Algunas Aplicaciones de la Teoría de Conjuntos a la Topología

Ángel Tamariz Mascarúa

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
atamariz@servidor.unam.mx

Resumen

En este artículo expositorio hemos enlazado algunos temas que permiten apreciar la relación entre la teoría de conjuntos y la topología. Además de hacer un breve recuento histórico de esta relación, se estudian algunos resultados de extensiones de espacios y de funciones continuas. Analizamos también la densidad y celularidad de espacios producto, y discutimos la hipótesis de Souslin. Trataremos con objetos y proposiciones tan variadas como son: los filtros, los números cardinales, las familias casi-ajenas, los conjuntos linealmente ordenados, los espacios de Mrówka-Isbell, el lema de la raiz, el teorema de Hewitt-Marczewski-Pondiczery, la hipótesis de continuo y el axioma de Martin.

Clasificación AMS, 1991: 54A25; 54A35; 54B10; 54C20 54D35; 54D80; 54F05.
Aportaciones Matemáticas, Serie Comunicaciones **27** *(2000) 257-275*

1 Introducción

La aparición de la topología general a finales del siglo XIX y principios del XX es una consecuencia de varios acontecimientos importantes que tuvieron lugar durante el siglo del romanticismo. Por un lado, se llevó a cabo la reformulación, en términos rigurosos, de conceptos básicos del cálculo tales como límite (d'Alembert y Cauchy) y función continua (Bolzano y Cauchy), así como de criterios de convergencia de series infinitas (Gauss). Por otra parte, empezaron a aparecer en el trabajo matemático algunos fenómenos inesperados relacionados con la convergencia de series trigonométricas (Abel, Lejeune-Dirichlet, du Bois-Reymond), y se descubrieron ejemplos de funciones continuas que no son diferenciables en ningún punto (Bolzano, Riemann y Weierstrass). La sorpresa que estos eventos causaron, condujo a revisar la noción de número y a construir una teoría, también rigurosa, de los números reales (Méray, Cantor y Dedekind).

El otro acontecimiento clave (el más decisivo, quizá) que motivó la génesis de la topología, fue la aparición de los trabajos sobresalientes de Riemann sobre variedades de dimensión dos, los cuales prefiguraban el estudio de variedades de mayor dimensión y de espacios de funciones.

Estos hechos prepararon y motivaron la elaboración de lenguajes y conceptos que permitirían generalizar la distancia y la geometría Euclideana, con el objeto de obtener criterios de cercanía lo más abstractos posibles, para tratar sobre continuidad y convergencia en espacios muy generales, como podían ser los conjuntos de funciones (Arzelá, Volterra, Hilbert y Fredholm), o de curvas (Ascoli), o de planos (Borel).

Despues de varios intentos hechos por matemáticos como Fréchet [21] y Riesz [40], [41], en 1914 Hausdorff logra dar una definición definitiva de topología en términos de sistemas de vecindades [26]. La que sigue es la definición de topología que en la actualidad es generalmente aceptada y que es casi equivalente a la dada por Hausdorff. La definición de Hausdorff incluye el axioma de separación que ahora lleva su nombre.

Una topología τ en un conjunto X es una colección de subconjuntos de X tal que

1. $\emptyset, X \in \tau$,
2. si $A_0, A_1 \in \tau$, entonces $A_0 \cap A_1 \in \tau$, y
3. si $\mathcal{A} \subset \tau$, entonces $\bigcup \mathcal{A} \in \tau$.

Como se puede apreciar, esta definición es puramente conjuntista y posee un enorme grado de generalidad. No es de extrañar entonces que el estudio de los espacios topológicos abstractos se encuentre estrechamente relacionado con los conceptos y las técnicas de la teoría de conjuntos. Es por esto que, a esta rama específica de la topología dedicada al estudio de los espacios abstractos, suele llamársele topología de conjuntos.

Mi intención en este trabajo es mostrar algunos aspectos de la relación entre la teoría de conjuntos y la topología de conjuntos. Por esta razón, en este artículo vamos a involucrarnos con objetos tales como filtros, conjuntos ordenados, combinatoria infinita, números cardinales y axiomas de la Teoría de Conjuntos.

Con este propósito, hemos organizado este trabajo como sigue: después de introducir en la sección 2 algunas definiciones y notaciones, pasamos, en la sección 3, a hacer un breve recuento histórico que nos proporcionará una visión un poco más amplia de lo que ha sido la relación entre estas dos disciplinas. En la sección 4 veremos cómo es posible construir espacios topológicos importantes y útiles a partir de conceptos conjuntistas como filtro, familia casi ajena y conjunto parcialmente ordenado. En las secciónes 5 y 6 se muestran dos ejemplos típicos de problemas que aborda la topología de conjuntos; problemas en los que he estado trabajando, y que ahora quiero compartir con los lectores; el primero tiene que ver con extensiones compactas de espacios topológicos, y el segundo está relacionado con extensiones continuas de funciones. Se podrá apreciar cómo estos problemas tienen una naturaleza conjuntista y cómo se resuelven utilizando ideas de la misma índole. En esas secciones nos servimos de las ideas de filtro y familias casi ajenas para nuestros propósitos, y usamos algunos axiomas adicionales a los axiomas básicos de la teoría de conjuntos para obtener resultados nuevos. En la sección 7 presentamos un lema fundamental y clásico de combinatoria infinita: el Lema de la Raiz; con él pasaremos a la sección 8 para discutir sobre celularidad y densidad en productos de espacios topológicos. Esto nos conectará con el tema de la última sección: la hipótesis de Souslin y la línea de Souslin. Aquí, de nuevo, nos reencontraremos con axiomas consistentes, conjuntos ordenados, celularidad, densidad, etc.

Espero que el material que he elegido para presentar este trabajo refleje lo más posible la naturaleza apasionante de la topología de conjuntos, siempre impregnada de números infinitos, lógica y combinatoria infinita.

2 Notaciones y preliminares

Para cada conjunto X, denotaremos a la colección de sus subconjuntos con $\mathcal{P}(X)$, y $|X|$ es su cardinalidad, es decir $|X|$ denota la "cantidad de elementos" que posee X. Las letras griegas α y κ designarán números cardinales. Al primero y segundo cardinales infinitos los denotaremos indistintamente por $\aleph_0$ o ω y $\aleph_1$ o ω_1, respectivamente. Resulta entonces que la cardinalidad del continuo (de los números reales) es igual a $2^{\aleph_0} = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$. Recuérdese que cada número cardinal α es igual al conjunto de los números ordinales menores estrictamente que α (véanse [30], [31]). Es por esto que también usaremos el símbolo ω para referirnos a los números naturales. Si α es un número cardinal, entonces α^+ es el menor cardinal mayor que α; es decir, α^+ es el sucesor inmediato de α. Un cardinal α se dice que es *regular* si cualquier sucesión creciente de ordinales menores que él, con límite α, tiene cardinalidad α.

Un espacio topológico es una pareja (X, τ) en donde X es un conjunto y τ es una topología en X. A los elementos de τ se les llama *subconjuntos abiertos* de X, y a los complementos de los elementos en τ se les llama *subconjuntos cerrados*. Para $A \subset X$, denotaremos por $\mathrm{int}(A)$ o $\mathrm{int}_X A$ al interior de A, que es el mayor subconjunto abierto de X contenido en A; además, denotaremos por $\mathrm{cl}(A)$ o $\mathrm{cl}_X A$ a la cerradura de A que es el menor cerrado de X que contiene a A.

Un subconjunto D de un espacio topológico X es *denso* si D contiene elementos de cualquier subconjunto abierto no vacío de X. La densidad de X, $d(X)$, es el mínimo número cardinal α tal que X contiene un subconjunto denso de cardinalidad α. Y un espacio X es *separable* si $d(X) = \aleph_0$.

Una colección $\mathcal{C}$ de subconjuntos no vacíos de X se le llama *celular* si para distintos elementos C_0 y C_1 en $\mathcal{C}$, se cumple que $C_0 \cap C_1 = \emptyset$. La *celularidad* de un espacio X es el supremo de los números cardinales α tal que podemos encontrar una familia celular de subconjuntos abiertos de X de cardinalidad α.

