#97

SERIE
MATEMÁTICAS

N. I. Lobachevski

Nuevos principios de la geometría con teoría completa de las paralelas

VÍNCULOS MATEMÁTICOS

AÑO
2007

Facultad de Ciencias
Vínculos matemáticos

Nuevos principios de la geometría con una teoría completa de las paralelas

N. I. Lobachevski.*
Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias, UNAM

Nº 97. 2012

* Traducuido del italiano por Sonia Ursini.
Impreso en la Coordinación de Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM.

INTRODUCCION

Todos saben que en Geometría, hasta hoy, la teoría de las paralelas había quedado incompleta. Los intentos sin éxito hechos desde los tiempos de Euclides, a lo largo de dos mil años, me indujeron a pensar que en los mismos conceptos [de la Geometría] aún no está encerrada esa verdad que se quería demostrar y que se puede comprobar, en forma similar a la de otras leyes físicas, únicamente a través de las experiencias, como, por ejemplo, las observaciones astronómicas. Por fin, al estar convencido de mis conjeturas, y juzgando que el difícil problema ya estaba completamente resuelto, escribí sobre este tema una comunicación en 1826 (1). Una aplicación de esta nueva teoría al análisis está en artículos que aparecieron en el "Kazanski Vestnik [Noticiero de Kazan]" en 1829 y 1830, con el título: Sobre los fundamentos de la geometría (2).

La conclusión principal, a la cual llegué con la hipótesis de la dependencia de las líneas de los ángulos (3), es la de admitir la existencia de la Geometría en un sentido más amplio del que, por primera vez, nos presentó Euclides. En este sentido extendido dí a la ciencia el nombre de "Geometría imaginaria" (4), en el cual queda la "Geometría ordinaria" como caso particular, que corresponde a esas limitaciones en las hipótesis generales, que exigen las medidas efectivas. Empecé la demostración de la suficiencia de los nuevos principios en "Učenye Zapiski Kazanskogo universiteta -

[Memorias Científicas de la Universidad de Kazan]"[5]. Ya que deseaba alcanzar este propósito, aun si no en -- forma directa, por lo menos por el camino inverso más - corto, escogí esta vez proceder desde las hipótesis fundamentales, hasta (lograr) las ecuaciones para todas -- las relaciones y las expresiones de todas las magnitu-- des geométricas. Aún si mi descubrimiento no hubiera - traído otro beneficio, al margen del de completar los - huecos en la enseñanza elemental, aún en este caso, al menos el interés que este argumento siempre ha merecido, me obliga a una exposición más detallada. Empiezo con un examen de las teorías anteriores.

Es fácil demostrar que dos rectas, que están inclinadas bajo un mismo ángulo con respecto a una tercera, - no se encuentran nunca ya que resultan ser bajo esta -- hipótesis perpendiculares a una (misma) recta[6]. - -- Euclides hizo la suposición al revés, (o sea) que dos - líneas que no están igualmente inclinadas con respecto a una tercera tendrán siempre que intersectarse[7]. Para convencerse que esta proposición era correcta se recurrió a diferentes medios: alguna vez se intentó encontrar primero la suma de los ángulos de un triángulo, otra vez se compararon las superficies indefinidas que - las aberturas de los ángulos o dos perpendiculares en-- cierran, otra más se admitió que los ángulos dependen - sólo de la relación que guardan los lados, o finalmente, se añadieron propiedades nuevas de la línea recta para completar su definición. Entre estas demostraciones -- hay algunas que se pueden llamar ingeniosas, pero todas son, sin distinción, falsas, sus premisas tienen huecos y no hay el rigor debido en el razonamiento; entre ellas, además, no hay ninguna que, añadiendo a la simplicidad la persuasión, pueda ser aceptada por los principiantes.

En 1800 Legendre publicó la tercera edición de su - Géométrie, en la cual introdujo la proposición (según - la cual) la suma de los ángulos de un triángulo no puede ser mayor de Π, o sea de dos rectos. Allí demostró también que esta suma tampoco debe ser menor que Π, pero sin darse cuenta del hecho de que ciertas líneas pueden dejar de constituir un triángulo a partir del momento en el cual el valor de la suma (de los ángulos), encontrado por otros medios, presenta cierto absurdo.
Creo que no es necesario hablar más aquí de este error, reconocido más tarde por el mismo Legendre cuando dijo que, a pesar de que los principios que se tomaron como básicos no presentaban dudas, él encontró aún ciertas - dificultades que no pudo vencer(8). En las "Mémoires - de l'Académie des Sciences" de 1833 añadió la proposición siguiente: la suma de los ángulos debe de ser igual a Π en todos los triángulos, si tal es en uno al menos(9). Yo también tuve que demostrar esto en mi teoría, escrita en 1826(10). Además, creo que Legendre varias veces tropezó con el camino que yo mismo había escogido con - tanto éxito; pero probablemente los prejuicios, a favor

de la posición aceptada por todos, lo indujeron a cada - paso a precipitar sus conclusioens, o añadir lo que aún no es lícito admitir en la nueva hipótesis. Examinemos todo lo que él publicó sobre este tema en las "Mémoires de l'Académie des Sciences" de 1833. *[Lobačevskij expone y critica, demostrando que están equivocadas, algunas demostraciones del postulado de Euclides hechas por --- Legendre en las obras citadas y por L. Bertand (1731 - 1812) en el libro: "Dévelopement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques prise toute son étendue" de 1778]

En la teoría de las paralelas, además, se ha pensado tomar como fundamento al hecho de que, en los triángulos, los ángulos deberían depender de la relación --- (que hay) entre los lados. En un primer momento esta - afirmación parece tan simple como necesaria, pero si -- buscamos en nuestro pensamiento para ver donde se origina, nos encontramos con la necesidad de llamarla arbitraria tal como las demás a las cuales hasta ahora se - ha recurrido. En la naturaleza tenemos propiamente conocimiento solamente del movimiento, sin el cual las impresiones sensoriales son imposibles. Por lo tanto, todos los demás conceptos, por ejemplo los geométricos, - son creaciones artificiales de nuestra mente, sacadas de las propiedades del movimiento; éste es el motivo por el cual el espacio, en sí, (considerado) separado, para nosotros no existe. Considerado esto, no puede haber - en nuestra mente ninguna contradicción al suponer que -

ciertas fuerzas de la naturaleza siguen una geometría y, otras, otra geometría suya particular. Para aclarar este concepto supongamos (y de esto muchos están convencidos) que las fuerzas de atracción se debilitan, por la difusión de su acción, sobre las superficies esféricas. En la Geometría ordinaria se toma la magnitud de la superficie esférica igual a $4\Pi r^2$ en correspondencia del radio r, de donde se obtiene que la fuerza tiene que disminuir proporcionalmente al cuadrado de la distancia. En la Geometría imaginaria yo encontré que la superficie de la esfera es:

$$\Pi(e^{r} - e^{-r})^{2}$$

y puede ser que las fuerzas moleculares sigan esta geometría, y entonces toda particularidad (de esas fuerzas) dependería del número <u>e</u>, siempre muy grande. Por lo demás, considérese este ejemplo como pura hipótesis, para confirmar la cual hay que encontrar otras pruebas más convincentes[11]. De todos modos aún no está permitido dudar de una cosa: que las fuerzas, solas, generan todo: movimiento, velocidad, tiempo, masa, hasta distancia y ángulos. Todo está estrechamente ligado con las fuerzas: al no lograr percibir la esencia de esta interdependencia, no se puede afirmar que en las relaciones entre magnitudes heterogéneas tengan que intervenir únicamente sus razones (relaciones, cocientes). Si se admite la dependencia de la razón (relación, cociente), -

¿porqué no suponer la dependencia a secas?. Ya hay algunos ejemplos a favor de esta opinión: la magnitud de las fuerzas de atracción, por ejemplo, se expresa con - la masa dividida por el cuadrado de la distancia. Para una distancia igual a cero esta expresión, propiamente, no representa nada. Se necesita empezar con una distancia cualquiera, grande o pequeña, pero siempre efectiva, para que aparezca la fuerza. Ahora nos preguntamos: -- ¿cómo es que la distancia genera esta fuerza? ¿cómo es que subsiste en la naturaleza esta unión entre objetos tan heterogéneos?. Quizás nunca logremos contestar esto; pero al ser cierto que las fuerzas dependen de las distancias, entonces los segmentos pueden, de la misma forma depender de los ángulos. En los dos casos la heterogeneidad es, por lo menos equivalente: su diferencia no está, por así decirlo, en el concepto, sino en - el hecho de que nosotros conocemos la primera dependencia por la experiencia, mientras que, por la imperfección de las observaciones, tenemos que suponer mentalmente - la segunda, o más allá de los límites del mundo visible o en la estrecha esfera de las atracciones moleculares.

De todas formas, la proposición, según la cual únicamente la razón (relación, cociente) de las distancias puede definir los ángulos, será un caso particular, al cual llegaremos cada vez que consideremos líneas infinitamente pequeñas(12). El procedimiento de la Geometría ordinaria conduce, por tanto, siempre a conclusiones --

verdaderas, si bien no en esa forma tan amplia, en la -- cual nos la da ese sistema geométrico general que yo llamé "Geometría imaginaria". La diferencia entre las ecuaciones de una y otra geometría se origina al añadir una nueva constante [13] que ya las observaciones tendrían -- que propocionar, pero encontramos, sin diferencias sensibles, que a través de éstas (observaciones), es tal (la constante) que en las medidas efectivas, la Geometría -- por todos aceptada, es más que suficiente (aún si en sí y por sí, esto no fuese rigurosamente cierto).

