y, A y B, tales que $U \subseteq A$ y $V \subseteq B$. Ahora tenemos que $Z = \bigcap_{j \in J}(C_j \cap Y) \subseteq A \cup B$. Consideremos la familia $\mathcal{C}' = \{C_j \cap Y : j \in J\}$ de compactos en el espacio Hausdorff Y. El lema 8.39 nos asegura que podemos encontrar una colección finita $C_{j_1} \cap Y, ..., C_{j_k} \cap Y$ de elementos de $\mathcal{C}'$ tal que $\bigcap_{i=1}^{k}(C_{j_i} \cap Y) \subseteq A \cup B$. Pero la colección $\mathcal{C}$ es dirigida; así, existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $C \subseteq \bigcap_{i=1}^{i=k}(C_{j_i} \cap Y) \subseteq A \cup B$. Como C es conexo, ó $C \subseteq A$ ó $C \subseteq B$. Digamos que $C \subseteq A$. Pero $V \subseteq Z \cap B \subseteq C \cap B$ y $V \neq \emptyset$; es decir, $C \cap B \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. ⊠

8.41. Corolario. *Sean X un espacio T_2 y $\mathcal{C} = \{C_j : j \in J\}$ una familia de continuos no vacíos contenidos en X. Supongamos además que $\mathcal{C}$ es una cadena. Entonces $\bigcap_{j \in J} C_j$ es un continuo no vacío.*

Nuestro siguiente corolario requiere de las nociones de sistema inverso de espacios topológicos y de límite de un sistema inverso de espacios; a continuación establecemos estas nociones.

Primero, recordemos que un conjunto parcialmente ordenado $(\Sigma, \leqslant)$ es un *conjunto dirigido* si para cada dos elemento ρ, θ en Σ, existe $\sigma \in \Sigma$ que satisface $\rho \leqslant \sigma$ y $\theta \leqslant \sigma$. Naturalmente, cualquier conjunto linealmente ordenado es un conjunto dirigido.

8.42. Definición. Sea $(\Sigma, \leqslant)$ un conjunto dirigido. Suponga que $\{X_\alpha : \alpha \in \Sigma\}$ es una familia de espacios topológicos y que para todos los puntos $\rho, \theta \in \Sigma$, con $\rho \leqslant \theta$, existe una función continua $\pi_\rho^\theta : X_\theta \to X_\rho$. La familia $S = \{X_\sigma, \pi_\sigma^\rho, \Sigma\}$ es un *sistema inverso de espacios* topológicos si se satisfacen las siguientes condiciones:

(1) para todo $\rho, \theta, \sigma \in \Sigma$ con $\rho \leqslant \theta \leqslant \sigma$ se tiene que $\pi_\rho^\theta \circ \pi_\theta^\sigma = \pi_\rho^\sigma$,
(2) $\pi_\sigma^\sigma = \mathrm{id}_{X_\sigma}$ para todo $\sigma \in \Sigma$.

Si $S = \{X_\sigma, \pi_\sigma^\rho, \Sigma\}$ es un sistema inverso de espacios topológicos, un punto x del producto topológico $\prod_{\sigma\in\Sigma} X_\sigma$ es un *hilo del sistema inverso* S si para todo $\theta, \rho \in \Sigma$ con $\rho \leqslant \theta$ se tiene que $\pi_\rho^\theta(\pi_\theta(x)) = \pi_\rho(x)$, donde $\pi_\theta : \prod_{\sigma\in\Sigma} X_\sigma \to X_\theta$ y $\pi_\rho : \prod_{\sigma\in\Sigma} X_\sigma \to X_\rho$ son las proyecciones a los factores X_θ y X_ρ del producto $\prod_{\sigma\in\Sigma} X_\sigma$, respectivamente. Es decir, si $S = \{X_\sigma, \pi_\sigma^\rho, \Sigma\}$ es un sistema inverso y si $\rho \leqslant \theta$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\prod_{\sigma\in\Sigma} X_\sigma \arrow[r, "\pi_\theta"] \arrow[dr, "\pi_\rho"'] & X_\theta \arrow[d, "\pi_\rho^\theta"] \\
 & X_\rho
\end{tikzcd}$$

Dado un sistema inverso $S = \{X_\sigma, \pi_\sigma^\rho, \Sigma\}$, el subespacio de $\prod_{\sigma\in\Sigma} X_\sigma$ formado por todos los hilos del sistema inverso S es conocido como *límite del sistema inverso* S, y denotado con $\varprojlim S$ o con $\varprojlim\{X_\sigma, \pi_\sigma^\rho, \Sigma\}$, es decir

$$\varprojlim S = \{x \in \prod_{\sigma\in\Sigma} X_\sigma : \pi_\rho^\theta(\pi_\theta(x)) = \pi_\rho(x) \text{ para todo } \theta, \rho \in \Sigma \text{ con } \rho \leqslant \theta\}$$

Nuestro siguiente corolario establece que el límite de un sistema inverso de continuos es un continuo.

8.43. Corolario. *El límite de un sistema inverso $S = \{X_\sigma, \pi_\rho^\sigma, \Sigma\}$ de continuos es un continuo.*

Demostración. Sea $X = \prod_{\sigma\in\Sigma} X_\sigma$ y para cada $\theta \in \Sigma$ sea

$$Z_\theta = \{x \in X : \pi_\tau^\theta(x_\theta) = \pi_\tau(x) \text{ para cada } \tau \leqslant \theta\}.$$

Tomemos el conjunto $\Sigma_\theta = \Sigma \setminus \{\sigma \in \Sigma : \sigma < \theta\}$. Observe que el producto $\prod_{\sigma\in\Sigma_\theta} X_\sigma$ es un continuo, y la función $\phi : \prod_{\sigma\in\Sigma_\theta} X_\sigma \to Z_\theta$ que manda a cada $x \in \prod_{\sigma \in \Sigma_\theta} X_\sigma$ al punto $\phi(x) \in Z_\theta$, en donde

$$\pi_\sigma(\phi(x)) = \begin{cases} \pi_\sigma(x) & \text{para } \sigma \in \Sigma_\theta \\ \pi_\sigma^\theta(\pi_\theta(x)) & \text{para cada } \sigma \leqslant \theta, \end{cases}$$

es continua y suprayectiva. Inferimos que para cada $\theta \in \Sigma$, Z_θ es un continuo. Además, como Σ es un conjunto dirigido y $Z_\rho \subseteq Z_\theta$ si $\rho \leqslant \theta$, así lo es también la colección $\{Z_\theta : \theta \in \Sigma\}$. Entonces, por la proposición 8.40, $\bigcap_{\theta \in \Sigma} Z_\theta$ es un continuo. Pero este último espacio es igual a $\varprojlim\{X_\sigma, \pi_\sigma^\rho, \Sigma\}$. ⊠

Un ejemplo clásico de un continuo que es el límite inverso de continuos lo podemos describir como sigue.

Sea $g : [0,1] \to [0,1]$ la función definida como (ver figura 47):

$$g(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2(1-x) & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

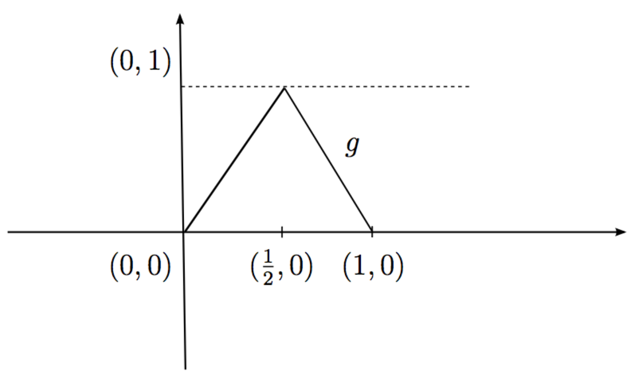

Figura 47. Gáfica de la función $g : [0,1] \to [0,1]$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $X_n = [0,1]$ y $f_n^{n+1} = g$. Al límite inverso

$$\varprojlim\{X_n, f_n^{n+1}, \mathbb{N}\}$$

se le conoce como el continuo de Knaster (véase la figura 48). Para una discusión más extensa del particular consulte [28] (ejemplo 1.36).

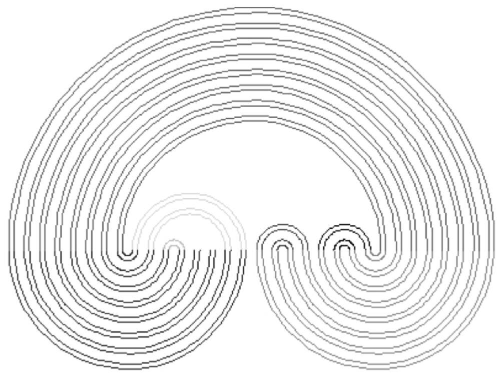

FIGURA 48. Una representación gráfica del continuo de Knaster.

En la sección 2 definimos las componentes conexas de un espacio X. Ahora introduciremos un nuevo concepto relacionado estrechamente con las componentes conexas y que nos será de gran utilidad.

Para un espacio topológico X y un punto $x \in X$, *la quasi-componente* Q_x del punto x en X es la intersección de la colección de cerrado-abiertos en X que contienen a x. Observe que Q_x es siempre cerrado pues es la intersección de una colección de subconjuntos cerrados de X, y no es vacía pues $x \in Q_x$.

8.44. PROPOSICIÓN. *La componente conexa C_x de un punto x en un espacio topológico X está contenida en la quasi-componente Q_x de x.*

DEMOSTRACIÓN. Naturalmente, si $Q_x = X$ no hay nada que demostrar. De lo contrario, si A es un cerrado-abierto que contiene a x y es diferente de X, entonces $(A, X \setminus A)$ es una separación de X. Por la proposición 8.10 y como $x \in C_x \cap A$, se debe cumplir que $C_x \subseteq A$. Podemos ahora concluir que $C_x \subseteq Q_x$. ⊠

En un espacio discreto X la quasi-componente de un punto x es claramente $\{x\}$. Es decir, en un espacio discreto, componentes y quasi-componentes coinciden. Lo mismo sucede en la línea de Sorgenfrey y en cualquier conjunto con la topología cofinita. Pero esto no es siempre así. Por ejemplo, dejamos al lector demostrar (ver ejercicio 8.D.(2)) que en el subespacio

$$Y = (\{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}) \times [0,1] \setminus \{(0, \tfrac{1}{2})\}$$

de $\mathbb{R}^2$ (véase la figura 49) la componente del punto $(0,0)$ es igual a $\{(0,y) : 0 \leqslant y < \frac{1}{2}\}$ y la quasi-componente de $(0,0)$ es

$$\{(0,y) : 0 \leqslant y < \tfrac{1}{2}\} \cup \{(0,y) : \tfrac{1}{2} < y \leqslant 1\}.$$

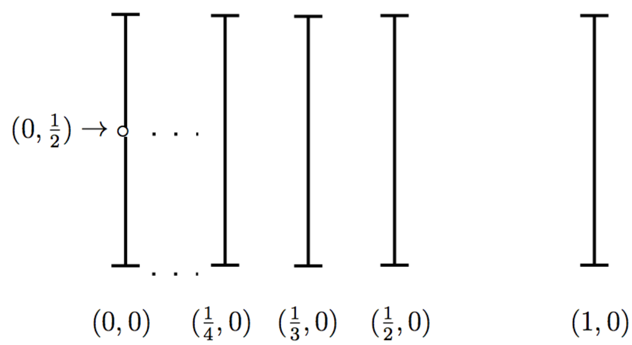

Figura 49. En este espacio la componente del punto $(0,0)$ es diferente a su quasi-componente.

Sin embargo, cuando consideramos espacios compactos T_2 las componentes y las quasicomponentes coinciden, como veremos en la siguiente proposición (obsérvese que el ejemplo Y del párrafo anterior, es un espacio localmente compacto y no compacto).

8.45. Proposición. *Para un espacio Hausdorff compacto X y cualquier $x \in X$, la componente conexa C_x y la quasi-componente conexa Q_x son iguales.*

Demostración. En virtud de la proposición 8.44 sólo necesitamos demostrar la relación $Q_x \subseteq C_x$. Para ello, probaremos que Q_x es conexo. Supongamos que A y B son dos subconjuntos cerrados de Q_x ajenos, que cubren a Q_x y $x \in A$. Obtenemos que A y B son cerrados en X ya que Q_x es cerrado en X. Como X es un espacio normal, existen abiertos ajenos U y V tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$; por lo tanto, $Q_x \subseteq U \cup V$. Ahora bien, el lema 8.39 nos garantiza que una subcolección finita $\mathcal{G}$ de

$$\mathcal{F} = \{W \subseteq X : x \in W \text{ y } W \text{ es cerrado-abierto en } X\}$$

satisface $\bigcap \mathcal{G} \subseteq U \cup V$. El conjunto $G = \bigcap \mathcal{G}$ es claramente cerrado-abierto y además

$$\mathrm{cl}(U \cap G) \subseteq \mathrm{cl}(U) \cap G = \mathrm{cl}(U) \cap (U \cup V) \cap G = U \cap G.$$

Esto significa que $U \cap G$ es un cerrado-abierto. Como $x \in U \cap G$, entonces $Q_x \subseteq U \cap G$. Además $B \subseteq Q_x \subseteq U \cap G$, $B \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$. Todo esto implica que $B = \emptyset$. Concluimos que Q_x es conexo. ⊠

8.46. Ejemplo. Es claro que ningun espacio conexo puede ser la unión de una colección finita de subconjuntos cerrados ajenos (o equivalentemente, no puede ser la unión de una colección finita de abiertos ajenos). Sin embargo, existen espacios conexos que son uniones numerables de continuos dos a dos ajenos. Un ejemplo de esto es el llamado *peine roto* que se define como sigue: sea $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ una numeración del conjunto de números racionales contenidos en el intervalo $[0,1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea J_n el segmento de línea en $\mathbb{R}^2$ que une al punto $(q_n, 1)$ con el punto $(q_n, 1/n)$; es decir,

$$J_n = \{(q_n, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{n} \leqslant y \leqslant 1\}.$$

Consideremos además el intervalo $J = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$. Se define el peine roto como el subespacio $X = J \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n$ de $\mathbb{R}^2$ (véase la figura 50). Es claro que tanto J como cada J_n es un continuo. Así, X es una unión numerable de continuos dos a dos ajenos. Demostremos ahora que el peine roto X es un espacio conexo:

Demostración. Supongamos lo contrario y sea (U,V) una separación de X. Como J es conexo, debe estar contenido totalmente en U o en V. Digamos que $J \subseteq U$. Por la misma razón, para cada $n \in \mathbb{N}$, ó $J_n \subseteq U$ ó $J_n \subseteq V$. Como V no es vacío, podemos tomar $t \in \mathbb{N}$ tal que $J_t \subseteq V$. Resulta que el punto $w = (q_t, 1) \in V$. Como V es un subconjunto abierto de X, existe $\epsilon > 0$ tal que $X \cap B(w, \epsilon)$ está contenido en V. Pero esto significa que para cada racional r en $[0,1]$ cuya distancia a q_t es menor que ϵ debe cumplirse $(r,1) \in V$; esto implica que si $r = q_m$, entonces $J_m \subseteq V$.

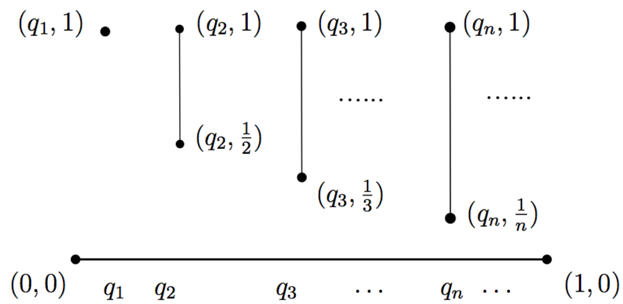

Figura 50. Peine roto.

Afirmación: $(q_t, 0) \in V$.

En efecto, sea A una vecindad de $(q_t, 0)$ en X. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que A es de la forma

$$X \cap [(q_t - \delta, q_t + \delta) \times [0, \delta)]$$

para alguna $\delta < \epsilon$. Como existe una cantidad infinita de números racionales en $[0, 1] \cap (q_t - \delta, q_t + \delta)$, existe un número natural k tal que el racional q_k es un elemento de $[0, 1] \cap (q_t - \delta, q_t + \delta)$ y $\frac{1}{k} < \delta$. Pero esto significa que el punto $(q_k, \frac{1}{k})$ pertenece a A. Observe que $(q_k, \frac{1}{k})$ también es un elemento de V. Por lo tanto, hemos demostrado que $(q_t, 0) \in cl_X V$. Pero V es cerrado en X, así que $(q_t, 0) \in V$, lo cual es una contradicción pues por hipótesis $(q_t, 0) \in U$ y $U \cap V = \emptyset$. ⊠

El peine roto no es localmente compacto, pero es posible construir en $\mathbb{R}^3$ un subespacio conexo, localmente compacto (y, naturalmente, métrico separable) que es unión de una colección numerable de continuos ajenos como se puede ver el ejemplo 2.75 de [30].

Demostraremos en el teorema 8.49 que un continuo no puede ser escrito como la unión numerable de subespacios cerrados ajenos dos a dos. Para demostrar este resultado debido a Sierpiński, necesitamos dos lemas.

8.47. Lema. *Si A es un subconjunto cerrado de un continuo X tal que $\emptyset \neq A \neq X$, entonces cualquier componente conexa C del espacio A satisface que $C \cap \mathrm{fr}(A) \neq \emptyset$.*

Demostración. Sea x_0 un punto en C. Consideremos la colección $\mathcal{F}$ de cerrado-abiertos de A que contienen a x_0. De la proposición 8.45 se sigue que $C = \bigcap \mathcal{F}$. Supongamos que $C \cap \mathrm{fr}(A) = \emptyset$. Como la familia $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de la intersección finita y $\mathrm{fr}(A)$ es un compacto, existe un $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \cap \mathrm{fr}(A) = \emptyset$. Tomemos ahora un abierto U de X que cumple $U \cap A = F$. La igualdad $F \cap \mathrm{fr}(A) = \emptyset$ implica que $F = U \cap \mathrm{int}(A)$, lo cual significa que F es un abierto en X. Pero F también es cerrado en X. Además estamos suponiendo que X es conexo, así que $F = X$. Pero esto implica que $\mathrm{fr}(A) = \emptyset$, lo cual no es posible. $\boxtimes$

8.48. Lema. *Si un continuo X está cubierto por una sucesión de subconjuntos cerrados ajenos por pares $F_1, F_2, ..., F_n, ...$ de los cuales al menos dos no son vacíos, entonces para cada $i \in \mathbb{N}$ existe un continuo $C \subseteq X$ tal que $C \cap F_i = \emptyset$ y al menos dos de los subconjuntos $C \cap F_1, C \cap F_2, \ldots, C \cap F_n, \ldots$ no son vacíos.*

Demostración. Sea i un número natural. Si $F_i = \emptyset$, entonces tomamos $C = X$ y obtenemos lo deseado. Supongamos pues que $F_i \neq \emptyset$, y sea $j \in \mathbb{N}$ tal que F_j tampoco es vacío. Por las propiedades de X es posible encontrar dos subconjuntos abiertos U y V de X tales que $F_i \subseteq U$, $F_j \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$. Sea x un punto en F_j y sea C la componente conexa de x en el subespacio $\mathrm{cl}(V)$. Claramente, C es un continuo, $C \cap F_i = \emptyset$ y $C \cap F_j \neq \emptyset$. Por el lema 8.47 tenemos que $C \cap \mathrm{fr}(\mathrm{cl}(V)) \neq \emptyset$. Como $F_j \subseteq \mathrm{int}(\mathrm{cl}(V))$ y $X = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} F_l$, debe existir $k \neq j$ para el cual $C \cap F_k \neq \emptyset$. $\boxtimes$

Ahora sí estamos en condiciones de demostrar el teorema de Sierpiński.

8.49. Teorema (Sierpiński, [56]). *Si $\{F_i : i \in \mathbb{N}\}$ es una colección de subconjuntos cerrados no vacíos ajenos dos a dos en un continuo X, entonces $X \neq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i$.*

Demostración. Supongamos lo contrario; es decir, $X = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i$, en donde la colección $\mathcal{F} = \{F_i : i \in \mathbb{N}\}$ es una partición de X formada por subconjuntos cerrados de X, y por lo menos dos elementos en $\mathcal{F}$ no son vacíos. Como X es conexo, la colección de elementos en $\mathcal{F}$ que no son vacíos es infinita. Así, sin pérdida de generalidad podemos suponer que cada F_i es no vacío. Por el lema 8.48, existe un continuo $C_1 \subseteq X$ tal que $C_1 \cap F_1 = \emptyset$ y por lo menos dos conjuntos de la sucesión $C_1 \cap F_1, C_1 \cap F_2, ...$ no son vacíos. Entonces, el continuo C_1 es igual a $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}(C_1 \cap F_i)$, y C_1 y $\{C_1 \cap F_i : i \in \mathbb{N}\}$ satisfacen las condiciones del lema 8.48, así que es posible encontrar un continuo $C_2 \subseteq C_1$ tal que $C_2 \cap (C_1 \cap F_2) = C_2 \cap F_2 = \emptyset$ y la sucesión $C_2 \cap F_1, C_2 \cap F_2, ...$ contiene por lo menos dos elementos no vacíos. De esta forma es posible construir una sucesión $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \cdots \supseteq C_n \cdots$ de continuos contenidos en X tales que $C_i \cap F_i = \emptyset$ y $C_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Esto significa que

$$(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} C_i) \cap (\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i) = \emptyset.$$

Esto es, $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} C_i = \emptyset$. Pero por la compacidad de X, se debe cumplir que $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} C_i \neq \emptyset$; lo cual es una contradicción. ⊠

5. Espacios hereditariamente disconexos, totalmente disconexos y 0-dimensionales

Despues de analizar clases de espacios topológicos que localmente no pueden ser partidos en varias piezas alejadas unas de otras, centraremos nuestra atención en ciertos espacios que tienen características totalmente opuestas. Estudiaremos ahora tres clases de espacios con diferentes grados de disconexidad. Estas son las clases de los espacios hereditariamente disconexos, los espacios totalmente disconexos y la clase de los espacios 0-dimensionales. Estas clases de espacios se definen en términos de sus componentes conexas, de sus quasi-componentes conexas y en términos de sus subconjuntos cerrado-abiertos. Es importante hacer notar aquí que la terminología que estamos empleando no es universalmente utilizada. Nuestra terminología concuerda con [26], pero en otras obras, a lo que aquí llamamos espacios hereditariamente disconexos se les llama espacios totalmente disconexos.

8.50. Definición. Un espacio topológico X es *hereditariamente disconexo* si para cada $x \in X$, la componente conexa de x en X, C_x, coincide con $\{x\}$. Un espacio X es *totalmente disconexo* si sus quasi-componentes son subconjuntos unipuntuales. Finalmente, un espacio X *es* 0*-dimensional* si es T_1 y posee una base formada por cerrado-abiertos.

Los espacios hereditariamente disconexos fueron introducidos por Hausdorff en 1914 ([33]), y los espacios totalmente disconexos y los 0-dimensionales fueron introducidos por Sierpiński en 1921 ([57]).

Observe que los espacios hereditariamente disconexos y los totalmente disconexos son espacios T_1 ya que cada conjunto unipuntual coincide con una componente conexa, y estas son cerradas en X. De las definiciones también se observa que los espacios totalmente disconexos y los 0-dimensionales son espacios que poseen muchos subconjuntos cerrado-abiertos. Los espacios totalmente disconexos son los espacios que tienen la propiedad de que cada punto en ellos posee una pseudobase formada por subconjuntos cerrado-abiertos.

Los espacios discretos, el conjunto de Cantor $\mathbf{C}$, los racionales $\mathbb{Q}$, la línea de Sorgenfrey y los espacios de ordinales, son ejemplos de espacios 0-dimensionales. Además, note que cualquier espacio 0-dimensional T_1 es Tychonoff, ya que en dichos espacios las funciones características de los conjuntos cerrado-abiertos son continuas. Por otro lado, es fácil darse cuenta que cualquier espacio conexo con más de un punto no satisface ninguna de las propiedades aquí tratadas. El lector puede demostrar que cada espacio 0-dimensional es totalmente disconexo, y la disconexidad total implica la disconexidad hereditaria (ver ejercicio 8.E.(1)). Los recíprocos de las implicaciones anteriores no se cumplen, como veremos en el ejemplo 8.56.

8.51. Proposición. *Cualquier subespacio de un espacio hereditariamente disconexo (respectivamente, totalmente disconexo,* 0*-dimensional), es hereditariamente disconexo (respectivamente, totalmente disconexo,* 0*-dimensional).*

Demostración. Daremos la demostración para espacios hereditariamente disconexos. Las otras demostraciones se dejan como ejercicio (ver 8.E.(2)). Sea X un espacio hereditariamente disconexo y $Y \subseteq X$. Si C es un subespacio conexo de Y, entonces es un subespacio conexo de X. Deducimos que C tiene cardinalidad $\leqslant 1$. Es decir, Y es hereditariamente disconexo. $\boxtimes$

Las propiedades definidas en 8.50 no son preservadas por funciones continuas ya que cualquier espacio discreto satisface cualquiera de estas propiedades y, por ejemplo, $\mathbb{R}$ no satisface ninguna de ellas por ser conexo, pero $\mathbb{R}$ es la imagen continua de un discreto de cardinalidad $\mathfrak{c}$ (véase también la proposición 8.55). No obstante es fácil probar que estas tres propiedades sí se preservan por homeomorfismos, es decir, las tres son propiedades topológicas.

8.52. Proposición. *La suma topológica libre $X = \bigoplus_{j\in J} X_j$ de cualquier familia de espacios $\{X_j : j \in J\}$ es hereditariamente disconexo (respectivamente, totalmente disconexo, 0-dimensional) si, y sólo si, cada sumando es hereditariamente disconexo (respectivamente, totalmente disconexo, 0-dimensional).*

Demostración. Si X satisface alguna de las propiedades propuestas, entonces, como cada sumando X_j de X es una copia homeomorfa del espacio X_j, obtenemos nuestra conclusión de la proposición 8.51. El recíproco se obtiene ya que cada sumando es un subespacio cerrado-abierto de X. ⊠

8.53. Proposición. *El producto topológico $X = \prod_{j\in J} X_j$ de cualquier familia de espacios $\{X_j : j \in J\}$ es hereditariamente disconexo (respectivamente, totalmente disconexo, 0-dimensional) si y sólo si cada factor es hereditariamente disconexo (respectivamente, totalmente disconexo, 0-dimensional).*

Demostración. Cada espacio X_j es homeomorfo a un subespacio de X (véase el ejercicio 4.C.2). Esto implica que si X satisface una de las propiedades enumeradas, cada X_j la satisface también (proposición 8.51).

Supongamos ahora que cada X_j es 0-dimensional. Para cada $j \in J$, sea $\mathcal{B}_j$ una base de X_j formada por subconjuntos cerrado-abiertos. Así una base para X es la colección de todos los conjuntos de la forma

$$\pi_{j_1}^{-1}[A_1] \cap ... \cap \pi_{j_k}^{-1}[A_k],$$

en donde $k \in \mathbb{N}$, $j_1, ..., j_k \in J$, y $A_i \in \mathcal{B}_{j_i}$ para cada $i \in \{1, ..., k\}$. Pero cada conjunto de esta forma es tanto abierto como cerrado pues es un abierto básico que es producto de cerrados, con lo cual terminamos la demostración.

Dejamos al lector demostrar que X es hereditariamente disconexo (respectivamente, totalmente disconexo) cuando cada factor X_j es hereditariamente disconexo (respectivamente, totalmente disconexo); véanse los ejercicios 8.D.(1).(b) y 8.D.(1).(c). $\boxtimes$

8.54. Ejemplo. Sea κ un número cardinal. Del teorema anterior obtenemos que el cubo de Cantor de peso κ, 2^κ, el espacio $\mathbb{N}^\kappa$ y el espacio de Baire de peso κ, κ^ω, son espacios 0-dimensionales.

Recordemos que el conjunto de Cantor $\mathbf{C}$ puede ser representado como el subespacio de $[0,1]$ formado por todos los números que son sumas de la forma $\Sigma_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i}$ en donde $x_i \in \{0,2\}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Sabemos que $\mathbf{C}$ es homeomorfo al producto topológico 2^ω, como se afirma en el ejercicio 7.A.(6). Veremos a continuación una importante relación entre 2^ω y el intervalo cerrado $[0,1]$, la cual nos generará una relación entre el conjunto de Cantor $\mathbf{C}$ y el compacto $[0,1]$.

8.55. Proposición. *La aplicación* $h : 2^\omega \to [0,1]$ *definida por*

$$h(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{2^{n+1}}$$

para cada $f \in 2^\omega$, *es una función continua y suprayectiva. En consecuencia, el espacio* $[0,1]$ *es imagen continua del conjunto de Cantor* $\mathbf{C}$.

Demostración. Cada número en $[0,1]$ tiene una expresión de la forma

$$\sum_{i=0}^{\infty} \tfrac{x_i}{2^{i+1}}$$

con cada $x_i \in \{0,1\}$; luego h es suprayectiva.

Ahora sean $f \in 2^\omega$ arbitaria y $\epsilon > 0$. Tomemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} < \epsilon$. Note que $\sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} = \frac{1}{2^n} < \epsilon$. Observe también que el conjunto $B = \pi_0^{-1}[\{f(0)\}] \cap ... \cap \pi_{n-1}^{-1}[\{f(n-1)\}]$ es un subconjunto abierto de 2^ω que contiene a f. Además, si $g \in B$, entonces

$$|h(f) - h(g)| = |\sum_{i=0}^{\infty} \tfrac{f(i)}{2^{i+1}} - \sum_{i=0}^{\infty} \tfrac{g(i)}{2^{i+1}}| \leqslant \sum_{i=n}^{\infty} \tfrac{|f(i)-g(i)|}{2^{i+1}} \leqslant \sum_{i=n}^{\infty} \tfrac{1}{2^{i+1}} < \epsilon.$$

Lo cual significa que h es continua. $\boxtimes$

Como $\mathbf{C}$ es compacto T_2, la función h de la proposición anterior es perfecta. Así podemos concluir que la disconexidad hereditaria, la disconexidad total, y la 0-dimensionalidad no son preservadas necesariamente por funciones perfectas.

Veamos ahora algunos ejemplos que nos mostrarán que las clases de espacios tratadas en esta sección son en efecto clases diferentes. Aquí daremos su descripción y en los ejercicios 8.E.(5) y 8.E.(6) se pedirá al lector que demuestre las afirmaciones hechas sobre estos espacios.

8.56. Ejemplo.

(1) *La tienda de Knaster-Kuratowski* [43]. Veamos primero un ejemplo de un espacio métrico separable que es hereditariamente disconexo y que no es totalmente disconexo.