Sea J un conjunto y sea $\mathcal{X} = \{X_j : j \in J\}$ una familia de conjuntos. El conjunto producto $X = \prod_{j \in J} X_j$ es la colección de todas las funciones f tales que $f : J \to \bigcup_{j \in J} X_j$ con $f(j) \in X_j$ para cada $j \in J$. Es decir, el conjunto producto de la familia $\mathcal{X}$ es igual al conjunto de funciones de selección definidas en esta familia. Si cada X_j es un espacio topológico con topología τ_j, entonces podemos asociarle al producto X la topología τ que tiene como base a los conjuntos A tales que $\mathrm{A} = \prod_{j \in J} A_j$ con $A_j \in \tau_j$ para todo $j \in J$, y, además, $A_j \neq X_j$ sólo para una colección finita de elementos en J. A los conjuntos que acabamos de definir se les llama *abiertos canónicos*, y al espacio (X, τ) así definido se le llama *espacio producto*. De esta forma, los conjuntos abiertos en la topología producto de X son las uniones de abiertos canónicos.

Un *conjunto parcialmente ordenado* es una pareja $(X, <_X)$ en donde $<_X$ es una relación entre elementos distintos de X que satisface: $x <_X y$ y $y <_X z$ implica que $x <_X z$. Para $x, y \in X$, la expresión $x \leq_X y$ significará que $x <_X y$ o $x = y$. Una *cadena* Y en un conjunto parcialmente ordenado $(X, <_X)$ es un subconjunto de X tal que si $x, y \in Y$, entonces $x \leq_X y$ o $y \leq x$. Si $(X, <_X)$ es una cadena, entonces decimos que $(X, <_X)$ es un conjunto *linealmente ordenado* (también se le llama conjunto *totalmente ordenado*). Un elemento x, en un conjunto parcialmente ordenado $(X, <_X)$, es *cota superior* de $Y \subset X$ si se satisface que $y \leq_X x$ para cualquier $y \in Y$. Un elemento $x \in X$ es *maximal* si $x \leq_X y$ implica $x = y$. Si x, y pertenecen a un conjunto linealmente ordenado $(X, <_X)$ y $x \leq_X y$, entonces denotaremos por (x, y) (resp., $[x, y)$, $[x, \rightarrow)$, $[x, y]$)) al conjunto $\{z \in X : x <_X z <_X y\}$ (resp., $\{z \in X : x \leq_X z < y\}$, $\{z \in X : x \leq_X z\}$, $\{z \in X : x \leq_X z \leq_X y\}$). De manera análoga se definen los conjuntos $(x, y]$ y $(\leftarrow, y]$.

Los *axiomas de Zermelo-Fraenkel* (**ZF**) son los nueve axiomas básicos que determinan los objetos elementales con los que trabajamos en matemáticas: *los conjuntos.* (Usaremos como sinónimo de conjunto las palabras *familia* y *colección.*) Sobre estos axiomas está elaborada la mayor parte de la teoría matemática. Algunos de estos axiomas son: existe un conjunto; la unión, la intersección y el producto de dos conjuntos es un conjunto; existe un conjunto infinito; si X es un conjunto, entonces $\mathcal{P}(X)$ es un conjunto, etc. (véase [31]).

El *axioma de elección* (**C**) es la proposición:

2.1 *Dados un conjunto J y una familia $\{F_j : j \in J\}$ de conjuntos, existe un conjunto A tal que $|A \cap F_j| = 1$ para todo $j \in J$.*

2.2 Usualmente los matemáticos trabajamos usando a **ZF**+**C** = **ZFC** como nuestro sistema axiomático base. Existen varias formas equivalentes de enunciar el axioma de elección; una de ellas es: *El producto de cualquier colección de conjuntos no vacíos es un conjunto no vacío.* Otro enunciado equivalente a **C** es el llamado Lema de Zorn que dice: (**LZ**) *Si en un conjunto parcialmente ordenado $(X, <_X)$ cada cadena tiene una cota superior, entonces existe en X un elemento maximal x.*

Las definiciones de los términos no definidos en este trabajo, pueden encontrarse en los libros [20] y [22].

3 La Teoría de Conjuntos y la Topología

En sus trabajos publicados desde 1872 hasta 1888 ([7]–[13]), George Cantor introdujo el concepto de función inyectiva, establece la equipotencia entre los números algebraicos y los números naturales y demuestra que los números reales no son numerables. Como consecuencia de estos resultados surge la famosa y fundamental *Hipótesis del Continuo* (**HC**): *No existe un número cardinal intermedio entre la cardinalidad de los naturales y la cardinalidad de los reales, en símbolos:*

$$\aleph_1 = 2^{\aleph_0}.$$

Más tarde, Cantor introduce las nociones de *punto aislado* y de *conjuntos frontera, denso, derivado y cerrado*, y obtiene importantes teoremas del tipo: *Todo subconjunto cerrado en* $\mathbb{R}$ *es la unión de dos conjuntos, uno perfecto* (*en* $\mathbb{R}$) *y el otro numerable* ([13],[4]).

De esta manera Cantor funda la Teoría de Conjuntos y establece parte de los conceptos y proposiciones básicos de la Topología. Desde la aparición de los trabajos de Cantor hasta finales de la decada de los 20, se puede decir que la Teoría de Conjuntos y la Topología constituyeron una misma disciplina.

A principios del siglo XX, se inicia el estudio de los espacios abstractos. M. Fréchet define los espacios métricos, y aparecen los trabajos de Hausdorff y Baire. Un ejemplo de los resultados obtenidos en esta época es el siguiente famoso teorema de Baire quien lo demostró para el caso $X = \mathbb{R}$ en 1889:

Teorema 3.1 (Hausdorff, [26]) *En un espacio completamente metrizable* X*, la intersección de una colección numerable de subconjuntos abiertos y densos es un subconjunto denso.*

Durante los años de 1920 a 1930 se demostraron algunos de los teoremas fundamentales de lo que ahora se conoce como Topología General. Algunos de los más sobresalientes son:

Teorema 3.2 (Urysohn-Tietze, [51],[53]) *Un espacio topológico* X *es normal si y sólo si cualquier función continua con valores reales definida sobre un subespacio cerrado de* X*, tiene una extensión continua a todo el espacio.*

Teorema 3.3 (Alexandroff-Urysohn, [3]) *Un espacio regular es metrizable si tiene una base* **numerable**.

Teorema 3.4 (Tychonoff, [52]) *El producto de espacios compactos es un espacio compacto.*

El primero, el teorema de extensión de Urysohn-Tietze, se refiere a uno de los problemas esenciales de las matemáticas: la extensión continua de funciones reales. (Trataremos un problema de extensiones continuas en la sección 6.) Este teorema demuestra que la clase de los espacios normales es fundamental.

Por otro lado, el teorema de Alexandroff-Urysohn, de gran belleza y utilidad, ejemplifica la posición de los topólogos de aquella época que pensaban sólo en términos de **numerable vs no numerable**, sin detenerse a analizar las consecuencias de la diversidad existente en el caso infinito no numerable.

Por último, el teorema de Tychonoff es tanto conjuntista como topológico, e ilustra cómo, incluso hasta finales de los años 20, la Topología y la Teoría de Conjuntos permanecían estrechamente relacionadas.

En 1931 y en 1940 Kurt Gödel obtiene dos resultados que han sido muy importantes en el desarrollo de la Topología y de la Teoría de Conjuntos. Por un lado, Gödel demuestra que *en cualquier teoría matemática axiomática* T *que incluye la aritmética, se encuentran proposiciones cuya veracidad o falsedad no se pueden decidir en* T [24]. Además, demostró que:

Teorema 3.5 [25] *La Hipótesis del Continuo* ($\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$) *es consistente con* **ZFC**.

Es decir, si los axiomas alistados en **ZFC** no producen ninguna contradicción, entonces estos axiomas junto con $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ no conducen tampoco a ninguna contradicción.

Como consecuencia de estos resultados, la Teoría de Conjuntos y la Topología se diferenciaron; se abandonó el estudio de los problemas ligados a la aritmética de cardinales, y la Teoría de Conjuntos se dedicó a la profundización en el desarrollo de la lógica y de las estructuras lingüísticas. La Topología por su parte, tomó un camino distinto, dedicándose al estudio de variedades métricas con estructuras algebraicas (Topología Algebraica).

La Topología Abstracta tiene un nuevo impulso a partir de 1944, cuando Jean Dieudonné introduce el concepto de paracompacidad [18]. Este renacimiento se prolonga hasta los primeros años de los 60. A este periodo pertenecen teoremas tan importantes como el teorema de Stone que garantiza la paracompacidad de todo espacio métrico [48], y los teoremas de metrización de Bing [5] y de Nagata-Smirnov [36], [44]. Además aparecen contraejemplos importantes como la Línea de Sorgenfrey, con la cual se prueba que el producto de espacios paracompactos no es necesariamente un espacio de esta índole [46]; y la Línea de Michael que proveee un ejemplo de un espacio normal cuyo producto con un espacio métrico separable no es normal [34].

