

#95

SERIE  
**MATEMÁTICAS**

---

José Guerrero Grajeda y Rosa Ma. Álvarez González

# Geometría analítica. Un enfoque vectorial con apoyo computacional de Matlab

AÑO  
**2007**



# Facultad de Ciencias

## Vínculos matemáticos



### Geometría analítica

Un enfoque vectorial con apoyo  
computacional de Matlab

Segunda parte

---

**José Guerrero Grajeda.\***

**Rosa Margarita Álvarez González\*\***

Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias, UNAM

**Nº 95. 2012**

---

\* Profesor del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM

\*\* Profesora de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México

Impreso en la Coordinación de Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM

## Prólogo

En esta segunda parte continuamos nuestro estudio restringido al espacio bidimensional  $E_2$ , haciendo énfasis en el concepto de **lugar geométrico** y el uso de **traslaciones**, mostrando su eficacia para simplificar el estudio de circunferencias y cónicas. También seguimos apoyándonos en **Matlab** en la parte computacional.

Cabe mencionar también que introducimos y desarrollamos el concepto de **direcciones conjugadas**, haciendo notar su relevancia en la construcción de un importante método computacional para el cálculo de mínimos de funciones, y al final del capítulo hablamos algo más sobre ésta y otras aplicaciones.

Siguen siendo bienvenidas las críticas, sugerencias, etc.

Nuestras direcciones son:

grajeda@ciencias.unam.mx

y

rmalvarezmx@yahoo.com.mx

## Contenido

|              |  |    |
|--------------|--|----|
| Capítulo III | Circunferencias, cónicas y traslaciones en $E_2$ |    |
| III.1        | Circunferencias                                  | 4  |
| III.2        | Las cónicas                                      | 23 |
| III.2.1      | La parábola                                      | 23 |
| III.2.2      | La elipse  | 34 |
| III.2.3      | La hipérbola                                     | 47 |
| III.2.4      | Algo sobre aplicaciones                          | 54 |
| Bibliografía |  | 60 |

# CAPITULO III

## Circunferencias y cónicas

### III. 1 Circunferencias

Para empezar, recordemos que en el capítulo II definimos una recta como:

$$r = \{P | P = P_1 + tv, t \in \mathbb{R}\},$$

esto es, podemos referirnos a  $r$  como el **lugar geométrico** de los puntos  $P$ , tales que  $P = P_1 + tv$ , donde  $P_1$  es un punto fijo y  $v$  es un vector dado.

En el mismo sentido, se sabe desde los cursos básicos de geometría que toda circunferencia  $\mathcal{C}$  es el **lugar geométrico** de los puntos  $P$  que equidistan de un punto fijo  $c$ , llamado el centro de  $\mathcal{C}$ . Esto es,

$$\mathcal{C} = \{P | d(P, c) = r, c \text{ fijo y } r \geq 0\}. \quad \text{III.1.1}$$

Al real positivo  $r$  se le conoce como el radio de la circunferencia, y si  $c$  es el origen del sistema de coordenadas, entonces se tiene que  $d(P, O) \equiv \|P\|$ , de donde:

$$\mathcal{C} = \{P | \|P\| = r, r \geq 0\}. \quad \text{III.1.2}$$

Gráficamente:

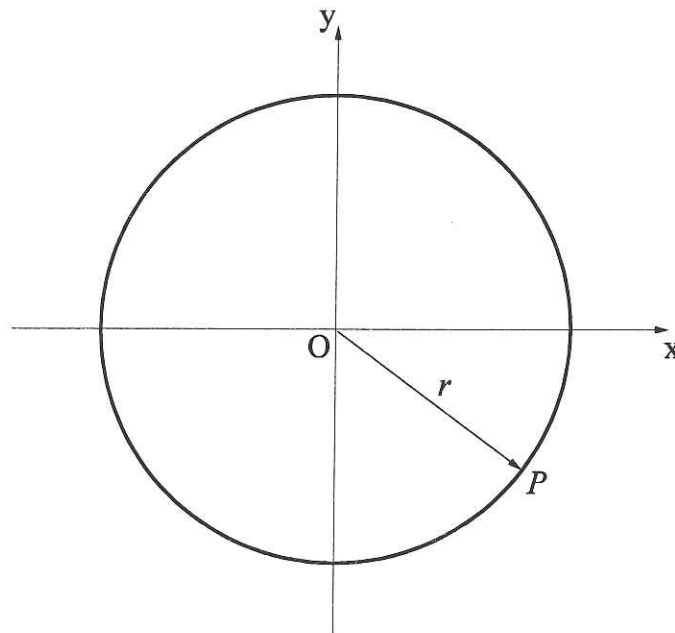


Figura III.1.1

De III.1.2 resulta:

$$r = \|P\| = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow$$
$$C: x^2 + y^2 = r^2, \quad \text{III.1.3}$$

conocida como la ecuación cartesiana de la circunferencia  $C$  con centro en el origen y radio  $r$ .

### Una variación

Volviendo al caso general dado por III.1.1, si  $c(h, k)$ , entonces:

$$r = d(P, c) = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} \Leftrightarrow$$
$$C: (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2, \quad \text{III.1.4}$$

que llamaremos ecuación cartesiana de  $C$  con centro  $c(h, k)$ , y radio  $r$ , cuya gráfica puede representarse como sigue:

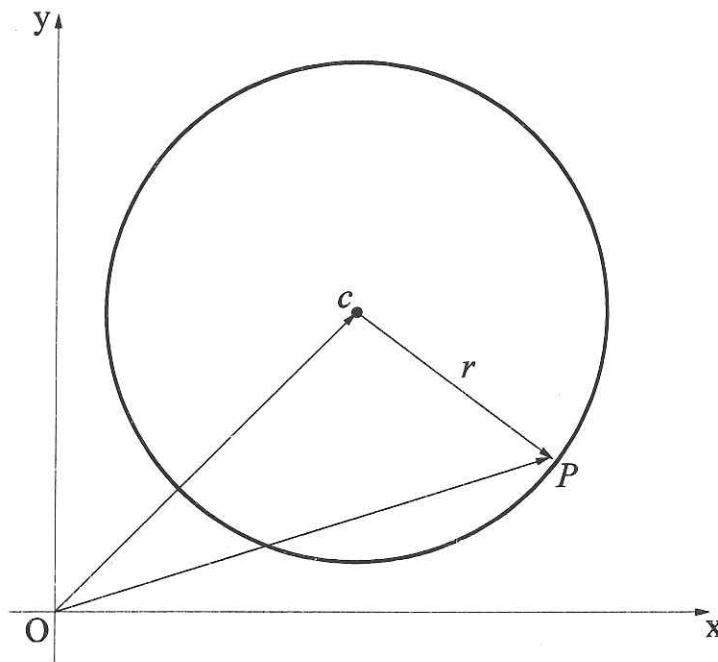


Figura III.1.2

Lo anterior, podemos enmarcarlo en el siguiente esquema general:

Dado que el origen  $O$  de cualquier sistema de coordenadas puede elegirse arbitrariamente, supongamos entonces que en vez de elegir  $S \equiv [O, e_1, e_2]$ ,

consideramos el siguiente  $S' \equiv [O', e'_1, e'_2]$ , donde  $O' = c$ ,  $e'_1 \parallel e_1$  y  $e'_2 \parallel e_2$ . Si a un punto genérico de  $E_2$  referido a este nuevo sistema lo simbolizamos  $P'(x', y')$  tendremos entonces que, referida a  $S'$ , la circunferencia con centro en  $O'$  tendrá por ecuación:

$$C': x'^2 + y'^2 = r^2 \quad \text{III.1.5}$$

y su gráfica correspondiente será:

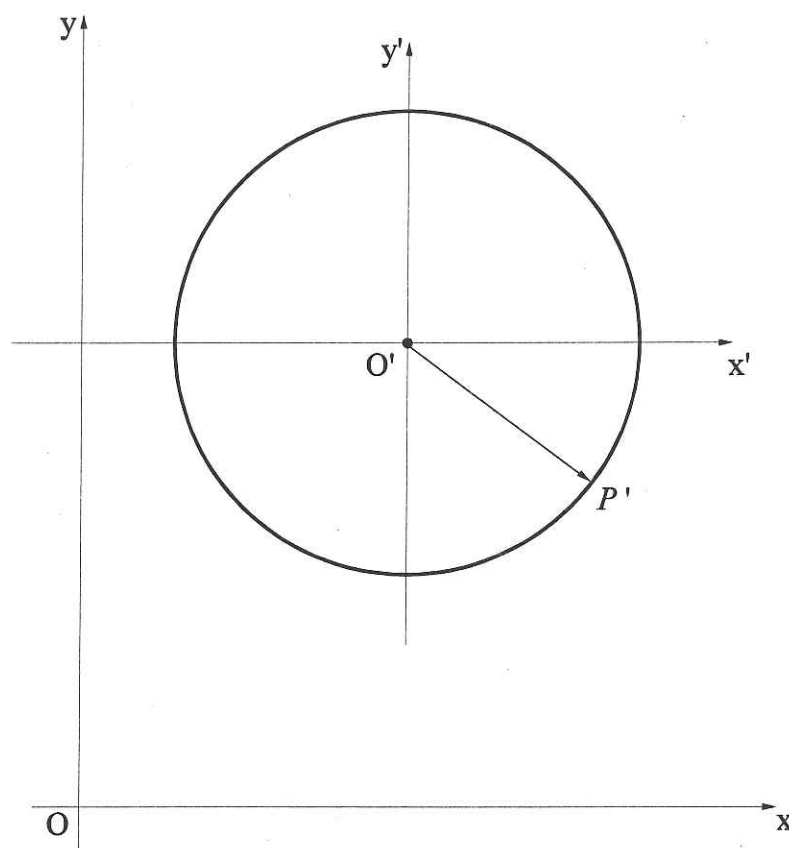


Figura III.1.3

Obsérvese que  $P'$  es también un punto  $P$  del sistema  $S \equiv [O, e_1, e_2]$ , de donde resulta  $P' = [x', y'] \equiv P = [x, y]$ , y cabe entonces preguntar: ¿cómo se relacionan las distintas representaciones, tanto algebraicas como geométricas, de un punto o un conjunto de puntos de  $E_2$ , considerando los sistemas  $S \equiv [O, e_1, e_2]$ , y  $S' \equiv [O', e'_1, e'_2]$ ? La respuesta construiremos a partir de la siguiente gráfica:

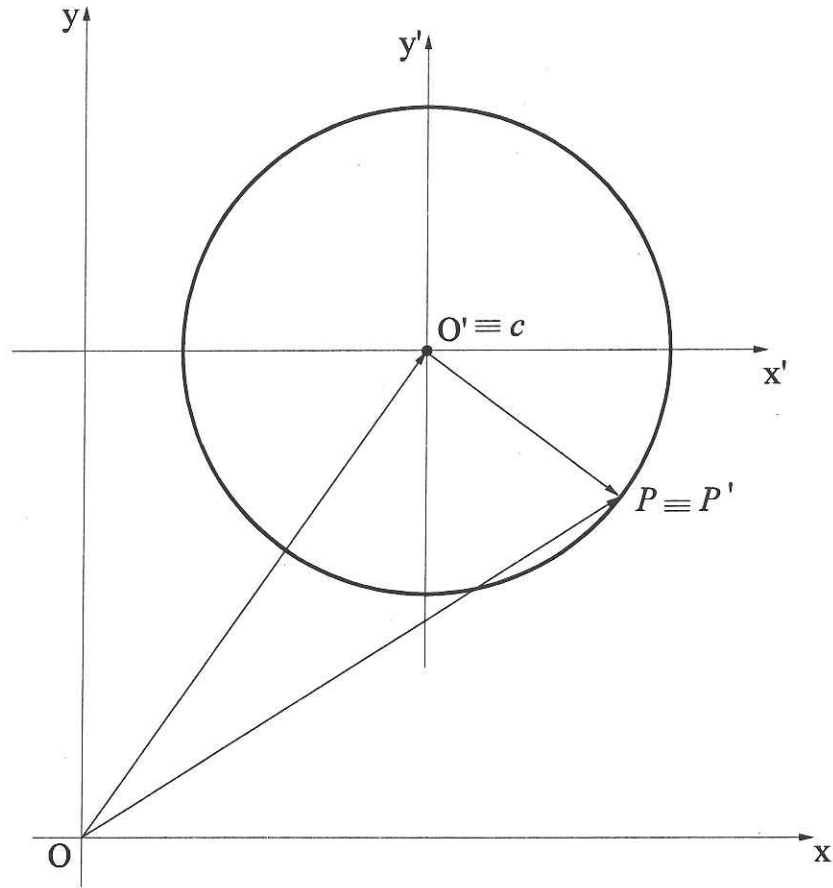


Figura III.1.4

Se tiene que:

$$P = O' + P' \Leftrightarrow$$

$$[x, y] = [h, k] + [x', y'] \Leftrightarrow$$

$$x = x' + h$$

$$y = y' + k$$

III.1.6

o bien:

$$x' = x - h$$

$$y' = y - k$$

III.1.7



Así dadas  $h$  y  $k$ , si conozco las coordenadas del punto en el sistema  $S'$ , usando III.1.6 puedo tener sus coordenadas en el sistema  $S$ , y de igual forma, si conozco las coordenadas en  $S$ , usando III.1.7 puedo obtener sus coordenadas en  $S'$ . En particular, nótese que sustituyendo III.1.7 en la ecuación III.1.4 de nuestra circunferencia, referida a  $S$ , obtenemos la ecuación III.1.5, correspondiente al sistema  $S'$ , lo que es muy importante pues me dice que si tengo una circunferencia con un centro  $c(h, k)$ , cuya ecuación asociada es III.1.4, siempre puedo construir una transformación que la lleve a tener una ecuación del tipo III.1.5, que es la más simple posible para una circunferencia. A continuación presentamos de manera formal estas ideas.

### Traslaciones en $E_2$

Consideremos la transformación:

$$T: E_2^S \rightarrow E_2^{S'}$$

$$P \xrightarrow{T} P'$$

con  $P' = P - c$ ,  $c$  un punto dado, y el superíndice de  $E$  indica qué sistema de referencia se está considerando.  $T$  se conoce como **traslación**, y está dada por las ecuaciones III.1.7.

Análogamente podemos definir la traslación

$$T': E_2^{S'} \rightarrow E_2^S$$

$$P' \xrightarrow{T'} P,$$

dada por las ecuaciones III.1.6.

Nótese que  $T'(T(P)) = T'(T(P')) = P$ .

### Ejemplo III.1

Si una circunferencia está dada por:

$$C: (x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 9, \tag{III.1.8}$$

Determinar la traslación que permita llevarla asociarle una ecuación del tipo III.1.5.

Evidentemente, la traslación buscada está dada por las ecuaciones:

$$x = x' + 4$$

$$y = y' + 2,$$

que permiten reescribir  $C$  como

$$C': x'^2 + y'^2 = 9$$

III.1.9

Inversamente, las ecuaciones

$$x' = x - 4$$

$$y' = y - 2$$

nos permiten llevar  $C'$  en  $C$ .

Gráficamente tenemos:

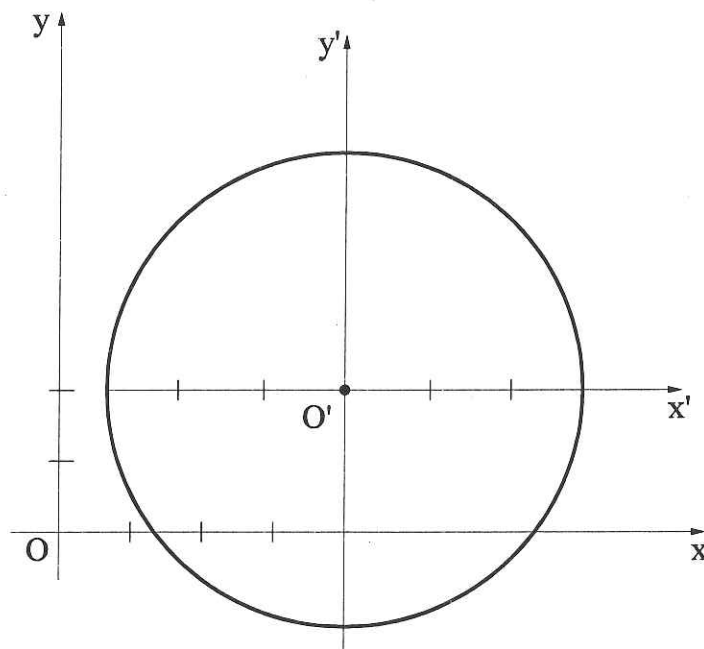


Figura III.1.5

### Tangentes a circunferencias, familias de cuerdas y construcción de diámetros

Dada una circunferencia  $C: (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ , con centro  $c(h, k)$  y radio  $r$ , un resultado conocido (te invitamos a probarlo, amigo lector), es que si  $P_0 \in C$ , entonces la recta  $r$ , tangente a  $C$  en  $P_0$ , tiene la propiedad de ser ortogonal al vector  $(P_0 - c)$ .