Como siempre, denotamos por $\mathbf{C}$ al conjunto de Cantor. Recuerde que el conjunto de Cantor se obtiene a partir del intervalo $[0,1]$ removiendo de este conjunto una colección numerable de intervalos abiertos (veáse el ejemplo 7.5). Llamemos Q al conjunto de todos los puntos finales de los intervalos abiertos que son removidos en la construcción del conjunto $\mathbf{C}$; de manera más precisa:

$$Q = \{\tfrac{1+3^k}{3^n}, \tfrac{2+3^k}{3^n} : n \in \mathbb{N} \text{ y } k = 0, \ldots, n-1\}.$$

Sean $P = \mathbf{C} \setminus Q$ y $q = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Para cada $c \in \mathbf{C}$ sea L_c el segmento de línea recta en $\mathbb{R}^2$ que une a $(c, 0)$ con q. Si $c \in Q$, tomamos

$$K_c = \{(x, y) \in L_c : y \in \mathbb{Q}\}.$$

Si $c \in P$, definimos

$$K_c = \{(x, y) \in L_c : y \in \mathbb{P}\}.$$

El espacio

$$K = \bigcup_{c \in \mathbf{C}} K_c$$

de $\mathbb{R}^2$ es llamado *tienda de Knaster-Kuratowski*. El espacio K es conexo y el espacio $K \setminus \{q\}$ es hereditariamente disconexo y no es totalmente disconexo.

(2) (*El espacio de Erdös* [27]) Un espacio métrico separable que es totalmente disconexo y no es 0-dimensional: Consideremos el

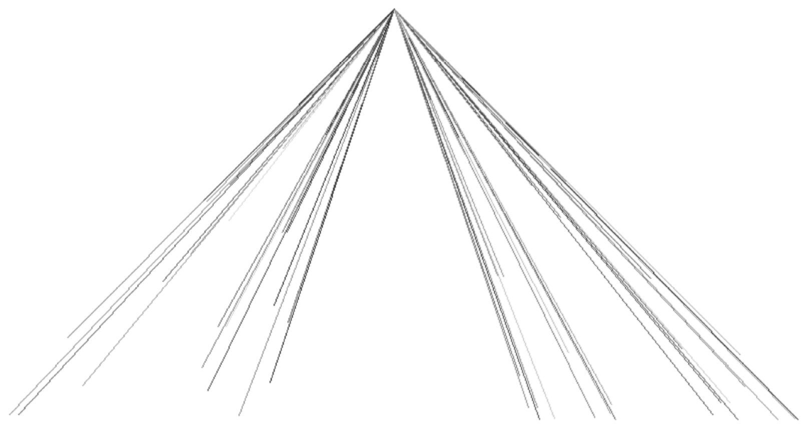

Figura 51. Una representación gráfica de la tienda de Knaster-Kuratowski.

espacio de Hilbert H que está constituido de todas las sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales que satisfacen $\Sigma_{n\in\mathbb{N}} x_n^2 \in \mathbb{R}$, con la métrica ρ definida como

$$\rho(x,y) = \sqrt{\Sigma_{n\in\mathbb{N}}(x_n - y_n)^2}$$

en donde $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

El ejemplo deseado es el subespacio X cuyos elementos son las sucesiones infinitas $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números racionales que pertenecen a H.

Una consecuencia de la proposición 8.45 es la siguiente (véase el ejercicio 8.E.(3)):

8.57. Proposición. *Sea X un espacio compacto T_2. Entonces X es hereditariamente disconexo si y sólo si X es totalmente disconexo.*

Este último resultado puede mejorarse como veremos en lo que sigue.

Un espacio X es *periféricamente compacto* si cada punto $x \in X$ tiene una base local de vecindades $\mathcal{V}$ tal que para cada $V \in \mathcal{V}$, el subespacio $\text{fr}(V)$ es compacto. Todo localmente compacto es periféricamente compacto, y la línea de Sorgenfrey es un ejemplo de espacio periféricamente compacto que no es localmente compacto.

8.58. Proposición. *Sea X un espacio periféricamente compacto. Si X es totalmente disconexo, entonces X es 0-dimensional.*

Demostración. Sea $x \in X$ y sea U una vecindad de x en X. Por hipótesis existe una vecindad V de x tal que $V \subseteq U$ y $\mathrm{fr}(V)$ es compacta. Como X es totalmente disconexo, $\mathrm{cl}(V)$ es totalmente disconexo. Por lo tanto, para cada $y \in \mathrm{fr}(V)$ existe un cerrado-abierto A_y de $\mathrm{cl}(V)$ que contiene a x y no contiene a y. La colección $\{\mathrm{cl}(V) \setminus A_y : y \in \mathrm{fr}(V)\}$ es una cubierta de $\mathrm{fr}(V)$ formada por abiertos en $\mathrm{cl}(V)$. Como $\mathrm{fr}(V)$ es compacto, existen $y_1, ..., y_k \in \mathrm{fr}(V)$ tales que $\mathrm{fr}(V) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k}(\mathrm{cl}(V) \setminus A_{y_i})$. Resulta así que $A = \bigcap_{i=1}^{k} A_{y_i}$ es un cerrado-abierto en $\mathrm{cl}(V)$ que contiene al punto x y no intersecta a $\mathrm{fr}(V)$. Por lo tanto A es una vecindad cerrado-abierta de x en X contenida en U; es decir, X es 0-dimensional. $\boxtimes$

8.59. Proposición. *Sea X un espacio localmente compacto T_2. Si X es hereditariamente disconexo, entonces X es 0-dimensional.*

Demostración. Sea $x \in X$ y sea U una vecindad de x en X. Por hipótesis existe una vecindad V de x tal que $V \subseteq U$ y $\mathrm{cl}(V)$ es compacta. Como X es hereditariamente disconexo, $\mathrm{cl}(V)$ es hereditariamente disconexo. Pero $\mathrm{cl}(V)$ es compacto T_2. Deducimos que $\mathrm{cl}(V)$ es totalmente disconexo (8.57). Por 8.58, $\mathrm{cl}(V)$ es 0-dimensional. Así, existe un cerrado-abierto A en $\mathrm{cl}(V)$ que contiene a x y contenido en $\mathrm{int}(V)$. Pero esto significa que A es un cerrado-abierto en X contenido en U; es decir, X es 0-dimensional. $\boxtimes$

Terminamos esta sección probando que cada espacio 0-dimensionale es un subespacio de algún cubo de Cantor 2^κ, en donde κ es un número cardinal. Esto se expresa diciendo que 2^κ es *un espacio universal con respecto a los espacios 0-dimensionales de peso κ.*

8.60. Teorema. *Un espacio X es 0-dimensional de peso κ si y sólo si es homeomorfo a un subespacio de 2^κ.*

Demostración. Por 8.51 y 8.53, cualquier subespacio de 2^κ es 0-dimensional. Ahora bien, 3.F.(1).(c) nos garantiza que podemos encontrar una base $\mathcal{B} = \{B_j : j \in J\}$ de X con $|J| = \kappa$ y tal que cada $B \in \mathcal{B}$ es cerrado-abierto. Para cada $j \in J$, sea $f_j : X \to \{0, 1\}$ la función definida por la fórmula

$$f_j(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B_j, \\ 0 & \text{si } x \in X \setminus B_j \end{cases}$$

El lema 6.22 nos garantiza que la función diagonal $f = \triangle_{j\in J} f_j$ es un encaje de X en el cubo de Cantor 2^κ. ⊠

Ejercicios

8.A. Espacios Conexos

(1) Un subconjunto A de X es diconexo si $A = H \cup K$ con $H \neq \emptyset \neq K$ y $H \cap cl_X K = \emptyset = cl_X H \cap K$.

(2) Sea $A \subseteq Y \subseteq X$. A es un subespacio conexo de X si y sólo si A es un subespacio conexo de Y.

(3) A diferencia de la compacidad, la conexidad no necesariamente aumenta el grado de separación en presencia de axiomas de separación débiles. En efecto, pruebe que el conjunto de números reales $\mathbb{R}$ con la topología que tiene como subbase todos los segmentos de la forma $(a, \rightarrow)$, $(\leftarrow, b)$ $(a, b \in \mathbb{R})$ más el conjunto $\mathbb{Q}$ de números racionales, es un espacio conexo T_2, pero no es regular.

(4) (*Funciones monótonas*) Una función continua $f : X \to Y$ es monótona si para cada $y \in Y$ la fibra $f^{-1}(y)$ es conexa. Pruebe que para cada función cociente y monótona $f : X \to Y$, y cada subconjunto conexo C de Y, $f^{-1}[C]$ es conexo.

(5) (*Conexidad y la Compactación de Stone-Čech*) Compruebe que para cada cerrado-abierto A de un espacio Tychonoff X, $\mathrm{cl}_{\beta X} A$ es cerrado-abierto en βX. Y demuestre que un espacio Tychonoff X es conexo si y sólo si βX es conexo.

(6) (*Disconexidad relativa*)

(a) Sea Y un subespacio disconexo de un espacio X. Supongamos que (U, V) es una separación de Y (en Y). Demuestre que $(cl_X U) \cap V = \emptyset$.

(b) Sea X un conjunto infinito con la topología cofinita. Sean $a, b \in X$ tales que $a \neq b$. Entonces $\{a, b\}$ es un subespacio disconexo de X pero no existen dos subconjuntos abierto ajenos U y V de X con la propiedad $a \in U$ y $b \in V$.

(c) Sea Y un subespacio disconexo y denso de un espacio X. Demuestre que existen abiertos U y V de X tales que $U \neq \emptyset \neq V$, $U \cap V = \emptyset$ y $Y \subseteq U \cup V$.

(d) Si X es un espacio metrizable y Y es un subespacio disconexo de X, entonces existen dos abiertos no vacíos ajenos U y V tales que $U \cup V \subseteq Y$, $U \cap Y \neq \emptyset$ y $V \cap Y \neq \emptyset$. (Sugerencia: sea (U', V') una separación de Y. Defina $U = \{x \in X : d(x, U') < d(x, V')\}$ y $V = \{x \in X : d(x, V') < d(x, U')\}$.

(e) La *línea larga* L es el espacio producto $[0, \omega_1] \times [0, 1)$ con el orden lexicográfico (estamos considerando en $[0, \omega_1]$ y en $[0, 1)$ sus ordenes usuales). Demuestre que L es conexo.

(f) Consideremos ahora el espacio $X = ([0, 1] \times L) \setminus \{(1, \omega_1)\}$, en donde L es la línea larga. Demuestre que:
   (i) $Y = ([0, 1] \times \{\omega_1\}) \cup (\{1\} \times L) \setminus \{(1, \omega_1)\}$ es un subespacio disconexo de X.
   (ii) Los conjuntos $F = ([0, 1] \times \{\omega_1\}) \setminus \{(1, \omega_1)\}$ y $G = (\{1\} \times L)) \setminus \{(1, \omega_1\}$ son cerrados en X. Además, F y G son conexos.
   (iii) No es posible encontrar dos abiertos ajenos en X que separen a F de G. En particular, X no es normal. (Observe que X es un espacio Tychonoff.) (Sugerencia: Sea U un abierto en X que contiene a F. Sea $\{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ una numeración exacta de $\mathbb{Q} \cap [0, 1)$. Para cada punto (r_n, ω_1) podemos encontrar un intervalo abierto I_n contenido en $[0, 1)$ y un número ordinal numerable α_n tales que $(r_n, \omega_1) \in I_n \times (\alpha_n, \omega_1] \subseteq U$. Si $sup\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\} = \alpha < \beta < \omega_1$, entonces $(1, \beta) \in G \cap cl_X U$.)

(7) (*Ejemplo de un espacio conexo T_2 numerable*)

(a) Si X es un espacio T_1 y para cualquier cerrado $F \subseteq X$ y cualquier abierto $W \subseteq X$ que contiene a F existe una sucesión $W_1, W_2, \dots$ de subconjuntos abiertos de X tal que $F \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n$ y $\operatorname{cl} W_n \subseteq W$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces el espacio X es normal. (Sugerencia: Sean A y B dos subconjuntos cerrados ajenos de X. Tome $F = A$ y $W = X \setminus B$ y construya una sucesión $W_1, W_2, \dots$ como aseguran las hipótesis de la proposición. Luego, tomando $F = B$ y $W = X \setminus A$ construya una sucesión de abiertos V_1, $V_2, \dots$ de manera análoga a la anterior. Ahora defina $G_i = W_i \setminus \bigcup_{j \leqslant i} \operatorname{cl} V_j$ y $H_i = V_i \setminus \bigcup_{j \leqslant i} \operatorname{cl} W_j$. Demuestre que los conjuntos $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_i$ y $V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_i$ son abiertos ajenos que separan a A y B.)

(b) Demuestre, usando (1), que todo espacio T_1 regular y Lindelöf es normal. En particular, cualquier espacio T_1, regular y segundo numerable es normal.
(c) Demuestre, usando (1), que cualquier espacio numerable, T_1 y regular es normal.
(d) Demuestre que cualquier espacio T_1 numerable y conexo no puede ser regular (use (3) y el comentario posterior al ejemplo 8.7).
(e) Ejemplo de un espacio numerable conexo y T_2 (y no regular por lo dicho en el inciso anterior): Sea $X = \{(r_1, r_2) \in \mathbb{Q}^2 : r_2 \geqslant 0\}$. Para cualquier $x = (r_1, r_2) \in X$ y para cualquier $n \in \mathbb{N}$ sea

$$\begin{aligned} U_n(x) \quad = \quad & \{x\} \cup \{(r,0) : |r - (r_1 - \tfrac{r_2}{\sqrt{3}})| < \tfrac{1}{n}\} \cup \{(r,0) : \\ & |r - (r_1 + \tfrac{r_2}{\sqrt{3}})| < \tfrac{1}{n}\}. \end{aligned}$$

Demuestre que la colección $\{\mathcal{B}(x) : x \in X\}$, en donde $\mathcal{B}(x) = \{U_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$, es una base para una topología $\mathcal{T}$ de X. Pruebe que $\mathcal{T}$ es T_2 y que para cada x y y en X, diferentes, y cada dos i, j en $\mathbb{N}$,

$$\mathrm{cl}(U_i(x)) \cap \mathrm{cl}(U_j(y)) \neq \emptyset.$$

8.B. Espacios localmente conexos

(1) Compruebe que un espacio X es localmente conexo si y sólo si cada $x \in X$ tiene una base local de vecindades abiertas conexas.
(2) Demuestre que las componentes conexas de un espacio topológico constituyen una partición de X.
(3) Sea X un espacio topológico. Definimos en X la relación de equivalencia $x \sim y$ si y sólo si $C_x = C_y$. Pruebe que si $\overline{x} \in X/\!\sim$, entonces $C_{\overline{x}} = \{\overline{x}\}$.
(4) Demuestre el Corolario 8.24.
(5) Demuestre que cualquier espacio con más de un punto que posee una base formada por conjuntos cerrado-abiertos no es localmente conexo.

8.C. Espacios conexos por trayectorias

(1) Pruebe que la imagen continua de un espacio conexo por trayectorias es también conexo por trayectorias.
(2) Sea $\mathcal{C}$ una familia de subespacios conexos por trayectorias de un espacio X. Si $\bigcap_{C\in\mathcal{C}} C$ no es vacío, entonces $\bigcup_{C\in\mathcal{C}} C$ es conexo por trayectorias.
(3) Demuestre que la cerradura de un subespacio conexo por trayectorias no es necesariamente conexo por trayectorias.

(4) Para cada punto x en un espacio topológico X, podemos definir *la componente por trayectorias del punto* x, T_x, como la unión de todos los subconjuntos conexos por trayectorias de X que contienen a x. Demuestre que $\{T_x : x \in X\}$ forma una partición de X pero que no necesariamente cada T_x es cerrado en X. Además, T_x está contenida en C_x para cada $x \in X$.
(5) Un espacio X es localmente conexo por trayectorias si y sólo si cada componente por trayectorias de cada abierto en X es un subconjunto abierto.
(6) Demuestre que las componentes por trayectorias de un espacio X son abiertas (y por lo tanto también cerradas) si y sólo si cada punto de X tiene una vecindad conexa por trayectorias.
(7) Sea $\{X_s : s \in S\}$ una familia finita de espacios topológicos con $\prod_{s\in S} X_s \neq \emptyset$. Pruebe que $X = \prod_{s\in S} X_s$ es conexo por trayectorias si y sólo si cada X_s es conexo por trayectorias.
(8) ¿Es cierto el inciso anterior si $|S| \geqslant \aleph_0$?

8.D. Continuos

(1) (*Componentes y quasi-componentes conexas*)
   (a) Demuestre que el subespacio Y de $\mathbb{R}^2$ definido antes de la proposición 8.45 es un espacio localmente compacto cuyas componentes y quasi-componentes no coinciden.
   (b) Demuestre que en un espacio producto $\prod_{j\in J} X_j$, la componente conexa de un punto $(x_j)_{j\in J}$ es igual al producto de las componentes conexas de las coordenadas.
   (c) ¿Es cierta la proposición en el inciso anterior si cada vez que aparece *componente conexa* ponemos *quasi-componente conexa*?
   (d) En un espacio localmente compacto, las componentes y las cuasi-componentes coinciden.
(2) Demuestre que en el subespacio $Y = (\{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}) \times [0,1] \setminus \{(0, \frac{1}{2})\}$ de $\mathbb{R}^2$ (véase la figura 49) la componente del punto $(0,0)$ es igual a $\{(0,y) : 0 \leqslant y < \frac{1}{2}\}$ y la quasi-componente de $(0,0)$ es $\{(0,y) : 0 \leqslant y < \frac{1}{2}\} \cup \{(0,y) : \frac{1}{2} < y \leqslant 1\}$.
(3) Verifique que el espacio K del ejemplo 8.46, el peine roto, no es localmente compacto.
(4) (*Continuos irreducibles*) Un continuo K, subespacio de un espacio X, es *irreducible* con respecto a un subconjunto A de X si $A \subseteq K$ y ningún subcontinuo propio de K contiene a A.

   Demuestre que para cada continuo K y cada subconjunto A de K, existe un subcontinuo Y de K irreducible con respecto a A.

(Sugerencia: Considere, en el conjunto de subcontinuos de K que contienen a A, la relación de orden $Y_1 \leqslant Y_2$ si y sólo si $Y_2 \subseteq Y_1$. Aplique el Lema de Zorn.)

(5) (*Puntos de corte*) Un punto p en un espacio X conexo y T_1 es un *punto de corte de* X si el espacio $X \setminus \{p\}$ no es conexo.

(a) Supongamos que K es un continuo y que p es un punto de corte de K. Sea (U, V) una separación de $K \setminus \{p\}$. Compruebe que los subespacios $U \cup \{p\}$ y $V \cup \{p\}$ son continuos.
(Sugerencia: Considere la función $f : K \to U \cup \{p\}$ definida por $f(x) = x$ si $x \in U \cup \{p\}$ y $f(x) = p$ si $x \in V$. Demuestre que f es continua.)

(b) Sea X un continuo que contiene más de un punto. Pruebe que para cada $x \in X$, existe un punto $y \in X \setminus \{x\}$ que no es de corte.
(Sugerencia: Considere la colección $\mathcal{C}$ de subcontinuos propios de X que contienen a x. Ordenamos a $\mathcal{C}$ con la relación $C_1 \leqslant C_2$ si $C_1 \subseteq \operatorname{int} C_2$. Ahora demuestre que es posible tomar una cadena maximal $\mathcal{C}_0$ contenida en $\mathcal{C}$. Considere $\bigcup \mathcal{C}_0$.)

(c) Concluya del inciso anterior que cada continuo con más de un punto contiene por lo menos dos puntos que no son de corte.

(6) (*Caracterización del intervalo* $[0, 1]$ *como continuo métrico con sólo dos puntos de corte*) Demuestre que cualquier continuo separable $(X, \mathcal{T})$ con exactamente dos puntos que no son de corte, es homeomorfo al intervalo $[0, 1]$.

(Sugerencia: Sean a y b los elementos de X que no son puntos de corte. Para cada $x \in X \setminus \{a, b\}$, existe una separación (A_x, B_x) de $X \setminus \{x\}$ tal que $a \in A_x$ y $b \in B_x$. Es decir, $X \setminus \{x\} = A_x \cup B_x$, $A_x \cap B_x = \emptyset$ y A_x y B_x son subconjuntos abiertos de $X \setminus \{x\}$. Definimos en X una relación de orden: para $x, y \in X \setminus \{a, b\}$ diferentes, $x < y$ significa $A_x \subseteq A_y$. Además, para cada $x \in X$, definimos $a < x < b$. Demuestre que la relación $<$ así definida es una relación de orden lineal en X, y que la topología definida por $<$ coincide con la topología original $\mathcal{T}$ de X. Ahora utilice el ejercicio 8.F.(4) y concluya que X es homeomorfo a $[0, 1]$.)

8.E. Espacios hereditariamente disconexos, totalmente disconexos y 0-dimensionales

(1) Demostrar que cada espacio 0-dimensional es totalmente disconexo, y la disconexidad total implica la disconexidad hereditaria.

(2) Cualquier subespacio de un espacio totalmente disconexo (respectivamente, 0-dimensional), es totalmente disconexo (respectivamente, 0-dimensional).

(3) Demostrar de manera directa la proposición 8.57.

(4) (*Espacios fuertemente* 0*-dimensionales*) Un espacio Tychonoff no vacío X es *fuertemente* 0*-dimensional* si cada cubierta finita de X formada por subconjuntos co-cero, tiene un refinamiento finito formado por abiertos disjuntos por pares (claro está, cada uno de estos abiertos es cerrado-abierto).

  (a) Sea X un espacio fuertemente 0-dimensionales. Sean $A, B \subseteq X$ tales que existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(a) = 0$ para cualquier $a \in A$ y $f(b) = 1$ para todo $b \in B$. Entonces, existe un cerrado-abierto U tal que $A \subseteq U$ y $B \cap U = \emptyset$.

  (b) El recíproco del inciso anterior es cierto: Un espacio no vacío X es fuertemente 0-dimensional si para cada dos subconjuntos A y B de X tales que existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(a) = 0$ para cualquier $a \in A$ y $f(b) = 1$ para todo $b \in B$, podemos encontrar un cerrado-abierto U tal que $A \subseteq U$ y $B \cap U = \emptyset$.

  (c) Supongamos que X es un espacio fuertemente 0-dimensional, y sea Y un subespacio de X C^*-encajado en X; es decir, cualquier función continua $f : Y \to [0,1]$ tiene una extensión continua a todo X. Compruebe que, entonces, Y es fuertemente 0-dimensional.

  (d) Cada espacio fuertemente 0-dimensional es 0-dimensional.

  (e) Cada 0-dimensional Lindelöf es fuertemente 0-dimensional.

  (f) Cada espacio numerable no vacío regular es fuertemente 0-dimensional.

  (g) Demuestre que la Línea de Sorgenfrey $\mathcal{L}_\mathbb{S}$ es un espacio fuertemente 0-dimensional.
  (Sugerencia: Demuestre que $\mathcal{L}_\mathbb{S}$ es 0-dimensional y aplique 7.24.7.)

  (h) Un espacio Tychonoff no vacío X es fuertemente 0-dimensional si y sólo si βX es 0-dimensional (si, y sólo si, βX es fuertemente 0-dimensional).

(5) (*La tienda de Knaster-Kuratowski*) Consideremos la tienda de Knaster-Kuratowski $K = \bigcup_{c \in \mathbf{C}} K_c$ como fue definida en el ejemplo 8.56

  (a) Supongamos que A y B son dos subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}^2$ que satisfacen $K = K \cap (A \cup B)$, $(K \cap A) \cap (K \cap B) = \emptyset$, con $q \in A$. Enumeramos a los números racionales en el intervalo $[0,1]$: $\{r_n : n \in \mathbb{N}\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $T_n = \{(x, r_n) : x \in \mathbb{R}\}$ la línea horizontal que pasa por el punto $(0, r_n)$, y consideremos el conjunto $F_n = \{c \in \mathbf{C} : A \cap B \cap L_c \cap T_n \neq \emptyset\}$. Verifique que cada F_n es un subconjunto cerrado de $\mathbf{C}$ que está contenido en el conjunto P definido en 8.56.1 e $\text{int}_\mathbf{C} F_n = \emptyset$. Demuestre que

$K_c \cap B = \emptyset$ para cualquier $c \in \mathbf{C} \setminus (Q \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n))$. Ahora, usando el Teorema de categoría de Baire, deduzca que $K \cap B = \emptyset$. Concluya que K es conexo.

(b) Compruebe que el espacio $K \setminus \{q\}$ es hereditariamente disconexo.

(c) Verifique que si W es un cerrado-abierto de $K \setminus \{q\}$, entonces $q \in \operatorname{cl} W$.
(Sugerencia: Cualquier cerrado-abierto W en $K \setminus \{q\}$ tal que $q \notin \operatorname{cl} W$ induciría una separación de K.)

(d) Demuestre que $K \setminus \{q\}$ no es totalmente disconexo.

(e) Dé un ejemplo de un subconjunto cerrado-abierto de $K \setminus \{q\}$.

(6) (*El ejemplo de Erdös*) Este es un ejemplo de un espacio métrico separable que es totalmente disconexo y no es 0-dimensional. Como se mencionó en el ejemplo 8.56.2, el espacio de Hilbert H es el espacio métrico constituido por todas las sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales que satisfacen $\Sigma_{n\in\mathbb{N}} x_n^2 \in \mathbb{R}$, con la métrica ρ definida como

$$\rho(x, y) = \sqrt{\Sigma_{n\in\mathbb{N}}(x_n - y_n)^2}$$

en donde $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Sea X igual al subespacio $\{(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H : r_n \in \mathbb{Q}\ \forall n \in \mathbb{N}\}$.

(a) Demuestre que para un $n_0 \in \mathbb{N}$ y un $t \in \mathbb{P}$,

$$W(n_0, t) = \{(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X : r_{n_0} < t\}$$

es un subconjunto cerrado-abierto de X.

(b) Sea $x = (r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un elemento fijo de X. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $F_n = \{t \in \mathbb{P} : r_n < t\}$. Pruebe que la colección $\{W(n, t) : n \in \mathbb{N} \text{ y } t \in F_n\}$ es una pseudobase de x. Concluya que X es totalmente disconexo.

(c) Sea $\overline{0}$ el elemento de X cuyas coordenadas son iguales a 0. Sea V la bola centrada en $\overline{0}$ y de radio 1: $B(\overline{0}, 1) = \{(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X : \Sigma_{i=1}^{\infty} r_i^2 < 1\}$. Y sea U un subconjunto abierto que contiene a $\overline{0}$ y contenido en V. Sean $a_1, a_2, ..., a_m$ números racionales tales que $(a_1, ..., a_m, 0, 0, ...) \in U$. Para cada $i \in \{0, 1, ..., m+1\}$ sea $x^i = (a_1, ..., a_m, \frac{i}{m+1}, 0, 0...)$. Observe que para algún $i \in \{0, 1, ..., m+1\}$, $x^i \in U$ y $x^{i+1} \notin U$. Construya, por inducción, una sucesión $0 = a_1, a_2, a_3, ...$ de números racionales tales que

$$x_k = (a_1, a_2, ..., a_k, 0, 0, ...) \in U \text{ y } \rho(x_k, X \setminus U) \leqslant \tfrac{1}{k}.$$

(d) Demuestre que $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es un elemento de X que pertenece a la frontera de U. Deduzca que X no es 0-dimensional.

Ejercicios adicionales del capítulo 8

8.F. Conexidad en espacios linealmente ordenados

Una *cortadura* en un espacio topológico linealmente ordenado $(X, \leqslant, \mathcal{T}_{\leqslant})$ es una pareja (A, B) de subconjuntos de X tal que $X = A \cup B$ y si $x \in A$ y $y \in B$, entonces $x < y$. A la cortadura (A, B) se le llama *propia* si además $A \neq \emptyset \neq B$. Una cortadura propia (A, B) de X es un *salto* si A tiene un último elemento y B tiene un primer elemento. Y una cortadura (A, B) de X es *un hueco interior* si A no tiene último elemento y B no tiene primer elemento. Si (A, B) es un salto, entonces el primer elemento de B es el sucesor inmediato en X del último elemento de A; y viceversa, si b es el sucesor inmediato de a, entonces (A, B) en donde $A = \{x \in X : x \leqslant a\}$ y $B = \{x \in X : x \geqslant b\}$ es un salto. Un espacio $(X, \leqslant, \mathcal{T}_{\leqslant})$ es *densamente ordenado* si ninguna cortadura es un salto. Y $(X, \leqslant, \mathcal{T}_{\leqslant})$ es *continuamente ordenado* si no contiene ni saltos ni huecos interiores. Por ejemplo, sea $\leqslant$ el orden usual en $\mathbb{R}$. Entonces $(\mathbb{Z}, \leqslant, \mathcal{T}_{\leqslant})$ tiene tantos saltos como enteros hay y no tiene huecos interiores. Para cada irracional r la pareja (A, B), con $A = \{q \in \mathbb{Q} : q < r\}$ y $B = \{q \in \mathbb{Q} : q > r\}$ es un hueco interno de $(\mathbb{Q}, \leqslant, \mathcal{T}_{\leqslant})$, y $(\mathbb{Q}, \leqslant, \mathcal{T}_{\leqslant})$ no tiene saltos. El linealmente ordenado $(\mathbb{R}, \leqslant, \mathcal{T}_{\leqslant})$ es continuamente ordenado.

(1) Verifique que un espacio linealmente ordenado $(X, \leqslant, \mathcal{T}_{\leqslant})$ es homeomorfo a $\mathbb{Z}$ si y sólo si X es numerable y cada $x \in X$ satisface una de las siguientes condiciones:
  (a) x es el primer elemento en X y tiene sucesor inmediato.
  (b) x es el último elemento en X y tiene antecesor inmediato.
  (c) x no es ni primer ni último elemento y tiene un sucesor y un predecesor inmediatos.

Observe que no es lo mismo hablar de homeomorfismo entre espacios topológicos linealmente ordenados que hablar de *isomorfismo lineal*. Dos espacios linealmente ordenados $(X, \leqslant_X)$ y $(Y, \leqslant_Y)$ son *isomorfos* si existe una función biyectiva $h : X \to Y$ tal que $h(x) <_Y h(z)$ si $x <_X z$. Naturalmente, si $\mathcal{T}$ es la topología generada por $\leqslant_X$ y $\mathcal{S}$ es aquella generada por $\leqslant_Y$, entonces cualquier isomorfismo de orden entre $(X, \leqslant_X)$ y $(Y, \leqslant_Y)$ es también un homeomorfismo entre $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{S})$; el recíproco no es cierto. En efecto, $\mathbb{Z}$ con su topología del orden es homeomorfo a $\mathbb{N}$ con su topología del orden, pero ellos no son isomorfos pues uno posee un primer elemento y el otro no.

(2) Demuestre que un espacio linealmente ordenado $(X, \leqslant, \mathcal{T}_{\leqslant})$ es isomorfo a $\mathbb{Q}$ si y sólo si X es numerable, densamente ordenado y no posee ni primer ni último elemento. Y el espacio $(X, \leqslant, \mathcal{T}_{\leqslant})$ es homeomorfo a $\mathbb{Q}$ si es numerable y densamente ordenado.

(3) Pruebe que un espacio linealmente ordenado $(X, \leqslant, \mathcal{T}_{\leqslant})$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$ si es continuamente ordenado, separable y no posee ni primer ni último elemento. Demuestre que si h es un homeomorfismo entre $\mathbb{R}$ y $(X, \leqslant, \mathcal{T}_{\leqslant})$, entonces h es un isomorfismo de orden.