Esto significa que tal sistema [la geometría ordinaria], o se encuentra casualmente en la naturaleza, o que todas las distancias que nosotros podemos alcanzar son - aún infinitamente pequeñas. En general, toda proposición, que la Geometría imaginaria admite para los elementos de cierta magnitud, al ser aceptada para líneas de grandes dimensiones, tiene que llegar forzosamente a las reglas de la Geometría ordinaria, ya que en esta hipótesis se - conservan únicamente las primeras potencias de esos números que representan la línea, y, de consecuencia, entran en todas partes, en las ecuaciones, sus razones (relaciones, cocientes) [14]. Los siguientes son ejemplos de proposiciones de este tipo: el hecho de que las dos distancias entre dos perpendiculares sean en todos lados iguales, que un segmento de perpendicular (a una recta dada) describa con su vértice una línea recta, que el círculo al aumentar su radio se vuelva en el límite una línea --

recta[15]. Entre todas las proposiciones conocidas de este tipo es necesario dar prioridad a la que acepta que las razones (relaciones, cocientes) de los segmentos dependen de los ángulos; en ella al menos la simplicidad del concepto se acerca incluso a los primeros principios de nuestra experiencia. Pero esto es todo lo que se puede decir en su defensa; cualquier otro juicio sería, o falso, o sin fundamento. Así no hay que preocuparse por el hecho de que, con la dependencia directa de las líneas de los ángulos, intervenga una magnitud igualmente arbitraria, como es la de escoger la unidad de medida. A esto se puede contestar que nada impide que, en las ecuaciones, nos representemos las razones (relaciones, cocientes) de las líneas no (en relación) a una de las que allí se consideran, sino a una que, de alguna forma, puede estar definida en la naturaleza[16]. Yo demostré esto en la Geometría imaginaria, dando ecuaciones en las que todas las líneas intervienen en relación a una nada más, que debería encontrarse a través de las observaciones, si éstas fueran suficientes para esto. Juzgo que no es necesario el examinar en detalle las otras proposiciones, demasiado artificiosas o arbitrarias. Entre ellas, únicamente una merece aún cierta atención: el paso entre el círculo y la línea recta. El defecto se ve aquí enseguida en la ruptura de la continuidad: una curva, que no deja de ser cerrada, por más grande que sea, tendría que volverse de repente una recta indefinida, perdiendo así una propiedad esencial [17]. A este respecto, la Geometría imaginaria cumple este paso de una forma mucho mejor. En ella, al agrandar un círculo, cuyos radios converjan todos en un solo punto, obtenemos al fin una línea tal que las normales a la misma se acercan indefinidamente, a pesar de que no pueden ya intersectarse. Esta propiedad aun no es propia de una recta sino de la línea curva que yo llamé círculo - límite (oriciclo) en mi escrito "Sobre los principios de la geometría". En fin, si es necesario resolver experimentalmente el difícil problema del paralelismo, entonces la propuesta hecha por Legendre, de reportar seis veces el radio sobre la circunferencia [18] tiene que ser considerada, sin duda, gravemente insuficiente. En mis "Principios de la geometría", haciendo uso de observaciones astronómicas, exhibí que en los triángulos, cuyos lados son casi iguales a la distancia de la Tierra al Sol, la suma de los ángulos no puede diferir de la de dos rectos en más de 0,0003 segundos de grado. Esta diferencia crece en proporción geométrica con respecto a los lados del triángulo y, en consecuencia, hasta hoy, como yo mencioné más arriba, la Geometría ordinaria es más que suficiente para las medidas prácticas [19]. Se puede también llegar a estas conclusiones con ayuda de proposiciones bastante simples y adecuadas a los primeros elementos de una ciencia, a pesar de que la teoría completa exije un cambio completo en el orden de los estudios, y la añadidura, además, de la Trigonometría.

Entre las imperfecciones de la teoría de las paralelas, habría que contar también la definición misma de paralelismo. No obstante, esta imperfección no dependería en absoluto, como sospechó Legendre, de ciertos defectos en la definición de línea recta ni tampoco de -- esos defectos, añado yo, que se esconden en los conceptos primarios que es mi intención indicar aquí, intentando-en lo que pueda-corregirlos.

Usualmente se empieza la geometría asignando a los cuerpos tres dimensiones, a las superficies dos, a las líneas una, y no admitiendo ninguna para el punto. Llamando estas tres dimensiones: longitud, anchura y altitud, y entendiendo con estas denominaciones justamente las tres coordenadas, nos apresuramos así a enunciar -- conceptos prematuros con palabras, a los que el idioma hablado asigna cierto significado, significado aún no - bien definido por la ciencia exacta. En efecto: ¿cómo es posible representarse con claridad la medida de una longitud, cuando aún no se sabe que es una línea recta? ¿cómo es posible hablar de longitud, de altura, si no - se ha dicho nada anteriormente sobre perpendiculares, - sobre el plano, cómo se colocan las perpendiculares en un mismo o distintos planos?.

Y, finalmente, si en el punto no hay ninguna dimensión ¿qué queda en él que posibilite que se le considere aún un objeto a juzgar?. Admitamos que cada quien pueda representarse claramente la línea recta, incluso si aún no puede expresar su concepto; pero se pregunta ¿de qué forma ahora, con el auxilio de la recta, debería poder asignarse una dimensión a la línea curva, dos a la superficie curva?

Es cierto que no es necesario pedir que longitud, anchura y altitud sean una con otra perpendiculares: es suficiente tomar para ellas líneas con dirección diferente. Pero aún en este caso se tropezará con dificultades específicas. Tomando como regla la de no utilizar prematuramente nada de los conceptos que aún tienen que ser explicados más adelante, se pregunta: ¿cómo expresar ahora la condición que las tres dimensiones en los cuerpos deban pertenecer a tres rectas en planos distintos?. Además, no hay que confundir la distinta dirección de los dos lados sobre una recta cortada en un punto[20] con las dos dimensiones en el plano y, finalmente, hay que definir satisfactoriamente qué se debe entender por dirección y por ángulo. Resumiendo: espacio, dimensión; lugar, cuerpo, superficie, línea, punto, dirección, ángulo - son palabras, con las cuales se empieza la Geometría, pero a las cuales no se asigna, jamás, un claro significado. Mientras tanto, se pueden considerar todos estos objetos también desde otro lado. Hay que observar que la obscuridad de los conceptos se debe aquí a lo abstracto, lo cual ya no interviene en la aplicación de las medidas reales, y se introduce entonces, sin necesidad, en la teoría misma. Las supeficies, las líneas, los puntos así como los define la Geometría, subsisten sólo en nuestra imaginación; mientras que nosotros medimos las superficies y las líneas usando para ello (otros) cuerpos. Este es el porqué hay que hablar de superficies, líneas y puntos únicamente en el sentido en el que se deben entender a través de las medidas efectivas; trataremos así de respetar justamente esos conceptos que, en nuestra mente, están estrechamente ligados con la representación de los cuerpos, a los cuales está acostumbrada nuestra imaginación, y que podemos comprobar directamente en la naturaleza sin recurrir antes a conceptos artificiales y ajenos (a nosotros)[21].

Pero con estos conceptos nuevos, la ciencia toma una nueva dirección desde el mismo principio y la sigue hasta desembocar en el análisis; de esta forma, el proceso de enseñanza adquiere ya un aspecto especial. Intentaré aclarar en qué se puede encerrar este cambio.

En Matemáticas se siguen dos procedimientos: el análisis y la síntesis. El carácter que distingue el análisis está constituido por las ecuaciones, que sirven primero de base para cualquier juicio y llevan ya a todas las conclusiones. La síntesis, o procedimiento constructivo, exige justamente las representaciones que están estrechamente ligadas con los conceptos primarios de nuestra mente. La gran ventaja del análisis es la -

siguiente: en él se procede siempre por vía directa, -- desde las ecuaciones hasta el fin prestablecido. La -- síntesis no está sometida a ninguna regla general, pero necesariamente hay que empezar por ella para llegar, finalmente, una vez descubiertas las ecuaciones y junto - con ésta, al punto después del cual todo desemboca ya en la ciencia de los números. Por ejemplo, en la geometría se demuestra que dos perpendiculares[22] no se intersectan, que los triángulos son completamente iguales [congruentes] si lo son sólo algunas de sus partes. Casos así, como también toda la teoría de las paralelas, se - examinarían analíticamente sin éxito. En esto no se -- puede tener éxito, de la misma forma que no se puede -- tratar sin síntesis la medida de las superficies, limitadas por líneas rectas, o la medida de cuerpos, limitados por superficies planas.

Obviamente, también en la síntesis hay que utilizar la ayuda del análisis: pero está fuera de discusión que, en los principios de la Geometría y de la Mecánica, el análisis no puede ser jamás el único instrumento. La - Geometría, hasta un cierto punto, siempre tendrá algo - de específicamente geométrico que no se puede de ninguna forma eliminar. Se puede restringir la esfera de la síntesis pero no se puede anularla completamente.

Además en este intento de sustituir la síntesis -- por el análisis, no hay que precipitarse ni admitir, cada vez, funciones que permiten prever únicamente una de pendencia, sin que se sepa en qué consiste, y mucho menos, cómo se expresará. Con estas limitaciones del análisis, fijemos el objetivo verdadero y el lugar que compite al otro procedimiento [la síntesis], con el cual empieza realmente por primera vez la ciencia, con conceptos tales que, a partir de ellos, el razonamiento puede ya crear todo lo demás, deduciendo a partir de los primarios cada vez [conceptos] nuevos, y abriendo así, cada vez más, los límites de nuestros conocimientos en todas las direcciones, al infinito.