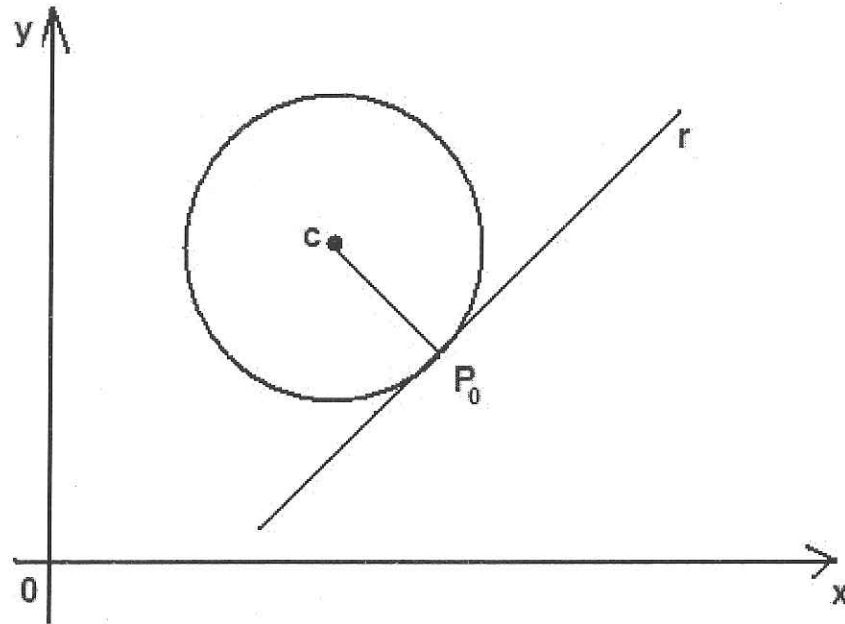


Figura III.1.6

De lo anterior resulta que la ecuación de  $r$  se puede escribir como:

$$r: (P_0 - c) \cdot (P - P_0) = 0 \quad \text{III.1.10}$$

Veamos un ejemplo:

Construir la ecuación de la recta tangente a la circunferencia  $C: (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 1$ , en el punto  $P_0(3, -1)$ .

Solución. Dado que  $c(3, -2)$ , sustituyendo en III.1.10 resulta:  $r: (0, 1) \cdot (x - 3, y + 1) = 0$   
 $\Leftrightarrow r: y + 1 = 0$ .

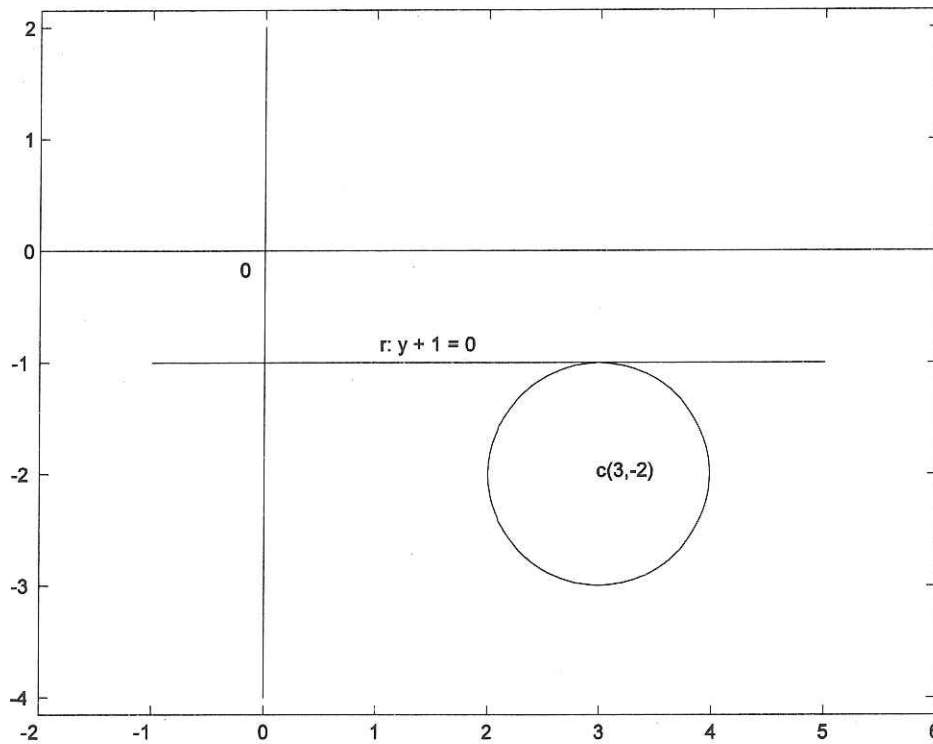
Un programa en Matlab para construir las gráficas de  $C$  y  $r$  es el siguiente

```
%%%%%%%%%%
% Programa para dibujar la circunferencia con centro c(3,-2),
% radio 1, y la recta r: y+1=0
%%%%%%%%%%
clear all
%
fplot('sqrt(1-(x-3)^2)-2',[2 4])
```

```

hold on
fplot('-sqrt(1-(x-3)^2)-2',[2 4])
fplot('-1',[-1 5])
plot([0 0],[-4 2])
plot([-2 6],[0 0])
axis equal
gtext('0')
gtext('c(3,-2)')
gtext('r: y + 1 = 0')
print -deps capv_2

```



Ahora, si se tiene que  $d(P_0, c) > r$ , esto es, si  $P_0$  está en el exterior de la circunferencia, entonces habrá dos rectas,  $r_1$  y  $r_2$ , tangentes a  $C$  que pasan por  $P_0$ , y deben satisfacer que  $d(r_1, c) = d(r_2, c) = r$ .

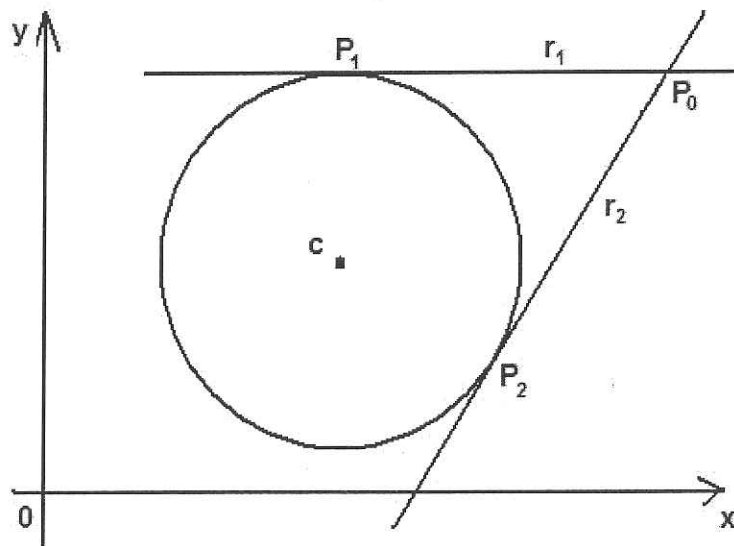


Figura III.1.7

La estrategia que adoptaremos para construir las tangentes a  $C$ , tiene como sustento:

- Que  $r_1$  y  $r_2$  son ortogonales al radio en los puntos de tangencia  $P_1$  y  $P_2$ .
- Que  $d(P_1, c) = d(P_2, c) = r$ , donde  $r$  es el radio de  $C$ .

Veamos ahora la siguiente gráfica:

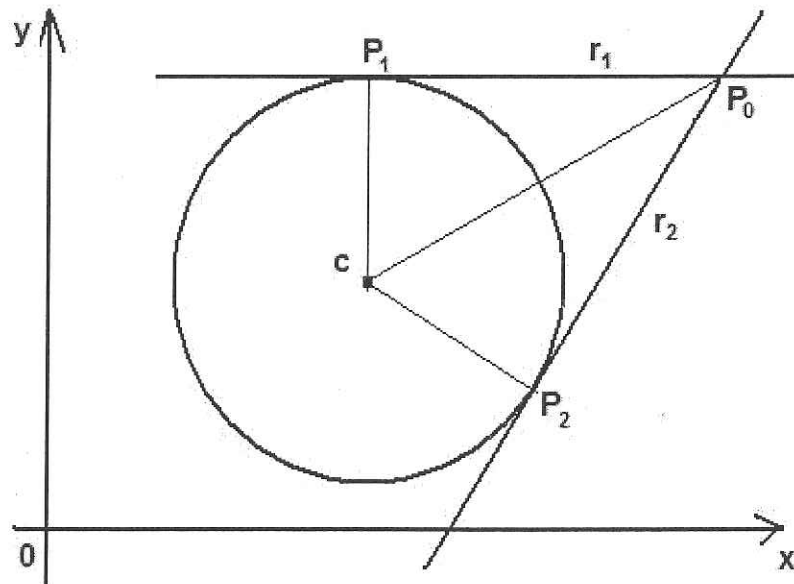


Figura III.1.8

Tenemos que se forman los triángulos semejantes  $P_0P_1c$  y  $P_0P_2c$ , cuyos lados  $P_1c = P_2c = r$  y  $P_0c$  son conocidos. Si hacemos  $P_0c = a$  y  $P_0P_1 = P_0P_2 = b$ , tenemos que

$$a^2 = r^2 + b^2 \Leftrightarrow b = \sqrt{a^2 - r^2}. \quad \text{III.1.11}$$

Hagamos ahora:  $P(x, y)$ ,  $P_0(x_0, y_0)$ ,  $P_1(x_1, y_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2)$ , y supongamos que  $c(0,0)$ .