(Sugerencia: Sea D el subespacio denso numerable de X. Demuestre que D con el orden heredado de X es densamente ordenado y no posee ni primer ni último elemento. Establezca una relación conveniente entre las cortaduras propias de D y las de $\mathbb{Q}$.)

(4) Demuestre que un espacio linealmente ordenado $(X, \leqslant, \mathcal{T}_{\leqslant})$ es homeomorfo a $[0, 1]$ si y sólo si X es un continuo separable, si y sólo si X es continuamente ordenado, separable y tiene primer y último elemento.

(5) Demuestre que un espacio linealmente ordenado $(X, \leqslant, \mathcal{T}_{\leqslant})$ es conexo si, y sólo si, es continuamente ordenado.

(6) Demuestre que un espacio linealmente ordenado $(X, \leqslant, \mathcal{T}_{\leqslant})$ es conexo por trayectorias si, y sólo si, es continuamente ordenado y cada intervalo (a, b) en él es separable.

(7) Demuestre que en un espacio linealmente ordenado las condiciones de disconexidad hereditaria, total disconexidad y 0-dimensionalidad son equivalentes.

(8) Sea (A, B) una cortadura de $(X, \leqslant, \mathcal{T}_{\leqslant})$. Para dos elementos a y b en X, la expresión $a < (A, B) < b$ significa $a \in A$ y $b \in B$. Un espacio $(X, \leqslant, \mathcal{T}_{\leqslant})$ es 0-dimensional si y sólo si para cada a, x, b en X con $a < x < b$, existen cortaduras (A, B) y (C, D) en X tales que $a < (A, B) < x < (C, D) < b$.

(9) Compruebe que la línea larga descrita en 6(6e) es un ejemplo de un espacio linealmente ordenado, conexo por trayectorias, localmente conexo y no es separable.

8.G. Grupos topológicos conexos

Sea $(G, \mathcal{T}, \cdot)$ un grupo topológico.

(1) La componente conexa C de la identidad e en G es un subgrupo normal cerrado de G.

(Sugerencia: Use la continuidad de la función inversa y de la función producto para demostrar que C^{-1} y aC están contenidos en C para cualquier $a \in C$.)

(2) El grupo cociente G/C es hereditariamente disconexo.

(Sugerencia: Demuestre que la aplicación canónica $\pi : G \to G/C$ es abierta por ser C cerrado en G.)

(3) Cualquier subgrupo abierto H de G es cerrado.

(Sugerencia: Demuestre que $G \setminus H = \bigcup_{a \in G \setminus H} aH$.)

(4) Una vecindad compacta cerrada-abierta U de e en G contiene un subgrupo cerrado-abierto H.

(Sugerencia: Demuestre que existe una vecindad simétrica V de e tal que $UV \subseteq U$. Concluya que $\bigcup_{n=1}^{\infty} V^n \subseteq U$.)

(5) Si G es localmente compacto y hereditariamente disconexo, entonces la colección de subgrupos abierto-cerrados de G es una base local de e.

(6) Si G es localmente compacto, entonces C es la intersección de los subgrupos cerrado-abiertos de G.

(7) Si G es localmente compacto, entonces son equivalentes
   (a) G es conexo,
   (b) No existe subgrupo cerrado-abierto propio de G,
   (c) $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n$ para cualquier vecindad abierta V de e.

Apéndice **A**

Tópicos de teoría de conjuntos

Este capítulo está diseñado con la idea de que se puedan hallar en él todos los resultados básicos sobre teoría de conjuntos que son necesarios para la buena lectura de esta obra. Sin embargo, es importante señalar que se dan pocas demostraciones y que se deja la tarea de elaborar aquellas que no aparecen. Sugerimos al lector interesado en profundizar en los diferentes temas tratados en este apartado la consulta de los libros [11], [36], [39], [40], [42], [44].

Las primeras secciones del apéndice están dedicadas a enunciar resultados básicos sobre conjuntos, relaciones, funciones y producto cartesiano. En las secciones 5 y 7 se discute sobre cardinalidad de conjuntos y aritmética de números cardinales; en la sección 6 se examina someramente el axioma de elección y en 8 tratamos los números ordinales.

Como es usual, los símbolos $\wedge$, $\vee$, $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ y $\iff$ deberán leerse: y, o, para todo, existe, implica y si y sólo si, respectivamente.

1. Conjuntos

El método más preciso para estudiar a los conjuntos es el axiomático; sin embargo, para los fines de este texto nos bastará contar con una idea intuitiva de éstos: *"Por un conjunto se entiende un agrupamiento en un todo de objetos que distingue con claridad nuestra intuición o nuestro pensamiento"* (G. Cantor [14]). En este texto, usamos las palabras *colección* y *familia* como sinónimos de conjunto. Al lector interesado en una introducción axiomática, cuidadosa y básica de la Teoría de los Conjuntos, le recomendamos la consulta de [36] y [39], para un primer acercamiento, o de [44], para un estudio más avanzado. La referencia [11] también es un texto introductorio; en ella se enfatiza la parte lógica del tema.

Las colecciones $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, de números naturales, $\mathbb{R}$, de números reales y $\mathbb{P}$, de números irracionales, son ejemplos de conjuntos.

Si A es un conjunto y x es un objeto de A, a x le llamaremos elemento o punto de A y el símbolo $x \in A$ deberá leerse *x es un elemento de A.*

Dados dos conjuntos A y B, si cualquier elemento de A pertenece también a B, decimos que A es un subconjunto de B. A este hecho corresponde el símbolo $A \subseteq B$. Si A y B tienen los mismos elementos entonces decimos que A y B son iguales, y escribimos $A = B$. Esto es equivalente a $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

Si $A \subseteq B$ pero $A \neq B$ entonces decimos que A es un *subconjunto propio* de B; en símbolos $A \subsetneqq B$.

El conjunto $\mathbb{Z} = \{\ldots, -n, \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ de números enteros es un subconjunto del conjunto de números racionales

$$\mathbb{Q} = \{\tfrac{m}{n} : m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N}\}.$$

Con respecto a la inclusión tenemos que para conjuntos A, B, C, se cumplen las siguientes condiciones.

A.1. Proposición.

(1) $A \subseteq A$;
(2) *si* $A \subseteq B$ *y* $B \subseteq A$ *entonces* $A = B$; *y*
(3) *si* $A \subseteq B$ *y* $B \subseteq C$ *entonces* $A \subseteq C$.

Consideremos también como conjunto a la colección que carece de elementos: $\{x : x \neq x\}$. A este conjunto lo denotaremos por $\emptyset$ y le llamaremos *conjunto vacío*. Afirmamos que si A es un conjunto, entonces $\emptyset \subseteq A$; en efecto, la única forma de que esto último no suceda es que $\emptyset$ *tenga un elemento* que no esté en A; situación absurda.

Sea X un conjunto. Denotaremos por $\mathcal{P}(X)$ a la colección de subconjuntos de X. A este conjunto le llamaremos *el conjunto potencia* de X. Por ejemplo, si $X = \{1, 2, 3\}$, entonces

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}.$$

Si A y B son subconjuntos de X, denotamos por $A \cup B$ al conjunto *unión* de A y B, que definimos como

$$A \cup B = \{x \in X : x \in A \vee x \in B\}.$$

Denotamos por $A \cap B$ al conjunto *intersección* de A y B, que es el conjunto de puntos en X que pertenecen tanto a A como a B, es decir,

$$A \cap B = \{x \in X : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Finalmente, $A \backslash B$ denota la *diferencia* de los dos conjuntos y es la colección de puntos que pertenecen a A, pero no a B:

$$A \backslash B = \{x \in X : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Al conjunto $X \backslash A$ le llamamos el *complemento* de A en X.

Con respecto a estas operaciones de conjuntos, se pueden demostrar las siguientes reglas.

A.2. Proposición. *Para cualesquiera tres conjuntos A, B y C, se cumplen las siguientes relaciones:*

(1) *Conmutatividad:*
   (a) $A \cup B = B \cup A$
   (b) $A \cap B = B \cap A$
(2) *Asociatividad:*
   (a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
   (b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
(3) *Distributividad:*
   (a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   (b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
(4) *Fórmulas de De Morgan:*
   (a) $C\backslash(A \cup B) = (C\backslash A) \cap (C\backslash B)$
   (b) $C\backslash(A \cap B) = (C\backslash A) \cup (C\backslash B)$

Demostración. Las demostraciones son sencillas y sólo desarrollaremos, a manera de ejemplo, la correspondiente a 4-(a): $x \in C\backslash(A \cup B) \iff x \in C \wedge x \notin A \cup B \iff x \in C \wedge x \notin A \wedge x \notin B \iff x \in C \wedge x \notin A \wedge x \in C \wedge x \notin B \iff x \in C \setminus A \wedge x \in C \setminus B \iff x \in (C\backslash A) \cap (C\backslash B)$. ⊠

Definimos a continuación las nociones de unión e intersección de familias de conjuntos.

Sea $\mathcal{C}$ una colección cuyos elementos son conjuntos. Entonces la *unión de los conjuntos que pertenecen a* $\mathcal{C}$, $\bigcup \mathcal{C}$, es el conjunto de elementos o puntos que pertenecen a alguno de los conjuntos en $\mathcal{C}$, es decir,

$$\bigcup \mathcal{C} = \{x : \exists E \in \mathcal{C} \text{ tal que } x \in E\}.$$

La *intersección de los conjuntos que pertenecen a una colección no vacía* $\mathcal{C}$ es la colección de puntos que pertenece a todos y cada uno de los elementos de $\mathcal{C}$:

$$\bigcap \mathcal{C} = \{x : \forall E \in \mathcal{C},\ x \in E\}.$$

Esta definición sólo tiene sentido cuando la familia $\mathcal{C}$ es no vacía. *Así, en este texto, cualquier expresión del tipo $\bigcap \mathcal{C}$ contiene implícitamente la condición $\mathcal{C} \neq \emptyset$.*

Algunas notaciones que se emplean con frecuencia para la unión de la colección $\mathcal{C}$ son $\bigcup\{E : E \in \mathcal{C}\}$ y $\bigcup_{E \in \mathcal{C}} E$; análogamente, para la intersección se puede usar $\bigcap\{E : E \in \mathcal{C}\}$ ó $\bigcap_{E \in \mathcal{C}} E$. En el caso en que los elementos de $\mathcal{C}$ están indicados por los elementos de un conjunto J, por ejemplo $\mathcal{C} = \{E_j : j \in J\}$, se suele escribir a $\bigcup \mathcal{C}$ como $\bigcup\{E_j : j \in J\}$ o como $\bigcup_{j \in J} E_j$, y a $\bigcap \mathcal{C}$ como $\bigcap\{E_j : j \in J\}$ o como $\bigcap_{j \in J} E_j$.

Los símbolos $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ deben ser entendidos como $\bigcup\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $\bigcap\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$, respectivamente.

Los resultados de la proposición A.2 se cumplen también para una colección cualquiera de conjuntos. Así, por ejemplo, las reglas distributivas y las fórmulas de De Morgan quedan expresadas en este caso de la siguiente manera:

A.3. Proposición.

(1) $A \cap \bigcup \mathcal{C} = \bigcup\{A \cap E : E \in \mathcal{C}\}$.
(2) $A \cup \bigcap \mathcal{C} = \bigcap\{A \cup E : E \in \mathcal{C}\}$.
(3) $B \setminus \bigcup \mathcal{C} = \bigcap\{B \setminus E : E \in \mathcal{C}\}$.
(4) $B \setminus \bigcap \mathcal{C} = \bigcup\{B \setminus E : E \in \mathcal{C}\}$.

2. Producto cartesiano de dos conjuntos

Sean A y B dos conjuntos. Para cada elemento $a \in A$ y cada elemento $b \in B$ podemos considerar un nuevo objeto (a, b), que llamaremos *pareja ordenada*. Las parejas ordenadas están determinadas por la condición siguiente: $(a, b) = (c, d)$ si, y sólo si, $a = c$ y $b = d$. En particular, $(a, b) = (b, a)$ si, y sólo si, $a = b$.

Al conjunto de parejas ordenadas (a, b), donde $a \in A$ y $b \in B$ se le suele llamar *producto cartesiano* de los conjuntos A y B, y lo denotamos por $A \times B$. En el caso en que $A = B$, el conjunto $A \times B$ se denota también como A^2.

Es importante observar que si A es cualquier conjunto, entonces

$$\emptyset \times A = \{(a, b) : a \in \emptyset \wedge b \in A\} = \emptyset,$$

puesto que la condición $a \in \emptyset$ no puede ser satisfecha. Un razonamiento análogo muestra que $A \times \emptyset = \emptyset$.

Si $(a, b) \in A \times B$, a a se le llama *primera coordenada* de la pareja (a, b) y a b *segunda coordenada*.

En la siguiente proposición establecemos resultados que relacionan al producto cartesiano de conjuntos con las operaciones $\cup$, $\cap$ y $\setminus$.

A.4. Proposición. *Para cualesquiera tres conjuntos A, B y C, se tiene lo siguiente.*

(1) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
(2) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
(3) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

Demostración. A manera de ilustración demostraremos el inciso (1). $(a, b) \in A \times (B \cup C) \iff a \in A \wedge b \in B \cup C \iff a \in A \wedge (b \in B \vee b \in C) \iff (a \in A \wedge b \in B) \vee (a \in A \wedge b \in C) \iff (a, b) \in A \times B \vee (a, b) \in A \times C \iff (a, b) \in (A \times B) \cup (A \times C)$. $\boxtimes$

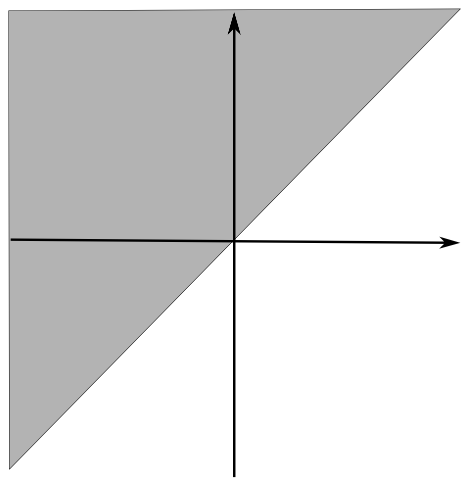

Figura 52. aRb si y sólo si $a \leqslant b$.

3. Relaciones

Una *relación R de un conjunto A en un conjunto B* es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$. La expresión $(a, b) \in R$ se denota también por aRb y decimos que *a está relacionado con b por medio de R*. En el caso en que $A = B$, decimos simplemente que R es *una relación en A*. En particular, $\emptyset$ es una relación de A en B.

El *dominio* de una relación $R \subseteq A \times B$ es el conjunto $\operatorname{dom}(R) = \{a \in A \;:\; (a, b) \in R \text{ para algún } b \in B\}$, y el *rango* es el conjunto $\operatorname{ran}(R) = \{b \in B \;:\; (a, b) \in R \text{ para algún } a \in A\}$. Además, la *relación inversa* de R es $R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \;:\; (a, b) \in R\}$.

A.5. Ejemplo. Si $A = B = \mathbb{R}$, definamos R en $\mathbb{R}$ como aRb si y sólo si $a \leqslant b$, en donde $\leqslant$ es el orden usual en $\mathbb{R}$. En este caso R es el conjunto de puntos en el plano $\mathbb{R}^2$ que se encuentran arriba de la diagonal a 45°, incluyendo a la diagonal (véase la figura 52).

A.6. Ejemplo. Si A y B son conjuntos, entonces aSb si, y sólo si, $a = b$ es una relación de A en B. En el caso $A = B = \mathbb{R}$, la relación S es precisamente la diagonal a 45°.

A.7. Definiciones. Sea R una relación en un conjunto A.

(1) R es llamada *reflexiva* en A si aRa para todo $a \in A$.
(2) R es una relación *simétrica* en A si para todo $a, b \in A$, aRb implica bRa.

(3) R es *antisimétrica* en A si para todo $a, b \in A$, aRb y bRa implica $a = b$.
(4) R es llamada *transitiva* en A si para todo $a, b, c \in A$, aRb y bRc implica aRc.
(5) Decimos que R es un *orden parcial* en A si es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Y en este caso se dirá que la pareja (A, R) es un *conjunto parcialmente ordenado*.
(6) R es una relación de *equivalencia* en A si es reflexiva, simétrica y transitiva.

En general, a las relaciones de orden parcial se les denota con $\leqslant$, mientras que el símbolo $\sim$ se reserva para las de equivalencia.

Un concepto ligado al de orden parcial es el de preorden. Por un *preorden* en un conjunto entendemos una relación en dicho conjunto que es reflexiva y transitiva. De esta forma todo orden parcial es un preorden. En el caso en que $\leqslant$ es un orden parcial en un conjunto A, escribimos $<$ para designar la relación en A: $a < b \Leftrightarrow a \leqslant b \wedge a \neq b$. Observe que $<$ es una relación en A que satisface

(1) $<$ es transitiva, y
(2) para $a, b \in A$, si $a < b$, entonces $b < a$ no se cumple.

A cualquier relación R en A que satisface (1) y (2) le llamamos un *orden parcial estricto* en A.

A.8. Ejemplos.

(1) La relación del ejemplo A.5 es una relación de orden parcial en $\mathbb{R}$ y en el ejemplo A.6 la relación S es una relación de equivalencia.
(2) La proposición A.1 garantiza que la relación de contención $\subseteq$ es un orden parcial en $\mathcal{P}(X)$, y $\subsetneqq$ es un orden parcial estricto en $\mathcal{P}(X)$.

A.9. Definición. Una relación de orden parcial $\leqslant$ en un conjunto X es *total* o *lineal*, y la pareja $(X, \leqslant)$ es un *conjunto totalmente ordenado* o *linealmente ordenado*, si para cualquier par $x, y \in X$ se cumple que $x \leqslant y$ ó $y \leqslant x$. Es decir, en un conjunto linealmente ordenado cualquier par de elementos son comparables por medio de la relación de orden parcial $\leqslant$.

En el ejemplo A.5 se exhibe un conjunto linealmente ordenado. En cambio, $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ es un conjunto linealmente ordenado si, y sólo si, X tiene a lo más un elemento (¿puede el lector justificar esto?).

A.10. Definición. En el caso en que tenemos dos conjuntos linealmente ordenados $(A, \leqslant_A)$ y $(B, \leqslant_B)$, podemos considerar una nueva relación $\leqslant_l$ en $A \times B$ determinada por $\leqslant_A$ y $\leqslant_B$ como sigue: $(a, b) = (c, d)$ si $a = c$ y $b = d$, y $(a, b) <_l (c, d)$ si $a <_A c$ ó si $a = c$ y $b <_B d$. La relación $\leqslant_l$ es un orden lineal y recibe el nombre de orden *lexicográfico*.

El orden lexicográfico es el orden empleado en los diccionarios. No es difícil demostrar que el conjunto $\mathbb{R}^2$ junto con el orden lexicográfico es un conjunto totalmente ordenado (se considera que $\mathbb{R}$ tiene su orden usual).

A.11. Definición. Sea $(X, \leqslant)$ un conjunto parcialmente ordenado.

(1) Un elemento b_0 en el conjunto parcialmente ordenado $(X, \leqslant)$ es *minimal* si $b \in X$ y $b \leqslant b_0$ implica $b = b_0$.
(2) Decimos que $a_0 \in X$ es *maximal* si las afirmaciones $a \in X$ y $a_0 \leqslant a$ implican $a = a_0$.
(3) Un elemento b_1 en X es una *cota inferior* de un subconjunto B de X si la proposición “$b_1 \leqslant b$ para todo $b \in B$” es cierta.
(4) El elemento b_1 es la *máxima cota inferior* (o *ínfimo*) de B si $b_1 \geqslant b_2$ para cualquier cota inferior b_2 de B.
(5) Un elemento b_3 es el *primer elemento* o *elemento mínimo* de B si $b_3 \in B$ y cada $b \in B$ cumple la relación $b_3 \leqslant b$.

Las definiciones de cota superior y de mínima cota superior de un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado se pueden deducir ahora fácilmente.

A.12. Definición. Sea $(X, \leqslant)$ un conjunto parcialmente ordenado.

(1) Un elemento a_1 en el conjunto parcialmente ordenado $(X, \leqslant)$ es una *cota superior* de un subconjunto A de X si la proposición “$a_1 \leqslant a$ para todo $a \in A$” es cierta.
(2) Un elemento a_1 es la *mínima cota superior* (o *supremo*) de A si $a_1 \leqslant a_2$ para cualquier cota superior a_2 de A.
(3) Un elemento a_3 es el *último elemento* o *elemento máximo* de A si $a_3 \in A$ y cada $a \in A$ cumple la relación $a_3 \geqslant a$.

Dado un subconjunto C de X, los símbolos $\sup C$, $\text{ínf}\, C$, $\text{máx}\, C$ y $\text{mín}\, C$ denotan al supremo, ínfimo, máximo y mínimo de C, respectivamente, de C.

A.13. Ejemplo.

(1) Sea $\leqslant$ el orden usual en el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. En este conjunto parcialmente ordenado consideremos a los subconjuntos:
   (a) $A = [0, 1]$,
   (b) $B = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$,
   (c) $C = (0, 1]$.

   El conjunto A tiene tanto primero como último elemento (0 y 1 respectivamente); por ello, A tiene ínfimo y supremo.

   Por otra parte, note que cualquier número real $x \leqslant 0$ es una cota inferior de B y que ningún elemento de B es cota inferior de B (si $x > 0$ entonces $0 < \frac{x}{2} < x$), por ello 0 es el ínfimo B. Por otro lado, es fácil probar que ningún número real es cota superior de B, por esto es que el conjunto B no tiene supremo.

El conjunto C no tiene primer elemento pero sí tiene ínfimo, el real 0 es el es ínfimo de C. Por otro lado, $1 = \text{máx}\, C = \sup C$.

(2) Considere en el conjunto $\mathbb{N}$ la siguiente relación

$$R = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \text{ existe } k \in \mathbb{N} \text{ tal que } n = k\, m\}.$$

La relación R no es más que la relación de “divisibilidad” en los números naturales. Al hecho de que $m\, R\, n$ se le denota más frecuentemente con los símbolos $m \mid n$. Es fácil probar que la relación R es un orden parcial en $\mathbb{N}$. El número 1 es el elemento mínimo de $(\mathbb{N}, R)$. Pero $(\mathbb{N}, R)$ no tiene elemento máximo.

Sea $B = \mathbb{N} \setminus \{1\}$. El conjunto B no tiene primer elemento (el 2 no es un mínimo porque $2|\, 3$ no es cierto), pero este conjunto tiene una cantidad infinita de elementos minimales (cada número primo en $\mathbb{N}$ es un elemento minimal). Además, B no tiene ni máximo ni elementos maximales.

(3) Sea A un conjunto no vacío. En A podemos considerar la relación $1_A = \{(x,x) : x \in A\}$. Esta relación es una relación de orden parcial. Si $B \subseteq A$, entonces cualquier elemento de B es un elemento minimal y maximal a la vez.

A.14. Definición. Una relación de orden lineal $\leqslant$ en un conjunto X es un *buen orden* si cada subconjunto no vacío B de X posee un primer elemento con respecto a $\leqslant$. En este caso decimos que $(X, \leqslant)$ es un *conjunto bien ordenado*.

El ejemplo clásico de un conjunto bien ordenado es el conjunto de los números naturales con su orden usual. En cambio $\mathbb{R}$ no está bien ordenado por su orden usual, ya que el intervalo $(0,1)$ carece de primer elemento.

A.15. Definición. Una *cadena* en un conjunto parcialmente ordenado $(X, \leqslant)$ es un subconjunto A de X que satisface que para cualesquiera $x, y \in A$ se tiene que $x \leqslant y$ ó $y \leqslant x$, es decir, A está totalmente ordenado por $\leqslant$.

A.16. Ejemplo. Sea X un conjunto con más de un punto. En $\mathcal{P}(X)$ consideremos el orden parcial $\leqslant$ definido mediante $A \leqslant B$ si y sólo si $A \subseteq B$. Sea $x_0 \in X$ y sea $\mathcal{A} = \{Y \in \mathcal{P}(X) : x_0 \in Y\}$. Tenemos que $\{x_0\}$ es el primer elemento de $\mathcal{A}$ y X es el último elemento de $\mathcal{A}$. Note también que X es un elemento maximal de $(\mathcal{P}(X), \leqslant)$.

Cuando consideramos los números reales $\mathbb{R}$ con su orden usual, la colección de todos los conjuntos de la forma $(a, \to) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$ con $a \in \mathbb{R}$, forma una cadena en $(\mathcal{P}(\mathbb{R}), \subseteq)$.

4. Funciones

Una *función* f de un conjunto X en un conjunto $Y \neq \emptyset$, es una relación de X en Y tal que

(1) para cada $x \in X$ existe $y \in Y$ tal que $(x, y) \in f$, y
(2) si $(x, y) \in f$ y $(x, y') \in f$ entonces $y = y'$.

Si $(x, y) \in f$, entonces a y le llamamos *imagen de x bajo f* y será denotado por $f(x)$. El símbolo $f : X \to Y$ significa que f es una función de X en Y. Para cada $A \subseteq X$, la *imagen de A bajo f*, que denotamos por $f[A]$, es el conjunto $\{f(x) : x \in A\}$. A X le llamamos el *dominio* de f que en ocasiones denotamos como $\operatorname{dom} f$, y el conjunto $f[X]$ recibe el nombre de *rango* o *imagen de f* y lo denotamos con $\operatorname{ran} f$.

Si $B \subseteq Y$, denotamos por $f^{-1}[B]$ a la colección $\{x \in X : f(x) \in B\}$ y le llamamos *imagen inversa* de B con respecto a f.

Aplicando nuestra definición tenemos que $f[\emptyset] = \{f(x) : x \in \emptyset\} = \emptyset$ y que $f^{-1}[\emptyset] = \{x : f(x) \in \emptyset\} = \emptyset$.

Para determinar una función f de X en Y podemos mencionar explícitamente qué subconjunto de $X \times Y$ es, o bien señar qué valor le corresponde a cada $x \in X$: $x \mapsto f(x)$.

Demos ahora algunos ejemplos simples.

A.17. Ejemplos.

(1) Incluimos a la relación $\emptyset$ como una función con dominio el conjunto vacío y con rango contenido en cualquier conjunto.
(2) Si $y_0 \in Y$, $f = \{(x, y_0) : x \in X\}$ es una función de X en Y, llamada *función constante y_0*.
(3) Para cualquier conjunto no vacío X, $\mathrm{id}_X(x) = x$, es una función de X en X, llamada *función identidad en X*.
(4) La asociación $x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, donde $a_i \in \mathbb{R}$ para $i \in \{0, \ldots, n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ establece una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.
(5) La relación R en $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ dada por
$$R = \{(x, \sqrt{x}) : x \in \mathbb{R}^+\} \cup \{(x, -\sqrt{x}) : x \in \mathbb{R}^+\},$$
no es una función pues a cada $x \in \mathbb{R}^+$ le estamos asociando dos valores, su raíz positiva y su raíz negativa.

A.18. Proposición. *Sea $f : X \to Y$ una función.*

(1) *Para cualesquiera $A, B \subseteq X$ se tiene lo siguiente:*
 (a) $f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$;
 (b) $f[A \cap B] \subseteq f[A] \cap f[B]$;
 (c) $f[A] \setminus f[B] \subseteq f[A \setminus B]$;
(2) *En general, si $\mathcal{C}$ es una colección de subconjuntos de X,*
 (a) $f[\bigcup \mathcal{C}] = \bigcup\{f[A] : A \in \mathcal{C}\}$;

(b) $f[\bigcap \mathcal{C}] \subseteq \bigcap\{f[A] : A \in \mathcal{C}\}$.

Demostración. Aquí demostraremos sólo el inciso (b) de (2) y dejaremos la demostración de los restantes incisos como ejercicios para el lector (vea el ejercicio A.III. inciso (1)).

Sea $y \in f[\bigcap \mathcal{C}]$; esto implica que existe $x \in \bigcap \mathcal{C}$ de tal modo que $f(x) = y$. Ahora, por la definición de intersección, se tiene que para cada $A \in \mathcal{C}$, x pertenece a A, y por ende $y = f(x) \in f[A]$. En conclusión, $y \in \bigcap\{f[A] : A \in \mathcal{C}\}$. ⊠

Es importante observar que no siempre se tiene la igualdad en (2)-(b). Por ejemplo, si $X = \{a, b\}$, $A = \{a\}$, $B = \{b\}$, $Y = \{c\}$ y $f = \{(a, c), (b, c)\}$, entonces $f[A \cap B] = \emptyset$, pero $f[A] \cap f[B] = Y$.

Con respecto a las imágenes inversas tenemos el siguiente resultado (su demostración es dejada como ejercicio al lector, vea (vea el ejercicio A.III. inciso (1)).

A.19. Proposición. *Sea $f : X \to Y$ una función.*

(1) *Si $A, B \subseteq X$, entonces*
   (a) $f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$;
   (b) $f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$;
   (c) $f^{-1}[A \setminus B] = f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B]$.

(2) *Si $\mathcal{C}$ es una colección de subconjuntos de X, entonces*
   (a) $f^{-1}[\bigcup \mathcal{C}] = \bigcup\{f^{-1}[A] : A \in \mathcal{C}\}$;
   (b) $f^{-1}[\bigcap \mathcal{C}] = \bigcap\{f^{-1}[A] : A \in \mathcal{C}\}$.

A.20. Definiciones. Sea $f : X \to Y$ una función.

(1) f es *inyectiva (uno a uno o inyección)* si para cualquier par de puntos diferentes $x, y \in X$, se tiene que $f(x) \neq f(y)$.
(2) f es *suprayectiva (sobre o suprayección)* si para cada $y \in Y$ existe $x \in X$ con la propiedad de que $f(x) = y$.
(3) f es *biyectiva (o biyección)* si es al mismo tiempo inyectiva y suprayectiva.

A.21. Ejemplos.

(1) La función id_X es biyectiva para cualquier conjunto no vacío X.
(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^3$ es una función biyectiva.
(3) La función $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida mediante $p(x, y) = x$, es un ejemplo de una función suprayectiva que no es inyectiva.

Si $f : X \to Y$ es una función biyectiva, entonces la relación

$$f^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in f\}$$

resulta ser una función con dominio Y e imagen X. Esta función relaciona cada elemento $y \in Y$ con el único elemento $x \in X$ que satisface $f(x) = y$. A

f^{-1} le llamamos *función inversa de* f. Resulta claro que f^{-1} también es una biyección.

Dadas un par de funciones $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$, podemos considerar la función *composición* $g \circ f : X \to Z$ definida por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

En el caso en que $f : X \to Y$ es una función biyectiva, tenemos que las ecuaciones $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$ y $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$ se satisfacen.

A.22. Proposición. *Si* $f : X \to Y$ *y* $g : Y \to Z$ *son un par de funciones, entonces*

(1) $(g \circ f)[A] = g[f[A]]$, *para cualquier* $A \subseteq X$, *y*
(2) $(g \circ f)^{-1}[B] = f^{-1}[g^{-1}[B]]$, *siempre que* $B \subseteq Z$.

De este resultado se infiere que la composición de funciones suprayectivas es nuevamente una función suprayectiva (basta poner $A = X$ en (1)). Y como la composición de funciones inyectivas es una función inyectiva, podemos concluir que la composición de funciones biyectivas resulta ser una función biyectiva.