Los primeros datos serán sin duda siempre los conceptos que nosotros percibimos de la naturaleza a través de nuestros sentidos. La razón puede y debe reducirlos al menor número posible, para que ellos sirvan después de base sólida para la ciencia. De todos modos, por lo general, aún nadie sigue el procedimiento sintético de esta forma, respetando todas las reglas aquí enunciadas, prefiriendo introducir el análisis, aun si es antes de tiempo, y admitiendo como presupuesto el desarrollo, aun si no es completo, de los conceptos que constituyen nuestra mente innata, y a los cuales no queda más que dar un numbre sin extenderse demasiado en clarificaciones, y sin preocuparse de la exactitud en la definición. Si la facilidad y la simplicidad llevan a escoger este método de enseñanza, de cualquier forma siempre habrá que dar la mayor importancia a la parte de la verdad, rigurosa, y habrá que utilizarla antes o después.

Yo hice mi primer intento en este sentido con el - Algebra[23] y lo aplico ahora a la Geometría. El análisis puro, ya no mezclado con la síntesis, no se puede - utilizar en Geometría hasta que no se haya representado cada dependencia por relaciones, y hasta que para todo tipo de magnitudes geométricas no se hayan dado expresiones. En Geometría podemos entender la magnitud únicamente con la medida[24], la cual no existe en sentido - propio para líneas y superficies curvas. Por más pequeñas que se tomen las partes de una curva, éstas seguirán siempre siendo curvas; y en consecuencia no podrán nunca medirse con el auxilio de la recta. Lo mismo hay que - decir de las superficies curvas, en las cuales, por más pequeñas que sean las partes que se delimitan, jamás serán planas. Por otro lado, en la naturaleza no hay ni rectas ni curvas, ni planos ni superficies curvas: en - ella encontramos sólo cuerpos, de forma que todo lo demás, creado por nuestra imaginación, sobrevive únicamente en la teoría. Lagrange tomó como fundamento la posición de Arquímedes: dos puntos sobre una curva pueden - siempre tomarse tan cerca (uno del otro) que el arco entre ellos sea mayor que la cuerda, pero menor que los - dos segmentos de tangente al arco y que van, desde sus extremos, hasta la mutua intersección (Théorie des fonctions analytiques). Tal posición es, en efecto, necesaria; pero con ello se anula el propósito inicial de medir líneas curvas con rectas. Lo mismo [pasa] con las superficies cuando se tiene el propósito de medirlas -- con [superficies] planas.

Por esto, el cálculo de la longitud de una línea - curva, así como la magnitud de una superficie curva, no representa ni de casualidad, por así decirlo, la rectificación de la curvatura: se dirige a un fin completa-- mente distinto: buscar un límite al cual la medida efectiva se acerca tanto más cuanto más precisa es.

Se dirá que la medida es tanto más precisa cuanto más pequeños son los anillos de una cadena [que se utiliza para la medida efectiva]; y finalmente, se tendrá la medida más exacta tomando un hilo delgado completa-- mente curvo. Es por esto que, en Geometría, es necesario demostrar de forma particular que la suma de las - tangentes disminuye simultáneamente con el aumento de - la suma de las cuerdas, hasta que las dos sumas ya no - difieren de forma sensible del límite, al que las dos - se acercan, y el cual es entonces aceptado por la Geometría como la longitud de la línea curva. Ahora bien está claro que, según esta regla, el cálculo estará tanto más en acuerdo con las medidas cuanto más precisas sean estas últimas. Es aquí, al mismo tiempo, evidente so-- bre qué se basa el postulado de Arquímedes. En base al ejemplo visto para las líneas curvas se puede razonar - sobre las magnitudes de las superficies, pero sin afirmar jamás que partes muy pequeñas tengan la capacidad -

de volverse planas.

Para las superficies limitadas por líneas curvas y para los cuerpos, limitados por superficies curvas, no existe a la par una medida en sentido riguroso, cuando, como medida, tienen que utilizarse, en el primer caso, el cuadrado y, en el segundo, el cubo. De todos modos, siempre en la hipótesis de encontrar un solo límite, al que se acercan las medidas efectivas, es necesario (poder) demostrar que a este límite llegamos siempre sin falla; hay que aclarar entonces de qué forma hay que presentar la medida y cómo en ella es posible alcanzar la exactitud deseada. Para poder satisfacer todos estos requerimientos no se puede prescindir de ciertas proposiciones auxiliares, que hay que aceptar como axiomas:

1) (Dos) áreas de figuras planas serán iguales cuando para formar una de ellas la otra se divide en partes que se reúnen en un nuevo orden;

2) El área de una figura plana es menor que la de otra en la cual está completamente encerrada (contenida) pero, no obstante todo, sin agotarla;

3) La magnitud de un triángulo se anula con la disminución ilimitada de un lado.
También para (el caso de) la medida de los cuerpos hay que recurrir a axiomas similares[25].

Notas al pié de página de Lucio Lombrado - Radice.

(1) La comunicación fué leída por Lobacevskij en la sesión de la Facultad de físico - matemáticas de la Universidad - de Kazan' el 11 (23) de febrero de 1826. Su título era: Exposition succincte des principes de la Géomé trie avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles. El texto manuscrito se entregó a - una comisión compuesta por los profesores Simonov, - Kupfer y Brasman para que decidiera sobre su publica ción. La opinión de los integrantes de la comisión fué negativa, pero para no ofender a un colega, no fué expresada oficialmente y se prefirió retrasar in definidamente los trámites, (de publicación). Por eso la obra no se publicó jamás, y hay que considerar que el manuscrito está perdido sin remedio.

(2) Esta es la primera obra impresa sobre la geometría no-euclidiana, la cual asegura a Lobacevskij la prio ridad sobre Bólyai (Tentamen, 1832). En su primera parte está resumida la obra perdida Exposition succincte ya mencionada.

(3) Legendre expone, en un apéndice a la primera edición de sus Eléments de géométrie (1794), un intento de demostración del postulado de las paralelas basado sobre el así llamado "principio de homogeneidad". "Este principio se puede resumir en la afirmación -

que magnitudes heterogéneas, tal como los ángulos y los segmentos, no pueden estar en dependencia biunívoca los unos de los otros" [S.A. Janovskaja, "Istoriko - matematičeskie isledovanije (Investigaciones histórico - matemáticas)", 3 (1950), p. 19]. Este principio, no totalmente claro, es sustancialmente equivalente a la forma 5 del postulado de Euclides expuesta en nuestra introducción (V, 5. Para cada figura plana existe una semejante de magnitud arbitraria (dos polígonos, por ejemplo dos triángulos, se dice que son semejantes cuando sus ángulos son - iguales y los lados que corresponden a ángulos iguales estan en la misma relación (razón)); esto es -- equivalente a admitir que, una vez que se han asignado los ángulos de un triángulo, éstos no definen la magnitud de los lados (de cada lado), sino nada más su razón (existencia de un triángulo semejante a uno dado que tiene un lado asignado arbitrariamente). En la geometría no-euclidiana de Lobačevskij, por lo contrario, una vez que se han asignado los - ángulos de un triángulo, quedan determinados, en -- magnitud, también sus lados: dos triángulos son - - iguales, no existen triángulos semejantes que no -- sean además iguales. El "principio de homogeneidad" es por tanto equivalente al V postulado y no puede tomarse entonces como punto de partida para su "demostración".

(4) Lobačevskij, a pesar de haber verificado (también - con cálculos astronómicos) que "las medidas efectivas" son una *prueba física*, dentro de ciertos límites, del postulado euclidiano para el cual el vió - claramente que era *lógicamente independiente* de los precedentes, se dió cuenta (como veremos) del hecho que, por ejemplo a escala astronómica más amplia, - su geometría no-euclidiana podía tener físicamente validez, y que la euclidiana podía ser simplemente una óptima aproximación de la realidad física a escala de la experiencia ordinaria (cuerpos sólidos, distancias comprendidas entre ciertos límites).
Por esto el nombre de geometría imaginaria que él - escogió no es apropiado ni corresponde bien a su -- pensamiento y fué por esto abandonado. Hoy se habla o de "geometría de Lobačevskij" o, con Felix Klein (1871), de "geometría no-euclidiana hiperbólica"

(5) En el fascículo 1 de "Učenye zapiski" del año 1835, con el título: Voobražaemaje geometrija [Geometría imaginaria]. [Nota de Lobačevskij].
En ésta su obra, Lobačevskij considera que están dadas a priori las ecuaciones que expresan la dependencia de los ángulos de los lados, ya obtenidas -- por él por vía geométrica; (a partir) de ellas deduce la nueva geometría; demuestra analíticamente que ésa es la geometría sobre la esfera de radio imaginario y que por tanto hay que aceptarla o rechazarla

junto con la geometría esférica. En los Nuevos principios se sigue el camino inverso (opuesto).

(6) Ver el teorema demostrado en §94: "dos líneas no -- convergen, cuando una tercera las encuentra del mismo lado bajo el mismo ángulo", esto es, cuando intersectadas por una transversal, forman ángulos correspondientes iguales. En este caso Lobačevskij demuestra que ellas poseen una perpendicular común; por - eso si se encontraran en un punto P, desde P podrían trazarse dos perpendiculares distintas a una misma recta, lo cual se demostró anteriormente que es imposible.

(7) Esta es una de las formas en la cual se puede expresar el V postulado de Euclides enunciado de la forma expuesta en el prefacio ("dos rectas se encuentran cuando, interesectadas por una transversal, forman - ángulos conjugados internos cuya suma es distinta - de dos rectos").

(8) Estas son las palabras precisas de Legendre: "Nous - devons avouer que cette seconde proposition, quoique le principe de la démonstration fut bien connu, nous a présenté des difficultés que nous n'avons pu - - - entièrement resoudre". "Mém. Acad. Sci. Institut de France", 12, 371 (1833). [Nota de Lobačevskij].

(9) Ver demostración en el §91.

(10) La prioridad en la demostración de este teorema -- corresponde a Saccheri (1733), cuya obra era desconocida sea a Legendre que a Lobačevskij. Este había llegado a este teorema en 1817, como lo demuestra un cuaderno de apuntes del curso de geometría que impartió ese año.