Entonces

$$C: x^2 + y^2 = r^2. \quad \text{III.1.12}$$

Llamemos ahora  $P_t(x_t, y_t)$  a cualquiera de los puntos de tangencia. Como  $P_t \in C$  se tiene que

$$x_t^2 + y_t^2 = r^2 \quad \text{III.1.13}$$

Además,

$$d(P_0, P_t) = \sqrt{(x_t - x_0)^2 + (y_t - y_0)^2} = b \Leftrightarrow$$

$$(x_t - x_0)^2 + (y_t - y_0)^2 = b^2 \Leftrightarrow$$

$$x_t^2 - 2x_0x_t + x_0^2 + y_t^2 - 2y_0y_t + y_0^2 = b^2,$$

y como  $x_t^2 + y_t^2 = r^2$ , entonces  $-2x_0x_t - 2y_0y_t = b^2 - x_0^2 - y_0^2 - r^2$ , y dado que  $x_0$  y  $y_0$  son conocidos, si hacemos  $-2x_0 = A$ ,  $-2y_0 = B$  y  $b^2 - x_0^2 - y_0^2 - r^2 = C$ , resulta:

$$Ax_t + By_t = C \Leftrightarrow$$

$$y_t = (C - Ax_t)/B. \quad \text{III.1.14}$$

Sustituyendo  $y = y_t$  en la ecuación III.1.12 y despejando  $x$  se tienen dos valores que llamaremos  $x_1$  y  $x_2$ . Al sustituir estos en III.1.14 se obtienen  $y_1$  y  $y_2$ , y en consecuencia  $P_1(x_1, y_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2)$ , que son los puntos de tangencia de las rectas  $r_1$  y  $r_2$  con  $C$ , que pasan por  $P_0$ , de donde, resulta que las ecuaciones de las rectas tangentes a  $C$  son:

$$r_1: n_1. (P - P_0) \equiv (P_1 - c). (P - P_0)$$

y

$$\text{III.1.15}$$

$$r_2: n_2. (P - P_0) \equiv (P_2 - c). (P - P_0).$$

Veamos un ejemplo.

Construir las ecuaciones de las rectas tangentes a la circunferencia dada por

$$C: x^2 + y^2 = 9,$$

III.1.16

que pasan por  $P_0(4, 3)$ .

Supondremos que los puntos de tangencia son  $P_1(x_1, y_1)$  y  $P_2(x_2, y_2)$ , y sea  $P_t(x_t, y_t)$  cualquiera de ellos. Entonces  $d(P_0, c) = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$ , y como  $r = 3$ , resulta –usando III.1.11– que

$$d(P_0, P_t) = \sqrt{(x_t - 4)^2 + (y_t - 3)^2} = 4.$$

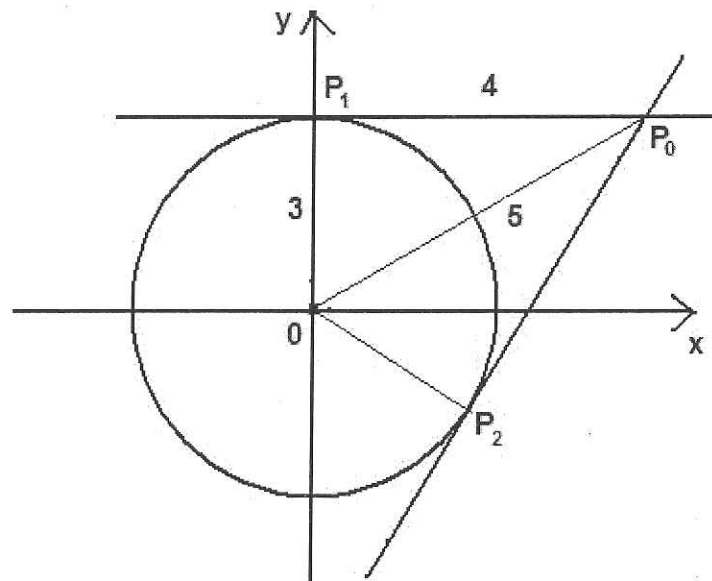


Figura III.1.9

Ahora,

$$d(P_0, P_t) = \sqrt{(x_t - 4)^2 + (y_t - 3)^2} = 4 \Leftrightarrow$$

$$x_t^2 - 8x_t + 16 + y_t^2 - 6y_t + 9 = 16 \Leftrightarrow$$

$$x_t^2 + y_t^2 - 8x_t - 6y_t = -9$$

y como  $x_t^2 + y_t^2 = 9$  resulta:

$$8x_t + 6y_t = 18 \Leftrightarrow 4x_t + 3y_t = 9 \Leftrightarrow$$

$$y_t = \frac{9-4x_t}{3}$$

III.1.17

Sustituyendo III.1.17 en III.1.16 se tiene:

$$9x_t^2 + (9 - 4x_t)^2 = 81 \Leftrightarrow x_t(25x_t - 72) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x_1 = 0 \text{ y } x_2 = \frac{72}{25}.$$

Con estos valores, usando III.1.17 se llega a

$$P_1(0, 3) \text{ y } P_2\left(\frac{72}{25}, -\frac{21}{25}\right).$$

Usando ahora III.1.15 tenemos:

$$r_1: (0, 3) \cdot (x - 4, y - 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$r_1: 3y - 9 = 0$$

y

$$r_2: \left(\frac{72}{25}, -\frac{21}{25}\right) \cdot (x - 4, y - 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$r_2: \frac{72}{25}x - \frac{288}{25} - \frac{21}{25}y + \frac{63}{25} = 0 \Leftrightarrow$$

$$r_2: 72x - 21y - 225 = 0$$

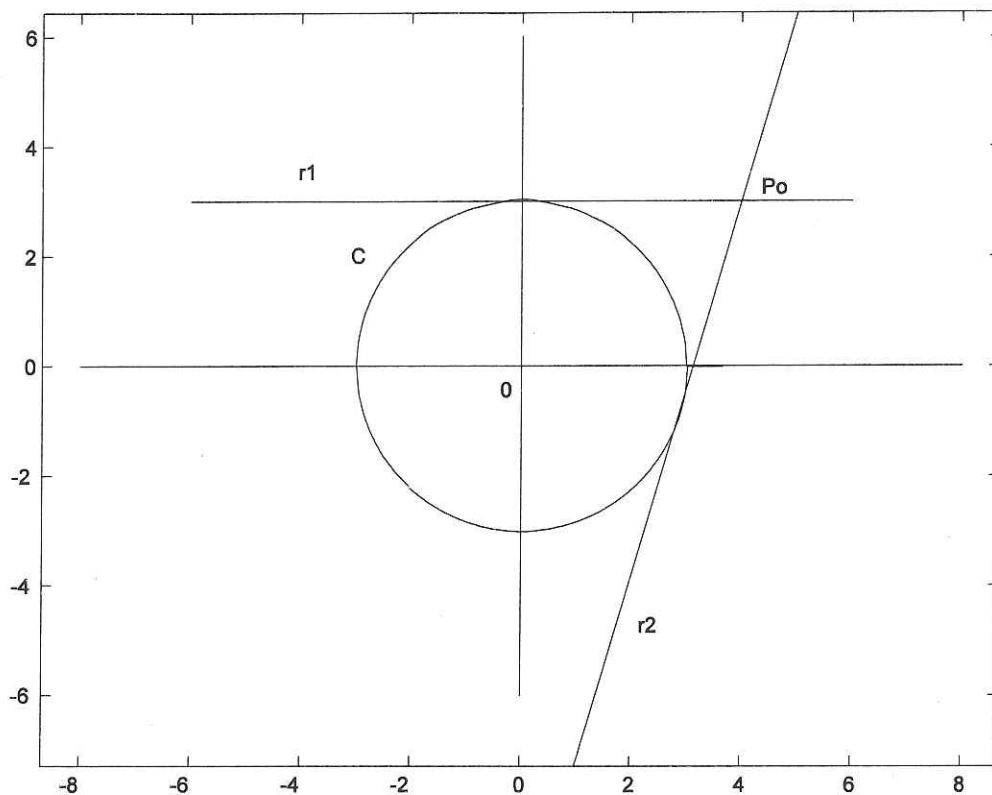
A continuación damos un programa que produce las gráficas de ,  $r_1$  y  $r_2$ .

```

%%%%%%%%%%%%%%
% Programa para construir la gráfica de la circunferencia
% y las rectas tangentes del ejemplo anterior
%%%%%%%%%%%%%%
clear all
%
fplot('sqrt(9-x^2)',[-6 6])
hold on
fplot('-sqrt(9-x^2)',[-6 6])
plot([0 0],[-6 6])
plot([-8 8],[0 0])
fplot('3',[-6 6])
fplot('(225-72*x)/(-21)',[1 5])
axis equal
gtext('r1')
gtext('r2')
gtext('C')
gtext('Po')
gtext('O')
print -deps capv_3

```





**Una pregunta:** ¿qué hacer si el centro de  $C$  no es el origen? En este caso, una posible estrategia es **usar traslaciones**. Para ilustrar esta propuesta, tomemos

$$C: (x - 6)^2 + (y + 6)^2 = 9 \quad \text{III.1.18}$$

y  $P_0(10, -3)$ .