Otro tema de gran importancia que tiene un fuerte impulso en esta época, es el de la teoría de las compactaciones o extensiones compactas de un espacio topológico, que había iniciado Aleksandrov en 1924 [1] y que, en la época de la que estamos hablando, fue desarrollada por Stone, Čech, Wallman, Hewitt y Katětov. (En la sección 5 abordaremos un problema relacionado con extensiónes de espacios topológicos.) Un resultado clásico en este sentido es el siguiente:

Teorema 3.6 (Stone-Čech) *Un espacio X es de Tychonoff si y sólo si existe un espacio βX tal que:*

1. *βX es compacto;*
2. *X es un subespacio denso de βX; y*
3. *si $f : X \to [0,1]$ es continua, entonces existe una extensión continua $f^\beta : \beta X \to [0,1]$ de f, es decir $f^\beta|_X = f$.*

Más tarde, en 1963 sucede otro acontecimiento clave en el desarrollo de la Topología de Conjuntos: Paul Cohen demuestra que

Teorema 3.7 [16] *La consistencia de* **ZFC** *implica la consistencia de* **ZFC** *más la negación de la Hipótesis del Continuo.*

Además se dan a conocer las investigaciones de Jech, Tennenbaum, Solovay y Jensen sobre la conjetura de Souslin ([27], [45], [50]), la cual trataremos con más detalle en la sección 9 (**HS**: *todo espacio topológico linealmente ordenado de celularidad numerable es separable* [47]) :

Teorema 3.8 [28] *Si* **ZFC** *es consistente, entonces es consistente* **ZFC** + *existe un espacio topológico ordenado de celularidad numerable y densidad no numerable.*

Y Martin formula el axioma que lleva su nombre cuya versión topológica dice

3.9 AM: *En cualquier espacio compacto Hausdorff de celularidad numerable, la intersección de una colección de cardinalidad menor que* $2^{\aleph_0}$ *de subconjuntos densos abiertos es un conjunto denso.*

(Compárese esta proposición con el Teorema de Baire que marcamos con el número 3.1.) La técnica empleada en la prueba del teorema de Cohen, llamada *Forcing*, el axioma de Martin, el principio de Jensen, y otras consecuencias del axioma de constructibilidad propuesto por Gödel en los 30, pronto demostraron tener aplicaciones a una amplia variedad de problemas topológicos relacionados con espacios abstractos. Con lo cual se inició otro periodo de fructífera creatividad en topología conjuntista, el cual aún continua.

Todos estos acontecimientos, que hemos mencionado hasta aquí, han influido en el desarrollo de la topología en general, que ha evolucionado en diversas direcciones, unas más geométricas, otras conjuntistas, otras más algebraicas; cada una con sus metas y herramientas. En particular, la topología abstracta o conjuntista se ha dedicado al estudio de la realidad topológica que, además de tener como centro de su preocupación los números reales, incluye a toda la diversidad del mundo que está más allá de $\aleph_0$, y más allá de **ZFC**, haciendo uso de axiomas adicionales como **AM** y $\neg$**HC**, y tomando en cuenta la pluralidad de los cardinales infinitos. Por esta razón, la topología abstracta está estrechamente ligada a la naturaleza de los números cardinales y su aritmética, al mundo de la combinatoria infinita y al mundo de los axiomas adicionales y consistentes con **ZFC**. Entre otros temas, la topología abstracta se ha dedicado a explorar la clase de los espacios normales, y a explorar el mundo que existe entre esta clase de espacios, por un lado, y la clase de los espacios metrizables separables y compactos separables, por el otro; se ha dedicado también a estudiar los invariantes topológicos determinados por números cardinales (Funciones Cardinales Topológicas), a resolver los problemas de las topologías producto y de sus subespacios densos, a estudiar los espacios de ultrafiltros, etc. (véase por ejemplo [17], [29], [42]).

4 Filtros y familias casi-ajenas

Los conceptos de filtro y ultrafiltro aparecen definidos por F. Riesz en 1908, en un artículo [40] en el que se hacen notar las posibilidades de los filtros y ultrafiltros para reemplazar a las sucesiones en la definición del operador cerradura en espacios topológicos abstractos. Es en 1937 cuando Henri Cartan ([14], [15]) introdujo de manera explícita estos nociones, presentándolas con claridad como los instrumentos indicados para generalizar el concepto de sucesion.

Definición 4.1 1. Un *filtro* $\mathcal{F}$ en un conjunto X es un subconjunto no vacío de $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$, tal que: (i) si $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, entonces $F_1 \cap F_2$ es también un elemento de $\mathcal{F}$, y (ii) si $F \in \mathcal{F}$ y $G \supset F$, entonces $G \in \mathcal{F}$.

2. Un *ultrafiltro* es un filtro que no está contenido propiamente en otro filtro.

3. Una colección no vacía $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ se dice que es una *base de filtro* si para cada dos elementos F_1, F_2 de $\mathcal{F}$, existe $F_3 \in \mathcal{F}$ tal que $F_3 \subset F_1 \cap F_2$.

4.2 Algunos ejemplos de estas clases de objetos son:

1. Si $x \in X$, entonces $\{A \subset X : x \in A\}$ es un filtro. Este filtro es equivalente a la base de filtro $\mathcal{F}_x = \{\{x\}\}$ (Decimos que dos bases de filtro en X, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$, son *equivalentes* si $\mathcal{F}^+ = \{A \subset X : A \text{ contiene un elemento de } \mathcal{F}\}$ es igual a $\mathcal{G}^+ = \{A \subset X : A \text{ contiene un elemento de } \mathcal{G}\}$).

2. En el caso en que X es un espacio topológico y $x \in X$, entonces la colección de vecindades de x en X es un filtro; y el conjunto $\{A \subset X : x \in \mathrm{cl}_X A\}$ es un ultrafiltro.

3. Sean κ un número cardinal y X un conjunto de cardinalidad mayor o igual que κ. Resulta que la colección $\mathcal{F}_\kappa(X) = \{F \subset X : |X \setminus F| < \kappa\}$ es un filtro en X.

4. Sea $(X, <_X)$ un conjunto linealmente ordenado con más de un punto, y sea $x \in X$. Entonces,

   (a) $\mathcal{B}(x) = \{(z, y) : z <_X x <_X y\}$ es una base de filtro si x no es primero ni último elemento;

   (b) $\mathcal{D}(x) = \{[x, y) : x <_X y\}$ es base de filtro si x no es último elemento; y

   (c) $\mathcal{I}(x) = \{(y, x] : y <_X\}$ es base de filtro si x no es primer elemento.

Otro concepto importante puramente conjuntista es el de familia casi ajena (Cantor mismo ya consideraba este concepto; demostró que ninguna familia numerable infinita de subconjuntos de ω es maximal casi ajena; véase [32]):

Definición 4.3 1. Sea κ un número cardinal, y sea X un conjunto de cardinalidad $\geq \kappa$. Una colección Σ de subconjuntos de X es κ-*casi ajena* si $|C| \geq \kappa$ para cada $C \in \Sigma$, y $|C_0 \cap C_1| < \kappa$ para distintos $C_0, C_1 \in \Sigma$.

2. Σ es *casi ajena* si es $\aleph_0$-casi ajena.

4.4 Una técnica para construir topologías en un conjunto X es, precisamente, asignar a cada punto $x \in X$ una base de filtro $\mathcal{N}(x)$ como sistema básico de vecindades abiertas, de tal manera que

1. $x \in N$ para todo $N \in \mathcal{N}(x)$; y

2. si $y \in N$ con $N \in \mathcal{N}(x)$, entonces existe $M \in \mathcal{N}(y)$ tal que $M \subset N$.

Así, la topología τ en X generada por todas las bases de filtro $\mathcal{N}(x)$, está formada por los subconjuntos de X que son uniones de elementos en $\bigcup_{x\in X}\mathcal{N}(x)$; es decir, $A\in\tau$ si para cada $a\in A$ existe $N_a\in\mathcal{N}(a)$ tal que $N_a\subset A$.

Por ejemplo, para generar la topología discreta en un conjunto X basta tomar, para cada $x\in X$, la base de filtro $\mathcal{N}(x)=\mathcal{F}_x=\{\{x\}\}$ como un sistema básico de sus vecindades.