(*) Se han omitido en este punto alrededor de nueve páginas (nos referimos a la edición de 1949) al juzgarlas demasiado "técnicas" y no esenciales para - la comprensión de lo que sigue.

(11) Este importante razonamiento de Lobačevskij (expuesto, como él frecuentemente hace, en forma muy concisa) creemos, hay que entenderlo de la siguiente forma. Supóngase que una fuerza atractiva, concentrada en un punto material se difunde uniforme-- mente en todas las direcciones: se distribuirá entonces uniformemente sobre superficies esféricas - que tienen como centro el punto material. En la - mecánica ordinaria experimentamos que esta fuerza es, en cada punto del espacio, inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde el punto material en el que está concentrada: por esto la - mecánica ordinaria implica la geometría ordinaria, en la cual la superficie de una esfera es propor-- cional al cuadrado del radio. Si la ley de atracción en el campo molecular fuera diferente, siempre

manteniendo que la fuerza atractiva se difunde uni formemente en todas las direcciones, si por ejemplo fuese inversamente proporcional a: $e^{r} - e^{-r}$, enton ces sería necesario adoptar una nueva expresión pa ra la superficie de la esfera (en el caso citado, la escrito por Lobačevskij).

Notar que aquí e no representa forzosamente la base de los logaritmos naturales 2,718...: depende - de como se escoge la unidad de medida de las distan cias.

La importancia de este razonamiento de Lobačevskij no está en el ejemplo concreto (que no parece tener validez), sino en la conexión que él genialmente - establece entre geometría y física, entre propieda des geométricas del espacio y leyes físicas.

(12) Como se demostrará más adelante (§92 y §102) en el plano de Lobačevskij, cuando más disminuyen los la dos de un triángulo, tanto más aumenta la suma de los ángulos internos, acercándose a dos rectas, -- por esto la geometría ordinaria se puede considerar válida al límite, para distancias infinitamente pe queñas.

(13) En cuanto a la "constante universal" que interviene en la geometría de Lobačevskij, ver también las notas que se le dedican en el § 117, que trata de las orisferas y de los oriciclos. Un oriciclo es

la trayectoria ortogonal de un haz de rectas paralelas (la tangente en cada punto P de un oriciclo es perpendicular a la recta del haz de paralelas dadas que pasa por P). En el caso de la geometría ordinaria tal trayectoria es una recta; en el caso de la geometría de Lobačevskij es una curva de tipo nuevo (oriciclo, o círculo - límite, ya que se puede concebir como límite de un círculo cuyo centro se aleja al infinito en la dirección común a las paralelas de un haz). Dados dos oriciclos relativos al mismo haz de paralelas "la razón (relación, cociente) de dos arcos S, S' (de los oriciclos) comprendidos entre dos paralelas del haz, depende de su distancia X de forma tal que: $S = S'q^x$ (§ 117). En la geometría euclidiana se tiene $q = 1$, $S = S'$, y rectas paralelas son también equidistantes; en la geometría de Lobačevskij por lo contrario se tiene q mayor que 1 ("cuando S' se aleja de S en el sentido del paralelismo"). Si se introduce la constante k como el inverso del logaritmo natural de q, se tendrá la geometría euclidiana para k infinitamente grande. En el plano hiperbólico aparece entonces una constante k, que se puede definir por vía puramente geométrica (ya que por vía puramente geométrica se puede definir la unidad de medida, ver nota (16)): se llamará la "constante del plano hiperbólico" mientras que la cantidad (negativa y constante) $-\frac{1}{k^2}$ se llama "curvatura" del plano hiperbólico (el plano euclidiano, que corresponde a k = infinito, tiene por eso curvatura nula).

(14) Se tiene además, con más precisión: "las relaciones trigonométricas del plano hiperbólico se transforman en las ecuaciones de la geometría euclidiana, si los lados del triángulo se toman muy pequeños - tan pequeños, de poder omitir las terceras potencias de las relaciones (razones, cocientes) entre los lados y la constante del plano hiperbólico --- (ver nota anterior)". V. F. Kagan, Osnovanija geometrij (Moscú - Leningrado, 1949), Vol. I, p. 346.

(15) Aquí Lobačevskij enumera una serie de proposiciones que se tienen que suponer válidas para "líneas de grandes dimensiones" las relaciones válidas "localmente" en la geometría hiperbólica, esto es las -- que verifican las partes elementales, infinitésimas. Así por ejemplo, localmente, "en pequeño" también en el plano hiperbólico dos paralelas muy cercanas son equidistantes. Con más exactitud: el ángulo - $\underline{\Pi(a)}$ (ángulo de paralelismo) que una paralela por $\underline{A}$ a la recta $\underline{r}$ forma con la perpendicular $\underline{AB}$ a $\underline{r}$ - depende de la distancia $\underline{a}$ de $\underline{A}$ a $\underline{r}$; será inferior a 90° cuando $\underline{a}$ tiende a cero.

(16) En el plano no-euclidiano de Lobačevskij, como ya se mencionó en la nota anterior, el ángulo de para-

lelismo es función del segmento a (distancia del punto A a la recta r; mientras que el ángulo de paralelismo $\Pi(a)$ es el ángulo que forma una paralela por A a la recta r con la perpendicular desde A hasta r). Se puede entonces definir, por ejemplo, como unidad de medida la longitud del segmento al que corresponde un ángulo de paralelismo de 45°. De esta forma se puede establecer la unidad de medida por vía puramente geométrica; lo cual es imposible en la geometría euclídea, en la cual hay que recurrir a una muestra física (cual el metro ordinario). Este es uno de los hechos más singulares, más "extraños" de la geometría no-euclidiana. A este propósito ya Gauss observaba: "...lo que en este sistema repugna a nuestra razón es el hecho, si fuese cierto, que en el espacio existiría un segmento [en sí] definido (aún si no conocido por nosotros). Pero creo que, si prescindimos de la sabiduría verbal de los metafísicos, vacía de cualquier significado, sabemos muy poco o casi nada de la esencia del espacio: no podemos confundir lo que a nosotros nos parece innatural con lo absolutamente imposible" (carta a F. Taurinus del 8 de noviembre 1824).

(17) Ya se observó en nuestra introducción que en Lobačevskij está viva la intuición de las propiedades topológicas de las figuras. En este caso él obser

va justamente que no se puede pasar con continuidad, sin una "ruptura", un "corte", de una línea cerrada a una línea abierta. En realidad, la recta de la geometría ordinaria, al añadirle los puntos al infinito, es una línea cerrada: alejándose sobre la misma indefinidamente desde un punto inicial O hacia uno y otro lado se llega al mismo punto al infinito. Por lo contrario, la recta del plano de Lobacevskij, también cuando se añaden como puntos nuevos las direcciones de haces de radios paralelos, no es una línea cerrada:
alejándose sobre la misma indefinidamente desde un punto O hacia uno y otro lado se llega a dos puntos al infinito diferentes. El lugar de los puntos al infinito ya no es una recta, es una cónica, relativo al hecho de que por un punto pasan dos paralelas a la recta dada, que tienen sentido de paralelismo opuesto.

(18) La circunferencia es 6,28... (2π) veces su radio en el caso euclidiano, y viceversa, si para la longitud de la circunferencia esta fórmula es válida, estamos en el caso de la geometría euclidiana.

(19) Las mediciones hechas por Lobačevskij se referían al triángulo cuyos vértices eran la Tierra, el Sol y la estrella Sirio. La diferencia entre la suma de los ángulos internos y dos rectos, que él encon

tró era de 0",000372, ampliamente justificable con los errores de los instrumentos ("en los tiempos - de Lobačevskij los instrumentos para la medida de los ángulos no daban la posibilidad de distinguir ángulos que se diferenciasen el uno del otro por - menos de 1" dice Kagan, el mayor estudioso soviético de Lobačevskij, ya varias veces citado). Lobačevskij vió con claridad que esto aseguraba la - suficiencia de la geometría euclidiana "en las mediciones prácticas", pero no su validez universal, ya que "prescindiendo del hecho que en la imaginación el espacio puede prolongarse mas allá de cualquier límite, la Naturaleza misma nos enseña distancias tales, que en comparación con ellas desaparece por su pequeñez hasta la distancia de nuestra - tierra a las estrellas fijas". O načalah geometrij [Sobre los principios de la geometría], Vol. I de la Edición Nacional, p. 209.

(20) O sea los dos sentidos posibles de recorrer una recta.

(21) "En lo que atañe las definiciones... nos parece poco filosófico y poco correspondiente al curso efectivo del pensamiento darlas de golpe y sin ninguna investigación: decir, por ejemplo "la superficie es el límite de un cuerpo sin espesor". Es mejor considerar inicialmente el cuerpo tal como es, y ense

ñar como se llega vía abstracciones sucesivas a la consideración del cuerpo, dotado nada más de extensión y de forma definida, y después, vía nuevas -- abstracciones, sucesivamente a la consideración de la superficie, de la línea y del punto". Así (escribe) Jean Le Rond d'Alembert en el Dictionaire - encyclopédique des mathématiques, Vol. I (1789). Para (darse cuenta de) la influencia del iluminismo sobre Lobačevskij y para el nuevo criterio de - exposición de los principios, ver nuestro prefacio. Recordemos que en 1823 Lobačevskij escribió un curso de geometría en el cual está ya, en gran parte, la nueva impostación, tan diferente de la euclidiana y más bien polémica hacia ella. Este libro se publicó apenas en 1909 y ha sido recientemente reimpreso por Ediciones Nacionales, Vol. II., con el - título de Geometrija.

(22) A una misma recta.

(23) Algebra ili vyčislenie konečnyh [Algebra o cálculo de las (cantidades) finitas] (Kazan', 1834) publicada ahora en el Vol. IV de las Ediciones Nacionales.