A.23. Proposición. *Sea* $h = g \circ f$ *la composición de las funciones* $f : X \to Y$ *y* $g : Y \to Z$. *Entonces,*

(1) g *es suprayectiva si* h *lo es, y*
(2) f *es inyectiva si* h *lo es.*

Demostración. Si h es suprayectiva, entonces $h[X] = Z$, y por la proposición anterior tenemos que $Z = h[X] = (g \circ f)[X] = g[f[X]] \subseteq g[Y] \subseteq Z$. La conclusión es que $g[Y] = Z$ y, por ende, g es suprayectiva.

Ahora supongamos que h es inyectiva. Sean $a, b \in X$ un par de puntos que satisfacen $f(a) = f(b)$. Entonces $h(a) = g(f(a)) = g(f(b)) = h(b)$, así que la inyectividad de h garantiza que $a = b$. ⊠

Consideremos una función $f : X \to Y$ y un conjunto $A \subseteq X$. La *restricción de* f *a* A es la función $f{\restriction}A : A \to Y$, definida mediante $(f{\restriction}A)(x) = f(x)$.

A la función $\mathrm{id}_X{\restriction}A : A \to X$ se le llama *inclusión de* A *en* X y se le denota por i_A.

Ahora, si $g : A \to Y$ es una función con la propiedad de que $f{\restriction}A = g$, entonces decimos que f *es una extensión de* g *a todo* X.

5. Cardinalidad

Dado un conjunto X, nos podemos preguntar sobre el número de elementos que contiene. En el caso de conjuntos finitos, la expresión *“X tiene n elementos”* significa que es posible poner los elementos de X en correspondencia biunívoca con los elementos del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$. Esto es lo que llamamos *"contar los elementos de X"*.

En matemáticas, sin embargo, la mayoría de los conjuntos importantes con los que se trabaja no son finitos. No obstante, así como *"contar"* los elementos de un conjunto finito X significa comparar el *tamaño* de X con el *tamaño* de $\{1, \ldots, n\}$, así también es posible dar criterios por medio de los cuales podamos saber cuándo dos conjuntos cualesquiera tienen la misma *"cantidad de elementos"* o cuándo un conjunto tiene *"más elementos que otro"*. En este contexto, el conjunto de los números naturales jugará un papel importante, pues en general será nuestro referente principal cuando tratemos *"de calcular"* la *"cantidad de elementos"* de un conjunto.

A.24. Definición. Un conjunto no vacío X es *equipotente* a un conjunto Y si existe una función biyectiva de X en Y. Convenimos, además, que el único conjunto *equipotente* al conjunto $\emptyset$ es él mismo.

Se puede demostrar que para cualesquiera conjuntos X, Y y Z se satisface lo siguiente.

(1) X es equipotente a X;
(2) si X es equipotente a Y, entonces Y es equipotente a X;
(3) si X es equipotente a Y y Y es equipotente a Z, entonces X es equipotente a Z.

En otras palabras, si $\mathcal{C}$ es una colección de conjuntos, la relación "ser equipotente a" definida entre los elementos de $\mathcal{C}$, tiene todos los atributos para ser una relación de equivalencia.

La parte medular de la teoría de cardinales es asignar a cada conjunto X un objeto al que denotaremos $|X|$, de tal forma que *dos conjuntos X y Y son equipotentes si, y sólo si, sus objetos asociados coinciden, es decir,* $|X| = |Y|$. Estos objetos elegidos tendrán la propiedad de determinar cuándo dos conjuntos tienen el mismo número de elementos.

No es la intención de este libro probar que la elección antes mencionada se puede llevar a cabo; nos conformaremos con mencionar que la demostración formal puede realizarse (véase por ejemplo [36]).

Si X es un conjunto, el objeto $|X|$ será llamado *cardinalidad de X* o *el número cardinal de X*.

Intuitivamente, $|X|$ es el nombre con el cual se designa a la cantidad de elementos que posee X. Para el conjunto $\emptyset$, se tiene que $|\emptyset| = 0$. De hecho, para $X = \{1, 2, ..., n\}$, sucede que $|X| = n$. La expresión "$\mathfrak{m}$ es un número cardinal" significa que el símbolo $\mathfrak{m}$ representa la cardinalidad o el número de elementos de algún conjunto X y, claro, la de cualquier otro conjunto equipotente a X.

A.25. Ejemplos.

(1) Empleamos el símbolo $\aleph_0$ para representar la cardinalidad de $\mathbb{N}$; en otras palabras, $|\mathbb{N}| = \aleph_0$.
(2) El número cardinal de $\mathbb{R}$, $|\mathbb{R}|$, es representado con la letra c gótica: $\mathfrak{c}$.

A continuación estableceremos un criterio para comparar números cardinales.

A.26. Definiciones. Sean X y Y un par de conjuntos.

(1) Decimos que $|X| \leqslant |Y|$ si existe una función inyectiva de X en Y.
(2) Si $|X| \leqslant |Y|$ y $|X| \neq |Y|$, entonces escribimos $|X| < |Y|$.

De esta manera, si $\mathfrak{m}$ y $\mathfrak{n}$ son números cardinales, la expresión $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ significa que al tomar conjuntos X y Y que satisfacen $|X| = \mathfrak{m}$ y $|Y| = \mathfrak{n}$, podemos encontrar una función inyectiva de X en Y. La expresión $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ significa, naturalmente, que para los conjuntos X y Y, podemos encontrar una función inyectiva de X en Y, pero no existe una función biyectiva entre X y Y.

Es importante mencionar que, para cualquier conjunto Y, estamos considerando a la función $\emptyset$ como una función inyectiva con dominio el conjunto $\emptyset$ y rango incluido en Y. Es decir, para cualquier número cardinal $\mathfrak{m}$, la relación $0 \leqslant \mathfrak{m}$ es cierta.

A partir de las definiciones, no es difícil probar el siguiente resultado (véase el ejercicio A.V. inciso (1)).

A.27. Proposición. *Dados tres números cardinales* $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ *y* $\mathfrak{s}$ *se cumple:*

(1) $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{m}$, *y*
(2) $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ *y* $\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{s}$ *implica* $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{s}$.

A continuación damos algunos ejemplos básicos.

A.28. Ejemplos.

(1) Si $X \subseteq Y$, entonces $|X| \leqslant |Y|$. Esto es claro puesto que la inclusión $i_X : X \to Y$ es una función inyectiva.
(2) Para cada número natural n, el número cardinal n satisface: $n < \aleph_0$. En efecto, como $\{1, \ldots, n\} \subseteq \mathbb{N}$, ya tenemos que $n \leqslant \aleph_0$; ahora, si $f : \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{N}$ es cualquier función, entonces el número natural

$$m_0 = \max\{f(1), \ldots, f(n)\} + 1$$

satisface $m_0 \in \mathbb{N} \setminus \{f(1), \ldots, f(n)\}$, así que f no es suprayectiva y, en particular, f no es biyectiva, con lo cual $n \neq \aleph_0$.

Ahora clasificaremos a los conjuntos según la relación que su cardinalidad tiene con respecto a $\aleph_0$.

A.29. Definiciones. Sea X un conjunto.

(1) El conjunto X es *finito* si $|X| < \aleph_0$. De lo contrario diremos que X es *infinito*.
(2) Diremos que X es *numerable* si $|X| \leqslant \aleph_0$.
(3) En el caso en que $|X| = \aleph_0$, se dice que X es *infinito numerable*.
(4) Por un conjunto *más que numerable* entendemos un conjunto que no es numerable.

Consideremos el conjunto de números pares $E = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$. La función de $\mathbb{N}$ en E dada por $n \mapsto 2n$ resulta ser una biyección, así que E es un ejemplo de conjunto infinito numerable.

El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ también es un conjunto de esta categoría ya que la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida mediante $f(1) = 0$, $f(2) = 1$, $f(3) = -1$, $f(4) = 2$, $f(5) = -2$, y en general

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{1-n}{2}, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

es una biyección.

Probaremos ahora que $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ es un conjunto infinito numerable, exhibiendo una función biyectiva entre este conjunto y $\mathbb{N}$. Definamos $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mediante $g(m, n) = 2^{m-1}(2n-1)$. Para demostrar que g es inyectiva, supongamos que $g(m, n) = g(p, q)$ y, sin perder generalidad, que $m \leqslant p$. Entonces $2^{m-1}(2n-1) = 2^{p-1}(2q-1)$ y, por ende, $2n-1 = 2^{p-m}(2q-1)$. De aquí tenemos que si $p > m$, entonces el número $2^{p-m}(2q-1)$ es par, mientras que $2n-1$ es impar. Por lo tanto, debe suceder $p = m$, y con esto $2n-1 = 2q-1$, o en otras palabras $n = q$.

Dado $n \in \mathbb{N}$, sea $m = \max\{k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : 2^k \text{ es un divisor de } n\}$. La definición de m garantiza que $\frac{n}{2^m}$ es un número impar, así que debe existir un número natural p con la propiedad de que la igualdad $\frac{n}{2^m} = 2p-1$ se satisface. Con todos estos antecedentes tenemos que $g(m+1, p) = n$, y ya podemos concluir que g es suprayectiva. ⊠

Otra forma de convencernos de que los elementos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pueden ser puestos en correspondencia biunívoca con los de $\mathbb{N}$ es recurrir al diagrama de la figura 53.

Siguiendo la línea podemos establecer una función biyectiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ mediante $f(1) = (1, 1)$, $f(2) = (1, 2)$, $f(3) = (2, 1)$, $f(4) = (3, 1)$, $f(5) = (2, 2)$, $f(6) = (1, 3)$, etcétera.

El resultado que a continuación damos, conocido como Teorema de Cantor-Schröder-Bernstein, proporciona una importante herramienta para determinar cuándo dos conjuntos tienen la misma cardinalidad. La demostración del Teorema de Cantor-Schröder-Bernstein es algo compleja, por ello es que presentamos antes un lema auxiliar.

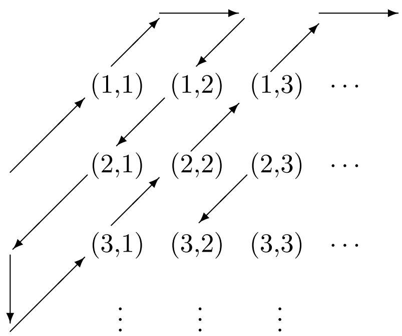

Figura 53. Una muestra gráfica de que $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = \aleph_0$.

A.30. Lema. *Si* $A_1 \subseteq B \subseteq A$ *y* $|A_1| = |A|$, *entonces* $|B| = |A|$.

Demostración. Como $|A_1| = |A|$, existe una función biyectiva $f : A \to A_1$. Por recursión, definamos dos sucesiones de conjuntos

$$A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots$$

y

$$B_0, B_1, \ldots, B_n, \ldots$$

Sean $A_0 = A$ y $B_0 = B$, y para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos

$$A_{n+1} = f[A_n] \quad \text{y} \quad B_{n+1} = f[B_n]. \tag{1}$$

Como $A_1 \subseteq B_0 \subseteq A_0$, se sigue de (1) por inducción matemática que $A_{n+1} \subseteq B_n \subseteq A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Definamos ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$C_n = A_n \setminus B_n, \quad C = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n, \quad \text{y} \quad D = A \setminus C.$$

Por (1) y el hecho de que f es una función inyectiva tenemos que $f[C_n] = C_{n+1}$. Así que

$$f[C] = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Ahora definamos $g : A \to B$ de la siguiente forma:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in C \\ x & \text{si } x \in D. \end{cases}$$

Como $g \restriction C$ y $g \restriction D$ son funciones inyectivas, y sus imágenes son conjuntos ajenos, podemos concluir que g es una función biyectiva de A sobre $f[C] \cup D = B$. ⊠

A.31. Teorema (Cantor-Schröder-Bernstein). *Si X y Y son un par de conjuntos que satisfacen $|X| \leqslant |Y|$ y $|Y| \leqslant |X|$, entonces $|X| = |Y|$.*

Demostración. Debido a que $|X| \leqslant |Y|$ y $|Y| \leqslant |X|$, existen funciones inyectivas $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$. Consideremos a la función composición $g \circ f : X \to X$. Claramente esta última función es inyectiva, y por ello, $|X| = |(g \circ f)[X]|$. Note ahora que $(g \circ f)[X] \subseteq g[Y] \subseteq X$. Aplicando el lema anterior, tenemos que $|g[Y]| = |X|$. Resta ahora notar que $|Y| = |g[Y]|$. ⊠

La Proposición A.27 y el Teorema A.31 nos dicen que cualquier conjunto de números cardinales con la relación $\leqslant$ es un conjunto parcialmente ordenado.

A.32. Ejemplo. Como una muestra de la utilidad del Teorema de Cantor-Schröder-Bernstein demostraremos que $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$. Denotemos por A a la colección de todos los números racionales positivos. Como $\mathbb{N} \subseteq A$, tenemos que $\aleph_0 \leqslant |A|$. Ahora, cada $x \in A$ puede ser expresado en forma única como $x = \frac{m_x}{n_x}$, donde m_x y n_x son un par de números naturales sin divisores comunes. Esta observación nos permite establecer una función inyectiva $x \mapsto (m_x, n_x)$ de A en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y concluir la desigualdad $|A| \leqslant \aleph_0$. Aplicando el Teorema de Cantor-Schröder-Berstein tenemos que $|A| = \aleph_0$; es decir, existe una función biyectiva $H : \mathbb{N} \to A$. Para concluir nuestra prueba definamos $G : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ mediante

$$G(n) = \begin{cases} H(n), & \text{si } n \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{si } n = 0 \\ -H(-n), & \text{si } -n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

para obtener una función biyectiva y concluir así que $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$.

De lo dicho hasta aquí concluimos:

A.33. Corolario. $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$.

Si un conjunto X tiene la misma cardinalidad que un conjunto A, entonces existe una función biyectiva $f : A \to X$, con lo cual es posible expresar a X de la forma $\{x_a : a \in A\}$, donde $x_a = f(a)$. En el caso en que X es infinito numerable esto se traduce a $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, o simplemente $X = \{x_1, x_2, \dots\}$.

El resultado final de esta sección nos asegura la existencia de un conjunto más que numerable.

A.34. TEOREMA. *El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ es un conjunto más que numerable.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el conjunto $L = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$. Como L es un subconjunto de $\mathbb{R}$, la cardinalidad de este último es mayor o igual a la de L. Por esta razón bastará probar que L es más que numerable. Para verificar que esto es cierto, demostraremos que si A es un subconjunto numerable de L, entonces $A \neq L$. Por la observación que precede a este teorema, podemos representar al conjunto A como $\{x_1, x_2, \dots\}$.

Cada número real a tiene una expansión decimal $a_0.a_1a_2a_3\dots$, de tal forma que se satisfacen las condiciones siguientes:

(a) $a_0.a_1a_2a_3\dots$ no tiene una cola infinita de nueves, es decir, no existe $N \in \mathbb{N}$ de tal modo que $a_n = 9$ para toda $n \geqslant N$; y
(b) una tal expansión para a es única; es decir, si $a = b_0.b_1b_2b_3\dots$ y $b_0.b_1b_2b_3\dots$ no tiene una cola infinita de nueves, entonces $a_n = b_n$ para cualquier $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. (Ver [59]).

(Además cada expansión decimal $a_0.a_1a_2a_3...$ que satisface (a) y (b) es un número real.)

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $0.x_{n,1}x_{n,2}x_{n,3}\dots$ la expansión decimal de $x_n \in A$ que satisface las propiedades mencionadas anteriormente. Formemos ahora el número x_0 cuya expansión decimal es

$$0.x_{0,1}x_{0,2}x_{0,3}\dots, \qquad (*)$$

donde $x_{0,n} \notin \{0, 9, x_{n,n}\}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Estas restricciones garantizan que $(*)$ es la expansión decimal de x_0 que satisface las propiedades (a) y (b) antes enunciadas. También aseguran que $x_0 \in L$ y que no existe $n \in \mathbb{N}$ que satisfaga $x_0 = x_n$; es decir, $x_0 \in L \setminus A$. ⊠

El Teorema A.34 implica que $\mathfrak{c} > \aleph_0$. Surge entonces una pregunta muy natural [14]: ¿existe algún subconjunto A de $\mathbb{R}$ cuya cardinalidad cumpla la desigualdad $\aleph_0 < |A| < \mathfrak{c}$? Georg Cantor conjeturó que la respuesta era negativa, y de esta forma se enunció por primera vez la Hipótesis del Continuo (**HC**): *no existe un subconjunto A de $\mathbb{R}$ que satisfaga $\aleph_0 < |A| < \mathfrak{c}$.* En particular, suponiendo que **HC** es cierta, los únicos subconjuntos de $\mathbb{R}$ son los finitos, los equipotentes a $\mathbb{N}$ o los equipotentes a $\mathbb{R}$.

La veracidad o falsedad de **HC** permaneció como un problema sin resolver durante muchos años. De hecho apareció como el problema 1 de la lista de problemas no resueltos que David Hilbert presentó en el célebre congreso de matemáticas de 1900 en París. En 1940 Kurt Gödel en [32] probó que la negación de **HC** no puede ser demostrada a partir de los axiomas usuales de la

Teoría de Conjuntos (aún incluyendo el Axioma de Elección) (véase la sección A.6); es decir, Gödel demostró que si los axiomas de Zermelo-Fraenkel y el Axioma de Elección (**ZFE**) forman un sistema de axiomas consistente (es decir, si a partir del conjunto de axiomas **ZFE** no se deduce un teorema T y su negación $\neg T$), entonces el conjunto de axiomas de Zermelo-Fraenkel más el Axioma de Elección más la Hipótesis del Continuo, que denotaremos con **ZFE** + **HC**, también es consistente.

Posteriormente, en 1963 Paul Cohen, [24] y [25], completó el trabajo al demostrar que a partir de estos mismos axiomas básicos, **ZFE**, es imposible demostrar **HC**; o sea, si los axiomas de Zermelo-Fraenkel y el Axioma de Elección (**ZFE**) forman un sistema de axiomas consistente, entonces **ZFE** + $\neg$ **HC** también es consistente, en donde $\neg$ **HC** es la negación de la Hipótesis del Continuo; es decir, $\neg$ **HC** es la afirmación: “existe un subconjunto A de números reales tal que $\aleph_0 < |A| < \mathfrak{c}$”.

En resumen, la Hipótesis del Continuo es una proposición independiente de los axiomas básicos **ZFE** de la Teoría de Conjuntos. (Un magnífico texto para iniciarse en lo relacionado con pruebas de independencia es [44].)

En todo este libro usamos como axiomas, sin mención explícita, el Axioma de Elección y los axiomas básicos de la Teoría de Conjuntos, llamados de Zermelo-Fraenkel. Se pueden ver los enunciados de éstos en la sección que sigue, y de manera más extensa en [39] y [36].

6. Axioma de Elección

Supongamos que estamos interesados en demostrar que si f es una función suprayectiva de X en Y, entonces $|Y| \leqslant |X|$. La prueba puede ser como sigue usando la suprayectividad de f: para cada $y \in Y$ elijamos un punto $y^* \in f^{-1}[\{y\}]$. Ahora definamos $g : Y \to X$ mediante $g(y) = y^*$. Para probar que g es inyectiva basta observar que $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ y recordar el inciso (b) del teorema A.23.

Hay un detalle en nuestra demostración que merece analizarse. Si Y es un conjunto finito, entonces la definición de la función g es producto de una sucesión finita de elecciones, y la experiencia confirma que tal proceso puede llevarse a cabo. Sin embargo, si Y es un conjunto infinito, entonces la definición de la función g implica la realización de una infinidad de selecciones: elegimos un punto y^* en cada conjunto $f^{-1}[\{y\}]$; pero nada en nuestra experiencia o en la lógica que habitualmente usamos justifica un proceso de esta naturaleza. Para garantizar que mecanismos de elección infinitos como el que hemos ejemplificado aquí sean válidos, necesitamos postularlo como axioma de nuestra teoría:

Axioma de Elección: *Si $\mathcal{A}$ es una familia no vacía de conjuntos no vacíos, entonces existe una función $s : \mathcal{A} \to \bigcup \mathcal{A}$ que satisface $s(A) \in A$ para cada $A \in \mathcal{A}$.*

Una función s con las propiedades descritas anteriomente es llamada *función de elección para $\mathcal{A}$*. De este modo, el Axioma de Elección dice que cada familia no vacía de conjuntos no vacíos tiene una función de elección.

Ahora, regresando al problema inicial, si hacemos $\mathcal{A} = \{f^{-1}[\{y\}] : y \in Y\}$, entonces $\mathcal{A} \neq \emptyset$ y $\emptyset \notin \mathcal{A}$, así que el Axioma de Elección nos provee de una función de elección $s : \mathcal{A} \to \bigcup \mathcal{A}$. Ahora sólo debemos definir $y^* = s(f^{-1}[\{y\}])$ para tener que $y^* \in f^{-1}[\{y\}]$ y, por ende, $f(y^*) = y$.

Note que el Axioma de Elección garantiza la existencia de una cierta función, pero no la exhibe, es decir, no muestra explícitamente a esta función.

El Axioma de Elección es de gran importancia ya que en él están basadas las demostraciones de teoremas sobresalientes en la matemática. Una explicación amplia del tema puede ser consultada en [40].

El Axioma de Elección difiere de los nueve axiomas básicos de la Teoría de Conjuntos que reciben el nombre de *axiomas de Zermelo-Fraenkel* (**ZF**) . Como mencionamos al principio del apéndice, no analizaremos aquí estos axiomas; sin embargo, vamos a mencionar algunos de ellos que son expresables en forma sencilla, para que el lector adquiera una idea de lo que significan.

(1) **Axioma de existencia.** Hay un conjunto que no tiene elementos.
(2) **Axioma de unión.** Si $\mathcal{A}$ es una colección de conjuntos, entonces $\bigcup \mathcal{A}$ es un conjunto.
(3) **Axioma del conjunto potencia.** Si X es un conjunto, entonces $\mathcal{P}(X)$ es un conjunto.
(4) **Axioma de infinitud.** Existe un conjunto infinito.

En [36] puede encontrarse un estudio muy accesible de los axiomas de Zermelo-Fraenkel. Recomendamos también el libro de W. Just [41].

Regresamos ahora a nuestra discusión sobre el Axioma de Elección. Los dos resultados siguientes son consecuencia de este axioma.

A.35. Proposición. *La unión de una colección numerable de conjuntos numerables es un conjunto numerable.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea A_n un conjunto numerable. Vamos a demostrar que $A = \bigcup\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ satisface $|A| \leqslant \aleph_0$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\mathcal{F}_n = \{f : \mathbb{N} \to A_n \; : f \text{ es suprayectiva}\}$. El ejercicio A.VI.(1) nos garantiza que cada $\mathcal{F}_n$ no es vacío. Por el Axioma de Elección existe una función $s : \mathbb{N} \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$ tal que $s(k) \in \mathcal{F}_k$. Denotemos por f_n a la función $s(n)$. Ahora definimos $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A$ mediante la fórmula $f(m, n) = f_m(n)$. La función f es suprayectiva y por lo tanto $|A| \leqslant |\mathbb{N}\times\mathbb{N}| = \aleph_0$ (por lo dicho en los primeros párrafos de esta sección). ⊠

A.36. Proposición. *Cualquier conjunto infinito contiene un conjunto infinito numerable.*

Demostración. Sea X un conjunto infinito. El Axioma de Elección nos suministra una función $s : \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \to X$ tal que $s(A) \in A$ para cada $A \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$. Construiremos ahora recursivamente un subconjunto infinito numerable de X. Primero podemos elegir el punto $x_1 = s(X) \in X$. Supongamos que ya tenemos elegidos n puntos diferentes de X, digamos $x_1, \ldots, x_n$. Como X es infinito, debe suceder $X \setminus \{x_1, \ldots, x_n\} \neq \emptyset$, así que ahora escogemos el punto $x_{n+1} = s(X \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}) \in X \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$ y completamos la construcción recursiva. Por las características de la función s, la colección $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es el subconjunto que buscábamos. ⊠

El resultado anterior se puede expresar diciendo que *los conjuntos infinitos numerables son los conjuntos infinitos más pequeños*.

La siguiente es una interesante caracterización de los conjuntos infinitos.

A.37. Proposición. *Un conjunto X es infinito si, y sólo si, contiene un subconjunto propio con la misma cardinalidad que él.*

Demostración. Sea $A = \{x_1, x_2, \ldots\}$ un subconjunto infinito numerable del conjunto infinito X. La función $f : X \to X \setminus \{x_1\}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x_{n+1}, & \text{si } x = x_n \\ x, & \text{si } x \in X \setminus A \end{cases}$$

atestigua que X y su subconjunto propio $X \setminus \{x_1\}$ tienen la misma cardinalidad.

Para demostrar la implicación restante, supondremos que X no es infinito. Si X es el conjunto vacío, X carece de subconjuntos propios, así que, para este caso, se cumple la proposición. Si X no es el conjunto vacío, existen $n \in \mathbb{N}$ y una función biyectiva $f : X \to \{1, \ldots, n\}$. Si A es un subconjunto propio de X, entonces $f|_A$ es una biyección entre A y un subconjunto propio de $\{1, \ldots, n\}$, así que deben existir $m < n$ y una biyección $g : A \to \{1, \ldots, m\}$. Para terminar, si existiera una biyección $h : X \to A$, entonces $g \circ h \circ f^{-1}$ sería una biyección entre $\{1, \ldots, n\}$ y $\{1, \ldots, m\}$, situación que implicaría que m es igual a n, llegando así a un absurdo. ⊠

Resulta sorprendente que el Axioma de Elección, con un enunciado tan sencillo, sea equivalente a proposiciones que aparentemente poco o nada tienen que ver con él. Por ejemplo, las proposiciones que enunciamos enseguida son equivalentes al Axioma de Elección; los términos en ellas expresados están definidos en la sección 3. En el ejercicio A.VI (incisos (2), (3), (4) y (5)) se sugiere cómo demostrar su equivalencia. (En [54] se pueden encontrar varias formulaciones adicionales equivalentes al Axioma de Elección).

A.38. Teorema (Zermelo [69]). *Todo conjunto puede ser bien ordenado; es decir, si X es cualquier conjunto, entonces existe un orden parcial R de tal forma que (X, R) es un conjunto bien ordenado.*

A.39. Teorema (Hausdorff [34]). *Toda cadena en un conjunto no vacío parcialmente ordenado está contenida en alguna cadena maximal de dicho conjunto.*

A.40. Teorema (Kuratowski-Zorn [46], [70]). *Si toda cadena en un conjunto parcialmente ordenado y no vacío (X, R) tiene una cota superior, entonces (X, R) contiene un elemento maximal.*

El Teorema A.38 es llamado *Teorema del Buen Orden* y fue propuesto por G. Cantor y demostrado por Ernest Zermelo. El Principio Maximal de Hausdorff (Teorema A.39) aparece en la segunda edición de su *Mengenlehre* publicado en 1927. Nuestra referencia corresponde a una traducción de la tercera edición de esta obra de Hausdorff. Es una costumbre extendida llamar *Lema de Zorn* al teorema A.40, y es probablemente la forma del Axioma de Elección más empleada.

El Axioma de Elección tiene consecuencias muy interesantes en la teoría de números cardinales. Por ejemplo, gracias a él es posible demostrar que el orden definido en A.26 es lineal en cualquier conjunto de números cardinales.

A.41. Teorema. *Cualesquiera dos números cardinales son comparables; dicho de otro modo, si X y Y son un par de conjuntos arbitrarios, entonces existe una función inyectiva de X en Y o existe una función inyectiva de Y en X.*

Demostración. Sean $\mathfrak{m}$ y $\mathfrak{n}$ dos números cardinales. Si uno de éstos es 0, entonces, claro, $\mathfrak{m}$ y $\mathfrak{n}$ son comparables pues el 0 es menor que cualquier otro número cardinal. Supongamos ahora que $\mathfrak{m} \neq 0 \neq \mathfrak{n}$. Sean X y Y dos conjuntos que satisfacen $|X| = \mathfrak{m}$ y $|Y| = \mathfrak{n}$. Por nuestra hipótesis sobre $\mathfrak{m}$ y $\mathfrak{n}$, $X \neq \emptyset \neq Y$. Sea $\mathcal{F}$ la colección de todas las posibles funciones inyectivas f que satisfacen $dom\, f \subseteq X$ y $ran\, f \subseteq Y$. El conjunto $\mathcal{F}$ no es vacío ya que si $x \in X$ y $y \in Y$, entonces $\{(x, y)\} \in \mathcal{F}$. Consideremos en $\mathcal{F}$ una relación de orden parcial $\leqslant$ definida como $f \leqslant g$ si se satisfacen las dos condiciones siguientes:

(1) $dom\, f \subseteq dom\, g$ y
(2) si $x \in dom\, f$, entonces $f(x) = g(x)$.

Sea $\mathcal{C}$ una cadena en $\mathcal{F}$. La relación h cuyo dominio es $\bigcup_{g\in\mathcal{C}} dom\, g$ y regla de correspondencia es $h(x) = g(x)$ si $x \in dom\, g$ y $g \in \mathcal{C}$, es una función que pertenece a $\mathcal{F}$ y mayor que cualquier $g \in \mathcal{C}$. Ahora podemos aplicar el lema de Zorn a $\mathcal{F}$: existe un elemento maximal h_0 en $(\mathcal{F}, \leqslant)$.

Afirmamos que $dom\, h_0 = X$ ó $ran\, h_0 = Y$. En efecto, si ninguna de estas dos opciones ocurre, entonces existen $x_0 \in X \setminus dom\, h_0$ y $y_0 \in Y \setminus ran\, h_0$. Entonces $h_0 \cup \{(x_0, y_0)\}$ es un elemento en $\mathcal{F}$ mayor que h_0, lo cual contradice la maximalidad de h_0. Esta contradicción nos asegura que $dom\, h_0 = X$ ó $ran\, h_0 = Y$. Si $dom\, h_0 = X$, entonces $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$. Si $ran\, h_0 = Y$, entonces h_0^{-1} es una función inyectiva con dominio Y y rango contenido en X, así que, en este caso, $\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m}$. ⊠

Otra consecuencia del Axioma de Elección, que vale la pena mencionar, es la siguiente proposición. Su demostración será proporcionada en la sección A.8.

A.42. Proposición. *Toda colección no vacía de números cardinales tiene un primer elemento; es decir, si $\mathcal{A}$ es un conjunto no vacío cuyos elementos son números cardinales, entonces existe $\kappa \in \mathcal{A}$ de tal modo que $\kappa \leqslant \lambda$ para cada $\lambda \in \mathcal{A}$.*

Ya sabemos que $\aleph_0 < \mathfrak{c}$, así que la colección

$$\{\kappa : \kappa \text{ es cardinal y } \aleph_0 < \kappa \leqslant \mathfrak{c}\}$$

es no vacía. Por la proposición A.42, debe existir un número cardinal $\aleph_1$ de tal modo que $\aleph_0 < \aleph_1$ y si κ es un cardinal que satisface $\aleph_0 < \kappa \leqslant \mathfrak{c}$, entonces $\aleph_1 \leqslant \kappa$; en otras palabras, $\aleph_1$ es el primer cardinal no numerable.

Otro resultado fundamental en la teoría de números cardinales es el siguiente.