4.5 Consideremos ahora el conjunto $A_\kappa(X)=X\cup\{o\}$ en donde $o\notin X$ y $\kappa<|X|$. Elegimos para cada $x\in X$ la base de filtro $\mathcal{N}(x)=\{\{x\}\}$, y para o consideramos el filtro $\mathcal{N}(o)=\{\{o\}\cup V : V\subset X \text{ y } |X\setminus V|\leq\kappa\}=\{\{o\}\cup V : V\in\mathcal{F}_{\kappa^+}(X)\}$ (véase 4.2.3). Esta colección de bases de filtro satisface las condiciones (1) y (2) en 4.4, por lo que generan una topología en la cual cada $\mathcal{N}(z)$ es una base de vecindades del punto $z\in A_\kappa(X)$. Al espacio $A_\kappa(X)$ se le llama *la extensión κ-Lindelöf* del espacio discreto de cardinalidad $|X|$.

4.6 Sea Σ una familia casi ajena en ω. A cada $C\in\Sigma$ le asignamos un elemento e_C que no pertenece a ω, de tal modo que si $C,D\in\Sigma$ y $C\neq D$, entonces $e_C\neq e_D$. Sea $\psi(\Sigma)=\omega\cup\{e_C : C\in\Sigma\}$. A $\psi(\Sigma)$ le proporcionamos una topología como sigue: un sistema de vecindades de cada $x\in\omega$ es $\mathcal{F}_x$ que fue definido en 4.2.1; y un sistema de vecindades de e_C es el filtro $\{e_C\}\cup\{V\subset C : |C\setminus V|<\aleph_0\}=\{e_c\}\cup\mathcal{F}_{\aleph_0}(C)$ (véase 4.2.3). Una construcción de este tipo aparece ya en [2]. Cuando Σ es maximal, $\psi(\Sigma)$ es un ejemplo clásico de un espacio primero numerable, localmente compacto, pseudocompacto que no es numerablemente compacto. Gillman y Jerison sugieren que Isbell es uno de los primeros autores que menciona este tipo de espacios ([23, pag 269]). Pero parece que es en el trabajo de Mrówka [35], en donde $\psi(\Sigma)$, con Σ maximal, aparece publicado por primera vez . A un espacio del tipo $\psi(\Sigma)$ le llamaremos *espacio de Mrówka-Isbell*.

4.7 En el caso en que $(X,<_X)$ es un conjunto linealmente ordenado con más de un punto, podemos definir la llamada topología del orden en X al considerar, para cada $x\in X$, la base de filtro $\mathcal{B}(x)$ si x no es primero ni último elemento, $\mathcal{D}(x)$ si x es primer elemento, o $\mathcal{I}(x)$ si x es último elemento (véase 4.2.4).

5 Espacios débilmente pseudocompactos

Hasta aquí hemos visto que podemos construir topologías sobre un conjunto X en términos puramente conjuntistas. Veremos, en ésta y en las secciones 6, 8 y 9, ejemplos de cómo podemos utilizar lenguaje y técnicas conjuntistas para plantear y resolver problemas topológicos. En esta sección trataremos un problema relacionado con extensión de espacios topológicos, que resolveremos usando familias casi ajenas. Primero unas definiciones. Recuérdese que un espacio X es *pseudocompacto* si es G_δ-denso en su compactación de Stone-Čech βX (equivalentemente, X es pseudocompacto si para cada función continua $f:X\to\mathbb{R}$, $f(X)$ es acotado en $\mathbb{R}$).

Definición 5.1 1. Un conjunto G en un espacio X es G_δ si es la intersección de una colección numerable de subconjuntos abiertos de X.

2. Un espacio X está *G_δ-densamente encajado* en un espacio Y si es homeomorfo a un subespacio X' de Y tal que todo conjunto G_δ no vacío de Y intersecta a X'.

3. Un espacio X es *débilmente pseudocompacto* si puede ser G_δ-densamente encajado en un espacio compacto.

Hasta ahora se conoce poco sobre los espacios débilmente pseudocompactos. En uno de los primeros artículos dedicados a este tipo de espacios, F. Eckerson [19] planteó el siguiente problema: ¿Es el espacio $A_\kappa(\alpha)$ (véase 4.5) débilmente pseudocompacto? Hace algunos meses, O. Okunev y el autor del presente artículo respondimos a este problema en forma afirmativa cuando $\kappa = \kappa^\omega$ [38]. Para resolverlo, demostramos que bastaba construir un espacio $Z = Z_\kappa(\alpha)$ que contuviera a $A_\kappa(\alpha)$ G_δ-densamente, y que cada sucesión en $A_\kappa(\alpha)$ tuviera un punto de acumulación en Z. A grandes rasgos, la demostración que dimos es como sigue: Primero demostramos el lema siguiente, el cual es una variante de un resultado obtenido por Tarski en [49] (véase por ejemplo [17, pags. 286-288]).

Lema 5.2 *Sean γ, κ y α cardinales tales que $\omega \leq \gamma \leq \kappa \leq \alpha = \alpha^\gamma$. Entonces existe una familia Σ de subconjuntos de α que satisface:*

1. *$|C| = \kappa$ para cualquier $C \in \Sigma$;*

2. *$|C_1 \cap C_2| < \gamma$ si $C_1, C_2 \in \Sigma$ y $C_1 \neq C_2$;*

3. *si $D \subset \alpha$ y $|D| = \gamma$, entonces existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $|C \cap D| = \gamma$.*

Luego, usando este lema, construimos el espacio $Z_\kappa(\alpha)$ cuando $\omega < \kappa < \alpha$.

Veamos ahora como construimos este espacio. Vamos a pedir, además, que $\alpha^\omega = \alpha$ (la demostración del caso general es un poco más complicado y no la trataremos aquí).

Por el lema 5.2 podemos tomar una familia Σ casi ajena en α de tal forma que la cardinalidad de cada elemento en Σ es igual a $\aleph_1$, y si C_1, C_2 son dos elementos distintos en Σ, entonces $|C_1 \cap C_2| < \aleph_0$. Además, si $D \subset \alpha$ es infinito, entonces existe $C \in \Sigma$ tal que $D \cap C$ es infinito.

Para cada $C \in \Sigma$, sea e_C un elemento que no pertenece a $A_\kappa(\alpha)$ y tal que $e_C \neq e_D$ si $C, D \in \Sigma$ y $C \neq D$. Consideremos el espacio $Z = Z_\kappa(\alpha) = A_\kappa(\alpha) \cup S$ en donde $S = \{ e_C : C \in \Sigma \}$, con la topología generada por las siguientes bases de filtro (véase 4.2): a cada $x \in \alpha$ le asociamos la base de filtro $\mathcal{F}_x$; a cada $e_C \in S$ le asociamos la base de filtro $\{\{e_C\} \cup V : V \in \mathcal{F}_\omega(C)\}$; y al punto o le asociamos el filtro constituido por todos los conjuntos de la forma $\{o\} \cup V \cup W$ en donde $V \subset \alpha$ y $|\alpha \setminus V| \leq \kappa$, y $W \subset S$ es tal que $e_C \in W$ si y sólo si $|C \setminus V| < \omega$. El espacio topológico así generado, es un espacio 0-dimensional (la demostración de esta afirmación no es trivial) Hausdorff.

Veamos ahora que, en efecto, $A_\kappa(\alpha)$ es un subconjunto G_δ-denso de Z. Sea $G = \bigcap_{n<\omega} A_n$ un G_δ en Z; es decir, cada A_n es un conjunto abierto en Z. Supongamos además que G no es vacío. Vamos a demostrar que G contiene un elemento de $A_\kappa(\alpha)$. Obsérvese primero que podemos suponer que a la sucesión $(A_n)_{n<\omega}$ la podemos considerar decreciente y que cada A_n pertenece a alguna de las bases de filtro que generan la topología en Z.

Si $C \in \Sigma$ y $e_C \in G$, entonces a partir de algún natural n_0 todo A_n es de la forma $e_C \cup V_n$ en donde $|C \setminus V_n| < \aleph_0$. Como $|C| = \omega_1$, entonces $\bigcap_{n \geq n_0} V_n \neq \emptyset$. Así, si $x \in \bigcap_{n \geq n_0} V_n$, entonces $x \in G \cap A_\kappa(\alpha)$.