Tenemos que  $c(6, -6)$ .

Consideraremos ahora las ecuaciones de una traslación  $x = x' + h$ ,  $y = y' + k$ , con  $h = 6, k = -6$ . Aplicando esto a  $C$  y  $P_0$  resulta:

$$C': x'^2 + y'^2 = 9 \quad \text{III.1.19}$$

y  $P'_0(4, 3)$ .

Como se observa, estamos exactamente en el caso de nuestro ejemplo anterior, por lo que las ecuaciones de las tangentes en el sistema  $S'$  son:

$$r'_1: 3y' - 9 = 0$$

y

III.1.20

$$r'_2: 72x' - 21y' - 225 = 0.$$

Si sustituimos ahora las ecuaciones  $x' = x - h$ ,  $y' = y - k$  en III.1.19 y III.1.20, resulta:

$$C: (x - 6)^2 + (y + 6)^2 = 9$$

$$P_0(10, -3), \quad y$$

$$r_1: 3y + 9 = 0$$

$$r_2: 72x - 21y - 783 = 0$$

Volvamos ahora al caso de la tangente a  $C$  en  $P_0$  ilustrado en la figura III.1.6, y consideremos la familia de cuerdas paralelas a  $r$ .

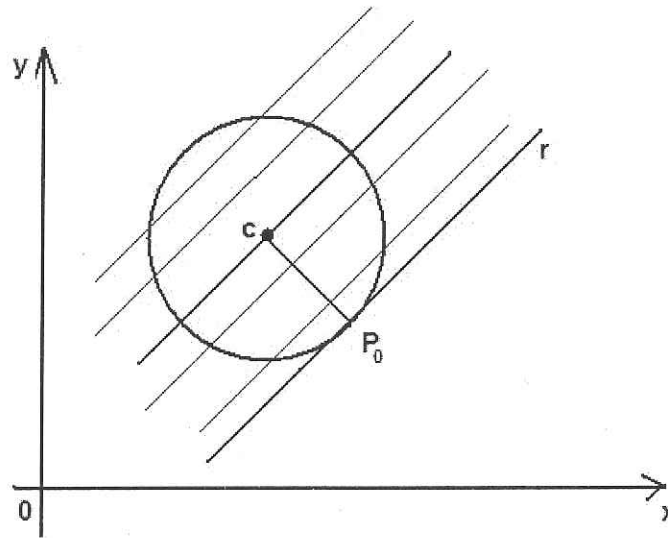


Figura III.1.10

Claramente, hay una cuerda de la familia que pasa por el centro de la circunferencia, y por lo tanto,  $c$  es el punto medio de dicha cuerda. Y si ahora consideramos el diámetro  $d$  de  $C$  que contiene a  $P_0$  y  $c$ , resulta que  $d$  es, como ya sabemos, ortogonal a  $r$ , pero además, resulta que está formado por los puntos medios de las cuerdas de la familia, y esto sin importar qué punto de  $C$  tomemos como  $P_0$ , puesto que todo diámetro es un eje de simetría de  $C$ . Volveremos sobre esto más de una vez en lo que viene.

## Familias de circunferencias

Volvamos a la ecuación

$$C: (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 ,$$

que representa la forma más general de una circunferencia. Se tiene que  $C$  depende de  $h, k$ , y  $r$  de donde, cada terna  $[h, k, r]$  determina una circunferencia (por ejemplo, la terna  $[4, 2, 3]$  nos da III.1.8). Cabe preguntar entonces, ¿qué sucede si, por ejemplo, fijamos  $h$  y  $k$  y hacemos variar  $r$ ? En este caso, lo que resulta es una **familia** de circunferencias, concéntricas, que podemos expresar como:

$$\mathfrak{F} = \{C: (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2, h, k \text{ fijos y } r > 0\}.$$

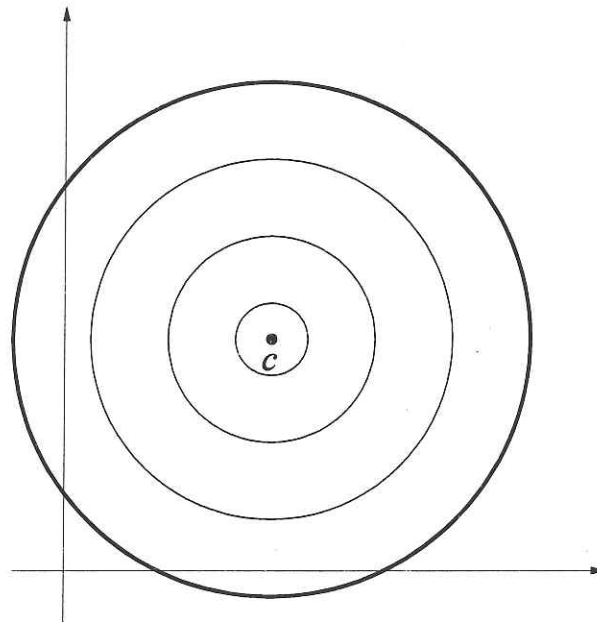


Figura III.1.11

Damos a continuación un programa y una gráfica donde se presentan algunos elementos de esta familia, tomando:

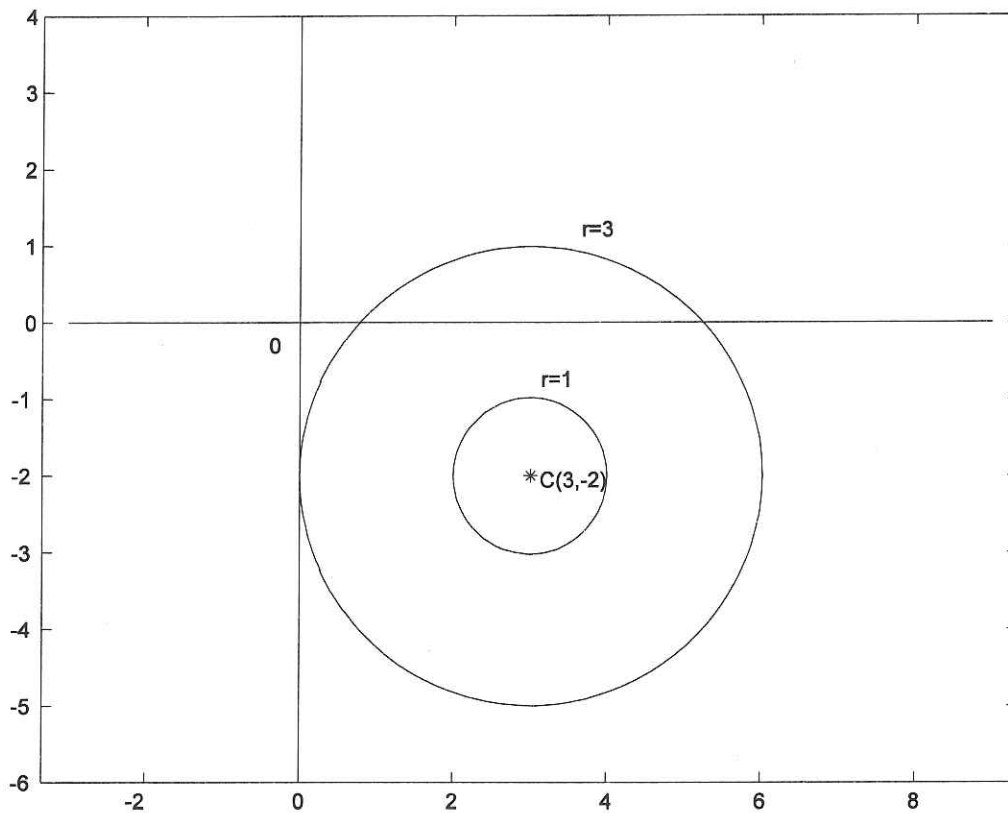
$c(3, -2)$  y  $r = 1, 3$ .