(24) Estas páginas son una polémica implícita en contra de la impostación de Euclides: 1) porque, como ya se notó, se rechazan por arbitrarias las definiciones y los axiomas en la forma tradicional, en los

cuales se "presupone el desarrollo de esos conceptos que constituyen nuestra mente innata"; 2) porque, se pone en el centro la geometría métrica (movimiento, medida).

En los párrafos siguientes se discute la medida de líneas y superficies curvas, definiéndola como un límite, y preocupándose de las condiciones que garantizan la existencia de dicho límite.

(25) En realidad, en la medida de los sólidos, la igualdad de los volúmenes de dos poliedros no lleva necesariamente a su equidescomponibilidad, como demostraron M. Dehn (1901) y V. F. Kagan (1903).

Capítulo 1.

LOS PRIMEROS CONCEPTOS DE LA GEOMETRIA.

1. El *contacto* constituye la propiedad característica de los cuerpos; a ella deben los cuerpos el nombre de *cuerpos geométricos*, desde el momento en que fijamos nuestra atención sobre esta propiedad y no consideramos todas las demás propiedades, con éstas esenciales o accidentales.

Son objeto de juicio, además de los cuerpos, también, por ejemplo, el tiempo, la fuerza y la velocidad del movimiento; pero el concepto contenido en la palabra contacto no hace referencia a esto. En nuestra mente nosotros relacionamos este concepto sólo con los cuerpos cuando hablamos de su composición o descomposición en partes. Este simple concepto, que hemos recibido directamente en la naturaleza a través de los sentidos, no deriva de otros conceptos y no depende entonces de ulteriores explicaciones.

Dos cuerpos **A** y **B** (fig. 1), que se tocan entre sí, forman un único cuerpo geométrico **C**, en el cual cada una de las partes que lo compone aparece separada (está por su lado) sin confundirse en la totalidad **C**.

Por otro lado cada cuerpo **C** se descompone, -- por una *sección* **S** cualquiera, en dos parte **A** y **B**. Aquí entendemos por sección ya no alguna nueva - atribución del cuerpo, sino una vez más el contacto, en tanto que expresamos en este caso la descomposición del cuerpo en dos partes que se tocan. Llamaremos en adelante *lados* de la sección **S** en el cuerpo **C** a las dos partes **A** y **B**.

De esta forma podemos concebir todos los cuerpos en la naturaleza como partes de un cuerpo único global, que llamaremos *espacio*.

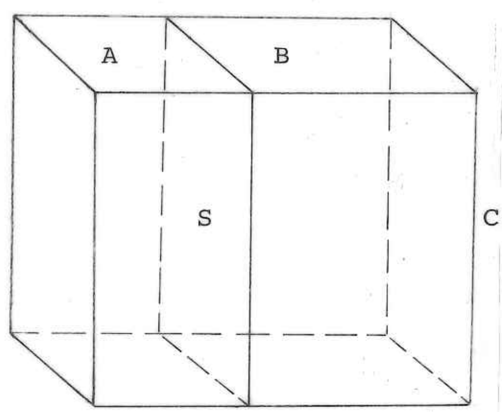

Fig. 1

2. Todo cuerpo **A** (fig. 2) puede tocar otro cuerpo **B** - de forma tal que sea imposible para otro cuerpo **C** tocar al mismo tiempo **A** y **B**. En este caso se llama a **B** *espacio circunstante* cuando se supone que - cada cuerpo **C** está contenido en él; o el *lugar* del

cuerpo **A**, si se toma en consideración sólo el contacto entre **A** y **B** y se permite en consecuencia la eliminación del espacio ambiente de cada parte suya **C** que no toca **A**[1]. Si el cuerpo **A** se encuentra en este tipo de contacto con **B** y si además es imposible unir a **A** algún cuerpo que no toque **B**, se dice que **A** *llena* el lugar **B**. Todos los demás cuerpos que llenen a la par el lugar **B** sin que se opere sobre ellos alguna modificación serán entonces geométricamente *congruentes*[2] entre ellos bajo todas las relaciones.

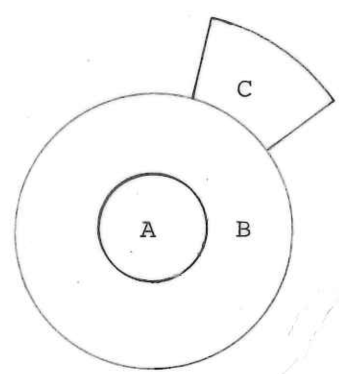

Fig. 2

Dos cuerpos son nada más equivalentes, cuando se tiene que las partes de uno tienen que distribuirse en un nuevo orden para llenar el lugar del -- otro (cuerpo)[3].

Un cuerpo geométrico se mide descomponiendo - el cuerpo mismo y otro cuerpo, que se asume como -

medida, en partes [entre sí] congruentes. La magnitud [del cuerpo] se expresará después por la relación (razón) entre el número de las partes contenidas en el cuerpo dado y el número de las partes -- [contenidas] en la medida. La posibilidad de determinar la magnitud de los cuerpos presupone en consecuencia la posibilidad de poder componer cualquier cuerpo a través de repetidas añadiduras de un cuerpo único que, (puesto) añadido cada vez a sí mismo terminaría por llenar tanto el cuerpo que mide como la medida misma. Si es imposible llegar de un modo completo a este resultado se empieza por dar a la medida una forma determinada; se descompone - después en partes, las cuales pueden sí tener cualquier magnitud pero deben de ser siempre congruentes entre ellas de tal forma que la medida genere, con la añadidura repetida de sí misma y de sus partes, un cuerpo continuo que llena el espacio más - allá de cualquier límite[4]. Después de esto se - podrá llegar a la formación de cualquier cuerpo por composición, alcanzando el grado de igualdad más - allá del cual nuestros sentidos ya dejen de percibir (alguna falta) las faltas.

Entonces, los errores en la medición no superarán esos márgenes, que se presentan en la misma naturaleza, lo cual tiene que ser el objetivo fundamental de cualquier ciencia; y si bien de ella -

traemos (sacamos) los primeros conceptos, debemos aún a la imperfección de nuestros sentidos el rigor de estas últimas. En la realidad, en la naturaleza no existe una composición continua, y la regularidad de la formación no se conserva, hasta las partículas elementales, en la forma en la cual se presenta, en un primer momento, para un todo de grandes dimensiones. Por otro lado, si bien nosotros creamos en nuestro pensamiento cuerpos (entre sí) inconmensurables como por ejemplo la esfera y el cubo, no tenemos más que establecer un acuerdo en los signos de mayor y menor; admitir entonces, en general, que todo cuerpo tiene una medida bien determinada; y encerrar finalmente el cuerpo medido entre límites que podemos acercar entre sí cuanto nos guste, para llegar a la magnitud de las formas pensadas con el grado de exactitud que queramos.[5]

3. *Cada cuerpo se puede descomponer en partes que no se tocan entre sí más que una a una.*

Secciones de este tipo serán llamadas por nosotros *secciones consecutivas*. Éstas localizan la dimensión según la cual un cuerpo se *expande* al infinito cuando nosotros le añadimos (siempre) partes nuevas del espacio circunstante, que no se tocan más que una a una.

En la figura 3 están representadas las partes **A,B,C,D,E** de un cuerpo, unidas por contacto según el orden (dado). **A** no toca ni **C** ni **D** ni **E** y a la par **B** no toca ni **D** ni **E**. Las secciones **S, S', S'', S'''**, por medio de las cuales se genera tal descomposición, serán secciones consecutivas.

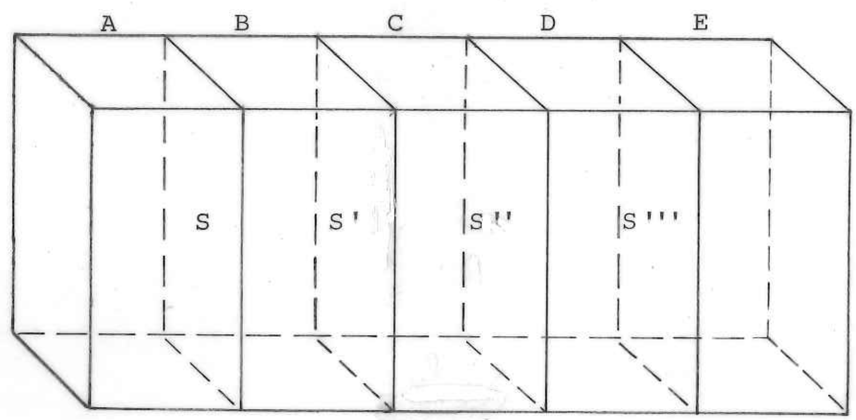

Fig. 3

4. Una primera sección divide un cuerpo en dos partes; una segunda sección, qu vaya desde un lado al opuesto, genera ya cuatro. *En este caso, siempre se pueden llevar las dos secciones y añadir después otras nuevas de forma que a cada paso aumente en dos el número de las partes, las cuales se tocan todas (entre sí) una con otra.*

A secciones de este tipo, cuyo número es en consecuencia ilimitado, llamaremos *secciones rotantes*.

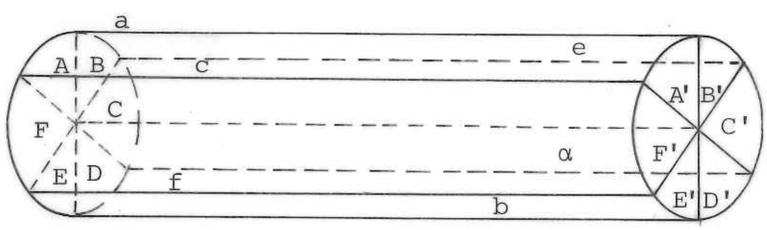

Fig. 4

En la figura 4 la sección **ab** divide el cuerpo en dos partes; las secciones **cd** y **ef** añaden aún dos cada una, de forma tal que las seis partes **AA',BB',CC',DD',EE',FF'** se tocan entre sí. Por ejemplo **AA'** no toca nadamás a **BB'** sino también a **CC', DD',EE',FF'**. Las tres secciones **ab,cd,ef** serán secciones rotantes.