Si $o \in G$, entonces existe $n_1 < \omega$ tal que cada A_n con $n > n_1$ es de la forma $\{o\} \cup V_n \cup W_n$ en donde $V_n \subset \alpha$ y $|\alpha \setminus V_n| \leq \kappa$, y $W_n \subset E(\Sigma)$ es tal que $e_C \in W_n$ si y sólo si $|C \setminus V_n| < \omega$. Por lo tanto $|\alpha \setminus \bigcap_{n > n_1} V_n| \leq \kappa$. Es decir, existe $x \in \alpha \cap \bigcap_{n > n_1} V_n$ puesto que $\kappa < \alpha$. Tenemos entonces que $x \in G \cap A_\kappa(\alpha)$.

Con esto queda demostrado que $A_\kappa(\alpha)$ es G_δ-denso en $Z_\kappa(\alpha)$. Probemos ahora que todo subconjunto numerable de $A_\kappa(\alpha)$ tiene un punto de acumulación en Z. Sea $D \subset \alpha$ infinito. Por las propiedades de Σ podemos garantizar que existe $C \in \Sigma$ tal que $|C \cap D|$ es infinito. Por lo tanto e_C es un punto de acumulación de D.

6 Extensiones de funciones continuas

Veamos ahora un problema que involucra, una vez más, a los espacios de la forma $\psi(\Sigma) = \omega \cup S$, en donde $S = \{e_C : C \in \Sigma\}$ (véase 4.6). Como mencionamos en la sección 3, los problemas de construir espacios con buenas propiedades que extienden espacios dados, y de construir funciones con propiedades importantes que extienden a funciones dadas, son dos problemas de tipo clásico en Topología (véanse por ejemplo los teoremas 3.2 y 3.6). En la sección anterior ya vimos un ejemplo de un problema del primer tipo; ahora veremos un problema de extensión de funciones. Dada una función $f : S \to \{0,1\}$, ¿es posible encontrar una extensión continua $\widehat{f} : S \cup N \to \{0,1\}$ de f, en donde $N \subset \omega$ es tal que $\mathrm{cl}_{\psi(\Sigma)} N \supset S$? A una extensión de este tipo le llamaremos *extensión esencial* de f. También se puede plantear este problema como sigue: Si pintamos de un color, entre dos posibles (verde o rojo), a cada punto de S, ¿será posible pintar los puntos de ω en $\psi(\Sigma)$ de tal manera que para cada $C \in \Sigma$, si e_C tiene color rojo (respectivamente, verde), entonces todos los puntos de C, con excepción quizas de una colección finita, tienen color rojo (resp., verde)? Trabajaron este problema V.I. Malykhin y A. Tamariz-Mascarúa y obtuvieron los siguientes resultados [33].

6.1 *Sea Σ una familia casi ajena de cardinalidad $\aleph_0$. Entonces, para cada función $f : S \to \{0,1\}$ podemos definir una extension continua $\widehat{f}$ a todo $\psi(\Sigma)$.*

Demostración: En efecto, sea $\Sigma = \{C_n : n < \omega\}$. Definimos $\widehat{f}$ en C_0 como $\widehat{f}(x) = f(e_{C_0})$. Ahora definimos, para cada $x \in C_1 \setminus C_0$, $\widehat{f}(x) = f(e_{C_1})$. En general, si ya hemos definido $\widehat{f}$ en todos los elementos de $\bigcup_{0 \leq i \leq n} C_i$, definimos $\widehat{f}(x) = f(e_{C_{n+1}})$ para todo $x \in C_{n+1} \setminus \bigcup_{0 \leq i \leq n} C_i$. Por último, definimos $\widehat{f}(e_C) = f(e_C)$ para cualquier $C \in \Sigma$. Resulta que $\widehat{f}$ es una extensión continua de f a todo $\psi(\Sigma)$. ■

Para el caso en que Σ no es numerable todo se complica. Aun más, la respuesta depende de axiomas adicionales y consistentes a **ZFC**. Por ejemplo, cuando añadimos **HC** a nuestros axiomas usuales obtenemos:

Teorema 6.2 *Suponiendo* **HC***, existe una familia casi ajena en ω no numerable, Σ, tal que cualquier función $f : S \to \{0,1\}$ con fibras infinitas (es decir, $|f^{-1}(0)| \geq \aleph_0$ y $|f^{-1}(1)| \geq \aleph_0$), no tiene extensión continua esencial.*

Cuando consideramos el Axioma de Martin obtenemos algo diferente como veremos en el siguiente resultado. Antes quiero mencionar que **AM** implica la siguiente proposición conjuntista equivalente al Lema de Booth (véase [6]).

6.3 LB. *Si $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\omega)$ son familias de cardinalidad $< 2^{\aleph_0}$, y si, además, para cada subcolección finita $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$, $|B \setminus \bigcup \mathcal{C}| = \aleph_0$, entonces existe un $M \subset \omega$ tal que $|B \setminus M| = \aleph_0$ para cualquier $B \in \mathcal{B}$ y $|A \setminus M| < \aleph_0$ para todo $A \in \mathcal{A}$.*

Teorema 6.4 *Suponiendo* **AM***, se cumple que si Σ es una familia casi ajena en ω de cardinalidad $< 2^{\aleph_0}$, entonces cualquier función $f : S \to \{0,1\}$ tiene una extensión esencial.*

Demostración: Sea $f : S \to \{0,1\}$ una función. Sean $S_i = f^{-1}(i)$ y $\Sigma_i = \{C \in \Sigma : e_C \in S_i\}$ $(i = 0,1)$. Por **LB** (ver 6.3) existen $M_0, M_1 \subset \omega$ tales que $|A \setminus M_0| = \aleph_0$ y $|A \setminus M_1| < \aleph_0$ para cada $A \in \Sigma_0$, y $|B \setminus M_0| < \aleph_0$ y $|B \setminus M_1| = \aleph_0$ para cualquier $B \in \Sigma_1$. Definimos $R' = \omega \setminus M_0$ y $T' = \omega \setminus M_1$. Entonces, para $A \in \Sigma_0$, $A \cap R' = A \setminus (\omega \setminus R') = A \setminus M_0$ es infinito. Similarmente, para cualquier $A \in \Sigma_0$ y cualquier $B \in \Sigma_1$, $T' \cap B$ es infinito y $R' \cap B$ y $T' \cap A$ son finitos. Los conjuntos $R = R' \setminus T'$ y $T = T'$ son ajenos y, para cada $A \in \Sigma_0$ y cada $B \in \Sigma_1$, $A \cap R$ y $B \cap T$ son infinitos, y $A \cap T$ y $B \cap R$ son finitos. Definimos $\widehat{f}|_S = f$ y $\widehat{f}(r) = 0$ para cada $r \in R$, y $\widehat{f}(t) = 1$ para cada $t \in T$. La función $\widehat{f}$ es una extensión esencial de f. ■

7 El Lema de la Raiz

Un último resultado conjuntista, puramente combinatorio, que quiero mencionar aquí es el llamado *Lema de la Raiz* (véase [43]). Veremos cómo este lema nos auxiliará, en la sección siguiente, para calcular la celularidad de un producto de espacios topológicos en términos de la celularidad de los subproductos finitos.

Teorema 7.1 *Sea $\mathcal{A}$ una colección de cardinalidad κ de conjuntos finitos en donde κ es un cardinal no numerable y regular. Entonces existe $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ y un subconjunto finito F (posiblemente vacío) tal que $|\mathcal{A}'| = \kappa$ and $A_1 \cap A_2 = F$ para cualesquiera dos elementos diferentes A_1 y A_2 de $\mathcal{A}'$.*