A.43. Teorema (Cantor). *Para cada conjunto X, se tiene que*

$$|\mathcal{P}(X)| > |X|.$$

Demostración. Si $X = \emptyset$, entonces $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$ y así $|X| < |\mathcal{P}(X)|$. Si $X \neq \emptyset$, es claro que la función que a cada $x \in X$ le asigna $\{x\}$ en $\mathcal{P}(X)$ es inyectiva, con lo cual $|X| \leqslant |\mathcal{P}(X)|$. Por otra parte, si $f : X \to \mathcal{P}(X)$ es una función, entonces el conjunto $S = \{x \in X : x \notin f(x)\}$ no pertenece al rango de f. En efecto, supongamos que $f(x_0) = \{x \in X : x \notin f(x)\}$ para algún $x_0 \in X$. Debe entonces cumplirse una de las siguientes relaciones: ó $x_0 \in f(x_0)$ ó $x_0 \notin f(x_0)$. Si sucede lo primero, entonces, por la propiedad que define a S, $x_0 \notin f(x_0)$; si sucede lo segundo, entonces $x_0 \in f(x_0)$; y así obtenemos siempre una contradicción. Por lo tanto S no debe estar en el rango de f. Concluimos que f no es suprayectiva. Por lo tanto, también en este segundo caso, $|X| < |\mathcal{P}(X)|$. ⊠

En particular, dado cualquier número cardinal κ, existe otro número cardinal $\tau(\kappa)$ con $\tau(\kappa) > \kappa$. Por esta razón podemos hablar del número cardinal $\aleph_2$ que es el más pequeño del conjunto $\{\kappa : \kappa$ es un número cardinal y $\aleph_1 < \kappa \leqslant \tau(\aleph_1)\}$. De manera análoga se puede definir $\aleph_3$, $\aleph_4$, etc.

El resultado que a continuación enunciamos es consecuencia del teorema anterior y de la proposición A.42.

A.44. Corolario. *Supongamos el Axioma de Elección. Si X es un conjunto de números cardinales, entonces existe un número cardinal κ que es la mínima cota superior o supremo de X.*

Demostración. Supongamos que X es una colección de números cardinales. Para cada $\kappa \in X$, sea A_κ un conjunto tal que $|A_\kappa| = \kappa$. Tomemos $B_\kappa = A_\kappa \times \{\kappa\}$. Observe que $|B_\kappa| = \kappa$ y $B_\kappa \cap B_\gamma = \emptyset$ si $\kappa \neq \gamma$. Por el teorema A.43 resulta que $\alpha = |\mathcal{P}(\bigcup_{\kappa\in X} B_\kappa)| > |\bigcup_{\kappa\in X} B_\kappa| = \tau$. Además, para cada $\kappa \in X$, $B_\kappa \subseteq \bigcup_{\kappa\in X} B_\kappa$. Por lo tanto, para cada $\kappa \in X$ se cumple $\kappa \leqslant \tau$. Esto significa que la colección de números cardinales γ tales que $\alpha > \gamma \geqslant \kappa$ para todo $\kappa \in X$, no es vacía. Ahora sólo aplicamos la proposición A.42. ⊠

7. Producto cartesiano y aritmética de números cardinales

Consideremos la colección finita de conjuntos $A_1, \ldots, A_n$. El *producto cartesiano de los conjuntos* $A_1, \ldots, A_n$, al que denotamos con $A_1 \times \cdots \times A_n$ o con $\prod_{i=1}^n A_i$, es el conjunto de todas las n-adas ordenadas $(a_1, \ldots, a_n)$, donde $a_i \in A_i$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$ y, al igual que en la sección 2, la condición que define la igualdad entre las n-adas ordenadas es $(a_1, \ldots, a_n) = (b_1, \ldots, b_n)$ si, y sólo si, $a_i = b_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Ahora, en el caso en que tengamos una colección numerable e infinita de conjuntos no vacíos $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$, su producto cartesiano, que es denotado por $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times \ldots$ o por $\prod_{n=1}^\infty A_n$, es la colección de sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que satisfacen $a_n \in A_n$ para cada n.

Así, $\prod_{n=1}^\infty A_n$ es la familia de todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ que asocian a cada $n \in \mathbb{N}$ un elemento $f(n)$ que pertenece a A_n.

Con esto en mente, resulta más comprensible la definición general: si $\{X_j : j \in J\}$ es una colección no vacía y arbitraria de conjuntos, su producto cartesiano, denotado por $\prod_{j\in J} X_j$, es el conjunto de todas las funciones $f : J \to \bigcup_{j\in J} X_j$ que cumplen la propiedad: $f(j) \in X_j$ para cualquier $j \in J$. En otras palabras, $\prod_{j\in J} X_j$ es el conjunto formado por todas las funciones de elección de la familia $\{X_j : j \in J\}$, así que $\prod_{j\in J} X_j \neq \emptyset$ es una consecuencia directa del Axioma de Elección si $X_j \neq \emptyset$ para toda $j \in J$. Si existe un conjunto X tal que para cada $j \in J$ el conjunto X_j es igual a X, entonces el producto $\prod_{j\in J} X_j$ es denotado también como X^J.

La suma de números cardinales. Si $\mathfrak{m}$ y $\mathfrak{n}$ son dos números cardinales, definimos la suma $\mathfrak{m}+\mathfrak{n}$ como el número cardinal que representa la cardinalidad del conjunto $X\cup Y$, en donde $|X| = \mathfrak{m}$, $|Y| = \mathfrak{n}$ y $X\cap Y = \emptyset$. Más generalmente, si J es un conjunto no vacío y $\{X_j : j \in J\}$ es una colección de conjuntos ajenos dos a dos (es decir, $X_j \cap X_k = \emptyset$ si $j \neq k$), y $\mathfrak{m}_j$ es el número cardinal que representa a $|X_j|$, entonces definimos la suma de los cardinales $\mathfrak{m}_j$ como:

$$\Sigma_{j\in J}\mathfrak{m}_j = \Big|\bigcup_{j\in J} X_j\Big|.$$

Dejamos al lector verificar que la definición dada de suma no depende de la elección de los conjuntos X_j; es decir, si $\{Y_j : j \in J\}$ es una colección de conjuntos dos a dos ajenos y tales que $|Y_j| = \mathfrak{m}_j$ para cada $j \in J$, entonces $\bigcup_{j\in J} Y_j$ es equipotente a $\bigcup_{j\in J} X_j$ (vea el ejercicio A.VII.(2)).

El producto de números cardinales. Si $\mathfrak{m}$ y $\mathfrak{n}$ son dos números cardinales, definimos el producto $\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{n}$ como el número que representa la cardinalidad del conjunto $X \times Y$, en donde $|X| = \mathfrak{m}$, $|Y| = \mathfrak{n}$. Más generalmente, si J es un conjunto y $\{X_j : j \in J\}$ es una colección no vacía de conjuntos, y $\mathfrak{m}_j$ es el número cardinal que representa a $|X_j|$ para cada $j \in J$, entonces definimos el producto de los números $\mathfrak{m}_j$ como

$$\prod_{j\in J}\mathfrak{m}_j = \Big|\prod_{j\in J} X_j\Big|.$$

Demuestre que la definición dada de producto no depende de la elección de los conjuntos X_j; es decir, si $\{Y_j : j \in J\}$ es una colección de conjuntos tales que $|Y_j| = \mathfrak{m}_j$, entonces $\prod_{j\in J} Y_j$ es equipotente a $\prod_{j\in J} X_j$ (vea el ejercicio A.VII.(3)).

La suma y producto de números cardinales son operaciones conmutativas y asociativas. Además, la suma se distribuye en el producto.

A.45. Proposiciones.

(1) *Para cualesquiera cardinales* $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{s}$ *se cumple:*
   (a) $\mathfrak{m}+\mathfrak{n} = \mathfrak{n}+\mathfrak{m}$ *y* $\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{n} = \mathfrak{n}\cdot\mathfrak{m}$,
   (b) $(\mathfrak{m}+\mathfrak{n})+\mathfrak{s} = \mathfrak{m}+(\mathfrak{n}+\mathfrak{s})$ *y* $(\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{n})\cdot\mathfrak{s} = \mathfrak{m}\cdot(\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{s})$,
   (c) $\mathfrak{m}\cdot(\mathfrak{n}+\mathfrak{s}) = \mathfrak{m}\cdot\mathfrak{n}+\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{s}$.

(2) *Sean* $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ *y* $\mathfrak{s}$ *números cardinales. Si* $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$, *entonces* $\mathfrak{m}+\mathfrak{s} \leqslant \mathfrak{n}+\mathfrak{s}$ *y* $\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{s} \leqslant \mathfrak{n}\cdot\mathfrak{s}$.

(3) *Sea* $\mathfrak{m}$ *un número cardinal infinito y sea* $\mathfrak{n} \leqslant \aleph_0$. *Entonces* $\mathfrak{m}+\mathfrak{n} = \mathfrak{m}$.

Demostración. Sean M, N y S conjuntos tales que $|M| = \mathfrak{m}$, $|N| = \mathfrak{n}$, $|S| = \mathfrak{s}$ y $M \cap N = M \cap S = N \cap S = \emptyset$.

(1) (a) La primera igualdad se obtiene de la relación $M \cup N = N \cup M$. Por otro lado, la función $\phi : M \times N \to N \times M$ dada por $\phi(m,n) = (n,m)$ es una biyección.
   (b) La primera igualdad se obtiene de la relación $(M\cup N)\cup S = M\cup(N\cup S)$. Por otro lado, la función $\phi : (M\times N)\times S \to M\times(N\times S)$ dada por $\phi((m,n),s) = (m,(n,s))$ es una biyección.
   (c) Resulta de la igualdad $M \times (N \cup S) = (M \times N) \cup (M \times S)$.

(2) Sea $\phi : M \to N$ una función inyectiva. Entonces, las funciones $f : M \cup S \to N \cup S$ y $g : M \times S \to N \times S$ definidas por $f(x) = \phi(x)$ si $x \in M$ y $f(x) = x$ si $x \in S$ y $g(x, y) = (\phi(x), y)$ son inyectivas.

(3) Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $M \cap \mathbb{N} = \emptyset$. Como M es infinito podemos tomar $C \subseteq M$ numerable infinito. Numeramos a C: $C = \{m_1, ..., m_n, ...\}$. Ahora resulta que la función $f : \mathbb{N} \cup M \to M$ dada por $f(n) = m_{2n}$ cuando $n \in \mathbb{N}$, $f(m_i) = m_{2i-1}$ y $f(x) = x$ si $x \in M \setminus C$ es biyectiva. Hasta aquí hemos demostrado que $\mathfrak{m} + \aleph_0 = \mathfrak{m}$. Ahora bien, si $\mathfrak{n} \leqslant \aleph_0$, entonces, por el resultado del inciso anterior, $\mathfrak{m} + \mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m} + \aleph_0 = \mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{m} + \mathfrak{n}$. ⊠

Los resultados en el inciso (2) de la proposición A.45 pueden ser generalizados (vea 1.G. inciso (5)). Si $\{\mathfrak{m}_j : j \in J\}$ y $\{\mathfrak{n}_j : j \in J\}$ son dos familias de números cardinales que satisfacen $\mathfrak{m}_j \leqslant \mathfrak{n}_j$ para cada $j \in J$, entonces $\Sigma_{j\in J}\mathfrak{m}_j \leqslant \Sigma_{j\in J}\mathfrak{n}_j$ y $\prod_{j\in J} \mathfrak{m}_j \leqslant \prod_{j\in J} \mathfrak{n}_j$. Aquí hay que tener cuidado, la afirmación $\mathfrak{m}_j < \mathfrak{n}_j$ para cada $j \in J$ no implica necesariamente $\Sigma_{j\in J}\mathfrak{m}_j < \Sigma_{j\in J}\mathfrak{n}_j$ ni $\prod_{j\in J} \mathfrak{m}_j < \prod_{j\in J} \mathfrak{n}_j$. Por ejemplo, $2 < 3$ pero $\Sigma_{j\in\mathbb{N}}2_j = \aleph_0 = \Sigma_{j\in\mathbb{N}}3_j$ y $\prod_{j\in\mathbb{N}} 2_j = 2^{\aleph_0} = \prod_{j\in\mathbb{N}} 3_j$, en donde $2_j = 2$ y $3_j = 3$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Los resultados que siguen son consecuencia del Axioma de Elección. Daremos la demostración de algunos de ellos para ejemplificar técnicas que hacen uso de este axioma. En el corolario A.33 se concluyó que $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ y por A.45 inciso (3) podemos concluir que $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$; en seguida generalizaremos estas ecuaciones.

A.46. Teorema.

(1) *Si* $\mathfrak{m}$ *es un número cardinal infinito, entonces* $\mathfrak{m} + \mathfrak{m} = \mathfrak{m}$ *y* $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m}$.

(2) *Si* $\mathfrak{m} > 0$, $\mathfrak{n} > 0$ *y alguno de ellos es un número cardinal infinito, entonces*

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{n} = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n} = \max\{\mathfrak{m}, \mathfrak{n}\}.$$

Demostración.

(1) De este inciso demostraremos sólo lo que concierne a la suma. Dejamos al lector la demostración de $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m}$ como ejercicio (vea A.VII.(9)). Sea X un conjunto de cardinalidad $\mathfrak{m}$. Nos fijamos ahora en el conjunto $Y = X \times \{0, 1\} = \{(x, 0) : x \in X\} \cup \{(x, 1) : x \in X\}$. De la definición de suma de números cardinales, resulta que $|Y| = \mathfrak{m} + \mathfrak{m}$. Denotemos por $\mathcal{F}$ al conjunto de todas las funciones inyectivas f con dominio contenido en X y cuyo rango es igual a *dom* $f \times \{0, 1\}$.

Como X es un conjunto infinito, X contiene un subconjunto numerable infinito Z (proposición A.36). Como $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$, $Z \times \{0, 1\}$ es numerable. Podemos encontrar entonces una biyección $f : Z \to Z \times \{0, 1\}$. Resulta que $f \in \mathcal{F}$; es decir, $\mathcal{F}$ no es vacío.

Consideremos en $\mathcal{F}$ la relación de orden parcial dado por la inclusión $\subseteq$. Por el teorema A.39 podemos garantizar la existencia de una cadena maximal $\mathcal{C}$ de $(\mathcal{F}, \subseteq)$. Sea $g = \bigcup \mathcal{C}$. No es difícil demostrar que $g \in \mathcal{F}$. Sea $D = dom\, g$.

La función g es una función biyectiva con dominio D y rango $D \times \{0,1\}$. Esto significa que $|D| = |D| + |D|$. Observe que en consecuencia D es infinito. Para completar nuestra demostración, vamos a probar que $|D| = \mathfrak{m}$. Sea $E = X \setminus D$. Si E es finito, entonces $|D| = |D \cup E| = |X| = \mathfrak{m}$. Si E es infinito, podemos tomar un subconjunto G de E infinito numerable. Sea f una biyección de G sobre $G \times \{0,1\}$. Entonces $h = f \cup g$ pertenece a $\mathcal{F}$ y g está propiamente contenido en h, lo cual contradice la maximalidad de $\mathcal{C}$. Por lo tanto, E debe ser finito y $|D| = \mathfrak{m}$.

(2) Si $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$, entonces, por la proposición A.45 y el inciso anterior obtenemos $\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{n}+\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}+\mathfrak{n} = \mathfrak{n}$. De la misma manera, $\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{n}\cdot\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}\cdot\mathfrak{n} = \mathfrak{n}$. ⊠

Damos ahora una generalización del teorema anterior.

A.47. Proposición. *Si $\{\mathfrak{m}_j : j \in J\}$ es una colección de números cardinales que no contiene a 0, entonces $\Sigma_{j\in J}\mathfrak{m}_j = |J| \cdot \sup\{\mathfrak{m}_j : j \in J\}$.*

Demostración. Sea $\mathfrak{m} = \sup\{\mathfrak{m}_j : j \in J\}$. Por un lado, $\mathfrak{m}_j \leqslant \mathfrak{m}$. Entonces

$$\Sigma_{j\in J}\mathfrak{m}_j \leqslant \Sigma_{j\in J}\mathfrak{m} = |J| \cdot \mathfrak{m}.$$

Por otro lado, note que $|J| = \Sigma_{j\in J}1 \leqslant \Sigma_{j\in J}\mathfrak{m}_j$.

También tenemos $\mathfrak{m} \leqslant \Sigma_{j\in J}\mathfrak{m}_j$; en efecto, puesto que $\mathfrak{m}$ es el supremo de $\{\mathfrak{m}_j : j \in J\}$, cualquier $\mathfrak{s}$ menor que $\mathfrak{m}$ es menor que algún $\mathfrak{m}_j$, y $\mathfrak{m}_j \leqslant \Sigma_{j\in J}\mathfrak{m}_j$; por tanto, $\mathfrak{m} \leqslant \Sigma_{j\in J}\mathfrak{m}_j$. Por lo tanto, $|J| \cdot \mathfrak{m} \leqslant \Sigma_{j\in J}\mathfrak{m}_j$. Finalmente, usando el Teorema de Cantor-Schröder-Bernstein se obtiene lo deseado. ⊠

En el siguiente resultado enumeramos algunas relaciones entre la suma y el producto de números cardinales. Observe que los incisos (1) y (2) son consecuencias del inciso (1) de la proposición anterior.

A.48. Proposiciones. *Sean $\{X_j : j \in J\}$ y $\{Y_j : j \in J\}$ dos familias no vacías de conjuntos.*

(1) *Si J es finito y X_j es numerable para cada $j \in J$, entonces $\prod_{j\in J} X_j$ es numerable.*

(2) *Si J es finito, X_j es no vacío para toda $j \in J$ y X_i es infinito para alguna $i \in J$, entonces*

$$\Big|\bigcup_{j\in J}(X_j \times \{j\})\Big| = \Big|\prod_{j\in J} X_j\Big| = max\{|X_j| : j \in J\}.$$

(3) *Si* $|X_j| > 1$ *para cualquier* $j \in J$*, entonces*

$$\Big|\bigcup_{j\in J} X_j\Big| \leqslant \Big|\prod_{j\in J} X_j\Big|.$$

(4) (J. König) *Si* $|Y_j| < |X_j|$ *para cada* $j \in J$*, entonces*

$$\Big|\bigcup_{j\in J} Y_j\Big| < \Big|\prod_{j\in J} X_j\Big|.$$

Demostración. Demostraremos sólo el inciso (4). Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que cada Y_j es un subconjunto de $X = \prod_{j\in J} X_j$. Basta entonces demostrar que $\bigcup_{j\in J} Y_j$ no cubre a X.

Para cada $j \in J$, consideremos la proyección j de Y_j, $\pi_j[Y_j] = S_j$. Como $|Y_j| < |X_j|$, entonces S_j es un subconjunto propio de X_j. Para cada $j \in J$ tomamos $x_j \in X_j \setminus S_j$. El punto $(x_j)_{j\in J}$ pertenece a X pero no a $\bigcup_{j\in J} Y_j$. ⊠

La exponenciación de números cardinales. Si $\mathfrak{m}$ y $\mathfrak{n}$ son dos números cardinales, definimos $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}$ como el número cardinal que representa la cardinalidad del conjunto $X^Y = \{f : Y \to X : f \text{ es función}\}$, en donde $|X| = \mathfrak{m}$, $|Y| = \mathfrak{n}$. Observe que la definición de exponenciación no depende de la elección de los conjuntos X y Y; es decir, si A y B son conjuntos tales que $|A| = \mathfrak{m}$ y $|B| = \mathfrak{n}$, entonces existe una función biyectiva f con dominio A^B y rango X^Y.

Es fácil demostrar (véase el ejercicio A.VII.(11)) que las siguientes desigualdades se cumplen para cualesquiera cardinales $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{s}$ y $\mathfrak{t}$:

(1) $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}$ si $\mathfrak{n} > 0$,
(2) $\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}$ si $\mathfrak{m} > 1$, y
(3) $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}} \leqslant \mathfrak{s}^{\mathfrak{t}}$ si $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{s}$ y $\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{t}$.

Además, para números cardinales $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ y $\mathfrak{s}$ se cumple:

(1) $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}+\mathfrak{s}} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{n}} \cdot \mathfrak{m}^{\mathfrak{s}}$.
(2) $(\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}})^{\mathfrak{s}} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{s}}$.

Terminamos esta sección hablando un poco de los cardinales del tipo $2^{\mathfrak{m}}$.

A.49. Teorema. *Dado un conjunto* X *de cardinalidad* $\mathfrak{m}$*, resulta que*

$$|\mathcal{P}(X)| = 2^{\mathfrak{m}} = |\{0,1\}^X|.$$

Demostración. Si $X = \emptyset$, entonces $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset\} = \{0,1\}^X$. Supongamos ahora que $X \neq \emptyset$. Para cada $A \subseteq X$, tomamos la función característica $\xi_A : X \to \{0,1\}$ definida por

$$\xi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A. \end{cases}$$

La relación $\phi : \mathcal{P}(X) \to \{0,1\}^X$ dada por $\phi(A) = \xi_A$ es biyectiva. ⊠

Como una consecuencia del resultado anterior y de la proposición A.43 obtenemos:

A.50. Corolario. *Para cualquier número cardinal* $\mathfrak{m}$ *se cumple la relación* $\mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{m}}$.

Demostraremos ahora que la cardinalidad del conjunto de los números reales coincide con la cardinalidad de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

A.51. Teorema. $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

Demostración. Por definición, $2^{\aleph_0} = |\{0,1\}^{\mathbb{N}}|$. Para cada $\phi \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, la serie $\Sigma_{n\in\mathbb{N}} \frac{\phi(n)}{3^n}$ es un número real, y la asociación $\phi \longmapsto \Sigma_{n\in\mathbb{N}} \frac{\phi(n)}{3^n}$ es inyectiva; por lo tanto $2^{\aleph_0} \leqslant \mathfrak{c}$.

Ahora, usando el Axioma de Elección, podemos relacionar con cada número real r una sucesión s_n^r de números racionales que converge a r. La relación $r \longmapsto s_n^r$ es inyectiva, con dominio $\mathbb{R}$ y rango incluido en $\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{Q})$. Por lo tanto, $|\mathbb{R}| \leqslant |\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{Q})|$. Pero $|\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{Q})| = 2^{|\mathbb{N}\times\mathbb{Q}|} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

Ahora aplicamos el teorema de Cantor-Schröder-Bernstein y terminamos la demostración. ⊠

8. Números Ordinales

Dos conjuntos parcialmente ordenados $(A, \leqslant)$, $(B, \preceq)$ son *isomorfos* si existe una función biyectiva $\phi : A \to B$ que preserva el orden; es decir, $\phi(x) \prec \phi(y)$ si y sólo si $x < y$. Si $\mathfrak{C}$ es una colección de conjuntos parcialmente ordenados, la relación "A es isomorfo a B" (donde $A, B \in \mathfrak{C}$) es de equivalencia en $\mathfrak{C}$. Escribiremos $A \approx B$ para significar que los conjuntos parcialmente ordenados A y B son isomorfos. A cada conjunto parcialmente ordenado $(A, \leqslant)$ le asociamos un símbolo que llamaremos *tipo de orden* de A, de tal modo que dos conjuntos parcialmente ordenados A y B tienen el mismo tipo de orden si y sólo si $A \approx B$. El tipo de orden de un conjunto parcialmente ordenado A lo denotamos por $t.o.(A)$. Cuando $(A, \leqslant)$ es un conjunto bien ordenado, al tipo de orden de A le llamamos *número ordinal*.

A.52. Ejemplos.

(1) Usaremos 0 para denotar al número ordinal al que pertenece el conjunto $\emptyset$ con su relación de buen orden $\emptyset$.
(2) El tipo de orden del conjunto $\{0\}$ con su buen orden trivial será 1.
(3) Observe que si $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, y si A y B son dos conjuntos bien ordenados con n elementos, entonces ellos son isomorfos (demuéstrelo, vea el ejercicio A.VIII.(1)). Usaremos n para denotar el tipo de orden

de $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ con el orden heredado del orden usual de $\mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$0 < 1 < 2 < \cdots < n < n+1 < \ldots.$$

(4) El símbolo ω servirá para representar al tipo de orden de

$$\{0, 1, 2, 3, ...\}$$

con su buen orden usual.

Sea $(A, \leqslant_A)$ un conjunto parcialmente ordenado y sea B un subconjunto de A. El orden $\leqslant$ en B heredado de A está definido simplemente como $x \leqslant y$ si $x \leqslant_A y$ para $x, y \in B$ cualesquiera. Si $(A, \leqslant)$ es un conjunto bien ordenado y $a \in A$, al conjunto $A(a) = \{b \in A : b < a\}$ se le conoce como el *segmento inicial* en A determinado por a. Es evidente que $A(a)$ es bien ordenado con el orden heredado de A.

A.53. Definición. Dos conjuntos bien ordenados (A, R) y (B, S) son *equivalentes* si son isomorfos; y ellos cumplen la relación $(A, R) < (B, S)$ si (A, R) es isomorfo a un segmento inicial de (B, S).

Es fácil demostrar que para cualquier colección $\mathfrak{C}$ de conjuntos bien ordenados, la relación $\leqslant$ que acabamos de definir, determina un preorden parcial en $\mathfrak{C}$.

Esto nos permite definir un orden parcial en cualquier conjunto de números ordinales:

A.54. Definición. Para dos ordinales α y β, decimos que $\alpha <_o \beta$ si $A < B$ para dos conjuntos bien ordenados A y B que satisfacen $t.o.(A) = \alpha$ y $t.o.(B) = \beta$.

No es difícil verificar que esta definición de orden entre números ordinales no depende de la elección de los conjuntos A y B, sino únicamente del tipo de orden (vea el ejercicio A.VIII.(2)). Observe que para cada conjunto bien ordenado $(A, \leqslant)$, si a_0 es su primer elemento, entonces $A(a_0) = \emptyset$. Por lo tanto $0 \leqslant_o \alpha$ para cualquier número ordinal α.

Además, de las definiciones anterior resulta que cada número ordinal finito n es menor que ω (véanse los ejemplos A.52).

A.55. Proposición. *Si $\mathcal{O}$ un conjunto de números ordinales, entonces $(\mathcal{O}, \leqslant_o)$ es un conjunto parcialmente ordenado.*

Nuestro propósito ahora es lograr probar algo más que lo expuesto en el resultado anterior. Demostraremos que, bajo las hipótesis de la proposición A.55, $(\mathcal{O}, \leqslant_o)$ es bien ordenado.

A.56. Proposición. *Si $(A, \leqslant)$ es un conjunto bien ordenado, $B \subseteq A$ y $f : A \to B$ es un isomorfismo de orden, entonces $a \leqslant f(a)$ para todo $a \in A$.*

Demostración. Sea $C = \{x \in A : f(x) < x\}$. Supongamos que $C \neq \emptyset$, y sea x_0 el primer elemento de C. Entonces $f(x_0) < x_0$. Pero f es un isomorfismo de orden, así que se debe cumplir $f(f(x_0)) < f(x_0)$, lo cual contradice la minimalidad de x_0. ⊠

A.57. Corolario. *El único isomorfismo de orden de un conjunto bien ordenado en sí mismo es la identidad.*

Demostración. Sea $(A, \leqslant)$ un conjunto bien ordenado y $f : (A, \leqslant) \to (A, \leqslant)$ un isomorfismo de orden. Observe que la función f^{-1} es también un isomorfismo de orden. Por la proposición A.56, para cada $a \in A$, $f(a) \geqslant a$ y $f^{-1}(a) \geqslant a$. Esto implica que $f(a) = a$ para todo $a \in A$. ⊠

A.58. Proposición. *Sean A y B dos conjuntos bien ordenados. Entonces,*

(1) *A no es isomorfo a ninguno de sus segmentos iniciales;*
(2) *si $a, b \in A$ y $A(a) \approx A(b)$, entonces $a = b$;*
(3) *si $A \approx B$, entonces existe un único isomorfismo de orden de A en B.*

Demostración.

(1) Supongamos que existe $a \in A$ tal que $A \approx A(a)$. Sea $f : A \to A(a)$ un isomorfismo de orden. Entonces $f(a) \in A(a)$ es decir $f(a) < a$. Pero este hecho contradice la conclusión de A.56.
(2) Si $a < b$, entonces $A(a)$ es un segmento inicial de $A(b)$, y por el inciso anterior $A(a)$ y $A(b)$ no son isomorfos.
(3) Supongamos que f y g son dos isomorfismos de orden de A sobre B. Entonces $h = f^{-1} \circ g$ es un isomorfismo de orden de A en A. Por el corolario A.57 $h = \mathrm{id}_A$. Por lo tanto, $f = g$. ⊠

A.59. Teorema. *Sean α y β dos números ordinales. Entonces exactamente una de las siguientes condiciones se cumple: $\alpha <_o \beta$, $\alpha = \beta$, $\beta <_o \alpha$.*

Demostración. La proposición A.58 implica que a lo más una de las fórmulas se cumple. Demostremos ahora que al menos una debe cumplirse.

Sean A y B dos conjuntos bien ordenados tales que $t.o.(A) = \alpha$ y $t.o.(B) = \beta$. Sea $\mathcal{F}$ la colección de todas los isomorfismos de orden cuyo dominio es A o algún segmento inicial de A y cuyo rango es igual a B o igual a algún segmento inicial de B. Si a_0 es el menor elemento en A y b_0 es el menor elemento de B, entonces, $\{(a_0, b_0)\}$ es un elemento de $\mathcal{F}$; es decir, $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Consideremos a $\mathcal{F}$ con su orden parcial definido por $\subseteq$. Ahora usamos el axioma de elección en su forma dada por el teorema A.39. Es decir, podemos garantizar que existe una cadena maximal $\mathcal{C}$ en $\mathcal{F}$. Sea $h = \bigcup \mathcal{C}$. Resulta que $h \in \mathcal{F}$.

Si $\operatorname{dom} h$ es un segmento inicial de A, digamos $A(a)$, y $\operatorname{ran} h$ es el segmento inicial $B(b)$ de B, entonces $h \cup \{(a, b)\}$ es un elemento de $\mathcal{F}$ que contiene propiamente a h, lo cual contradice la maximalidad de $\mathcal{C}$. Por lo tanto, sólo es posible:

(a) $\operatorname{dom} h$ es un segmento inicial de A y $\operatorname{ran} h = B$, y en este caso $\beta < \alpha$;
(b) $\operatorname{dom} h = A$ y $\operatorname{ran} h = B$, y en este caso $\alpha = \beta$;
(c) $\operatorname{dom} h = A$ y $\operatorname{ran} h$ es un segmento inicial de B; en este caso $\alpha < \beta$. $\boxtimes$

A.60. Corolario. *Sea $\mathcal{O}$ un conjunto de números ordinales. Entonces, $(\mathcal{O}, \leqslant_o)$ es un conjunto linealmente ordenado.*

Para cada número ordinal α podemos considerar el conjunto P_α de sus predecesores; esto es, $P_\alpha = \{\beta : \beta <_o \alpha\}$. Por lo ya mencionado en el Corolario A.60, $(P_\alpha, \leqslant_o)$ es un conjunto linealmente ordenado. Vamos ahora a demostrar que $(P_\alpha, \leqslant_o)$ es bien ordenado y que el tipo de orden de $(P_\alpha, \leqslant_o)$ coincide precisamente con α.