Dos secciones, cada una de las cuales va, con respecto a la otra, de un lado al opuesto, se llamarán *secciones en cruz*. En la figura 4, por ejemplo, se han llevado las secciones **ab** y **cd** *en cruz*. Llamaremos *partes en cruz* a dos partes (de los cuatro que se forman en un cuerpo por obra de secciones de este tipo) que se encuentran en lados opuestos con respecto a las dos secciones. En la figura 4 están representadas las siguientes partes en cruz: **AA'** y **DD'**,**BB'** y **EE'**,**CC'** y **FF'**. En la figura, **AA'** y **DD'** se encuentran en lados opuestos sea con respecto a la sección **ab** o con respecto a la **cd**.

Hay que observar que dos secciones en cruz dividen, tal vez, el cuerpo en cuatro partes que se tocan entre sí nadamás una a una. Aún en este caso la primera parte está a su vez relacionada por contacto con la cuarta y es entonces imposible tomar (por equivocación) la descomposición por la que se origina por secciones consecutivas.

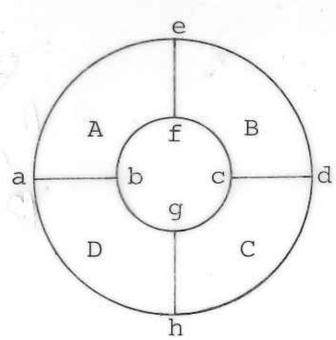

Fig. 5

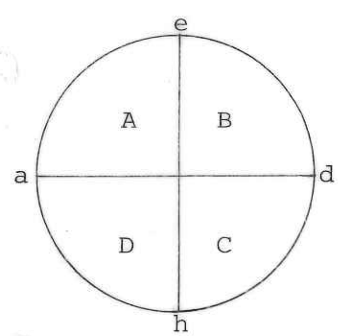

Fig. 6

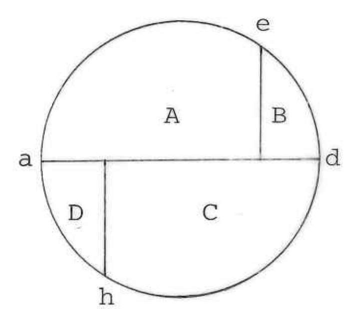

Fig. 7

En la figura 5 se representa el perfil de un cuerpo de este tipo, que se divide con las secciones **abcd** y **efgh** en cuatro partes **A**,**B**,**C**,**D** que no se tocan entre sí más que una a una. Pero la primera parte está conectada con la última **D** y por esto es imposible suponer que la descomposición se haya obtenido por las cuatro secciones consecutivas **ab**,**ef**, **cd** y **gh**. La diferencia característica entre las secciones consecutivas y las secciones en cruz está en el hecho de que las primeras no pasan de un lado al opuesto. Mientras que en la figura 5 la sección **abcd** descompone el cuerpo en dos partes **ahd** y **aed**, que representan los dos lados de la sección **abcd**; la otra sección **efgh** va desde un lado **aed** al otro **ahd**. Si por ejemplo quitáramos la parte **D**, se eliminaría así el contacto de **A** con **D** y de **D** con **C**, entonces en este caso las secciones **ef** y **cd** se volverían secciones consecutivas. Por otro lado, dos secciones en cruz siempre tienen que dar origen a un contacto en cruz de por lo menos dos partes, -- aún si no en el mismo cuerpo, sí en el espacio circunstante, esto es añadiendo al cuerpo una parte conveniente tomada del espacio circunstante. Así, en la figura 5, se puede completar el cuerpo con una parte que se toma del espacio circunstante, con el resultado de que, en este cuerpo compuesto, las dos secciones ya no se interrumpen.(6)

Si suponemos las secciones continuas, entonces podemos admitir dos casos: las secciones **ad** y **eh** (fig. 6) dan origne a cuatro partes **A**,**B**,**C**,**D** que, o se tocan en cruz por parejas (**A** y **C**,**B** y **D**), o son tales que sólo dos partes, por ejemplo **A** y **C** (fig.7) se tocan entre sí, mientras las otras dos, **B** y **D**, no están conectadas. Nadamás en uno de estos casos - en el primero - las dos secciones **ad** y **eh** serán - secciones rotantes (fig. 6).

5. *Por medio de tres secciones se puede descompo ner cada cuerpo en ocho partes que se tocan entre sí, de forma tal que secciones consecutivas a cada una de estas tres secciones (revelan, exhiben) des tacan siempre cuatro partes que se tocan entre sí.*

En este caso llamaremos a las tres secciones *secciones principales*. En los cuerpos no puede e-xistir un número aún mayor de secciones de este ti po, aún si cada una de estas puede ser sustituida sea por una sección rotante, sea por una sección - consecutiva a ella relativas. Ningún cuerpo admi-te una cuarta sección a la que se pueda dar el nom bre de sección principal bajo esta condición. En efecto, no estamos en condiciones de descomponer - ni un solo cuerpo por medio de una cuarta sección, tal que doble el número de partes que se tocan mu-tuamente, de forma tal que se conserve el contacto de todas las dieciséis partes, cuando se sutituye la sección por secciones consecutivas con respecto a ella.[7]

Las tres secciones principales **ab**,**cd** y **ef** - - (fig. 8), descomponen el cuerpo en ocho partes: **A**, B,C,D,A',B',C',D' que se tocan una con otra. Hubiéramos llegado al mismo resultado si, por ejemplo, hubiéramos tomado, en lugar de cd, otra sección cualquiera a ella consecutiva o una sección rotante cualquiera relativa a ella.

Si se desea que tres secciones, con las cuales se descompone un cuerpo, sean secciones principales, no es suficiente que las ocho partes se toquen entre sí. Hay que pedir que secciones consecutivas con respecto a cada una de las tres secciones destaquen siempre cuatro partes que se tocan en cruz (y esto por lo menos cuando no se consideren esas partes que por lo general no se tocan en cruz)[8].

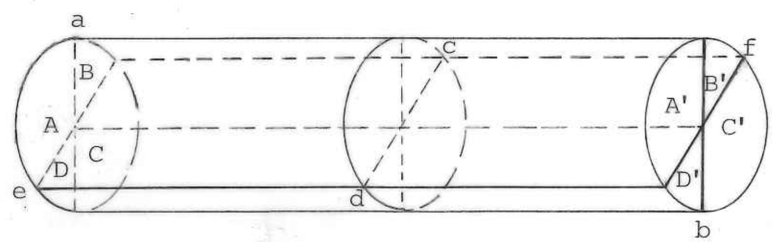

Fig. 8

Imaginemos ahora, que añadimos una sección -- consecutiva a una de las tres secciones principa-- les: entre las dos se destacarán cuatro partes, el contacto entre ellos puede ser de uno de los tres tipos representados en las figuras 5,6,7. El primer caso no es aún suficiente para decidir si hay que considerar como dos secciones principales a las secciones **ad** y **eh**; pero en el caso que se ve en la figura 6 las dos secciones **ad** y **eh** pueden ser secciones principales, si lo mismo se repite en todos lados entre dos secciones consecutivas cualesquiera o si, por lo menos, el contacto en cruz es completamente anulado nadamás entre algunas de ellas.

6. Si se fijan en un cuerpo tres secciones principales, con lo cual, al mismo tiempo, se producen en el cuerpo ocho partes que se tocan la una con - la otra, entonces, con respecto a la primera sección dos partes se tocan *superficialmente*; con respecto a dos secciones, dos partes puestas en cruz se tocan *linealmente*; mientras que dos partes que se encuentren en lados opuestos con respecto a cada una de las tres secciones, se tocan entre ellas *en un punto*.

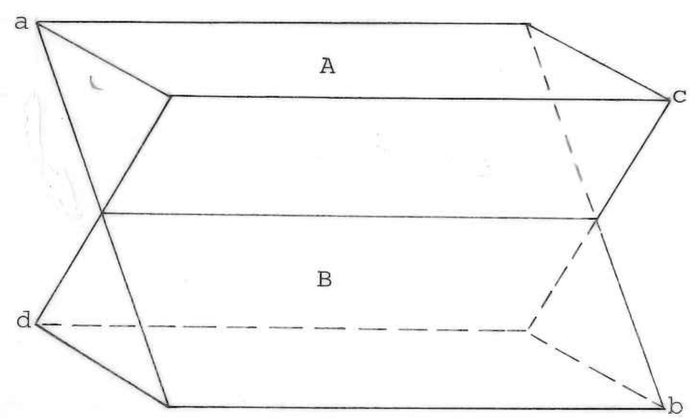

Fig. 9

La figura 1 representa el contacto superficial de dos partes **A** y **B** en el cuerpo **C**. En la figura 9 se ve el contacto lineal de dos cuerpos **A** y **B**, destacados en un cuerpo por las secciones **ab** y **cd**. En la figura 10, los dos cuerpos **A** y **B** se tocan entre sí en un punto, siendo partes de un cuerpo que se obtienen por obra de las tres secciones **abc**, **dbe**, **fbg**.

Cada cuerpo se encuentra en contacto superficial con el espacio circunstante. La sección, con la cual está subdividido, se puede pensar como una sección única, o como dos secciones rotantes, o, finalmente, como tres secciones principales. En consecuencia, dos partes de un cuerpo se tocan o superficialmente, o linealmente, o en un punto.