Demostración: Para cada $n < \omega$, definimos $\mathcal{A}_n = \{A \in \mathcal{A} : |A| = n\}$. Es claro que $\mathcal{A} = \bigcup_{n<\omega} \mathcal{A}_n$. Como κ es un número regular y $\kappa = \bigcup_{n<\omega} |\mathcal{A}_n|$, podemos concluir que existe $n_0 < \omega$ tal que $|\mathcal{A}_{n_0}| = \kappa$. Así que, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que todos los elementos de $\mathcal{A}$ tienen la misma cardinalidad n. Seguiremos con esta demostración realizando inducción sobre n. Si $n = 0$, entonces tomamos $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$ y $F = \emptyset$. Supongamos que el teorema es válido para n, y supongamos que todos los elementos de $\mathcal{A}$ tienen cardinalidad $n+1$. Sea $\mathfrak{C}$ la colección de subfamilias celulares de $\mathcal{A}$. No es complicado verificar que en esta colección de subfamilias se cumplen las hipótesis del lema de Zorn (véase 2.2). Así que existe un elemento maximal $\mathcal{B}$ en $\mathfrak{C}$. Si $|\mathcal{B}| = \kappa$, tomamos $\mathcal{A}' = \mathcal{B}$ y $F = \emptyset$. Supongamos ahora que $|\mathcal{B}| < \kappa$. Entonces $|\cup \mathcal{B}| = \lambda < \kappa$. Si $\cup\mathcal{B} = \{p_\gamma : \gamma < \lambda\}$, definimos, para todo $\gamma < \lambda$, $\mathcal{A}_\gamma = \{A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B} : p_\gamma \in A\}$. Es claro que $|\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}| = \kappa$. Usando la maximalidad de $\mathcal{B}$ tenemos que $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B} = \bigcup_{\gamma<\lambda} \mathcal{A}_\gamma$. La regularidad de κ nos lleva a concluir la existencia de un $\gamma_0 < \lambda$ tal que $|\mathcal{A}_{\gamma_0}| = \kappa$. Tomamos ahora la familia $\mathcal{M} = \{A \setminus \{p_{\gamma_0}\} : A \in \mathcal{A}_{\gamma_0}\}$. Por hipótesis de inducción, existe $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$ y existe F', tales que $|\mathcal{M}'| = \kappa$ y $F' = A_1' \cap A_2'$ para cualesquiera distintos $A_1', A_2' \in \mathcal{M}'$. Finalmente tenemos que la familia buscada es $\{A \in \mathcal{A}_{\gamma_0} : A \setminus \{p_{\gamma_0}\} \in \mathcal{M}'\}$, y el conjunto F es $F' \cup \{p_{\gamma_0}\}$. ■

8 Celularidad y densidad en productos

Como en el caso del teorema de metrizabilidad de Alexandrov-Urysohn (teorema 3.3), podemos obtener información importante sobre un espacio cuando conocemos qué tan numerosas son algunas colecciones de sus objetos topológicos. Establecemos entonces funciones ϕ que asocian a cada espacio topológico X con un número cardinal $\phi(X)$ de tal manera que si X y Y son espacios homeomorfos, entonces $\phi(X) = \phi(Y)$. Esto es lo que se suele llamar como *función cardinal topológica*. Dos ejemplos de estas funciónes son la densidad y la celularidad que ya definimos en los preliminares. Por ejemplo, la recta real con su topología Euclideana es un espacio linealmente ordenado que contiene un subconjunto numerable, los racionales $\mathbb{Q}$, que es denso; es decir, cualquier abierto en $\mathbb{R}$ contiene un racional. Esto implica que cualquier colección celular de abiertos en $\mathbb{R}$ debe tener cardinalidad $\leq \aleph_0$, ya que cada uno de estos abiertos debe contener por lo menos un elemento del conjunto denso $\mathbb{Q}$. Es decir, $d(\mathbb{R}) = c(\mathbb{R}) = \aleph_0$. Con un razonamiento semejante es posible demostrar que, en general, se cumple $c(X) \leq d(X)$ para cualquier espacio topológico X.

Para construir espacios con celularidad estrictamente menor a su densidad, basta con considerar el producto de una cantidad suficientemente grande de factores, teniendo cada uno de ellos densidad pequeña, como veremos en esta sección. Nos interesa pues saber:

8.1 *¿Cuál es la relación de la celularidad (respectivamente, densidad) de un espacio producto con respecto a las celularidades (respectivamente, densidades) de sus factores?*

La densidad de un producto está determinada por el famoso teorema de Hewitt-Marczewski-Pondiczery (puede encontrarse una demostración en [20]).

Teorema 8.2 *Sea $X = \prod_{t\in T} X_t$ con $|T| \leq 2^\kappa$ y tal que $d(X_t) \leq \kappa$ para todo $t \in T$. Entonces $d(X) \leq \kappa$.*

Con respecto a la celularidad en el producto de espacios topológicos, todo se complica más, como veremos a continuación y en la sección 9. Un primer resultado al respecto es el siguiente, cuya demostración está basada en el lema de la raiz.

Teorema 8.3 (Noble y Ulmer, [37]) *Si* $c(\prod_{j\in M} X_j) \leq \alpha$ *para cualquier subconjunto finito* $M \subset J$*, entonces* $c(\prod_{j\in J} X_j) \leq \alpha$.

Demostración: Supongamos que α es un número cardinal infinito y que $\{V_\lambda : \lambda < \alpha^+\}$ es una familia de conjuntos abiertos no vacíos en $X = \prod_{j\in J} X_j$ dos a dos ajenos. Podemos suponer que cada conjunto V_λ es canónico; es decir, para cada $\lambda < \alpha^+$ podemos encontrar un conjunto finito F_λ de elementos en J, tal que $V_\lambda = \prod_{j\in J} W(\lambda, j)$ de tal forma que cada $W(\lambda, j)$ es un subconjunto abierto de X_j, y $W(\lambda, j) = X_j$ si y sólo si $j \notin F_\lambda$. Puesto que α^+ es un cardinal no numerable y regular, podemos encontrar una subcolección $\mathcal{G}$ de $\{F_\lambda : \lambda < \alpha^+\}$, y un conjunto finito G tal que si $M, N \in \mathcal{G}$, entonces $M \cap N = G$ (Teorema 7.1). Sea $B = \{\lambda < \alpha^+ : F_\lambda \in \mathcal{G}\}$. En el caso en que $G \neq \emptyset$, entonces $\{\prod_{i\in G} W(\lambda, i) : \lambda \in B\}$ es una familia de α^+ subconjuntos abiertos en $\prod_{i\in G} X_i$. Puesto que $c(\prod_{i\in G} X_i) \leq \alpha$, deben existir $\lambda, \gamma \in B$ y $(x_i)_{i\in G} \in \prod_{i\in G} W(\lambda, i) \cap \prod_{i\in G} W(\gamma, i)$. En el caso en que $G = \emptyset$, escogemos $\lambda, \gamma \in B$ arbitrariariamente. Ahora, en cualquiera de los dos casos anteriores hacemos la siguiente elección para cada $i \notin F_\lambda \cap F_\gamma$: si $i \in F_\lambda \setminus G$, tomamos $x_i \in W(\lambda, i)$; si $i \in F_\gamma \setminus G$, tomamos $x_i \in W(\gamma, i)$; si $i \in G \setminus (F_\lambda \cup F_\gamma)$, tomamos $x_i \in X_i$. Entonces $(x_i)_{i\in J} \in V_\lambda \cap V_\gamma$, lo cual contradice nuestra hipótesis que afirma que estos conjuntos son ajenos. ■

Como consecuencia de los teoremas anteriores, resulta que la celularidad de $\mathbb{R}^\alpha$ es igual que $\aleph_0$ para cualquier número cardinal α. En cambio, la densidad del producto de $2^{\aleph_1}$ copias de la línea real es igual a $\aleph_1$.

9 La línea de Souslin

Hasta aquí hemos visto cómo se pueden entrelazar los conceptos topológicos y conjuntistas, obteniendo herramientas que nos permiten desarrollar lenguajes y técnicas para obtener un mayor conocimiento sobre espacios topológicos abstractos. Después de todo lo ya tratado, resulta natural que finalicemos este trabajo haciendo algunas últimas consideraciones sobre la línea real, la línea de Souslin y la celularidad del producto de espacios topológicos. Obsérvese que el teorema 8.3 no nos dice nada con respecto a la relación de la celularidad de un espacio X y la celularidad de X^2.

Cantor demostró que si $(D, <_D)$ es un conjunto linealmente ordenado numerable que no tiene primero ni último elemento y que es *denso en sí mismo* (es decir, para cada $x, y \in D$ tales que $x < y$, existe $z \in D$ que satisface $x < z < y$), entonces D es isomorfo a $\mathbb{Q}$; o sea, existe una función biyectiva $\phi : D \to \mathbb{Q}$ tal que $x < y$ implica $\phi(x) < \phi(y)$ (véase [30, pag. 71]). A partir de este resultado es posible demostrar que

9.1 si $(X, <_X)$ es un conjunto linealmente ordenado que satisface:

1. X no tiene ni primero ni último elemento;
2. X es conexo cuando se considera con su topología del orden; y
3. X es separable con su topología del orden;

entonces $(X, <_X)$ es isomorfo a la línea real (véase [30, pag. 77]).

En 1920, Souslin publicó un trabajo en Fundamenta Mathematicae [47] en donde conjeturó que es posible obtener el mismo resultado en 9.1 si en lugar de la condición (3) se pide:

3'. la celularidad de X con la topología del orden es numerable.