A.61. Teorema. *Para cada número ordinal α, $(P_\alpha, \leqslant_o)$ es bien ordenado y*

$$t.o.(P_\alpha, \leqslant_o) = \alpha.$$

Demostración. Basta con probar que $t.o.(P_\alpha, \leqslant_o) = \alpha$. Si $\alpha = 0$, $P_\alpha = \emptyset$ y, como ya acordamos, $t.o.(\emptyset) = 0$. Supongamos ahora que $\alpha > 0$ y sea $\beta \in P_\alpha$. Sean A y B conjuntos bien ordenados tales que $t.o.(A) = \alpha$ y $t.o.(B) = \beta$. Como $\beta < \alpha$, existe un $a \in A$ tal que $B \approx A(a)$. Por la Proposición A.58 inciso (2), este elemento a está determinado por β de manera única. Escribimos $\phi(\beta) = a$. No es difícil verificar que la aplicación $\beta \longmapsto \phi(\beta)$ es un isomorfismo de orden entre P_α y A. Por lo tanto, $t.o.(P_\alpha) = \alpha$. $\boxtimes$

Ahora relacionaremos los números cardinales con los números ordinales. El siguiente resultado, que es consecuencia del Axioma de Elección, nos será de mucha utilidad. En particular, nos permitirá demostrar la proposición A.42.

A.62. Teorema. *Dado un número cardinal $\mathfrak{m}$, existe un número ordinal α tal que $|P_\alpha| = \mathfrak{m}$.*

Demostración. Sea M un conjunto de cardinalidad $\mathfrak{m}$. Por el Axioma de Elección podemos asegurar que existe una relación de buen orden $\leqslant$ en M. Sea $\alpha = t.o.(M, \leqslant)$. Por el Teorema A.61, $(M, \leqslant) \approx (P_\alpha, \leqslant_o)$. En particular, $|P_\alpha| = |M| = \mathfrak{m}$. $\boxtimes$

Como prometimos antes, ahora podremos demostrar la Proposición A.42:

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ un conjunto no vacío de números cardinales. Por el Teorema A.62, a cada $\mathfrak{m} \in \mathcal{A}$ le podemos asociar un número ordinal $\alpha(\mathfrak{m})$ tal que $|P_{\alpha(\mathfrak{m})}| = \mathfrak{m}$. Observe que si $\mathfrak{m}$ y $\mathfrak{n}$ son dos diferentes elementos de $\mathcal{A}$, entonces $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ si y sólo si $\alpha(\mathfrak{m}) < \alpha(\mathfrak{n})$. Fijemos ahora un elemento $\mathfrak{a}$ en $\mathcal{A}$. Si $\mathfrak{a}$ es el primer elemento de $\mathcal{A}$, ya acabamos. De lo contrario el conjunto $E = P_{\alpha(\mathfrak{a})} \cap \{\alpha(\mathfrak{m}) : \mathfrak{m} \in \mathcal{A}\}$ no es vacío. Ahora bien, $(P_{\alpha(\mathfrak{a})}, \leqslant_o)$ es un conjunto bien ordenado. Por lo tanto E tiene un primer elemento $\alpha(\mathfrak{b})$. Ahora debe cumplirse que $\mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{m}$ para cualquier $\mathfrak{m} \in \mathcal{A}$. ⊠

El tipo de orden del conjunto de números ordinales $\{0, 1, 2, 3, ..., \omega\}$ con el buen orden $\leqslant_o$, es un ordinal mayor que ω al cual denotamos por $\omega + 1$. Con $\omega + 2$ denotaremos al tipo de orden del conjunto $\{0, 1, 2, 3, ..., \omega, \omega + 1\}$ con el buen orden $\leqslant_o$. Podemos continuar este proceso: el tipo de orden del conjunto de números ordinales $\{0, 1, 2, 3, ..., \omega, \omega + 1, \omega + 2\}$ con el buen orden $\leqslant_o$, es un ordinal mayor que ω, $\omega + 1$ y $\omega + 2$ al cual denotamos por $\omega + 3$.

En general, para $n \in \mathbb{N}$, $\omega + n + 1$ es el número ordinal o tipo de orden del conjunto $\{0, 1, 2, 3, ..., \omega, \omega + 1, \dots, \omega + n\}$ con el orden $\leqslant_o$. Y escribimos $\omega + \omega$ ó $\omega \cdot 2$ para designar al número ordinal del conjunto $(\{0, 1, 2, 3, ..., \omega, \omega + 1, \dots, \omega + n \dots\}, \leqslant_o)$.

Así podemos también definir $(\omega \cdot 2) + n$ para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$(\omega \cdot 2) + n = t.o.(\{0, 1, 2, ..., \omega, \omega + 1, \dots, \omega + n \dots, \omega \cdot 2, \dots, (\omega \cdot 2) + n - 1\}, \leqslant_o),$$

y también $\omega \cdot 3$:

$$\omega \cdot 3 = t.o.(\{0, 1, 2, 3, ..., \omega, \omega + 1, \dots, \omega + n, \dots, \omega \cdot 2, \dots (\omega \cdot 2) + n, \dots\}, \leqslant_o),$$

y en general, para $k, n \in \mathbb{N}$, debe ser claro quién es el número ordinal $(\omega \cdot k) + n$.

Al número ordinal o tipo de orden del conjunto de todos los números ordinales de la forma $(\omega \cdot k) + n$ con $k, n \in \mathbb{N}$ con el orden $\leqslant_o$, se escribe como $\omega \cdot \omega = \omega^2$. Una vez más podemos reiniciar este proceso y definir $\omega^2 + 1$, $\omega^2 + 2$, $\dots, \omega^2 + n, \dots, \omega^2 + \omega$, $\omega^2 + \omega + 1, \dots, \omega^2 + (\omega \cdot n) + k$, hasta alcanzar el número ordinal $\omega^2 + \omega^2 = \omega^2 \cdot 2$.

Y así seguimos el proceso y aparecerán los números ordinales $\omega^2 \cdot n$, ω^k, $(\omega^\omega \cdot k) + (\omega^m \cdot l) + m$, ω^{ω^ω}.

Cada uno de los números ordinales que hemos mencionado hasta aquí tienen la peculiaridad de ser tipos de orden de conjuntos bien ordenados numerables; es decir, la cardinalidad de cualquier conjunto bien ordenado con tipo de orden cualquiera de ellos es $\leqslant \aleph_0$, ya que cada uno es obtenido en un proceso numerable en el cual, en cada paso, se van aumentando conjuntos numerables (ver la proposición A.35).

Al conjunto de todos los ordinales numerables considerado con el orden $\leqslant_o$ (es decir, al conjunto de todos los tipos de orden de los buenos órdenes que pueden ser definidos sobre el conjunto de los números naturales) le llamamos ω_1. La cardinalidad de ω_1 es igual a $\aleph_1 > \aleph_0$ y para cada $\alpha < \omega_1$, se tiene que $|\alpha| \leqslant \aleph_0$. Es decir, ω_1 es el primer número ordinal que no es numerable. De manera más formal tenemos el siguiente teorema:

A.63. Teorema. *Existe un número ordinal* ω_1 *que satisface:*

(1) ω_1 *es el primer número ordinal tal que* P_{ω_1} *es más que numerable;*
(2) $(P_{\omega_1}, \leqslant_o)$ *es bien ordenado;*
(3) *si* $\alpha \in P_{\omega_1}$, *entonces* P_α *es numerable;*
(4) *si* $C \subseteq P_{\omega_1}$ *es numerable, entonces existe* $\beta \in P_{\omega_1}$ *tal que* $\alpha \leqslant \beta$ *para todo* $\alpha \in C$.

Demostración. Tomemos un número ordinal γ tal que $|P_\gamma| = \mathfrak{c}$. Si cada miembro α de P_γ satisface $|P_\alpha| \leqslant \aleph_0$, escribimos $\omega_1 = \gamma$. Si lo anterior no sucede, entonces el conjunto

$$E = \{\alpha \in P_\gamma : |P_\alpha| > \aleph_0\}$$

no es vacío. Como P_γ es bien ordenado, E tiene un primer elemento ω_1.

Para demostrar (1), sea α un número ordinal que satisface $\alpha <_o \omega_1$. Como $\omega_1 \in P_\gamma$, entonces $\omega_1 <_o \gamma$. Como $\leqslant_o$ es un orden parcial, $\alpha <_o \gamma$. Por lo tanto, $\alpha \in P_\gamma$. Ahora la desigualdad $|P_\alpha| \leqslant \aleph_0$ es una consecuencia de la definición de ω_1.

El inciso (2) es una consecuencia del Teorema A.61. Ademas (2) y (3) son consecuencia de la definición de ω_1.

Demostremos pues (4): Supongamos que C es un conjunto numerable de P_{ω_1}. Sea $D = \bigcup_{\alpha \in C} P_\alpha$. Entonces D es un conjunto numerable ya que es la unión numerable de conjuntos numerables (Proposición A.35). Tomamos $\beta \in P_{\omega_1} \setminus D$. De la definición de D resulta que $\beta \geqslant \alpha$ para cualquier $\alpha \in C$. ⊠

Al tipo de orden de $\omega_1 \cup \{\omega_1\}$ con el orden $\leqslant_o$ lo denotamos por $\omega_1 + 1$. De manera semejante al discurso anterior podemos definir los ordinales $(\omega_1 \cdot k) + n$, $(\omega_1 \cdot \omega) + k$, $(\omega_1)^\omega \cdot k$, etc.

Al conjunto de todos los ordinales que representan a todos los posibles buenos órdenes definibles en ω_1, se le llama ω_2. Este conjunto tiene cardinalidad $\aleph_2$. De este modo podemos continuar y definir números ordinales tales como

$$\omega_3, \omega_4, \cdots, \omega_n, \cdots, \omega_\omega.$$

Nuestra tarea ahora será definir operaciones de suma y producto entre números ordinales. Antes de esto presentamos un teorema fundamental.

A.64. Teorema (Principio de Inducción Transfinita). *Suponga que* $(A, \leqslant)$ *un conjunto bien ordenado y sea* B *un subconjunto de* A. *Si* B *satisface:* $a \in B$ *si el segmento inicial* $A(a)$ *está contenido en* B, *entonces* $B = A$.

Demostración. Supongamos que $A \setminus B \neq \emptyset$. Sea x_0 el primer elemento de $A \setminus B$. Esto significa que $A(x_0) \subseteq B$. Por la propiedad que caracteriza a B se debe cumplir $x_0 \in B$, lo cual es una contradicción. Es decir, B debe coincidir con A. ⊠

La suma de números ordinales. Sean α y β dos números ordinales. Sean (A,R) y (B,S) conjuntos bien ordenados tales que $t.o.(A,R)=\alpha$ y $t.o.(B,S)=\beta$.

Substituimos a (A,R) por $(A\times\{0\},R')$ en donde $(a,0)R'(a',0)$ si y sólo si aRa'. Resulta que $(A,R)\approx(A\times\{0\},R')$. De manera semejante definimos S' en $B\times\{1\}$ y tomamos $(B\times\{1\},S')$. Tenemos que $(A\times\{0\})\cap(B\times\{1\})=\emptyset$.

Ahora consideramos en $(A\times\{0\})\cup(B\times\{1\})$ el buen orden $\leqslant_+$ definido de tal manera que en $A\times\{0\}$ coincide con R', en $B\times\{1\}$ coincide con S' y cada elemento de $A\times\{0\}$ es menor estrictamente que cada elemento de $B\times\{1\}$. Al conjunto bien ordenado $((A\times\{0\})\cup(B\times\{1\}),\leqslant_+)$ lo denotaremos $A\sqcup B$ y le llamamos *suma libre* de (A,R) más (B,S).

Entonces definimos la suma $\alpha+\beta$ como el tipo de orden del conjunto bien ordenado $A\sqcup B$. Es un buen ejercicio verificar que la definición de la suma $\alpha+\beta$ no depende de la elección de los representantes (A,R) y (B,S) (ejercicio A.VIII.(3)).

Además, esta definición de suma corresponde a las que ya dimos de los ordinales tales como $\omega+n$. En efecto, $\omega+n$ es el número ordinal que se obtiene al sumar el ordinal n al ordinal ω.

La suma de números ordinales así definida es asociativa pero no es conmutativa. Por ejemplo, $1+\omega=\omega$ y $\omega+1>\omega$.

A.65. PROPOSICIÓN. *Sean α, β y γ tres números ordinales, entonces:*

(1) *$\alpha<_o\gamma$ si y sólo si $\beta+\alpha<_o\beta+\gamma$;*
(2) *$\beta+\alpha=\beta+\gamma$ si y sólo si $\alpha=\gamma$; y*
(3) *$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$.*

DEMOSTRACIÓN. (1) Por definición de suma y por la proposición A.61, $\beta+\alpha$ es el tipo de orden del conjunto bien ordenado $P_\beta\sqcup P_\alpha$. Si $\alpha<_o\gamma$, entonces, existe $x\in P_\gamma$ tal que P_α es isomorfo al segmento inicial $P_\gamma(x)$. Sea $\phi:P_\alpha\to P_\gamma(x)$ un isomorfismo de orden. Resulta que el conjunto $P_\beta\sqcup P_\gamma(x)$ es el segmento inicial

$(P_\beta\sqcup P_\gamma)(x,1)=\{(z,\epsilon)\in P_\beta\sqcup P_\gamma:\epsilon=0 \text{ y } z\in P_\beta \text{ ó } \epsilon=1, z\in P_\gamma \text{ y } z<_o x\}$

de $P_\beta\sqcup P_\gamma$ y la aplicación

$$F:P_\beta\sqcup P_\alpha\to(P_\beta\sqcup P_\gamma)(x,1)$$

definida por

$$F(a,\epsilon)=\begin{cases}(a,0) & \text{si } a\in P_\beta \text{ y } \epsilon=0\\ (\phi(a),1) & \text{si } a\in P_\alpha \text{ y } \epsilon=1.\end{cases}$$

es un isomorfismo de orden. Por lo tanto, $\beta+\alpha<_o\beta+\gamma$.

Ahora supongamos que $\beta+\alpha<_o\beta+\gamma$. Esto significa que existen $z=(x,\epsilon)\in P_\beta\sqcup P_\gamma$ y un isomorfismo de orden $\psi:P_\beta\sqcup P_\alpha\to(P_\beta\sqcup P_\gamma)(z)$.

Como $P_\beta \times \{0\}$ es un segmento inicial de $P_\beta \sqcup P_\alpha$, $\psi[P_\beta \times \{0\}]$ es un segmento inicial de $(P_\beta \sqcup P_\gamma)(z)$. Si $\epsilon = 0$, $\psi[P_\beta \times \{0\}]$ es un subconjunto de $P_\beta \times \{0\}$; es decir, $P_\beta \times \{0\}$ es isomorfo a un segmento inicial de él mismo, lo cual no puede suceder (véase la proposición A.58). Por lo tanto, $\epsilon = 1$, $x \in P_\gamma$ y $(P_\beta \sqcup P_\gamma)(z) = P_\beta \sqcup P_\gamma(x)$.

Así tenemos que $\psi[P_\beta \times \{0\}] \supseteq P_\beta \times \{0\}$. La función $\psi|_{P_\beta \times \{0\}} : P_\beta \times \{0\} \to \psi[P_\beta \times \{0\}]$ es también un isomorfismo de orden. Por lo cual, si $P_\beta \times \{0\}$ fuese un subconjunto propio de $\psi[P_\beta \times \{0\}]$ podríamos concluir, de nuevo, que $P_\beta \times \{0\}$ es isomorfo a un segmento inicial de él mismo. Como esto no es posible, debe cumplirse

$$\psi[P_\beta \times \{0\}] = P_\beta \times \{0\}.$$

Lo anterior significa que $\psi|_{P_\alpha \times \{1\}}$ es un isomorfismo de orden con dominio $P_\alpha \times \{1\}$ y rango igual a $P_\gamma(x) \times \{1\}$. Como $P_\alpha \times \{1\}$ es isomorfo a P_α y $P_\gamma(x) \times \{1\}$ es isomorfo a un segmento de P_γ, concluimos que $\alpha <_o \gamma$.

La afirmación en (2) es una consecuencia inmediata de (1). Se deja al lector la demostración de (3) (ejercicio A.VIII.(4)). ⊠

La relación $\alpha <_o \gamma$ entre números ordinales no implica necesariamente que la relación $\alpha + \beta <_o \gamma + \beta$ sea cierta, como muestra la igualdad $1 + \omega = 2 + \omega$. Sin embargo se puede asegurar algo más débil.

A.66. Proposición. *Para números ordinales α, β y γ, si $\alpha <_o \gamma$, entonces $\alpha + \beta \leqslant_o \gamma + \beta$.*

Demostración. Para demostrar nuestra afirmación usaremos el Principio de Inducción Transfinita (teorema A.64). Consideremos el conjunto bien ordenado $P_{\beta+1}$ y sea $B = \{\delta \in P_{\beta+1} : \alpha + \delta \leqslant_o \gamma + \delta\}$. Observe que β es el último elemento de $P_{\beta+1}$; además $0 \in B$. Vamos a demostrar que si $x \in P_{\beta+1}$ y $P_{\beta+1}(x) \subseteq B$, entonces $x \in B$. Supongamos que esto no sucede; es decir: $x \in P_{\beta+1}$, $P_{\beta+1}(x) \subseteq B$ y $x \notin B$. Entonces $\gamma + x <_o \alpha + x$. Esto nos dice que existe $z = (b, \epsilon) \in P_\alpha \sqcup P_x$ y existe un isomorfismo de orden

$$\phi : P_\gamma \sqcup P_x \to (P_\alpha \sqcup P_x)(z).$$

Como $\alpha <_o \gamma$, entonces $\phi[P_\gamma]$ contiene propiamente a P_α. Por lo tanto, $\epsilon = 1$, $b \in P_x$ y

$$\phi|_{P_x \times \{1\}} : P_x \times \{1\} \to \phi[P_x] \subseteq P_x(b) \times \{1\}$$

es un isomorfismo de orden. Esto significa que $\phi(b, 1) <_+ (b, 1)$, lo cual contradice la proposición A.56. Esta contradicccción muestra que si $x \in P_{\beta+1}$ y $P_{\beta+1}(x) \subseteq B$, entonces x debe pertenecer a B. Por el Principio de Inducción Transfinita concluimos que $B = P_{\beta+1}$. En particular, $\alpha + \beta \leqslant_o \gamma + \beta$. ⊠

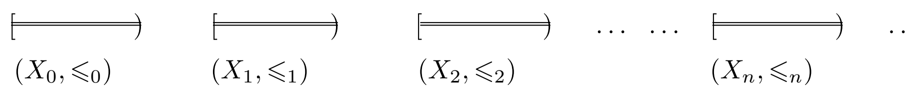

FIGURA 54. Suma libre ordenada de los conjuntos linealmente ordenados $(X_0, \leqslant_0), (X_1, \leqslant_1), \dots, (X_n, \leqslant_n), \dots$

Es posible definir una resta $\beta - \alpha$ de dos números ordinales α y β tales que $\alpha \leqslant_o \beta$ como sigue:

A.67. TEOREMA. *Si α y β son números ordinales que cumplen $\alpha \leqslant_o \beta$, entonces existe un único número ordinal γ tal que $\alpha + \gamma = \beta$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $\alpha = \beta$, elegimos $\gamma = 0$. Si por el contrario $\alpha <_o \beta$, existe $x \in P_\beta$ tal que $P_\beta(x) \approx P_\alpha$. El conjunto $A = P_\beta \setminus P_\beta(x)$ con el orden $\leqslant_o$ es bien ordenado. Sea $\gamma = t.o.(A, \leqslant_o)$. Ahora no es difícil verificar que $\alpha + \gamma = \beta$. La unicidad de γ es una consecuencia de la afirmación (2) en la proposición A.65. ⊠

Ahora generalizamos la definición de suma de dos números ordinales. Sea $(J, \preceq)$ un conjunto bien ordenado y sea $\{(X_j, \leqslant_j) : j \in J\}$ una colección de conjuntos bien ordenados. Definimos la *suma libre ordenada* de la familia $\{(X_j, \leqslant_j) : j \in J\}$ como sigue: para cada $j \in J$ tomamos el conjunto $X_j \times \{j\}$ (observe que la colección $\{X_j \times \{j\} : j \in J\}$ está formada por conjuntos dos a dos ajenos) y escribimos $\bigsqcup_{j \in J} X_j$ para designar el conjunto $\bigcup_{j \in J}(X_j \times \{j\})$ con el buen orden $\leqslant$ definido de la siguiente manera: $(a, i) = (b, k)$ si $a = b$ e $i = k$, y $(a, i) < (b, k)$ si, o bien $i = k$ y $a <_j b$, ó $i \prec k$ (véase la figura 54). A la pareja $(\bigsqcup_{j \in J} X_j, \leqslant)$ le llamamos suma ordenada libre de la familia $\{(X_j, \leqslant_j) : j \in J\}$.

Sea ahora $\{\alpha_j : j \in J\}$ una colección de números ordinales indicada por el conjunto bien ordenado $(J, \preceq)$. Si para cada $j \in J$, $(X_j, \leqslant_j)$ es un conjunto bien ordenado con tipo de orden igual a α_j, entonces definimos la suma $\Sigma_{j \in J} \alpha_j$ como el tipo de orden del conjunto bien ordenado $(\bigsqcup_{j \in J} X_j, \leqslant)$.

El producto de números ordinales. Ahora que hemos definido la suma de números ordinales, podemos definir el producto teniendo en mente que el producto de dos números naturales n y m, $n \cdot m$, no es otra cosa que el resultado de sumar m veces el número n. De este modo, si α y β son dos números ordinales, definimos el producto $\alpha \cdot \beta$ como 0 si $\beta = 0$, y si $\beta \neq 0$, como el número ordinal que representa al conjunto bien ordenado que resulta de colocar tantas copias de α como elementos hay en β, unas seguidas de otras respetando el orden definido en β. De manera más precisa: para cada $j \in P_\beta$ sea $(X_j, \leqslant_j)$ un conjunto bien ordenado con tipo de orden igual a α; por ejemplo $(P_\alpha, \leqslant_o)$. Entonces, $\alpha \cdot \beta$ es igual a $\Sigma_{j\in P_\beta}\alpha_j$ en donde $\alpha_j = \alpha$ para todo $j \in P_\beta$.

En los ejercicios A.IX y A.XI se analiza el producto de números ordinales y se define exponenciación. En particular, se pide al lector demostrar el siguiente resultado.

A.68. Teorema. *Sean α y β dos números ordinales. Entonces el tipo de orden del producto cartesiano $P_\beta \times P_\alpha$ con su orden lexicográfico, tiene tipo de orden igual a $\alpha \cdot \beta$.*

En los textos [36] y [42] pueden encontrarse buenas exposiciones sobre los números ordinales con enfoques diferentes.

Ejercicios

A.I. Conjuntos

(1) Pruebe las proposiciones A.1 y A.3, y complete la demostración de la proposición A.2.

(2) Compruebe que las relaciones siguientes se verifican para cualesquiera subconjuntos A, B, C, de un conjunto X.
  (a) $A \cup A = A = A \cap A$.
  (b) $A \cap A \subseteq A \subseteq A \cup A$.
  (c) Si $A \subseteq C$ y $B \subseteq C$, entonces $A \cup B \subseteq C$.
  (d) Si $C \subseteq A$ ó $C \subseteq B$, entonces $C \subseteq A \cup B$.
  (e) $A \cup (X\backslash A) = X$ y $A \cap (X\backslash A) = \emptyset$.
  (f) $X\backslash(X\backslash A) = A$.
  (g) Si $A \cup B = X$ y $A \cap B = \emptyset$, entonces $B = X\backslash A$.
  (h) Si $A \subseteq B$, entonces $X\backslash B \subseteq X\backslash A$.

(3) Pruebe que las siguientes proposiciones son equivalentes para cualquier par de subconjuntos $A, B \subseteq X$.
  (a) $A \cap B = A$;
  (b) $A \cup B = B$;
  (c) $A \subseteq B$;

(d) $X\backslash B \subseteq X\backslash A$;
(e) $A \cap (X\backslash B) = \emptyset$;
(f) $(X\backslash A) \cup B = X$.

(4) Verifique las siguientes igualdades para conjuntos arbitrarios A, B y C.
(a) $A \cap B = A\backslash(A\backslash B)$;
(b) $(A \cap B)\backslash(A \cap C) = A \cap (B\backslash C)$;
(c) $(A\backslash B) \cup (A\backslash C) = A\backslash(B \cap C)$;
(d) $(A\backslash C) \cup (B\backslash C) = (A \cup B)\backslash C$;
(e) $(A\backslash B) \cup (B\backslash A) = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$;
(f) $A \cup (B\backslash A) = A \cup B$;
(g) $A \cap (B\backslash A) = \emptyset$.

(5) Demuestre la proposición A.3.

(6) Demuestre lo siguiente:
(a) $\bigcup\{A_\alpha : \alpha \in \bigcup \mathcal{I}\} = \bigcup_{I\in\mathcal{I}} \big(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\big)$.
(b) $\bigcap\{A_\alpha : \alpha \in \bigcap \mathcal{I}\} = \bigcap_{I\in\mathcal{I}} \big(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\big)$,
donde $\mathcal{I}$ es una familia no vacía de conjuntos no vacíos.

(7) Sea $\mathcal{F} = \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia de subconjuntos de un conjunto X. Defina

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \big(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_{n+k}\big)$$

y

$$\liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \big(\bigcap_{k=0}^{\infty} A_{n+k}\big).$$

Defina también para cada $x \in X$, $J_x = \{n \in \mathbb{N} : x \in A_n\}$. Demuestre lo siguiente:
(a) $\limsup A_n = \{x \in X : J_x \text{ es infinito }\}$.
(b) $\liminf A_n = \{x \in X : \mathbb{N} \setminus J_x \text{ es finito }\}$.
(c) $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \liminf A_n \subseteq \limsup A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.
(d) $\liminf (X \setminus A_n) = X \setminus \limsup A_n$.
(e) Si $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \cdots$ ó bien $\cdots \subseteq A_n \cdots \subseteq A_2 \subseteq A_1$ entonces $\limsup A_n = \liminf A_n$.

A.II. Producto cartesiano de dos conjuntos

(1) Compruebe la veracidad de la proposición A.4.

(2) Constate que las siguientes igualdades son ciertas, suponiendo que $A, B \subseteq X$ y $C, D \subseteq Y$.
(a) $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$;
(b) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times C) \cup (B \times D)$;
(c) $(X \times Y)\backslash(B \times D) = [(X\backslash B) \times Y] \cup [X \times (Y\backslash D)]$.

(3) Demostrar que si A, B, C, D son cuatro conjuntos diferentes del vacío, entonces $C \times D \subseteq A \times B$ si, y sólo si, $C \subseteq A$ y $D \subseteq B$.

A.III. Relaciones

(1) Demuestre que el conjunto de los números naturales con su orden usual, es un conjunto totalmente ordenado. Verifique lo mismo para el conjunto de los números reales con su orden usual.

(2) Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. Una función $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un *polinomio (en la variable x) de grado $n \in \mathbb{N}$* si es una expresión de la forma $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, en donde cada a_i es un número real y $a_n \neq 0$. El número n es llamado *grado del polinomio* p (si p es una función constante se define su grado como 0).

Sea $\mathbb{R}[x]$ el conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales en la variable x. Pruebe que las relaciones siguientes son relaciones de equivalencia.

(a) En $\mathbb{R}$, $xRy \iff x - y \in \mathbb{Q}$;
(b) En $\mathbb{R}[x]$, $pSq \iff \frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dx}$;
(c) En $\mathbb{R}[x]$, $pEq \iff$ el grado de p es igual al grado de q.

(3) Sean $X = \{x, y, z\}$ y $R = \{(x, x), (x, y), (x, z), (y, y), (z, z)\}$. Demuestre que la relación R es una relación de orden parcial en X. Demuestre también que x es tanto elemento minimal como elemento mínimo, y que y y z son elementos maximales, pero que X carece de elemento máximo.

(4) Sea $(X, \leqslant)$ un conjunto parcialmente ordenado. Demuestre que si $(X, \leqslant)$ tiene elemento mínimo (respectivamente, elemento máximo) entonces dicho elemento es el único elemento minimal de X (respectivamente, el único elemento maximal de X).

(5) Sea Fin la colección de todos los subconjuntos finitos del conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$.
(a) Demuestre que la relación de contención $\subseteq$ es una relación de orden parcial en los conjuntos Fin y $Fin \setminus \{\emptyset\}$.
(b) Halle todos los elementos minimales, el mínimo, el máximo, los elementos maximales (si existen) de los conjuntos parcialmente ordenados $(Fin, \subseteq)$ y $(Fin \setminus \{\emptyset\}, \subseteq)$.

(6) Demuestre que si $(X, \leqslant)$ en un conjunto linealmente ordenado y $x \in X$ es un elemento minimal (respectivamente, un elemento maximal) entonces x es el elemento mínimo de X (respectivamente, el elemento máximo de X).

(7) Construya un ejemplo de un conjunto parcialmente ordenado que tenga exactamente un elemento minimal pero no tenga elemento mínimo.

(8) *(Retículos)* Un conjunto parcialmente ordenado $(A, \leqslant)$ es *un retículo o latís* si para cada dos elementos $a, b \in A$ existe el supremo del conjunto $\{a, b\}$ y el ínfimo del conjunto $\{a, b\}$.

Demuestre que cualquier conjunto bien ordenado es un retículo, y que $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ también es un retículo para cualquier conjunto X.

(9) (*Álgebras Booleanas*) Un *Álgebra Booleana* es un retículo $(B, \leqslant)$ que tiene elemento mínimo y elemento máximo (denotaremos a estos dos elementos con los símbolos $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}$, respectivamente), y tal que para cada $b \in B$, existe un elemento $b' \in B$ tal que $\sup\{b, b'\} = \mathbf{1}$ y $\inf\{b, b'\} = \mathbf{0}$.

Demuestre que para cada conjunto X, el conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ es un álgebra Booleana.

A.IV. Funciones

(1) Complete la demostración de la proposición A.18 y verifique las proposiciones A.19 y A.22.

(2) Sea $f : X \to Y$ una función, $A_1, A_2, A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$. Pruebe que las siguientes afirmaciones son ciertas.
  (a) Si $A_1 \subseteq A_2$, entonces $f[A_1] \subseteq f[A_2]$.
  (b) $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$.
  (c) $f[f^{-1}[B]] \subseteq B$.
  (d) $f^{-1}[Y \backslash B] = X \backslash f^{-1}[B]$.
  (e) $f[X] \backslash f[A] \subseteq f[X \backslash A]$.

En el caso de las contenciones (b), (c) y (e), muestre que no siempre se da la igualdad.

(3) Sean $A \subseteq X$ y $f : X \to Y$ una función. Sea $j : A \to X$ la función inclusión. Demuestre los siguientes hechos:
  (a) $f \restriction A = f \circ j$.
  (b) Defina $g = f \restriction A$. Entonces $g^{-1}(B) = A \cap f^{-1}(B)$ para toda $B \subseteq Y$.

(4) Suponga que $f : X \to Y$ es una función, pruebe las proposiciones que se listan a continuación.
  (a) f es inyectiva si, y sólo si, $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$, para cualesquiera $A, B \subseteq X$.
  (b) f es biyectiva si, y sólo si, $f[X \backslash A] = Y \backslash f[A]$, para cualquier $A \subseteq X$.