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
% Programa para dibujar circunferencias con centro c(3,-2)  
% y radios r = 1 y r = 3.  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
clear all  
%  
fplot('sqrt(1-(x-3)^2)-2',[2 4])  
hold on
```

```

fplot('-sqrt(1-(x-3)^2)-2',[2 4])
fplot('sqrt(9-(x-3)^2)-2',[0 6],'r')
fplot('-sqrt(9-(x-3)^2)-2',[0 6],'r')
plot(3,-2,'*')
plot([0 0],[-6 4])
plot([-3 9],[0 0])
gtext('C(3,-2)')
gtext('r=1');gtext('r=3')
axis equal
gtext('0')
print -deps capv_1

```



Si ahora fijamos  $r$  y dejamos libres  $h$  y  $k$  lo que tendremos es una **familia** o "nube" de circunferencias, todas de radio  $r$ , cubriendo  $E_2$ , cuya ecuación es:

$$\mathfrak{F} = \{C: (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2, r \text{ fijo y } h, k \in \mathbb{R}\}.$$

La gráfica correspondiente a este caso la dejamos a la imaginación del lector, y por último, si mantenemos  $r$  fijo y dejamos libres  $h$  y  $k$ , con la condición  $h = k$ , resulta una **familia** cuyos miembros son circunferencias de igual radio y centros sobre la recta  $y = x$ .

Gráficamente:

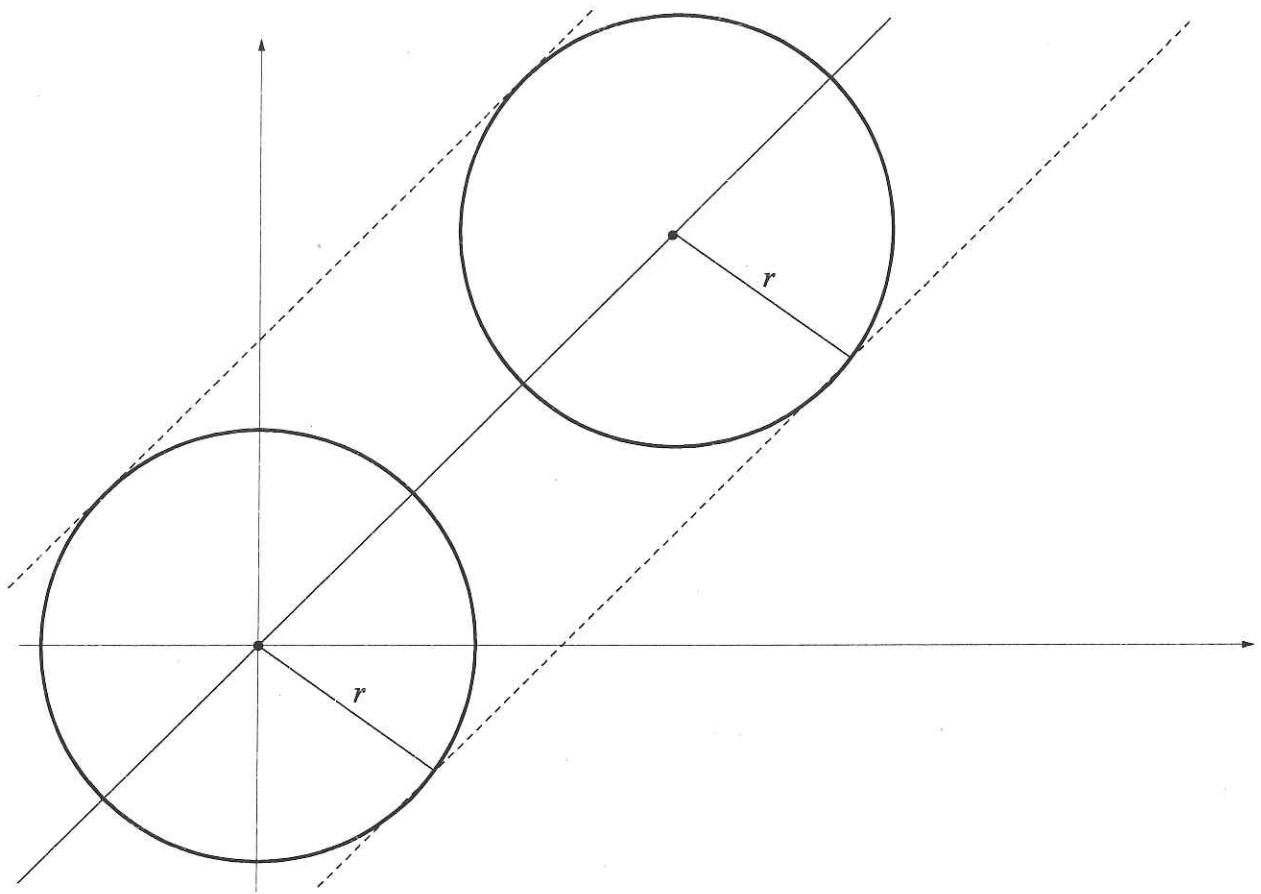


Figura III.1.12

Veamos ahora un programa que permite dibujar dos elementos de esta familia, tomando:

$$r = 2, c_1(3,3), c_2(0,0).$$

```

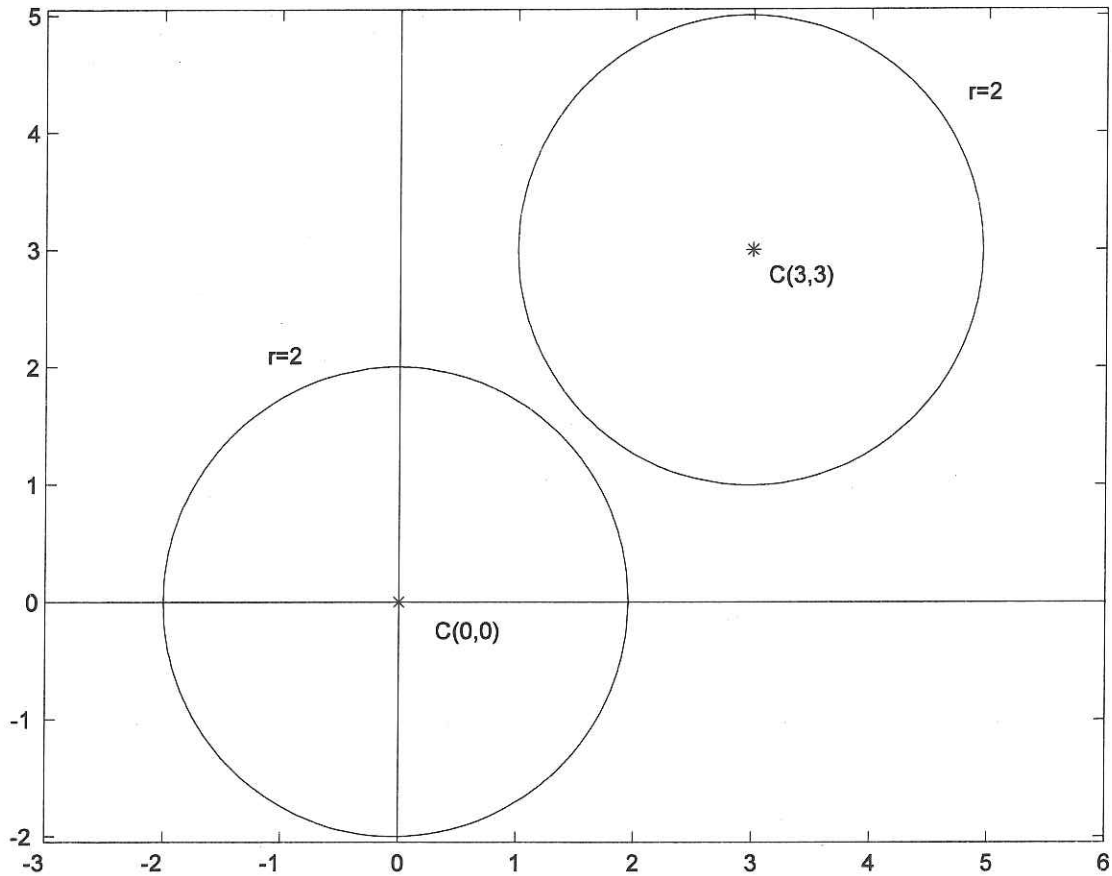
%%%%%%%%%%
% Programa para dibujar circunferencias con radio r = 2
% y centros c(3,3) y c(0,0).
%%%%%%%%%%
clear all
%
fplot('sqrt(4-(x-3)^2)+3',[1 5])
hold on
fplot('-sqrt(4-(x-3)^2)+3',[1 5])
fplot('sqrt(4-(x)^2)',[-2 2],'r')
fplot('-sqrt(4-(x)^2)',[-2 2],'r')
plot(3,3,'*')
plot(0,0,'*')
plot([0 0],[-2 5])

```