Lo cual es equivalente a decir: *todo espacio linealmente ordenado con celularidad numerable es separable.*

Definición 9.2 Un conjunto linealmente ordenado $(X, <_X)$ es una *línea de Souslin* si, con la topología del orden, X tiene celularidad numerable pero no es separable.

La Hipótesis de Souslin (**HS**) es la afirmación *"No existe una línea de Souslin"*.

En [28], Jensen demostró que la existencia de una línea de Souslin es consistente con **ZFC**. Previamente, Solovay y Tennenbaum demostraron que la hipótesis de Souslin también es consistente con **ZFC** (véase el corolario 9.8).

Resulta que $\neg$**HS** y **AM** + $\neg$ **CH** producen realidades diferentes sobre la celularidad de un producto de espacios topológicos como veremos en los siguientes dos teoremas.

Teorema 9.3 *El producto de dos líneas de Souslin es un espacio con celularidad estríctamente mayor que $\aleph_0$. Es decir, si X es una línea de Souslin, entonces se cumple que $c(X) = \aleph_0$ pero $c(X^2) > \aleph_0$.*

Demostración: Sea X una línea de Souslin. Por inducción vamos a tomar, para cada $\lambda < \omega_1$, elementos a_λ, b_λ, c_λ tales que

1. $a_\lambda < b_\lambda < c_\lambda$,
2. los intervalos (a_λ, b_λ) y (b_λ, c_λ) no son vacíos, y
3. $(a_\lambda, c_\lambda) \cap \{b_\xi : \xi < \lambda\} = \emptyset$.

Sea W el conjunto de puntos aislados en X. Puesto que para cada punto aislado w en X, $\{w\}$ es abierto en X, y como la celularidad de X es numerable, entonces $|W| \leq \aleph_0$. Ahora supongamos que hemos elegido los puntos a_ξ, b_ξ, c_ξ para cada $\xi < \lambda < \omega_1$. Como X no es separable, $X \setminus \mathrm{cl}(W \cup \{b_\xi : \xi < \lambda\})$ es un subconjunto abierto y no vacío de X, por lo cual contiene un intervalo (a_λ, c_λ). Además (a_λ, c_λ) no contiene puntos aislados, por lo cual $|(a_\lambda, c_\lambda)| \geq \aleph_0$; es decir, podemos tomar $b_\lambda \in (a_\lambda, c_\lambda)$ tal que $(a_\lambda, b_\lambda) \neq \emptyset$ y $(b_\lambda, c_\lambda) \neq \emptyset$. Con esto finalizamos el proceso inductivo.

Tomamos ahora, para cada $\lambda < \omega_1$, el conjunto $U_\lambda = (a_\lambda, b_\lambda) \times (b_\lambda, c_\lambda)$. Por (2), $U_\lambda \neq \emptyset$. Y si $\xi < \lambda < \omega_1$, entonces $U_\xi \cap U_\lambda = \emptyset$, puesto que, por (3), o $b_\xi \leq a_\lambda$, en cuyo caso $(a_\xi, b_\xi) \cap (a_\lambda, b_\lambda) = \emptyset$, o $b_\xi \geq c_\lambda$, y en este caso $(b_\xi, c_\xi) \cap (b_\lambda, c_\lambda) = \emptyset$. Por lo tanto, $\{U_\lambda : \lambda < \omega_1\}$ es una familia celular no numerable en X^2. ■

Para demostrar el último de los teoremas de este artículo, tenemos que establecer algunos resultados preliminares.

Lema 9.4 *Supongamos* **AM** + ¬ **HC**, *y sea X un espacio compacto Hausdorff de celularidad numerable. Sea $\{U_\lambda : \lambda < \omega_1\}$ una familia de subconjuntos abiertos no vacíos de X. Entonces, existe $J \subset \omega_1$ de cardinalidad $\aleph_1$, tal que $\{U_\lambda : \lambda \in J\}$ tiene* la propiedad de intersección finita (*es decir, si $J' \subset J$ es finito, entonces $\bigcap_{j \in J'} U_j \neq \emptyset$*).

Demostración: Para cada $\lambda < \omega_1$ sea $V_\lambda = \bigcup_{\gamma > \lambda} U_\gamma$. Tenemos entonces que $\lambda < \xi < \omega_1$ implica $V_\xi \subset V_\lambda$. Veamos que existe un λ tal que para todo $\xi > \lambda$ se cumple que

$$\mathrm{cl}(V_\xi) = \mathrm{cl}(V_\lambda) \qquad (*)$$

Si no existe tal λ, entonces podemos encontrar una sucesión estrictamente creciente de ordinales λ_γ ($\gamma < \omega_1$), tal que para cada γ, $\mathrm{cl}(V_{\lambda_{\gamma+1}}) \neq \mathrm{cl}(V_{\lambda_\gamma})$, por lo cual $A_\gamma = V_{\lambda_\gamma} \setminus \mathrm{cl}(V_{\lambda_{\gamma+1}}) \neq \emptyset$. Los conjuntos A_γ son abiertos y ajenos por pares, lo cual contradice que $c(X) = \aleph_0$.

Por lo tanto podemos encontrar un λ que satisface $(*)$. Resulta entonces que $Y = \mathrm{cl}(V_\lambda)$ es un compacto Hausdorff de celularidad numerable, y $\{V_\xi : \xi > \lambda\}$ es una colección de cardinalidad $\aleph_1$ de abiertos densos en Y. Como hemos supuesto **AM** + ¬ **HC**, resulta que $D = \bigcap_{\xi > \lambda} V_\xi$ es denso en Y (véase 3.9). Esto implica que la intersección de cualquier colección finita de elementos en $\{U_\xi : \xi > \lambda\}$, debe intersectar a D. ■

9.5 En una sección previa, ya hablamos de filtros y ultrafiltros en $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$. Podemos generalizar estos conceptos y definirlos con relación a $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$. Así por ejemplo, un *ultrafiltro* en una colección de conjuntos $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$, es un filtro cuyos elementos pertenecen a $\mathcal{C}$, y el cual no está contenido propiamente en ningún otro filtro contenido en $\mathcal{C}$.

Sea (X, τ) un espacio topológico cualquiera. Para cada conjunto abierto U de X podemos considerar el conjunto $U^* = \mathrm{int}\ (\mathrm{cl}(U))$. Sea $S(X, \tau)$, o simplemente $S(X)$, el conjunto de todos los ultrafiltros en $\{U^* : U \in \tau \setminus \{\emptyset\}\}$. Para cada $U \in \tau$ podemos considerar el conjunto $\widehat{U} = \{p \in S(X) : U^* \in p\}$. La colección $\{\widehat{U} : U \in \tau\}$ forma una base para una topología θ en $S(X)$. El espacio $(S(X), \theta)$ es compacto Hausdorff. (Para una discusión general sobre compactaciones, se puede consultar [17], [39], o [54].) Además se puede demostrar que:

1. *Si $U \in \tau \setminus \{\emptyset\}$, entonces $\widehat{U} \neq \emptyset$.*
2. *Si U y V son abiertos ajenos en X, entonces $\widehat{U} \cap \widehat{V} = \emptyset$.*
3. *Si $c(X) = \aleph_0$, entonces $c(S(X)) = \aleph_0$.*

Lema 9.6 *Supongamos* **AM** + ¬ **HC**. *Entonces, el lema 9.4 es aun cierto para cualquier espacio X.*

Demostración: Sea $\{U_\lambda : \lambda < \omega_1\}$ una familia de abiertos no vacíos en X. Entonces $\{\widehat{U}_\lambda : \lambda < \omega\}$ es una colección de abiertos no vacíos de $S(X)$ (9.5). Por el lema 9.4 podemos encontrar una subcolección $\{\widehat{U}_\xi : \xi \in J\}$ con la propiedad de intersección finita y con $|J| = \aleph_1$. Por 9.5.2 tenemos que $\{U_\xi : \xi \in J\}$ tiene la propiedad de intersección finita. ■

Teorema 9.7 (AM + ¬ CH) *El producto de espacios de celularidad numerable tiene celularidad numerable (compárese este resultado con el teorema 9.3).*

Demostración: Es suficiente demostrar el teorema para el caso de dos espacios con celularidad numerable, ya que esto implicaría que el teorema es cierto para cualquier producto finito de espacios con celularidad numerable. De esta forma, obtendremos el resultado deseado al aplicar el teorema 8.3.