(5) Demuestre que si f es una función biyectiva, entonces f^{-1} también lo es, y además que la función inversa de f^{-1} es precisamente f; es decir, $(f^{-1})^{-1} = f$.

(6) Sea $f : X \to Y$ una función biyectiva y sea $B \subseteq Y$. En el texto hay una aparente ambigüedad en el uso de $f^{-1}[B]$. Por un lado puede ser interpretado como la imagen inversa bajo f del conjunto B y, por

otro lado, como la imagen bajo f^{-1} de B. Pruebe que no existe tal ambigüedad; esto es, pruebe que $\{x \in X : f(x) \in B\} = \{f^{-1}(y) : y \in B\}$.

(7) Demuestre que la función G en el ejemplo A.32 es efectivamente una función biyectiva.

A.V. Cardinalidad

(1) Demuestre la proposición A.27.

(2) Sea X un conjunto numerable. Muestre que la colección de todos los subconjuntos finitos de X es también un conjunto numerable.

(3) Se demostró en la sección 5 que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable. Compruebe que si A y B son numerables infinitos, así lo es también $A \times B$. Por inducción, demuestre que si $n \in \mathbb{N}$ y $A_1, \ldots, A_n$ son conjuntos numerables, entonces $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ es numerable.

(4) Una función $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un *polinomio de grado* $n \in \mathbb{N}$ si es una expresión de la forma $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, en donde cada a_i es un número real y $a_n \neq 0$. Demuestre que el conjunto de polinomios de grado n con coeficientes racionales es numerable.

(Sugerencia: $\mathbb{Q}$ es numerable, luego $\mathbb{Q}^n$ es numerable. Pruebe ahora que el conjunto de polinomios con coeficientes racionales de cualquier grado forma un conjunto numerable).

Un número $r \in \mathbb{R}$ es *algebraico* si es una raíz de un polinomio con coeficientes racionales. Concluya que la colección de números algebraicos es numerable.

A.VI. Axioma de elección

(1) Pruebe que si $|X| \leqslant |Y|$ y $X \neq \emptyset$, entonces existe una función suprayectiva de Y en X.

(2) (*El lema de Tukey-Teichmüller implica el Teorema de Hausdorff*).

Una colección $\mathcal{F}$ es de *carácter finito* si para cada conjunto F, se tiene que $F \in \mathcal{F}$ si y sólo si cada subconjunto finito de F pertenece a $\mathcal{F}$.

Lema de Tukey-Teichmüller. Si $\mathcal{F}$ es una familia no vacía de carácter finito, entonces existe $F \in \mathcal{F}$ que no está contenido propiamente en otro elemento de $\mathcal{F}$ (es decir, F es $\subseteq$-maximal).

Demuestre que el Lema de Tukey-Teichmüller implica el Teorema de Hausdorff (teorema A.39).

(Sugerencia: Demuestre que el conjunto de cadenas de un conjunto parcialmente ordenado, considerado con el orden $\subseteq$ es una familia de carácter finito.)

(3) Compruebe que el *Teorema de Hausdorff implica el Lema de Kuratowski-Zorn*.

(Sugerencia: Dado un conjunto parcialmente ordenado $(X, \leqslant)$ considere una cadena $\subseteq$-maximal C. Muestre que si x_0 es una cota superior de C, entonces x_0 es maximal en $(X, \leqslant)$.)

(4) (*El Lema de Kuratowski-Zorn implica el Teorema de Zermelo.*)
  (a) Usando inducción pruebe que cualquier conjunto finito es bien ordenable.
  (b) Dado un conjunto A, sea $P = \{(B, G) : B \subseteq A$ y G es un buen orden en $B\}$. Definimos en P la relación: $(B, G) \leqslant (C, F)$ si $B \subseteq C$, $G \subseteq F$ y para cada $x \in C \setminus B$ se cumple que yFx para todo $y \in B$. Verifique que $\leqslant$ es un orden parcial en P.
  (c) Pruebe que cualquier cadena en $(P, \leqslant)$ tiene una cota superior.
  (d) Por el Lema de Kuratowski-Zorn, $(P, \leqslant)$ tiene un elemento maximal (B_0, G_0). Demuestre que $B_0 = A$.

(5) Corrobore que el *Teorema de Zermelo implica el Axioma de Elección*.

(Sugerencia: Pruebe que para un conjunto no vacío A, y un buen orden G en A, la relación $\phi : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \to A$ definida por $\phi(B) =$ primer elemento de B según G, es una función de selección.

(6) Demuestre que si X es un conjunto con n elementos ($n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) entonces $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$.

(7) Use el teorema A.43 para demostrar que la clase de todos los conjuntos no es un conjunto.

A.VII. Producto cartesiano y aritmética de números cardinales

(1) Confirme que las siguientes proposiciones son equivalentes.
  (a) Axioma de elección;
  (b) Si $\mathcal{A}$ es una familia no vacía de conjuntos no vacíos, entonces existe un conjunto B tal que $|B \cap A| = 1$, para cada $A \in \mathcal{A}$;
  (c) Si $J \neq \emptyset$ y $A_j \neq \emptyset$, para cada $j \in J$, entonces $\prod_{j \in J} A_j \neq \emptyset$.

(2) Verifique que la definición de suma de números cardinales $\sum_{i \in J} \mathfrak{m}j = |\bigcup_{j \in J} X_j|$ no depende de la elección de los conjuntos X_j.

(3) Verifique que la definición de producto de números cardinales $\prod_{i \in J} \mathfrak{m}j = |\prod_{j \in J} X_j|$ no depende de la elección de los conjuntos X_j.

(4) Demuestre los incisos (1), (2) y (3) del teorema A.48.

(5) En los ejercicios siguientes, $\{A_j : j \in J\}$ es una familia no vacía de conjuntos no vacíos.
  (a) Para cada $i \in J$ vamos a definir una función $\pi_i : \prod_{j \in J} A_j \to A_i$ mediante $\pi_i(f) = f(i)$ para cada $f \in \prod_{j \in J} A_j$. A esta función le llamaremos *i-ésima proyección* asociada al producto cartesiano $\prod_{j \in J} A_j$. Demostrar que π_i es suprayectiva para cada $i \in J$.

(b) Pruebe que $\prod_{j\in J} A_j \subseteq \prod_{j\in J} B_j$ si, y sólo si, $A_j \subseteq B_j$, para cualquier $j \in J$.

(6) Sea $\{X_j : j \in J\}$ una familia no vacía de conjuntos no vacíos. Para cada j sean $A_j, B_j \subseteq X_j$. Justifique lo siguiente.
(a) $\big(\prod_{j\in J} A_j\big) \cap \big(\prod_{j\in J} B_j\big) = \prod_{j\in J}(A_j \cap B_j)$.
(b) $\big(\prod_{j\in J} A_j\big) \cup \big(\prod_{j\in J} B_j\big) \subseteq \prod_{j\in J}(A_j \cup B_j)$.

(7) Los resultados del primer inciso de la proposición A.45 pueden ser generalizadas al producto y suma de colecciones arbitrarias de números cardinales. En efecto, sea $\{\mathfrak{m}_j : j \in J\}$ una familia de números cardinales, entonces:
(a) (*Conmutatividad.*) Si M, N son dos subconjuntos de J ajenos cuya unión es J, entonces,

$$\Sigma_{j\in J}\mathfrak{m}_j = (\Sigma_{j\in M}\mathfrak{m}_j) + (\Sigma_{j\in N}\mathfrak{m}_j) \text{ y } \prod_{j\in J}\mathfrak{m}_j = (\prod_{j\in M}\mathfrak{m}_j)\cdot(\prod_{j\in N}\mathfrak{m}_j).$$

(b) (*Asociatividad.*) Si $\{J_s : s \in S\}$ es una partición de J (es decir, S es un conjunto, $\bigcup_{s\in S} J_s = J$ y $J_s \cap J_t = \emptyset$ si $s \neq t$), entonces

$$\Sigma_{j\in J}\mathfrak{m}_j = \Sigma_{s\in S}\Sigma_{j\in J_s}\mathfrak{m}_j \text{ y } \prod_{j\in J}\mathfrak{m}_j = \prod_{s\in S}\prod_{j\in J_s}\mathfrak{m}_j.$$

(c) (*Distributividad.*) $\mathfrak{m}\cdot\Sigma_{j\in J}\mathfrak{m}_j = \Sigma_{j\in J}(\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{m}_j)$

(8) Los resultados en el inciso (2) de la proposición A.45 pueden ser generalizados de la siguiente manera.

Demuestre que si $\{\mathfrak{m}_j : j \in J\}$ y $\{\mathfrak{n}_j : j \in J\}$ son dos familias de números cardinales que satisfacen $\mathfrak{m}_j \leqslant \mathfrak{n}_j$ para cada $j \in J$, entonces $\Sigma_{j\in J}\mathfrak{m}_j \leqslant \Sigma_{j\in J}\mathfrak{n}_j$ y $\prod_{j\in J}\mathfrak{m}_j \leqslant \prod_{j\in J}\mathfrak{n}_j$.

(9) Demuestre que si $\mathfrak{m}$ es un número cardinal infinito, entonces $\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$.

(10) Demuestre que para números cardinales $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ y $\mathfrak{s}$, se cumple:
(a) $\mathfrak{m}^0 = 1$.
(b) $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}+\mathfrak{s}} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}\cdot\mathfrak{m}^{\mathfrak{s}}$.
(c) $(\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}})^{\mathfrak{s}} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{s}}$.

(11) Demostrar que las siguientes desigualdades se cumplen para cualesquiera números cardinales $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{s}$ y $\mathfrak{t}$:
(a) $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}$ si $\mathfrak{n} > 0$,
(b) $\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}$ si $\mathfrak{m} > 1$
(c) $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}} \leqslant \mathfrak{s}^{\mathfrak{t}}$ si $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{s}$ y $\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{t}$.

(12) Sea $\mathfrak{m}$ un número cardinal tal que $2 \leqslant \mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{c}$. Demuestre que $\mathfrak{m}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ y que $\mathfrak{m}^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}$.

(13) Sea M un conjunto infinito. Sea $[M]^{<\aleph_0}$ la colección de subconjuntos finitos de M. Demuestre que $|M| = |[M]^{<\aleph_0}|$.

(14) Sea M un conjunto infinito de cardinalidad $\leqslant \mathfrak{c}$. Sea $[M]^{\leqslant\aleph_0}$ la colección de subconjuntos numerables de M. Demuestre que

$$|[M]^{\leqslant\aleph_0}| = \mathfrak{c}.$$

A.VIII. Números ordinales

(1) Sea $n \in \mathbb{N}$, con $n > 1$, y suponga que A y B son dos conjuntos bien ordenados con n elementos, demuestre que ellos son isomorfos.

(2) Verifique que la definición de orden entre números ordinales no depende de la elección de los conjuntos A y B, sino únicamente del tipo de orden.

(3) Demuestre que la suma $\alpha + \beta$ de los números ordinales α y β, no depende de la elección de los representantes (A, R) y (B, S) de α y β, respectivamente.

(4) Sean α, β y γ tres números ordinales, demuestre que $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.

(5) Sea $\varphi : (A, \leqslant) \to (B, \preceq)$ un isomorfismo entre conjuntos parcialmente ordenados. Compruebe que para cada $C \subseteq A$ no vacío se cumple:

 (a) $\varphi(\text{mín}C) = \text{mín}\varphi[C]$,
 (b) $\varphi(\text{sup}C) = \text{sup}\varphi[C]$,
 (c) $\varphi(\text{máx}C) = \text{máx}\varphi[C]$ y
 (d) $|C| = |\varphi[C]|$.

 Concluya que los números ordinales ω, $\omega + 1$, $\omega + n$ con $1 < n < \omega$, $\omega + \omega$, ω_1 y ω_2 son dos a dos diferentes.

(6) Sea $\mathcal{O}$ un conjunto de números ordinales. La pareja $(\mathcal{O}, \leqslant_o)$ es un conjunto bien ordenado. Sea α el tipo de orden de $(\mathcal{O}, \leqslant_o)$. Sea $\phi : P_\alpha \to \mathcal{O}$ un isomorfismo de orden, y denotemos a $\phi(j)$ por α_j. Pruebese que el número ordinal $\beta = \Sigma_{j \in P_\alpha} \alpha_j$ es un número ordinal mayor o igual que cada α_j. Es decir, $\mathcal{O} \subseteq P_{\beta+1}$.

(7) Un número ordinal α es *sucesor* si existe un ordinal β tal que $\alpha = \beta + 1$. En este caso, se dice que α es *sucesor inmediato* de β y β es *antecesor inmediato* de α. Un número ordinal es un *ordinal límite* si carece de antecesor inmediato. Muestre que ordinales como ω, $\omega + \omega$ y ω_1 son ordinales límites. Es posible también demostrar que para cada número ordinal α, existe un número ordinal límite β y un número natural n (posiblemente igual a 0) tales que $\alpha = \beta + n$.

(8) Hemos visto que cada número ordinal α puede ser identificado con el conjunto de los números ordinales que son $<_o \alpha$ provisto con su buen orden $\leqslant_o$. Para cada ordinal α podemos asociarle su cardinalidad $|\alpha|$ que es igual al número cardinal $|\{\beta : \beta \text{ es un número ordinal y } \beta <_o \alpha\}|$. Existen números ordinales α que tienen la característica que para cada $\beta \in \alpha$, $|\beta| < |\alpha|$. A un número ordinal con esta propiedad

se le llama *ordinal inicial*. Compruebe que ω, ω_1 y ω_2 son ordinales iniciales.

Demuestre, usando el Axioma de Elección (véase la proposición A.62) que dado un número cardinal $\mathfrak{m}$ existe un único número ordinal inicial $\alpha(\mathfrak{m})$ tal que $|\alpha(\mathfrak{m})| = \mathfrak{m}$.

De esta manera, al suponer el Axioma de Elección, podemos identificar cada número cardinal $\mathfrak{m}$ con el número ordinal $\alpha(\mathfrak{m})$. Así, al primer cardinal infinito $\aleph_0$ se le denota como el primer ordinal inicial ω, y al número cardinal $\aleph_1$ se le escribe también como ω_1.

(9) Sea α un ordinal y $A \subseteq \alpha$. Decimos que A es *cofinal* en α, si para cada $\lambda <_o \alpha$ (es decir, si para cada $\lambda \in \alpha$), podemos encontrar un $\beta \in A$ tal que la desigualdad $\lambda <_o \beta$ se cumple. Demuéstre que:
 (a) La colección de los números pares es cofinal en ω.
 (b) La colección de los ordinales límites en ω_1 es cofinal en ω_1.
 (c) La colección de los ordinales en ω_1 que no son límites es cofinal en ω_1.
 (d) Cualquier subconjunto A de ω_1 de cardinalidad $\aleph_1$ es cofinal en ω_1.
 (e) Demuestre que si A es un subconjunto cofinal en ω_1, entonces A no es numerable. Es decir, $|A| = \aleph_1$.
 (f) Sea $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números ordinales numerables (es decir, $\alpha_n <_o \omega_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$) tal que

$$\alpha_0 <_o \alpha_1 <_o \cdots <_o \alpha_n <_o \ldots$$

 Pruebe que el supremo del conjunto $\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ (es decir, el mínimo de los números ordinales que son mayores que todo α_n) es también numerable y es un ordinal límite.

(10) Dado un número ordinal (en particular, por lo dicho en el inciso (3), dado un número cardinal) α definimos su cofinalidad: $cf(\alpha)$, como el número cardinal más pequeño $\mathfrak{m}$ tal que existe $A \subseteq \alpha$ que es cofinal en α y $|A| \leqslant \mathfrak{m}$. Observe que siempre se cumple que $cf(\alpha) \leqslant |\alpha|$.

Un número ordinal (respectivamente, un número cardinal) α es *regular* si $cf(\alpha) = |\alpha|$. Y α es *singular* si $cf(\alpha) < |\alpha|$.

Verifique que los números cardinales ω y ω_1 son regulares. Se puede demostrar que el número cardinal ω_ω es singular.

Ejercicios adicionales

A.IX. Producto de números ordinales

(1) Dé una demostración del teorema A.68.
(2) Demuestre que para números ordinales α y β, se tiene que $\alpha\cdot(\beta+1) = \alpha\cdot\beta+\alpha$.
(3) Pruebe usando inducción transfinita que $1\cdot\alpha = \alpha$ para cualquier número ordinal α. Además, $\alpha\cdot 1 = \alpha$.
(4) Verifique que el producto de números ordinales no es una operación conmutativa.
(5) Para cualesquiera números ordinales α, β y γ, $(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma = \alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$.
(6) Proporcione una demostración a cada una de las afirmaciones siguientes:
   (a) Si $\alpha \neq 0$ y $\beta < \gamma$, entonces $\alpha\cdot\beta < \alpha\cdot\gamma$.
   (b) Si $\alpha \neq 0$ y $\alpha\cdot\beta = \alpha\cdot\gamma$, entonces $\beta = \gamma$.
   (c) $\alpha < \beta$ implica $\alpha\cdot\gamma \leqslant \beta\cdot\gamma$.

A.X. Máximo y supremo de un conjunto de ordinales

Dado un conjunto $\mathcal{O}$ de números ordinales, diremos que un número ordinal α es *cota superior* de $\mathcal{O}$ si $\beta \leqslant_o \alpha$ para todo $\beta \in \mathcal{O}$. Si α pertenece a $\mathcal{O}$, se dirá que α es el *elemento máximo* de $\mathcal{O}$.

(1) Sea $\mathcal{O}$ un conjunto de números ordinales. Consideremos el conjunto $C = \{|\alpha| : \alpha \in \mathcal{O}\}$ de números cardinales. Por el teorema A.43 y el corolario A.44 existe un número cardinal $\mathfrak{m}$ tal que $|\alpha| < \mathfrak{m}$ para cualquier $\alpha \in \mathcal{O}$. Demuestre que para cada $\alpha \in \mathcal{O}$, α es estríctamente menor, como número ordinal, que el ordinal inicial $\alpha(\mathfrak{m})$ (véase el ejercicio A.VIII.(8)).

(2) Del inciso (1), resulta que $\mathcal{O}$ es un subconjunto de $P_{\alpha(\mathfrak{m})}$. Sea $E = \{\beta \in P_{\alpha(\mathfrak{m})} : \beta$ es cota superior de $\mathcal{O}\}$. Como $(P_{\alpha(\mathfrak{m})}, \leqslant_o)$ es un conjunto bien ordenado, si el conjunto E es no vacío, existe un número ordinal $\beta_{\mathfrak{m}}(\mathcal{O}) <_o \alpha(\mathfrak{m})$ tal que $\beta_{\mathfrak{m}}(\mathcal{O})$ es el primer elemento en E.

   Ahora definimos el supremo del conjunto $\mathcal{O}$ según $\mathfrak{m}$, $sup_{\mathfrak{m}}\mathcal{O}$, como sigue:
   (a) $sup_{\mathfrak{m}}\mathcal{O} = max\mathcal{O}$ si $\mathcal{O}$ tiene máximo;
   (b) $sup_{\mathfrak{m}}\mathcal{O} = \beta_{\mathfrak{m}}(\mathcal{O})$ si $\mathcal{O}$ no tiene máximo y E no es vacío; y
   (c) $sup_{\mathfrak{m}}\mathcal{O} = \alpha(\mathfrak{m})$ si $\mathcal{O}$ no tiene máximo y E es vacío.

   Demuestre que la definición de supremo de $\mathcal{O}$ según $\mathfrak{m}$ no depende de la elección del cardinal $\mathfrak{m}$. Es decir, si $\mathfrak{n}$ es un número cardinal diferente de $\mathfrak{m}$ y es tal que $|\alpha| < \mathfrak{n}$ para todo $\alpha \in \mathcal{O}$, entonces $sup_{\mathfrak{m}}\mathcal{O} =$

$sup_{\mathfrak{n}}\mathcal{O}$. Así definimos el supremo de $\mathcal{O}$, $sup\mathcal{O}$, como $sup_{\mathfrak{t}}\mathcal{O}$ cualquiera que sea $\mathfrak{t}$ que satisfaga $|\alpha| < \mathfrak{t}$ para todo $\alpha \in \mathcal{O}$.

A.XI. Exponenciación de números ordinales

Dado un número ordinal fijo β definimos de manera recursiva el número ordinal β^α:

(1) $\beta^0 = 1$,
(2) $\beta^{\alpha+1} = \beta^\alpha \cdot \beta$ para cualquier ordinal α, y
(3) $\beta^\alpha = \sup\{\beta^\gamma : \gamma <_o \alpha\}$ si α es un número ordinal límite (véanse los ejercicios A.VIII.(6) y A.XI.(2)).

(1) Demuestre, usando inducción transfinita, que para cualquier número ordinal α, $1^\alpha = 1$.
(2) Sea n un número ordinal finito mayor que 1. Entonces $n^\omega = \omega$.
(3) $\omega^n <_o \omega^\omega$ para cualquier $n <_o \omega$.
(4) Para cualesquiera ordinales α, β y γ se cumple $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$.
(5) Para cualesquiera ordinales α, β y γ se cumple $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\cdot\gamma}$.
(6) Demuestre que $(\omega \cdot 2)^2$ no es igual a $\omega^2 \cdot 4$. Es decir, la relación $(\alpha \cdot \beta)^\gamma = \alpha^\gamma \cdot \beta^\gamma$ no es cierta para cualesquiera ordinales α, β y γ.

Bibliografía

[1] P. S. Alexandroff, P. Urysohn, *Memoire sur les espaces topologiques compacts* Verh. Akad. Wetensch. Amsterdam, **14** (1929).

[2] P. S. Alexandroff, *On some results concerning topological spaces and their continuous mappings*, General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra (Proc. Sympos., Prague, 1961), Publ. House Czech. Acad. Sci., Prague, and Academic Press, New York, 1962, 41–54.

[3] P. Alexandroff, *On some fundamental directions in general topology*, Russian Math. Surveys **19** (1964).

[4] P. S. Alexandroff, *Über die Struktur der bikompakten topologischen Räume*, Math. Ann. **92** (1921), 267-274.

[5] P. S. Alexandroff, *Sur les propiétés locales des ensembles et la notion de compacité*, Bull. Intern. Acad. Pol. Sci. Sér. **A** (1923), 9–12.

[6] P. S. Alexandroff, P. Urysohn, *Sur les espaces topologiques compacts*, Bull. Intern. Acad. Pol. Sci. Sér. **A** (1923), 5-8.

[7] P. S. Alexandroff, P. Urysohn, *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une class (L) soit une class (B)*, C.R. Acad. Sci. Paris **177** (1923), 1274-1276.

[8] P. S. Alexandroff, P. Urysohn, *Zur Theorie der Topologischen Räume*, Ath. Ann. **92** (1924), 258–266.

[9] A. V. Arkhangel'skii, *Topological function spaces*, Kluwer Academic Publishers. 1992.

[10] A. V. Arkhangel'skii, M. Tkachenko, *Topological groups and related structures.*, Atlantis studies in mathematics. Atlantis Press. Amsterdam. Paris. 2008.

[11] J. A. Amor, *Teoría de conjuntos para estudiantes de ciencias*, las prensas de ciencias. 1997.

[12] R. G. Bartle, *The elements of real analysis*, John Wiley & Sons, Inc., 1964.

[13] R. H. Bing, *Metrization of topological spaces*, Canad. J. Math. **3** (1951), 175-186.

[14] G. Cantor, *Gessamelte Abhandlungen*, Berlin (Springer), 1932.

[15] G. Cantor, *Ueber die Ausdehming eines Satzes aus der theorie der trigonometrischen Reihen*, Math. Ann. **5** (1872), 123-132.

[16] G. Cantor, *Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reelen algebraishen Zahlen*, J. Reine Angew. Math. **77** (1874), 258-262.

[17] G. Cantor, *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*, Journal f. reine und angew. Math. **84** (1878), 242-258.

[18] G. Cantor, *Ueber unendliche Punktmannichfaltigkeiten*, Math. Ann. **21** (1883), 51-58.

[19] G. Cantor, *Über einen Satzaus der theorie der stetigen Mannigfaltigkeiten*, Göttinger Nachr. (1879), 127-135.

[20] G. Cantor, *Ueber unendliche, lineare Punktmennichfaltigkeiten*, Math. Ann. **17** (1880), 355-358.

[21] G. Cantor, *Ueber unendliche lineare Punktmennichfaltigkeiten*, Math. Ann. **21** (1888), 51-58.

[22] H. Cartan, *Théories des filters*, Compt. Rend. **250** (1937), 595-598.

[23] H. Cartan, *Filters e ultrafilters*, Compt. Rend. **250** (1937), 777-779.

[24] P. J. Cohen, *The independence of the continuum hypothesis, I*, Proc.Math. Acad. Sci. USA **50** (1963), 1143-1148.

[25] P. J. Cohen, *The independence of the continuum hypothesis, II*, Proc.Math. Acad. Sci. USA **51** (1964), 105-110.

[26] R. Engelking, *General Topology*, Sigma Series in Pure Mathematics, vol 6, Heldermann Verlag Berlin, 1989.

[27] P. Erdös, *The dimension of the rational points in Hilbert space*, Ann. Math. **41** (1940), 734-736.

[28] R. Escobedo, S. Macías, H. Méndez, *Invitación a la teoría de continuos y sus hiperespacios*, Aportaciones Matemáticas **31**, Sociedad Matemática Mexicana, 2006.

[29] M. Fréchet, *Sur quelques points du calcul fonctionnel*, Rend. del Circ.Mat. di Palermo **22** (1906), 1-74.

[30] A. García-Máynez, A. Tamariz-Mascarúa, *Topología General*, Editorial Porrua S.A., 1988.

[31] L. Gillman, M. Jerison, *Rings of continuous functions*, Sringer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1976.

[32] K. Gödel, *Consistency of the axiom of choice and the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory*, Princeton Univ. Press, 1940.

[33] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig, 1914.

[34] F. Hausdorff, *Set Theory*, Chelsea Publishing Company, 1957.

[35] O. Hanner, *Solid spaces and absolute retracts*, Ark. för Mat. **1** (1951), 375-382.

[36] F. Hernández, *Teoría de conjuntos (una introducción)*, SMM vol. 13 de la serie TEXTOS, 1998.

[37] H. Hahn, *Über die allgemeinste ebene Punktmenge, die stetiges Bild einer Strecke ist*, Jahresber. Deut. Math. Ver., **23** (1914), 318-322.

[38] H. Hahn, *Über die Komponenten offenen Mengen*, Fund. Math., **2** (1921), 189-192.

[39] K. Hrbacek, T. Jech, *Introduction to set theory*, Marcel Dekker, Inc., 1999.

[40] T. Jech, *The axiom of choice*, North-Holland, 1973.

[41] W. Just, *Discovering Modern Set Theory I*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 8, American Mathematical Society, 1996.

[42] E. Kamke, *Theory of sets*, Dover Publications, Inc., 1950.

[43] B. Knaster, K. Kuratowski, *Sur les ensembles connexes*, Fund.Math., **2** (1921), 206-255.

[44] K. Kunen, *Set theory, an introduction to independence proofs*, North-Holland, 1995.

[45] K. Kuratowski, *Une Définition Topologique de la Ligne de Jordan*, Fund.Math., **1** (1920), 40-43.

[46] K. Kuratowski, *Une méthode d'élimination des nombres transfinis des raisonnements mathématiques*, Fund.Math., **2** (1922), 76-108.

[47] K. Kuratowski, *Sur l'opération $\overline{A}$ de l'Analysis Situs*, Fund.Math., **3** (1922), 182-199.

[48] N. J. Lennes, *Curves in non-metrical analysis situs with an application in the calculus of variations*, Amer. J. Math., **33** (1911), 287-326.

[49] E. Michael, *The product of a normal space and a metric space need not be normal*, Bull. Amer. Math. Soc. **69** (1963), 375-376.

[50] E. H. Moore, H. L. Smith, *A general theory of limits*, Amer. J. Math. **44** (1922), 102-121.

[51] C. Prieto, *Topología básica*, Fondo de Cultura Económica. México. 2003.

[52] F. Riesz, *Die Genesis des Raumbegriffs*, Math. und Naturwiss. Berichte aus Ungarn 24 (1907), 309–353.

[53] F. Riesz, *Stetigkeitsbegriff und abstrkte Mengenlehre*, Atti IV Congresso Internaz. Mat. Vol. II (Roma 1908), R. Accad. Lincei, Rome, 1909, 18–24.

[54] H. Rubin, J.E. Rubin, *Equivalents of the Axiom of Choice, II*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 116, North Holland, Amsterdam - New York - Oxford, 1985.

[55] G. Salicrup, *Introducción a la topología*, Aportaciones Matemáticas, 1, Sociedad Matemática Mexicana, 1993.

[56] W. Sierpiński, *Un théorème sur les continues*, Tôkoku Math. J. **13** (1918), 300–303.

[57] W. Sierpiński, *Sur les ensemble connexes et non connexes*, Fun. Math. **2** (1921), 81–95.

[58] R.H. Sorgenfrey, *On the product of paracompact spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), 631-632.

[59] M. Spivak, *Calculus. Cálculo infinitesimal*. Editorial Reverté. 1981.

[60] M. Tkachenko, L. M. Villegas, C. Hernández, O. J. Rendón, *Grupos Topológicos*. Universidad Autónoma Metropolitana. 1997.

[61] V. Tkachuk, *Curso de topología general*. Universidad Autónoma Metropolitana. 1999.

[62] H. Tietze, *Über stetige Kurven, Jordansche Kurvenbögen und geschlossene Jordansche Kurven*, Math Z. **5** (1919), 284-291.

[63] H. Tietze, *Beitaäge zur allgemeinen Topologie I*, Math Ann, **8** (1923), 290-312.

[64] A. N. Tychonoff, *Über einen Metrisationssatz von P. Urysohn*, Mathematische Annalen, **95**, (1925), 994–996.

[65] A. N. Tychonoff, *Über die topologische Erweiterung von Räumen*, Mathematische Annalen, **102**, (1930), 544–561.

[66] P. Urysohn, *Zum Metrizationproblem*, Mathematische Annalen, **94** (1925), 309–315.

[67] P. Urysohn, *Über die Mächtigkeit der zussamenhängenden Räume*, Mathematische Annalen, **94** (1925), 262–295.

[68] S. Willard, *General Topology.* Dover Publications,Inc. 2004.

[69] E. Zermelo, *Beweiss dass jade Menge wohlgeordnet werden kass*, Math. Ann. **59** (1904) 514-516.

[70] M. Zorn, *A remark on method in transfinite algebra*, Bull. Am. Math. Soc. **41** (1935) 667-670.