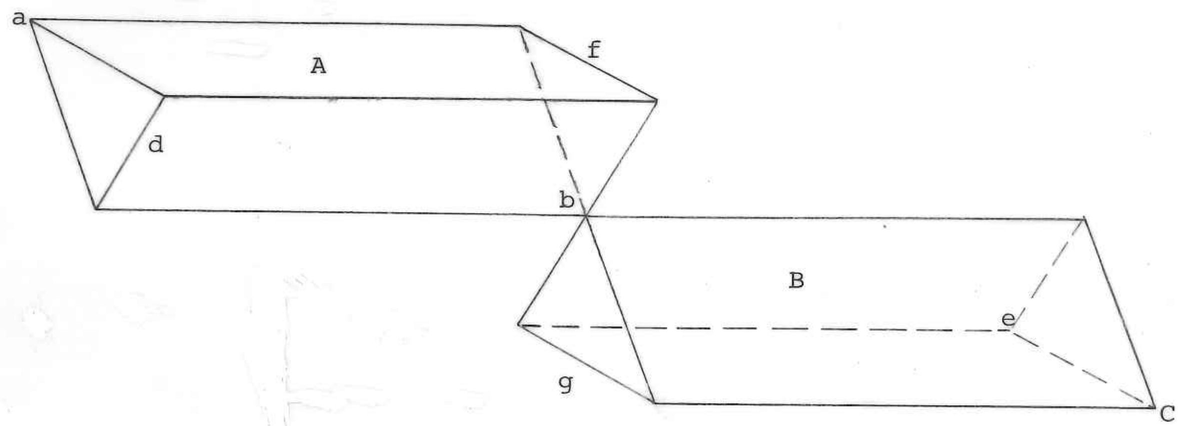

Fig. 10

7. Si tratamos nadamás del contacto entre dos -- cuerpos y en consecuencia no tomamos en consideración las partes de cada uno que no tocan al otro, los dos cuerpos reciben el nombre de *superficie, - línea o punto*, según cual sea el tipo de contacto entre ellos: superficial, lineal, o en un punto[9].

Entonces, si dos cuerpos **A** y **B** (fig. 11) se - tocan superficialmente, en tanto se encuentren de los dos lados de la sección **S**, recibirán, de ahora en adelante, el nombre de : superficie **S**, apenas - esté permitido añadir o quitar a **A** cada parte a que no toque **B**, y a **B** cada parte **b** que no toque **A**. El hecho de quitar partes **a** y **b** de este tipo tiene que hacerse a través de las secciones **S'** y **S''** consecutivas con respecto a **S** y se puede seguir hasta - que en los dos cuerpos se llegue a lo delgado de -

una hoja de papel o hasta el punto en el cual la imaginación aún tiene la capacidad de seguir con la subdivisión. Generalmente nos representamos las superficies de esta forma, o sea justamente adelgazando hasta el extremo dos cuerpos, quitando de nuestra atención esas partes de ellos, que no es necesario tomar en consideración.

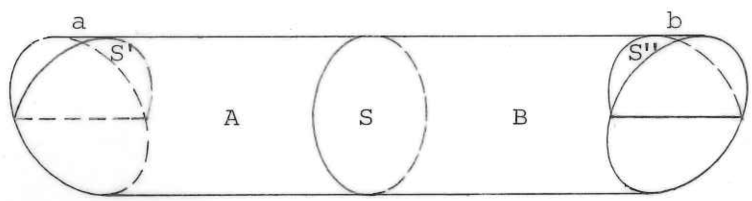

Fig. 11

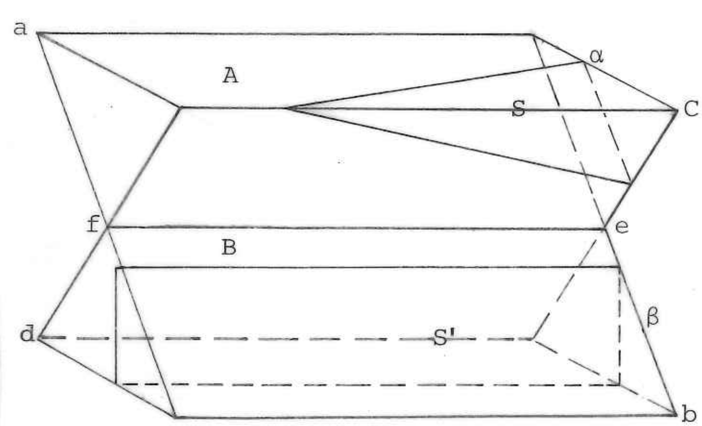

Fig. 12

Si dos cuerpos **A** y **B** (fig. 12) tienen un contacto lineal y representan partes de un mismo cuerpo, cortadas por dos secciones **ab** y **cd**, y si además está permitido quitarle a **A** cada parte α que no toca **B** y a **B** cada parte β que no toca **A**, los dos cuerpos recibirán de ahora en adelante el nombre de línea. Las dos partes α y β pueden ser quitadas con el auxilio de secciones, **S** y **S'**, consecutivas: las primeras con respecto a **ab** y las segundas con respecto a **cd**, de esta forma se puede reducir los - - cuerpos a la sutileza de un cabello o del trazo **ef** sobre la hoja o hasta el punto en el cual estemos en condiciones de imaginar esta subdivisión. Así es como habitualmente nos imaginamos las líneas, - después de haber logrado que pase inadvertido lo - que aquí no debe llamar la atención.

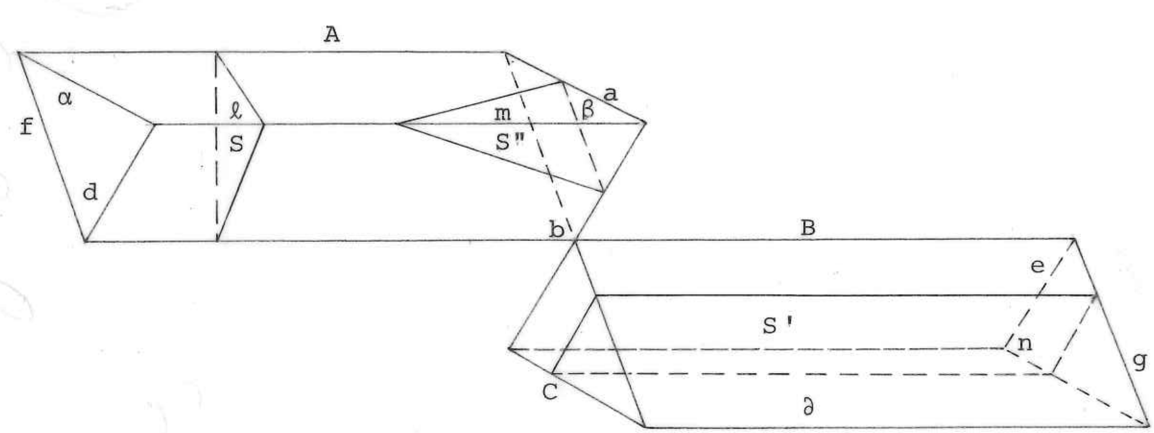

Fig. 13

Si dos cuerpos **A** y **B** (fig. 13) se tocan en un punto y en consecuencia pueden ser considerados como partes cortadas de un cuerpo único con el auxilio de tres secciones principales **abc**, **dbe** y **fgb**, entonces **B** se llama un punto en el caso en el cual es lícito quitarle a **A** cada parte α o β que no toca **B** y a **B** cada parte γ que no toca **A**. El quitar partes de este tipo se logra, en los dos cuerpos, por medio de las secciones **S,S',S''**, consecutivas con respecto a las tres secciones principales **abc**, **dbe,fbg** y reduce finalmente el cuerpo a la magnitud (pequeñez) de un granito de arena o a un punto **b**, que se obtiene del contacto de (la punta de) una pluma (de donde justamente viene el nombre)[10].

El contacto de cada cuerpo con el espacio circunstante genera una superficie que *limita* el cuerpo. El mismo cuerpo es el lado *interior* de la superficie, el espacio circunstante (es) el lado *extremo* a ella. Secciones (que hacemos) en el cuerpo generan superficies, que se llaman *internas* y que se distinguen de la superficie *externas* justamente en lo que concierne al contacto con el espacio circunstante.

Cada línea pertenece a un conjunto infinito de superficies, generadas por secciones rotantes. Justamente en esto se piensa (nos referimos) al decir que *dos superficies se cortan en una línea*, --

que yace sobre cada una de ellas (superficies) y - divide a cada una de ellas en dos partes: *los lados de la línea*. De la intersección de la superficie externa de un cuerpo con una superficie interna - que se alarga fuera del cuerpo, nace una línea que *cerrándose* limita la superficie interna, o de otro modo: divide *el lado interior* de la línea, del *exterior* ilimitado en el espacio circunstante.

Un punto pertenece a todas las líneas en las que se intersectan tres secciones principales, así como también a las secciones notantes relativas a ellas. El punto divide una línea en dos partes -- que determinan dos lados opuestos del punto. Si - la línea se cierra hay que quitarle una parte para evitar la confusión entre los dos lados conexos[11].

8. La medida de los cuerpos requiere su descomposición en partes iguales (§ 2). Se puede obtener la descomposición con el auxilio de secciones consecutivas a las tres principales, por eso los cuerpos poseen tres dimensiones, que están determinadas por las tres series de secciones consecutivas.

Si suponemos que de este modo podemos medir - cada cuerpo (como se mostrará más adelante), podremos hacer para cada sección, otra sección sucesiva a ella y (destacar) desprender entre las dos una - parte cuya magnitud puede hacerse pequeña, a placer, en comparación con la magnitud del cuerpo entero. Por otro lado, tal (reducción) hecho de hacer más pequeña la magnitud del cuerpo, no modifica la superficie generada por la primera sección. Por lo tanto, a este respecto, la magnitud de una superficie debe ser considerado igual a cero en comparación a la magnitud del cuerpo.