```

plot([-3 6],[0 0])
axis equal
gtext('C(0,0)')
gtext('r=2');gtext('r=2')
gtext('C(3,3)')
print -deps capv_4

```



La ecuación correspondiente es:

$$\mathfrak{F} = \{C: (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2, r \text{ fijo}, h, k \in \mathbb{R}\}.$$

Dejemos por ahora el estudio de estas curvas prometiendo volver a ocuparnos de ellas más de una vez en lo que vendrá, y mientras tanto, te invitamos amigo lector a imaginar nuevas familias, a construir sus ecuaciones y acompañarnos a conocer otra familia igualmente interesante.

## Ejercicios

- 1) Encuentra las ecuaciones de las circunferencias que cumplen las condiciones que se indican. En cada caso haz un dibujo ilustrativo, usando papel y lápiz y también Matlab.
  - a) Centro  $c(2, -3)$  y tangente al eje  $y$ .
  - b) De radio 4 y tangente a ambos ejes coordenados.
  - c) Un diámetro es el segmento dado por  $P_0(2, 3)$  y  $P_1(4, -5)$ .
  - d) Que pase por los puntos  $P_0(-4, 1)$ ,  $P_1(3, 0)$  y  $P_2(5, 4)$ .
  - e) Que pase por  $P_0(11, 1)$  y  $P_1(3, -3)$  y que sea tangente a la recta  $r: 3x + 4y + 13 = 0$ .
  - f) Tiene su centro sobre la recta  $r: 2x - y - 10 = 0$  y pasa por  $P_0(1, 3)$  y  $P_1(5, -3)$ .
- 2) Construye las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto  $P_0(6, -4)$ , tangente(s) a la circunferencia:  $C: x^2 + y^2 - 36 = 0$ .
- 3) Encuentra la ecuación de la circunferencia con centro en  $P_0(5, 4)$ , tangente a la recta  $r: x + y = 3$ .
- 4) Encuentra la ecuación de la circunferencia cuyo centro es  $c$  y es tangente a la recta  $r$ :
  - a)  $c(3,4)$ ,  $r: x = 8$
  - b)  $c(1, -5)$ ,  $r: x + y = 5$
- 5) Considera la circunferencia que pasa por los puntos  $P_0(0, 4)$ ,  $P_1(0, 0)$  y  $P_2(4, 0)$ . Después:
  - a) Construye su ecuación
  - b) Calcula las intersecciones de la circunferencia con la recta  $r_1: x + y - 1 = 0$
  - c) Encuentra la ecuación de la recta  $r_2$  tangente a la circunferencia en el punto  $P_0(0, 4)$
  - d) Prueba que  $r_1 \perp r_2$
- 6) Construye las ecuaciones de todas las rectas con pendiente  $\frac{3}{2}$ , que son tangentes a  $C: x^2 + y^2 = 13$

- 7) Da la ecuación  $\mathcal{C}$  de una circunferencia con centro fuera del origen, y un punto  $P_0$  exterior a  $\mathcal{C}$ . Construye entonces las ecuaciones de las rectas  $r_{t1}$  y  $r_{t2}$  tangentes a  $\mathcal{C}$  que pasan por  $P_0$ , y las rectas conjugadas  $\overline{r_{t1}}$  y  $\overline{r_{t2}}$ ; formadas a partir de los puntos medios de las cuerdas paralelas a  $r_{t1}$  y  $r_{t2}$ .

### III.2 Las cónicas

Existen distintos enfoques en torno al tema de esta sección; de entre ellos, hemos elegido el que parte de una concepción general para después derivar hacia los casos particulares. Además, continuaremos haciendo uso de la idea de **lugar geométrico**, que introdujimos en la sección anterior.

**Definición III.2.1.** Dada una recta  $r$  y un punto  $F \notin r$ , una cónica es el **lugar geométrico** de los puntos  $P$ , tales que

$$\frac{d(P,F)}{d(P,r)} = e,$$

donde  $e > 0$  es una constante,  $F$  se llama foco,  $r$  directriz y  $e$  excentricidad. Si  $e = 1$  la cónica se llama parábola, si  $e < 1$  elipse y si  $e > 1$ , hipérbola.

Pasemos ahora a construir las ecuaciones de estas curvas en su forma más simple.

#### III.2.1 La parábola ( $e = 1$ )

Como la idea es llegar a la forma más simple de la ecuación correspondiente, tomemos:

$$1) \quad r: x = -c \text{ y } F(c, 0), \quad c > 0.$$

De acuerdo a la definición tenemos entonces que los puntos  $P(x, y)$  de la parábola deben satisfacer:

$$\frac{d(P,F)}{d(P,r)} = 1 \Leftrightarrow$$

$$d(P,F) = d(P,r).$$

III.2.1



Nótese que de acuerdo a III.2.1, la parábola puede definirse como el **lugar geométrico** de los puntos que equidistan de  $r$  y  $F$ .

Gráficamente tenemos:

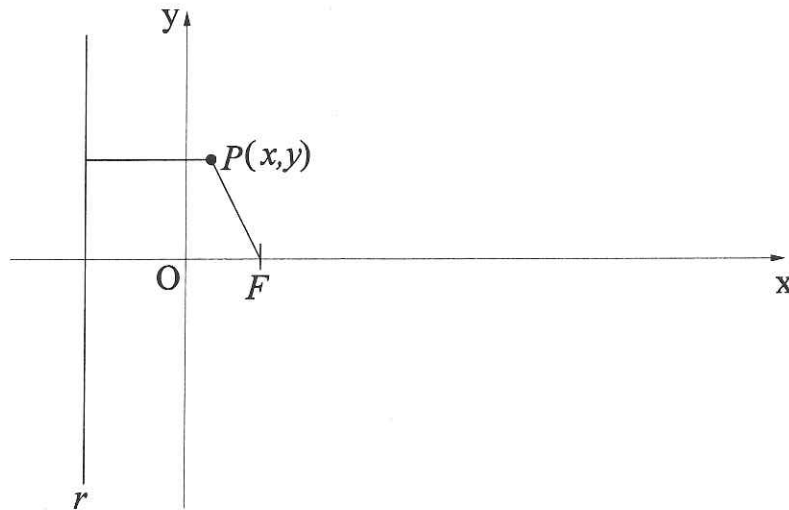


Figura III.2.1

Ahora:

$$d(P,F) = \sqrt{y^2 + (c-x)^2}$$

y

$$d(P,r) = c + x.$$

Usando III.2.1 y elevando al cuadrado resulta:

$$(c+x)^2 = y^2 + (c-x)^2 \Leftrightarrow$$

$$c^2 + 2cx + x^2 = y^2 + c^2 - 2cx + x^2 \Leftrightarrow$$

$$y^2 = 4cx \quad \text{III.2.2}$$

Analícemos un poco esta ecuación. De entrada se tiene que para  $x = 0$  resulta  $y = 0$ , mientras que no existe gráfica para  $x < 0$ , y dado que si sustituimos  $y$  por  $-y$  la ecuación no se altera, se tiene entonces que la gráfica de III.2.2 es simétrica con respecto al eje  $x$  y es del tipo siguiente:

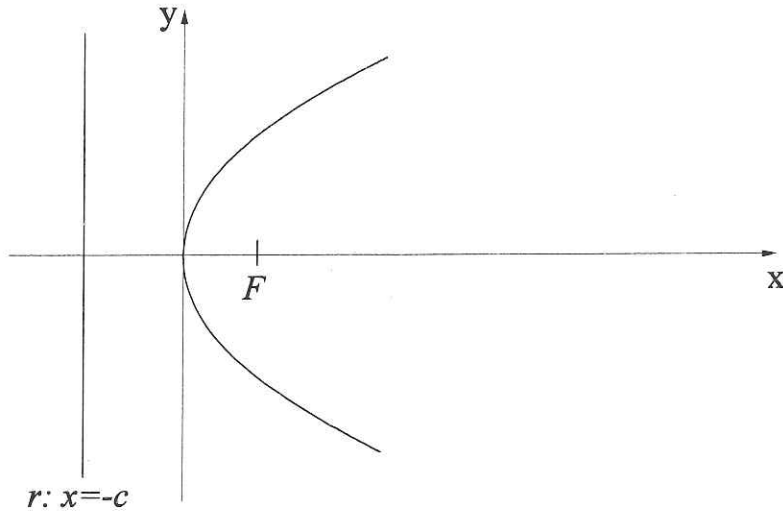


Figura III.2.2

Además, si por el foco pasamos la recta  $r: x = c$ , ésta corta a la parábola en los puntos  $P_1(c, 2c)$  y  $P_2(c, -2c)$ . El segmento  $P_1P_2$  cuya longitud es  $P_1P_2 = 4c$  se conoce como **lado recto** de la parábola, y al punto  $V$  donde la curva corta al eje de simetría, en este caso el eje  $x$ , se le llama vértice, por lo que, para este caso se tiene  $V(0,0)$ .

De forma análoga, si se toma

2)  $r: x = c, F(-c, 0), c > 0$ , se llega a la ecuación:

$$y^2 = -4cx, \quad \text{III.2.3}$$

con  $V(0,0)$  y cuya gráfica es del tipo:

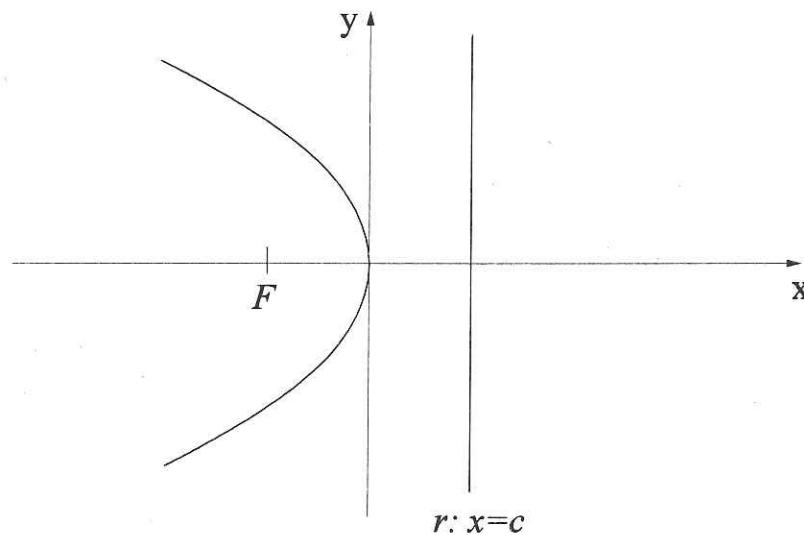


Figura III.2.3

3) Tomando ahora:

$$r: y = -c, \quad F(0, c), \quad c > 0,$$

la ecuación y gráfica correspondientes son:

$$x^2 = 4cy$$

III.2.4

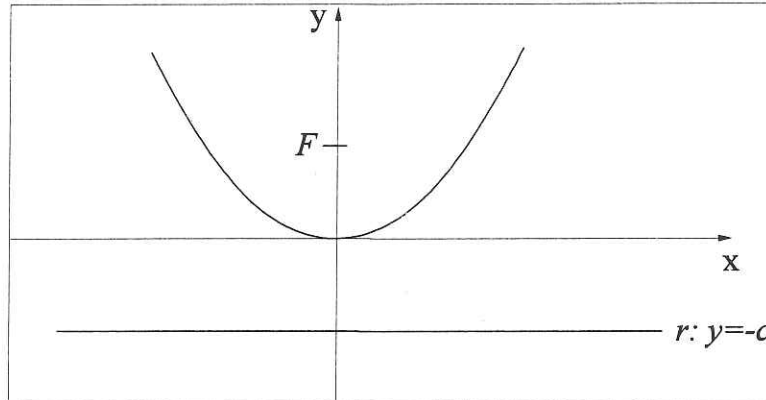


Figura III.2.4

y nuevamente  $V(0,0)$ .

4) Si hacemos

$$r: y = c, \quad F(0, -c), \quad c > 0,$$

se tiene:  $V(0,0)$ ,

$$x^2 = -4cy$$

III.2.5

y la siguiente gráfica:

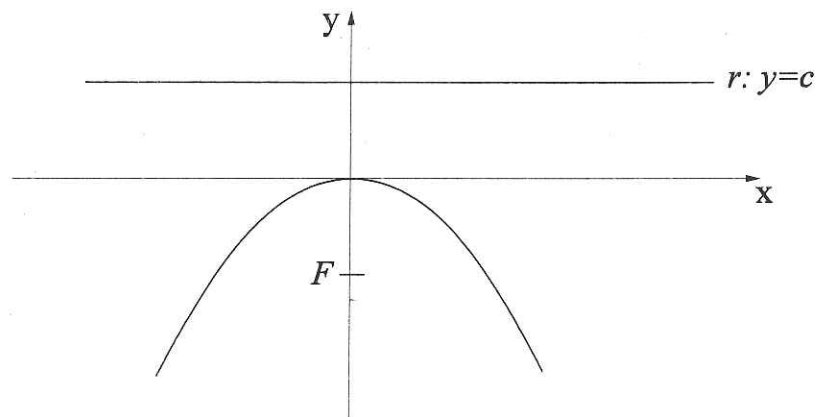


Figura III.2.5

Hagamos una pausa para dibujar, usando Matlab, las gráficas de:

$$y^2 = 8x$$

III.2.6

y

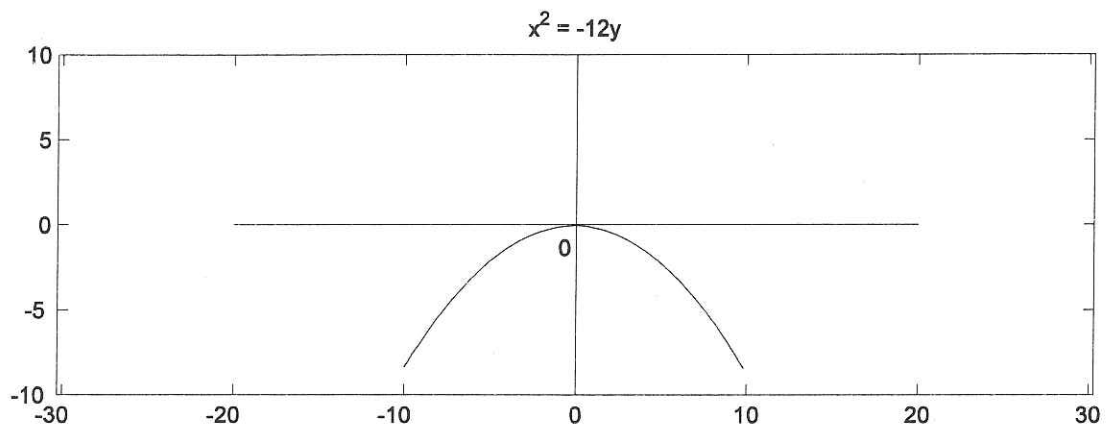
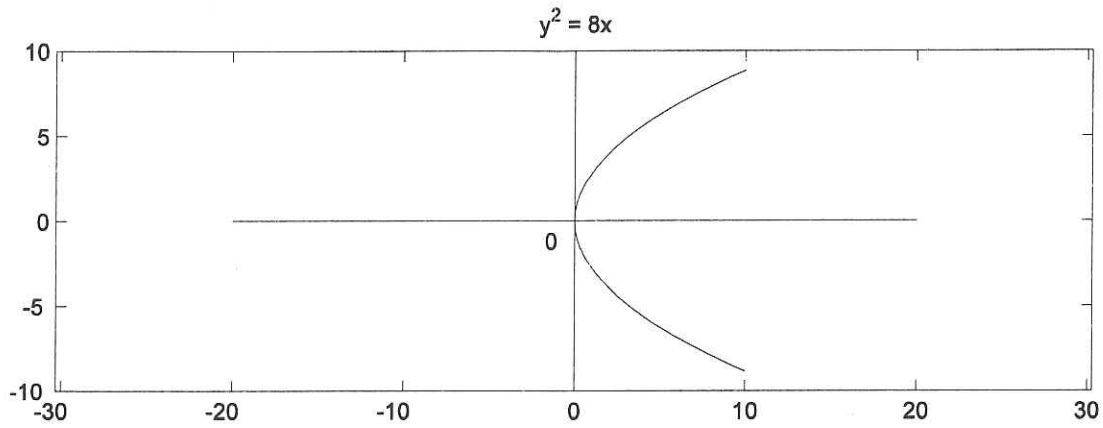
$$x^2 = -12y$$

III.2.7

Obsérvese que de III.2.6 resulta:  $c = 2$  y de III.2.7,  $c = 3$ .

A continuación se presentan los programas y las gráficas correspondientes.