Sean X y Y dos espacios tales que $c(X) = c(Y) = \aleph_0$. Supongamos que $c(X \times Y) > \aleph_0$. Sea $\{W_\lambda : \lambda < \omega_1\}$ una familia celular de subconjuntos abiertos no vacíos de $X \times Y$. Para cada W_λ existen abiertos no vacíos $U_\lambda \subset X$ y $V_\lambda \subset Y$, tales que $U_\lambda \times V_\lambda \subset W_\lambda$. Por el lema anterior, existe $J \subset \omega_1$ tal que $\{U_\lambda : \lambda \in J\}$ tiene la propiedad de intersección finita, con $|J| = \aleph_1$. Ahora bien, si $j, k \in J$, entonces $U_j \cap U_k \neq \emptyset$ y $(U_j \times V_j) \cap (U_k \times V_k) = \emptyset$; por lo tanto, $V_j \cap V_k = \emptyset$. Pero esto significa que $\{V_\lambda : \lambda \in J\}$ es una familia celular en Y, lo cual es una contradicción. ■

Corolario 9.8 AM + ¬ CH *implica* **HS**.

Demostración: **AM + ¬ CH** implica que el producto de dos espacios de celularidad numerable tiene celularidad numerable. Por otro lado, si existe una linea de Souslin X, entonces $c(X) = \aleph_0$ y $c(X^2) > \aleph_0$ (teorema 9.3); lo cual es una contradicción. Por lo tanto se cumple **HS**. ■

Bibliografía

[1] P.S. Alexandroff, *Über die Struktur der bikompakten topologischen Räume*, Math. Ann. **92** (1921), 267-274.

[2] P.S. Alexandroff y P. Urysohn, *Sur les espaces topologiques compacts*, Bull. Intern. Acad. Pol. Sci. Sér. **A** (1923), 5-8.

[3] P.S. Alexandroff y P. Urysohn, *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une class (L) soit une class (B)*, C.R. Acad. Sci. Paris **177** (1923), 1274-1276.

[4] I. Bendixson, *Quelques theorémes de la théorie des ensembles de points*, Acta Math. **2** (1883), 415.

[5] R.H. Bing, *Metrization of topological spaces*, Canad. J. Math. **3** (1951), 175-186.

[6] D. Booth, *Ultrafilters on a countable set*, Ann. Math. Logic. **2** (1970) 1-24.

[7] G. Cantor, *Ueber die Ausdehming eines Satzes aus der theorie der trigonometrischen Reihen*, Math. Ann. **5** (1872), 123-132.

[8] G. Cantor, *Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reelen algebraishen Zahlen*, J. Reine Angew. Math. **77** (1874), 258-262.

[9] G. Cantor, *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*, Journal f. reine und angew. Math. **84** (1878), 242-258.

[10] G. Cantor, *Ueber unendliche Punktmannichfaltigkeiten*, Math. Ann. **21** (1883), 51-58.

[11] G. Cantor, *Über einen Satzaus der theorie der stetigen Mannigfaltigkeiten*, Göttinger Nachr. (1879), 127-135.

[12] G. Cantor, *Ueber unendliche, lineare Punktmennichfaltigkeiten*, Math. Ann. **17** (1880), 355-358.

[13] G. Cantor, *Ueber unendliche lineare Punktmennichfaltigkeiten*, Math. Ann. **21** (1888), 51-58.

[14] H. Cartan, *Theorie des filtres*, C.R. Acad. Sci. Paris **205** (1937), 595-598.

[15] H. Cartan, *Filtres et ultrafilters*, C.R. Acad. Sci. Paris **205** (1937), 777-779.

[16] P.J. Cohen, *The independence of the continuum hipothesis, I, II*, Proc. Mat. Acad. Sci. U.S.A. **50** (1963), 1143-1148.

[17] W.W. Comfort y S. Negrepontis, *The theory of ultrafilters*, Springer Verlag, 1974.

[18] J. Dieudonné, *Une généralisation des espaces compacts*, J. Math. Pures Appl., (9) **23** (1944), 65-76.

[19] F. Eckertson, *Sums, products and mappings of weakly pseudocompact spaces*, Topol. Appl. **72** (1996), 149-157.

[20] R. Engelking, *General Topology*, Sigma Series in Pure Mathematics, vol. 6, Heldermann Verlag Berlin, 1989.

[21] M. Fréchet, *Sur quelques points du calcul fonctionnel*, Rend. del Circ. Mat. di Palermo **22** (1906), 1-74.

[22] A. García-Máynez, A. Tamariz-Mascarúa, *Topología General*, Editorial Porrua S.A., 1988.

[23] L. Gillman y M. Jerison, *Rings of continuous functions*, Sringer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1976.

[24] K. Gödel, *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme*, Monatsh. Math. und Phys. **38** (1931), 173-198.

[25] K. Gödel, *Consistency of the axiom of choice and the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1940.

[26] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914.

[27] T.J. Jech, *Non-provability of Souslin's hypothesis*, Comm. Math. Univ. Carolinae **8** (1967), 291-305.

[28] R.B. Jensen, *The fine structure of the constructible hierarchy*, Ann. Math. Logic **2** (1972), 229-308.

[29] I. Juhász, *Cardinal Functions in Topology - Ten years later*, Mathematical Centre Tracts 123, Amsterdam, 1980.

[30] E. Kamke, *Theory of sets*, Dover Publications, Inc., 1950.

[31] K. Kunen, *Set Theory, an introduction to independence proofs*, North Holland, 1980.

[32] N. Lusin, *On subsets of the series of natural numbers*, Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat. **11** (1947), 403-410.

[33] V.I. Malykhin y A. Tamariz-Mascarúa, *Extensions of functions in Mrówka-Isbell spaces*, Top. and Appl. **81** (1997) 85-102.

[34] E.A. Michael, *The product of a normal space and a metric space need not be normal*, Bull. Amer. Math. Soc. **69** (1963), 375-376.

[35] S. Mrówka, *On completely regular spaces*, Fund. Math. **41** (1954), 105-106.

[36] J. Nagata, *On a necessary and sufficient condition of metrizability*, J. Inst. Polytech. Osaka City Univ. Ser. A. Math. **1** (1950), 93-100.

[37] N. Noble y M. Ulmer, *Factoring functions on Cartesian products*, Trans. Amer. Math. Soc. **163** (1972), 329-339.

[38] O. Okunev y A. Tamariz-Mascarúa, *Some results and problems on weakly pseudocompact spaces*, Comm. Math. Univ. Carolinnae, **41**, 1 (2000), 155-173.

[39] J.P. Porter y R.G. Woods, *Extensions and Absolutes of Hausdorff Spaces*, Springer-Verlag, 1988.

[40] F. Riesz, *Die Genesis des Raumbegriffs*, Math. und Naturwiss. Beichte aus Ungarn **24** (1907), 309-353.

[41] F. Riesz, *Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre*, Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici, Roma 1908, vol. II, Roma 1909, 18-24.

[42] M.E. Rudin, *Lectures on set theoretic topology*, Amer. Math. Society, 1975.

[43] N.A. Šanin, *A theorem from the general theory of sets*, C.R. (Doklady) Acad. Sci. USSR N.S. **53** (1946), 399-400. MR **8**, 333.

[44] J.M. Smirnov, *A necessary and sufficient condition for metrizability of a topological space*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **77** (1951), 197-200.

[45] R.M. Solovay y S. Tennenbaum, *Iterated Cohen extensions and Souslin's problem*, Ann. of Math. (2) **94** (1971), 201-245.

[46] R.H. Sorgenfrey, *On the topological product of paracompact spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), 631-632.

[47] M. Souslin, *Problème 3*, Fund. Math. **1** (1920), 223.

[48] A. H. Stone, *Paracompactness and product spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **54** (1948), 997-982.

[49] A. Tarski, *Sur la décomposition des ensembles en sous-ensembles presque disjoints*, Fund. Math, **12** (1928) 188-205.

[50] S. Tennenbaum, *Souslin's problem*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **59** (1968) 60-63.

[51] H. Tietze, *Über Funktionen, die auf einer abgeschlossenen Menge stetig sind*, Jour. für die reine und angew Math. **145** (1915) 8-14.

[52] A. Tychonoff, *Über die topologische Erweiterung von Räumen*, Math. Ann. **102** (1929), 544-561.

[53] P. Urysohn, *Über die Mächtigkeit Zusammernhängender Mengen*, Math. Ann. **94** (1925), 262-295.

[54] R.C. Walker, *The Stone-Čech compactification*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1974.