9. La medida de una superficie requiere, de forma análoga que la medida de los cuerpos, su descomposición en partes iguales. Tal descomposición es posible, si añadimos a la sección que genera la superficie otras dos secciones de forma de obtener tres secciones principales; y si hacemos después secciones sucesivas a cada una de las dos secciones añadidas. Las dos series de secciones sucesivas determinan en este caso dos dimensiones (mientras que con la tercera serie se van quitando nadamás partes que no pertenecen a la superficie, § 7).

Si suponemos que de esta forma siempre se puede medir uan superficie, así como en general cada parte suya que esté entre dos secciones sucesivas que determinan una dimensión, entonces podremos volver pequeña a placer tal parte en comparación con la magnitud de la superficie completa. Pero ya que una parte de una superficie constituye un lado de una línea, la magnitud de una línea será bajo este aspecto, igual a cero si se compara con la de una superficie. Por eso en la medida de una superficie se pueden sustituir las secciones sucesivas con -- secciones rotantes a ellas correspondientes; lo -- cual quiere decir que hay que considerar nadamás - las líneas mismas, trazadas sobre la superficie, - cualesquiera que sean las secciones a las que ellas puedan ulteriormente pertenecer y prescindiendo de la forma como las secciones puedan ser prolongadas por fuera de la superficie.

10. La medida de las líneas requiere la subdivisión en partes, que se pueden separar con una sola serie de secciones consecutivas, que se hacen con respecto a la tercera sección principal y tomando como - las otras dos secciones principales, las mismas -- secciones sobre las cuales se encuentra la línea. En efecto, secciones sucesivas de las dos últimas separan nadamás partes que no pertenecen a la línea.

Si suponemos que es posible encontrar la magnitud de cada línea y a la par, la magnitud de cada parte de la misma comprendida entre dos puntos; y si admitimos además, que se puede volver tal parte, pequeña a voluntad, tenemos que considerar el punto como cero (de medida cero) en comparación -- con la magnitud de la línea ya que todas las partes mencionadas no pertenecen al punto[12].

11. De todas formas hay que considerar que la magnitud de un punto es cero en comparación con la -- magnitud de una línea, ya que cada línea, por pe-- queña que sea, se puede volver más pequeña sin que eso influya de alguna forma sobre la magnitud de - un punto que pertenezca a ella (§ 7). Por lo general, tanto las líneas como los puntos, cuando están conectados entre sí por secciones a las que pertenecen y las cuales, en consecuencia, serán todas - secciones rotantes la una con respecto a la otra, no pueden aumentar en magnitud sino que a su vez - las secciones (cuando una es restituida por la otra) generen nuevas líneas y puntos. Así, en este tipo de unión, la magnitud de dos líneas es la magnitud de la mayor entre ellas o la de antes en el caso - de que sean iguales; la magnitud de un punto no -- varía jamás. Esta propiedad de las líneas y de -- los puntos, de no aumentar su magnitud doblándola es -en el campo de las magnitudes geométricas- la misma propiedad que existe entre los números y el cero.

12. La posición relativa entre dos puntos se llama la *distancia* (entre ellos) y se determina por - el contacto entre dos cuerpos, sobre los cuales es lícito hacer todas las transformaciones que no - - hagan cambiar [de lugar] los puntos mismos, de for

ma tal que se considera que la distancia es la misma, cuando la diferencia viene de las partes de un cuerpo que no tocan al otro, o de secciones rotantes diferentes, a las cuales (cuerpos) pertenecen también los puntos[13].

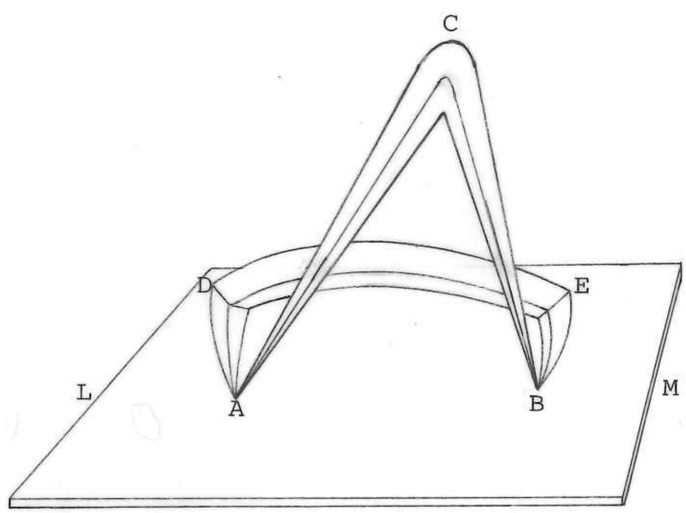

Fig. 14

La distancia entre los puntos **A** y **B** (fig. 14) está definida por el contacto del cuerpo **LM** con -- **AD(E)B**, porque aquí, lo diferencie entre los cuerpos en contacto consiste, o en partes del uno que no tocan al otro, o en partes cuyas superficies externas representan secciones rotantes, a las cuales pertenecen los dos puntos.

NOTAS A PIE DE PAGINA.

(1) El ambiente que rodea el cuerpo **A** es considerado por Lobačevskij como un cuerpo; pero en general se asignará, como veremos más adelante, la *finitud* como una propiedad de los cuerpos geométricos (que no se deriva de la hipótesis, apenas hecha, - de que se pueda "circular" un cuerpo cualquiera **A** con un cuerpo **B**). La "eliminación del espacio circunstante, de cada parte que no toque **A**" equivale, sustancialmente, a la definición de "cerradura" de **A** (conjunto de los puntos de **A** y de los puntos límite de **A**).

(2) La posibilidad de que un cuerpo ocupe el lugar de otro "sin que se opere sobre él alguna modificación" implica, aún si no claramente, la idea de -- "movimiento". Entonces el concepto de "movimiento" es, además del de "contacto", uno de los conceptos primitivos de Lobačevskij.

(3) Lobačevskij reduce el concepto de "equivalencia" al de "equidescomponibilidad" que es más restrictivo. Pero hemos preferido usar en el texto,- de ahora en adelante, el término más corriente de "equivalencia". En el original se usa un lenguaje ya antiguo: dos cuerpos congruentes son llamados -

"idénticos", dos cuerpos equivalentes (equidescomponibles) son llamados "iguales".

(4) Esto pasa, por ejemplo, si se toma como unidad de medida de las superficies planas un cuadrado, y como unidad de medida de los cuerpos sólidos un cubo.

(5) Ver también nuestra introducción. Para Lobačevskij, el concepto de continuidad es en cierto modo artificial; la posibilidad de una subdivisión indefinida en partes congruentes cada vez más pequeñas, que surge en nuestra mente gracias a las experiencias macroscópicas, no se puede extender al mundo microscópico. Para Lobačevskij la medida tiene un carácter experimental, necesaria. E intrínsecamente aproximado. Es (esta) una concepción física (y en parte empirista) de la geometría, que lleva a la exclusión del infinito y en consecuencia de las sucesiones decimales infinitas (número irracional).

(6) Como se observa en nuestra introducción, Lobačevskij es inducido, por la naturaleza misma de la tarea que se ha propuesto, a imprimir una dirección que hoy llamaríamos topológica a su nueva fundación de la geometría, en lo que concierne a los primeros

principios. Usando el lenguaje moderno, podemos decir que las definiciones de secciones consecutivas y notantes que da Lobačevskij; se pueden aplicar a los cuerpos sólidos que se pueden obtener de la esfera por deformación "clásica" (con más propiedad: transformación topológica u homeomorfismo), no a cuerpos como el "toro" ("dona con agujero") que no se puede reducir a la esfera topológicamente, y al que se refiere Lobačevskij en el ejemplo de la figura 5.

(7) Hay que notar que: a) la definición de secciones principales hay que referirla a la esfera o a un cuerpo a ella homeomorfo (ver nota anterior); b) con la hipótesis actual se supone que el espacio geométrico es de tres dimensiones. Hay que observar aquí también que el carácter sustancialmente topológico de la definición de tridimensionalidad, en la que ya no se recurre a la imposibilidad de pasar por un punto cuatro rectas mutuamente ortogonales, incluye conceptos métricos. Ver también la Introducción.

(8) Lo que se añade entre paréntesis no queda muy claro: hay que entenderlo en el sentido siguiente: que una sección consecutiva a una sección principal dada separa de las partes que se tocan en cruz (y-

no de otras) partes que también se tocan en cruz.

(9) El lector experto en topología se dará cuenta que la definición, dada ahora por Lobačevskij, de la dimensión, encubre (esconde) la definición de "dimensión inductiva" dada por primera vez por Poincaré (1911), y se basa sobre la consideración de los "cortes" que rompen la conexión de un continuo.

(10) La palabra punto (tocko) viene en ruso de "afilar, sacar punta" (tocit).

(11) Aquí también Lobačevskij se limita implícitamente a considerar esos cuerpos que son homeomorfos a la esfera. La superficie de "contacto con el espacio circunstante" es entonces una superficie simple cerrada (homeomorfa a la superficie esférica); las "superficies internas" generadas por una sección, son discos circulares (o sus transformados por deformaciones contínuas); la línea de intersección de la "superficie externa de un cuerpo con una superficie interna alargada fuera del cuerpo" es una línea simple cerrada (circunferencia o su transformada topológica), mientras que la línea donde se intersectan dos "superficies internas" es un segmento (o su transformado topológico).

(12) Hemos preferido aquí (y es una excepción) la lección de F. Engel, en su traducción alemana, a la carta del texto de la edición estatal de 1949, la cual concluye repitiendo que la magnitud de la línea tiene que considerarse nula en comparación a la de una superficie. Puede ser que haya sido una falta de atención material de Lobačevskij (ya veremos algún otro ejemplo más adelante).

(13) En el capítulo II., como se verá, Lobačevskij explicará con más claridad que la distancia entre dos puntos **A,B** es invariante en relación a los movimientos (la "posición relativa" de dos puntos no se altera con los movimientos).