Tabla de símbolos

(A1), 7
(A2), 7
(A3), 7
(A, B), 281
(C1), 12
(C2), 12
(C3), 12
$(C(I), d_\infty)$, 7
$(V, +, *, \mathcal{T})$, 257
$(X, \{\emptyset, X\})$, 8
(X, d), 3
$(X, \mathcal{P}(X))$, 8
$(X, \mathcal{T})$, 7
$(Y, \mathcal{T}_{p,\aleph_0})$, 31
$(Y, \mathcal{T}_{p,\kappa^+})$, 31
$(\Lambda, \leqslant)$, 109
$(\mathbb{R}^m, e)$, 3
$(\mathcal{D}, \mathcal{T}_\mathcal{D})$, 128
$(\leftarrow, a)$, 17
$(a, \rightarrow)$, 17
(a, b), 288
$(a_1, \ldots, a_n)$, 307
(h, K), 217
$(h_1, K_1) \preccurlyeq (h_2, K_2)$, 219
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, 87
$|| \cdot ||$, 31
$||x||$, 31
$|X|$, 296
$|X| \leqslant |Y|$, 297
$|X| < |Y|$, 297
$|X| \leqslant \aleph_0$, 298
$|X| = \aleph_0$, 298
$<$, 290
$A \approx B$, 312
$A(X)$, 31, 200
$A(\tau)$, 31
$A = B$, 286
$AD(C_1)$, 62
$AD(X)$, 62
$A \cup B$, 286
$A \setminus B$, 286
$A \sqcup B$, 318
$A \subseteq B$, 286
$A \subsetneqq B$, 286
$A \times B$, 288
A^2, 288
$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times \ldots$, 307
$A_1 \times \cdots \times A_n$, 307
$B(E, \epsilon)$, 36
$B(f, r)$, 13
$B(x, r)$, 4
$C(K \restriction X, [0, 1])$, 220
$C(X, Y)$, 195
$C^*(X)$, 115
$C^*(\mathbb{R})$, 30
$C_p(I)$, 58
$C_p(X)$, 195
$C_p(X, Y)$, 195
$C_u(I)$, 7
C_x, 250
$Con(X)$, 130
D_a, 24
$E(\aleph_0)$, 132
F_σ, 67
G_δ, 67
I, 6
I_a, 24
$J(\kappa)$, 28
$K_1 \preccurlyeq K_2$, 220
$L^\infty(C(I))$, 7
P_α, 315
Q_x, 264
S^1, 80
S^n, 80

$Spec(A)$, 166
$V(\aleph_0)$, 139
$X/\sim$, 129
$X \cong Y$, 76
$X \setminus A$, 286
X_Y, 11
$[0, \alpha]$, 66
$[0, \alpha)$, 66
$[0, \omega_1)$, 174
$[0, \omega_1]$, 174
$[f; x_1, ..., x_n; r]$, 23
$\mathcal{B}(x)$, 18
$\mathcal{B}_d$, 14
Δf_α, 188
$\mathcal{F} \to x$, 99
$\mathcal{F}_{\mathcal{B}} \to x$, 99
$\mathcal{L}_S$, 26
$\mathbb{N}$, 285
$\mathbb{P}$, 285
$\Psi(\mathcal{A})$, 234
$\mathbb{Q}$, 286
$\mathbb{R}$, 285
$\mathbb{R}[x]$, 323
$\mathbb{R}^+$, 3
$\Rightarrow$, 285
$\Sigma_{j \in J} \mathfrak{m}_j$, 308
$\mathcal{T}_e$, 9
$\mathcal{T}_{E_0,\kappa}$, 31
$\mathcal{T}(\mathcal{V})$, 36
$\mathcal{T} \restriction Y$, 20
$\mathcal{T}_1 \leqslant \mathcal{T}_2$, 10
$\mathcal{T}_Y$, 11
$\mathcal{T}_{\mathcal{D}}$, 127
$\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$, 124
$\mathcal{T}_\infty$, 13
$\mathcal{T}_\kappa$, 31
$\mathcal{T}_\leqslant$, 24
$\mathcal{T}_{p,\kappa}$, 31
$\mathbb{Z}$, 286
$\aleph_2$, 317
$\aleph_0$, 297
$\aleph_1$, 306
$\alpha + \beta$, 318
$\alpha <_o \beta$, 313
$\alpha \cdot \beta$, 321
βX, 222
$\mathbf{C}$, 271
$\bigcap \mathcal{C}$, 287
$\bigcap \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$, 288
$\bigcap \{E : E \in \mathcal{C}\}$, 287
$\bigcap_{E \in \mathcal{C}} E$, 287
$\bigcap_{n=1}^\infty A_n$, 288
$\bigcup \mathcal{C}$, 287
$\bigcup \{E : E \in \mathcal{C}\}$, 287
$\bigcup_{E \in \mathcal{C}} E$, 287
$\bigcup_{n=1}^\infty A_n$, 288
$\bigoplus_{j \in J} X_j$, 125
$\mathcal{AR}(X)$, 66
$\mathcal{CR}(X)$, 66
$\mathcal{F}(X)$, 36
$\mathcal{K}(X)$, 226
$\mathcal{T}_f$, 123
$\mathcal{V}(U_1, ..., U_n)$, 36
$\chi(X)$, 107
$\chi(x, X)$, 107
χ_E, 102
$\mathrm{cl}(E)$, 43
$\{X_j : j \in J\}$, 307
$\mathrm{der}(E)$, 40
$\emptyset$, 286
$\exists$, 285
$\mathrm{ext}(E)$, 47
$\forall$, 285
$\mathrm{fr}(E)$, 47
$\mathfrak{m} + \mathfrak{n}$, 307
$\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}$, 308
$\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$, 297
$\mathfrak{m}^\mathfrak{n}$, 311
$f : X \to Y$, 293
id_X, 293
$\iff$, 285
$\mathrm{int}(E)$, 45
$\leqslant_l$, 290
$\leqslant$, 290
$\mathcal{M}$, 11
$\mathcal{Z}(X)$, 230
$\mathfrak{c}$, 297
ω^{ω^ω}, 316
ω_2, 317
π_i, 119
$\prod_{j \in J} \mathfrak{m}_j$, 308

$\prod_{i=1}^{n} A_i$, 307
$\prod_{n=1}^{\infty} A_n$, 307
$\psi(X)$, 167
$\psi(x, X)$, 167
$\rho(A, B)$, 36
$\rho_A(B)$, 36
$\sim$, 290
$\tau(X)$, 10
$\text{ínf}\, C$, 291
$\text{dom}\,(R)$, 289
$\text{máx}\, C$, 291
$\text{mín}\, C$, 291
$\text{ran}\,(R)$, 289
$\sup C$, 291
$\varprojlim S$, 262
$\varprojlim \{X_\sigma, \pi_\sigma^\rho, \Sigma\}$, 262
$\vee$, 285
$\wedge$, 285
$\{X_\sigma, \pi_\sigma^\rho, \Sigma\}$, 262
${}_f\mathcal{T}$, 112, 113
${}_{\mathcal{F}}\mathcal{T}$, 113
aRb, 289
$c(X)$, 107
$cf(\alpha)$, 329
$d(E, F)$, 36
$d(E, x)$, 36
$d(X)$, 107
d_∞, 6
$f[A]$, 293
$f{\restriction}A$, 295
f^{-1}, 294
$f^{-1}[B]$, 293
$f_n \underset{p}{\to} f_0$, 89
$f_n \underset{u}{\to} f_0$, 89
$g \circ f$, 295
i_A, 295
i_Y, 74
$nw(X)$, 167
$t.o.(A)$, 312
$w(X)$, 106
$x \in A$, 285
$x_n \to x_0$, 88
$y_0 \in \lim_{\mathcal{F}} f$, 169, 170
$\mathcal{T}$, 7
$\mathcal{T}_d$, 4
$\mathcal{P}(X)$, 286
ZF, 303
ZFE, 302
HC, 301

Índice

(A, B), 302
$(C(I), d_\infty)$, 7
$(V, +, *, \mathcal{T})$, 275
$(X, \{\emptyset, X\})$, 8
(X, d), 3
$(X, \mathcal{P}(X))$, 8
$(X, \mathcal{T})$, 7
$(Y, \mathcal{T}_{p,\aleph_0})$, 34
$(Y, \mathcal{T}_{p,\kappa^+})$, 33
$(\Lambda, \leqslant)$, 111
$(\mathbb{R}^m, e)$, 3
$(\mathcal{D}, \mathcal{T}_\mathcal{D})$, 130
$(\leftarrow, a)$, 17
$(a, \rightarrow)$, 17
(a, b), 308
$(a_1, \ldots, a_n)$, 327
(h, K), 230
$(h_1, K_1) \preccurlyeq (h_2, K_2)$, 232
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, 90
$<$, 310
$A \approx B$, 332
$A(X)$, 34, 221
$A(\tau)$, 34
$A = B$, 306
$AD(C_1)$, 63
$AD(X)$, 63
$A \cup B$, 306
$A \setminus B$, 306
$A \sqcup B$, 338
$A \subseteq B$, 306
$A \subsetneqq B$, 306
$A \times B$, 308
A^2, 308
$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times \ldots$, 327
$A_1 \times \cdots \times A_n$, 327
$B(E, \epsilon)$, 37
$B(f, r)$, 13
$B(x, r)$, 4
$C(K \restriction X, [0, 1])$, 234
$C(X, Y)$, 204
$C^*(X)$, 117
$C^*(\mathbb{R})$, 33
$C_p(I)$, 60
$C_p(X)$, 204
$C_p(X, Y)$, 204
$C_u(I)$, 7
C_x, 267
$Con(X)$, 134
D_a, 25
$E(\aleph_0)$, 136
F_σ, 68
G_δ, 68
I, 6
I_a, 25
$J(\kappa)$, 30
$K_1 \preccurlyeq K_2$, 233
$L^\infty(C(I))$, 7
P_α, 335
Q_x, 283
S^1, 83
S^n, 83
$Spec(A)$, 170
T_0, 148
T_1, 150
T_2, 153

T_3, 160
T_4, 176
$T_{3.5}$, 182
$T_{3\frac{1}{2}}$, 182
$V(\aleph_0)$, 141
$X/\sim$, 132
$X \cong Y$, 78
$X \backslash A$, 306
X_Y, 11
$[0,\alpha]$, 67
$[0,\alpha)$, 67
$[0,\omega_1)$, 178
$[0,\omega_1]$, 178
$[f; x_1, ..., x_n; r]$, 24
$\mathcal{B}(x)$, 19
$\mathcal{B}_d$, 14
$\mathcal{F} \to x$, 101
$\mathcal{F}_{\mathcal{B}} \to x$, 101
$\mathcal{L}_S$, 29
$\mathbb{N}$, 305
$\mathbb{P}$, 305
$\Psi(\mathcal{A})$, 249
$\mathbb{Q}$, 306
$\mathbb{R}$, 305
$\mathbb{R}[x]$, 343
$\mathbb{R}^+$, 3
$\Rightarrow$, 305
$\Sigma_{j\in J}\mathfrak{m}_j$, 328
$\mathcal{T}_e$, 9
$\mathcal{T}_{E_0,\kappa}$, 33
$\mathcal{T}(\mathcal{V})$, 37
$\mathcal{T}\restriction Y$, 21
$\mathcal{T}_1 \leqslant \mathcal{T}_2$, 10
$\mathcal{T}_Y$, 11
$\mathcal{T}_{\mathcal{D}}$, 130
$\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$, 127
$\mathcal{T}_\infty$, 13
$\mathcal{T}_\kappa$, 33
$\mathcal{T}_\leqslant$, 25
$\mathcal{T}_{p,\kappa}$, 33
$\mathbb{Z}$, 306
$\aleph_2$, 337
$\aleph_0$, 317
$\aleph_1$, 326
$\alpha + \beta$, 338
$\alpha <_o \beta$, 333
$\alpha \cdot \beta$, 341
βX, 236
$\mathbf{C}$, 291
$\bigcap \mathcal{C}$, 307
$\bigcap\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$, 308
$\bigcap\{E : E \in \mathcal{C}\}$, 307
$\bigcap_{E\in\mathcal{C}} E$, 307
$\bigcap_{n=1}^\infty A_n$, 308
$\bigcup \mathcal{C}$, 307
$\bigcup\{E : E \in \mathcal{C}\}$, 307
$\bigcup_{E\in\mathcal{C}} E$, 307
$\bigcup_{n=1}^\infty A_n$, 308
$\bigoplus_{j\in J} X_j$, 128
$\mathcal{AR}(X)$, 68
$\mathcal{CR}(X)$, 68
$\mathcal{F}(X)$, 37, 38
$\mathcal{K}(X)$, 240
$\mathcal{T}_f$, 126
$\mathcal{V}(U_1, ..., U_n)$, 37
$\chi(X)$, 110
$\chi(x, X)$, 110
χ_E, 104
$\mathrm{cl}(E)$, 45
$\{X_j : j \in J\}$, 327
$\mathrm{der}(E)$, 42
$\emptyset$, 306
$\exists$, 305
$\mathrm{ext}(E)$, 49
$\forall$, 305
$\mathrm{fr}(E)$, 49
$\mathfrak{m} + \mathfrak{n}$, 327
$\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}$, 328
$\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$, 317
$\mathfrak{m}^\mathfrak{n}$, 331
$f : X \to Y$, 313
id_X, 313
$\iff$, 305
$\mathrm{int}(E)$, 47
$\leqslant_l$, 310
$\leqslant$, 310
$\mathcal{M}$, 11
$\mathcal{Z}(X)$, 245
$\mathfrak{c}$, 317
ω^{ω^ω}, 336
ω_2, 337

π_i, 121
$\prod_{j\in J}\mathfrak{m}_j$, 328
$\prod_{i=1}^{n} A_i$, 327
$\prod_{n=1}^{\infty} A_n$, 327
$\psi(X)$, 171
$\psi(x, X)$, 171
$\rho(A, B)$, 38
$\rho_A(B)$, 38
$\sim$, 310
$\tau(X)$, 10
$\text{ínf}\, C$, 311
$\text{dom}\,(R)$, 309
$\text{máx}\, C$, 311
$\text{mín}\, C$, 311
$\text{ran}\,(R)$, 309
$\sup C$, 311
$\varprojlim S$, 281
$\varprojlim\{X_\sigma, \pi_\sigma^\rho, \Sigma\}$, 281
$\vee$, 305
$\wedge$, 305
$\{X_\sigma, \pi_\sigma^\rho, \Sigma\}$, 281
${}_f\mathcal{T}$, 114, 115
${}_{\mathcal{F}}\mathcal{T}$, 115, 185
aRb, 309
$c(X)$, 109
$cf(\alpha)$, 349
$d(E, F)$, 37
$d(E, x)$, 37
$d(X)$, 110
d_∞, 6
$f[A]$, 313
$f\restriction A$, 315
f^{-1}, 314
$f^{-1}[B]$, 313
$f_n \to f_0$, 92
$f_n \rightrightarrows f_0$, 92
$g \circ f$, 315
i_A, 315
i_Y, 76
$nw(X)$, 171
$t.o.(A)$, 332
$w(X)$, 109
$x \in A$, 305
$x_n \to x_0$, 90
$y_0 \in \lim_{\mathcal{F}} f$, 173
$\mathcal{T}$, 7
$\mathcal{T}_d$, 4
$\mathcal{P}(X)$, 306
(A1), 7
(A2), 7
(A3), 7
(C1), 12
(C2), 12
(C3), 12
álgebras booleanas
  en espacios topológicos, 68
HC, 321
ZFE, 322
ZF, 323

Urysohn, P. S., 208

abanico numerable, 141
acotado, 68, 217
aditiva, 140
Alexandroff
  compactación de, 221
Alexandroff, P., 29, 33
Alexandroff, P. S, 218
Alexandroff, P. S., 207, 208
álgebra booleana, 344
antecesor inmediato, 67
axioma
  de elección, 322, 323, 325
axioma de elección, 322, 345, 346
axiomas
  de Kuratowski, 54
  de Zermelo-Fraenkel, 322, 323
  para conjuntos cerrados, 12

Baire
  propiedad de, 70, 240
  Teorema de, 240
Baire, R., 207
banda de Moebius, 133
base
  de filtro, 97
base de filtro
  punto de acumulación de una, 101
  punto límite, 101
base de vecindades, 19
base para una topología, 14

bases, 35
bases locales, 35
Bernstein, F., 320
Bing, R H, 10
biyección, 314
bola
  centrada en E, 37
bola abierta, 4
Bolzano, 207
Borel, 207

cadena, 312
cajas
  topología de, 139
Cantor
  conjunto de, 211
  cubo de, 217
  Espacio de, 123
Cantor, G., 58, 66, 207, 305, 320, 321, 325, 326
carácter, 110
carácter de un espacio en un punto, 110
casi ajena, 248
celularidad de un espacio, 109
cerrado
  segmento, 262
cerrado-abierto, 260
cerradura, 41, 45
cociente
  espacio, 129
  función, 129
Cohen, P., 322
colección, 305
  centrada, 98, 210
  con la propiedad de la intersección finita, 98, 210
  de carácter finito, 345
compactación, 230
  por un punto, 34
  de Alexandroff, 33, 221
    de un espacio discreto, 33
  de Stone-Čech, 236
  por un punto, 221
compactaciones equivalentes, 232
comparación de topologías, 34
completamente regular
  espacio, 181
completamente regulares, 136
componente
  conexa, 267
  por trayectoria, 298
componente conexa, 267
composición de dos funciones, 315
conexo, 256
conexo por trayectorias, 271
conjunto, 305
  G_δ, 70
  último elemento de un, 311
  acotado, 68, 217
  bien ordenado, 312
  cardinalidad de un, 316
  cerrado, 12
  cerrado-abierto, 260
  cerradura de un, 41
  cofinal en α, 349
  complemento de un, 306
  conulo, 201
  cota inferior de un, 311
  cota superior de un, 311
  de Cantor, 211, 291
  de números enteros, 306
  de números irracionales, 11, 305
  de números naturales, 305
  de números racionales, 306
  de números reales, 305
  de tipo F_σ, 68
  de tipo G_δ, 68
  derivado, 42
  derivado de un conjunto, 41
  elemento de un, 305
  exterior de un, 49
  finito, 318
  frontera de un, 49
  infinito, 318
  infinito numerable, 318
  interior de un, 47
  intersección de conjuntos, 306
  linealmente ordenado, 310
  más que numerable, 318
  nulo, 201
  numerable, 318

potencia, 306
potencia de un, 306
preordenado, 310
primer elemento de un, 311
radialmente abierto, 36
regularmente abierto, 66
regularmente cerrado, 66
tamaño de un, 316
ternario de Cantor, 211
totalmente ordenado, 310
unión de conjuntos, 306
vacío, 306
conjunto abierto, 4
conjunto convexo, 258
conjunto dirigido, 111, 280
conjuntos
cerrados, 34
equipotentes, 316
funcionalmente separados, 188
igualdad de, 306
conjuntos bien ordenados
suma libre, 338
cono, 134
continuamente ordenado, 302
continuo, 278
de Knaster, 283
irreducible, 298
convergencia
de sucesiones, 5, 90
de un filtro, 101
de una base de filtro, 101
puntual, 92
uniforme, 92
convexo, 272
conjunto, 258
cortadura, 302
cortadura propia, 302
cota
inferior, 311
máxima cota inferior, 311
mínima cota superior, 311
superior, 311
cuadrado lexicográfico, 38
cubierta, 105, 208
abierta, 105, 208
cerrada, 105
subcubierta de una, 208
cubo de Cantor, 217

débil
topología, 114
densamente ordenado, 302
densidad, 110
desigualdad del triángulo, 3
diferencia de conjuntos, 306
dirigido
conjunto, 111, 280
disconexo, 256
distancia, 3
del supremo, 33
entre conjuntos, 37
duplicado de Alexandroff, 63
base local, 63
del círculo, 63
puntos aislados, 63

elemento
último elemento, 311
máximo, 311
mínimo, 311
maximal, 311
minimal, 311
primer elemento, 311
Engelking R., 207
Engelking, R., 63
Erdös
espacio de, 292
Erdös, P., 292
erizo
no metrizable, 135
erizo métrico de κ espinas, 30
espacio
0-dimensional, 289
C^*-encajado, 238
T_0, 148
T_1, 150
T_2, 153
T_3, 160
σ-compacto, 244
carácter de un, 110
casi compacto, 247
celularidad de un, 109

cero-dimensional, 46
cociente, 129
compacto, 208
completamente regular, 181, 182
conexo, 256
conexo por trayectorias, 271
continuamente ordenado, 302
continuo, 278
de Baire, 70, 240
de Fort modificado, 168
de Fréchet-Uryshon, 108
de Hausdorff, 153
de Lindelöf, 223
de Mrówka, 249
de primera categoría en sí mismo, 69
de segunda categoría en sí mismo, 69
de Sierpiński, 8, 43, 148
de Tychonoff, 181
densamente ordenado, 302
densidad de un, 110
disconexo, 256
discreto, 8
fuertemente 0-dimensional, 300
hereditariamente de Lindelöf, 244
hereditariamente disconexo, 289
hereditariamente Lindelöf, 224
hereditariamente separable, 107
indiscreto, 8
localmente compacto, 218
localmente conexo, 266
localmente conexo por trayectorias, 275
métrico, 3
completo, 69
euclidiano $\mathbb{R}^m$, 3
metrizable, 112
normal, 176
numerablemente compacto, 223
paracompacto, 251
partición, 130
periféricamente compacto, 293
peso de un, 109
primero numerable, 85
regular, 160
secuencial, 108
segundo numerable, 85
separable, 85
separación de un, 257
subespacio de un, 20, 21
sumergible, 105
topológico, 7
totalmente disconexo, 289
Tychonoff, 181
vectorial normado, 32
vectorial topológico, 275
Espacio de Cantor, 123
espacio topológico
linealmente ordenado, 25, 38
espacios
completamente regulares, 136
homeomorfos, 78
pseudocompacto, 244
espacios isomorfos, 302
extensión, 105
extensión continua, 191
extensión de una función, 315
extensión unipuntual Lindelöf-κ, 33
extensiones unipuntuales
Lindelöf-κ, 33
exterior, 49

familia, 305
σ-localmente finita, 252
casi ajena, 248
centrada, 98, 210
con la propiedad de la intersección finita, 98, 210
de funciones que distingue puntos, 185
de funciones que genera la topología, 185
de funciones que separa puntos, 185
dirigida, 279
localmente finita, 203
filtro, 96
base de, 97
imagen de un, 103
punto de acumulación de un, 101
punto límite, 101
finitamente productiva
propiedad, 120

Fodor, 251
Fort
  espacio de, 168
Fréchet, M., 3, 7
Fréchet-Uryshon, 108
Fraenkel, A., 322, 323
fuertemente 0-dimensional, 300
función, 313
  biyectiva, 314
  característica, 104
  cardinal topológica, 110
  cociente, 129
  composición, 315
  constante, 313
  continua, 72
  de elección, 323
  discontinua, 72
  identidad en X, 313
  imagen de una, 313
  inclusión, 76, 315
  inmersión, 105, 185
  inversa de f, 315
  inyectiva, 314
  perfecta, 250
  polinomial, 77
  proyección, 139
  racional, 77
  regresiva, 251
  restricción, 315
  sobre, 314
  suprayectiva, 314
  uno a uno, 314
función diagonal, 140
funcionalmente separado
  conjuntos, 188

Gödel, K., 321
grado de un polinomio, 343, 345
grupo topológico, 143

Hanner, O., 10
Hausdorff
  espacio de, 153
Hausdorff, F., 8, 37, 38, 58, 325, 345, 346
Heine-Borel-Lebesgue
  Teorema de, 217
hereditariamente de Lindelöf, 244
hereditariamente disconexo, 289
hereditariamente separable, 107
Hernández Hernández, F., 322, 341
Hewitt-Marczewski-Pondiczery
  teorema de, 139
Hilbert, D., 321
Hipótesis del Continuo, 321
homeomorfismo, 78
Hrbacek, K., 322
hueco interior, 302

identificación, 129
  T_0, 167
imagen
  de f, 313
  de un conjunto, 313
  de un punto, 313
  de una función, 313
  inversa, 313
  inversa de un conjunto, 313
imagen de un filtro, 103
inclusión de A en X, 315
Inducción Transfinita, 337
ínfimo, 311
inicial
  topología, 114
inmersión, 105, 185
interior, 47
intersección
  de dos conjuntos, 306
  de una familia de conjuntos, 307
inyección, 314
isomorfismo lineal, 302

Jech, T., 322, 323
Jones
  Lema de, 179

Köning, J., 331
Kamke, E., 341
Knaster
  continuo de, 283
Knaster-Kuratowski
  Tienda de, 292
Kuratowski, K., 346

Kunen, K., 322
Kuratowski
  axiomas de, 54
  operador de, 54
Kuratowski, K., 54, 325

límite
  de una función con respecto a un filtro, 173
línea de Michael, 11
línea de Sorgenfrey, 29
línea larga, 296
latís, 344
Lebesgue, H., 207
lema
  de Fodor, 251
  de Jones, 179
  de Kuratowski-Zorn, 346
  de Kuratowski-Zorn, 325
  de Tukey-Teichmüller, 345
  de Urysohn, 188
Lindelöf
  espacio de, 223
localmente compacto, 218
localmente conexo, 266
localmente conexo por trayectorias, 275
localmente finita
  familia, 203

máximo, 311
métrica, 3
  d_∞, 6
  acotada, 32
  de Hausdorff, 37, 38
  definida por una norma, 33
  del supremo, 33
  discreta, 3
  euclidiana, 3
  usual, 3
métricas, 29
  acotadas, 32
  equivalentes, 32
mínimo, 311
maximal, 311
metrizable, 112
Michael, E., 11
minimal, 311
Moebius
  banda, 133
Mrówka
  espacio de, 249

número
  algebraico, 345
  cardinal, 316
    cofinalidad de un, 349
    regular, 349
    singular, 349
  ordinal, 348
    antecesor inmediato, 348
    cofinalidad de un, 349
    inicial, 349
    límite, 348
    regular, 349
    singular, 349
    sucesor, 348
    sucesor inmediato, 348
números cardinales
  aritmética de, 327, 346
  exponenciación, 331
  producto de, 328
  suma de, 327, 328
números ordinales, 348
  producto de, 340
  suma de, 338
natural
  proyección, 130
negación
  de la Hipótesis del Continuo, 321
normal
  espacio, 176
numerabilidad
  vs. unión, 323
numerablemente aditiva, 140
numerablemente compacto, 223

operador, 44
  cerradura, 47
  de Kuratowski, 54
  derivado, 44
  interior, 48
operador cerradura, 54

orden
  buen orden, 312
  lexicográfico, 310
  lineal, 310
  total, 310
orden parcial estricto, 310

paracompacto, 251
pareja ordenada, 308
  primera coordenada de una, 308
  segunda coordenada de una, 308
partición, 130
  espacio, 130
peine roto, 285
perfecta, 250
periféricamente compacto, 293
peso de red, 171
peso de un espacio, 109
plano
  de Moore, 162
  de Niemytzki, 162
plano radial, 36, 37
poligonal, 262
polinomio, 77, 343, 345
  de grado n, 343, 345
polinomio de grado n, 343, 345
preorden, 310
primer axioma de numerabilidad, 85
primera categoría, 69
Principio de Inducción Transfinita, 337
Principio maximal de Hausdorff, 325
producto
  Σ, 144
  σ, 138
  diagonal de funciones, 194
producto cartesiano, 308, 327, 346
producto diagonal de funciones, 140
propiedad
  aditiva, 140
  finitamente productiva, 120
  numerablemente aditiva, 140
  topológica, 79
proyección, 139
  i-ésima, 346
  asociada a un producto cartesiano, 346
proyección natural, 130
proyección sobre el i-ésimo factor, 121
pseudobase, 171
pseudocarácter, 171
pseudocompacto, 244
pseudométrica, 32, 166
pseudométricas, 29
punto
  adherente a un conjunto, 45
  aislado, 61
  aislado de un conjunto, 42
  aislado en un conjunto, 61
  de acumulación, 42, 61
  de corte, 299
  frontera, 49
  interior, 47
punto de acumulación
  de un filtro, 101
  de una base de filtro, 101
punto de acumulación completa, 239
punto límite
  de base de filtro, 101
punto límite de filtro, 101

quasi-componente conexa, 283

red, 20, 171
  peso de, 171
refinamiento, 251
regresiva, 251
regular
  espacio, 160
relación, 309
  de equipotencia, 316
  de equivalencia, 309
  de orden lineal, 310
  de orden parcial, 309
  de orden parcial estricto, 310
  de orden total, 310
  dominio, 309
  en A, 309
  inversa, 309
  rango, 309
  reflexiva, 309
restricción de f a A, 315
retículo, 344

retracción, 106
retracto, 106
Riesz, F., 7
Rubin, J. E., 324
Rubin, R., 324

salto, 302
Schröder, 320
secuencial, 108
segmento
  final, 25
  inicial, 25
segmento cerrado, 262
segunda categoría, 69
segundo axioma de numerabilidad, 85
separación de un espacio, 257
Sierpiński
  espacio de, 8, 148
sistema de vecindades de un punto, 17
sistema inverso, 281
  de espacios topológicos, 281
  hilo, 281
Sorgenfrey, R. H., 29
Stone-Čech
  compactación de, 236
subbase para una topología, 16
subbases, 35
subconjunto
  abierto, 7
  cerrado, 12
  conulo, 201
  de primera categoría, 69
  de segunda categoría, 69
  denso, 57
  denso en ninguna parte, 57, 58
  denso en sí mismo, 57
  fronterizo, 57, 58
  nulo, 201
  perfecto, 58
  propio, 306
subconjuntos
  de primera categoría, 69
  de segunda categoría, 69
subespacio topológico, 21
subespacios, 36
subgrupo topológico, 143
sucesión, 5, 90
  finita, 90
sucesor inmediato, 67
suma
  topológica, 128
  topológica libre, 128
suma libre de conjuntos bien ordenados, 338, 340
suprayección, 314
supremo, 311

Teichmüller, O., 345
Teorema
  de A. H. Stone, 252
  de Baire, 240, 243
  de Cantor, 326
  de extensión de Tietze, 192
  de Hausdorff, 325, 345, 346
  de Heine-Borel-Lebesgue, 217
  de Hewitt-Marczewski-Pondiczery, 139
  de inmersión de Tychonoff, 196, 198
  de Zermelo, 325, 346
  del buen orden, 325
Tienda de Knaster-Kuratowski, 292
Tietze
  Teorema de extensión de, 192
topología
  T_0, 148
  T_1, 150
  de Vietoris, 37
  base para una, 13, 14, 35
  cofinita, 8
  conumerable, 33
  débil, 114
  de la convergencia puntual en $C(I)$, 60
  de Vietoris, 37
  discreta, 8
  en un conjunto, 7
  euclidiana
    en $\mathbb{R}$, 9
  generada por una pseudométrica, 166
  indiscreta, 8
  inducida por el orden, 25
  inicial, 114
  más fina, 10

más gruesa, 10
relativa en Y, 21
subbase para una, 13, 16, 35
topologías comparables, 34
topología
de cajas, 139
Toro, 133
totalmente disconexo, 289
trayectoria, 271
componente por, 298
Tukey, J. W., 345
Tychonoff
espacio de, 181
Teorema de inmersión, 196, 198
Tychonoff, A. N., 194, 196

ultrafiltro, 98
unión
de dos conjuntos, 306
de una familia de conjuntos, 307
Urysohn
Lema de, 188
Urysohn, P., 29
Urysohn, P. S., 207, 218

vecindad de un punto, 17
vectorial topológico, 275
Vietoris, L., 37

Weierstrass, 207

z-filtro, 245
z-ultrafiltro, 246
Zermelo, E., 322, 323, 325, 346
Zorn, M., 325, 346