```
%%%%%%%%%%
% Programa para dibujar las gráficas de y^2=8x
% y de x^2=-12y
%%%%%%%%%%
clear all
%
subplot(2,1,1)
fplot('sqrt(8*x)',[0 10])
hold on
fplot('-sqrt(8*x)',[0 10])
plot([0 0],[-10 10])
plot([-20 20],[0 0])
axis equal
gtext('0')
title('y^2 = 8x')
%
subplot(2,1,2)
fplot('(-x^2)/12',[-10 10])
hold on
fplot('(-x^2)/12',[-10 10])
plot([0 0],[-10 10])
plot([-20 20],[0 0])
axis equal
gtext('0')
title('x^2 = -12y')
print -deps capv_5
```



### Una variación

Si nuevamente consideramos el sistema  $S' \equiv [O', e'_1, e'_2]$  visto antes, tendremos que en  $S'$ , la ecuación de la parábola con

$$r': x' = -c, F'(c, 0), \quad c > 0$$

es:

$$y'^2 = 4cx', \quad \text{III.2.8}$$

y usando III.1.7, la ecuación correspondiente considerada desde el sistema

$S \equiv [O, e_1, e_2]$  es:

$$(y - k)^2 = 4c(x - h), \quad \text{III.2.9}$$

con

$$r: x = h - c, \text{ y como } F = O' + F',$$

resulta:

$$F(h + c, k).$$

También, por supuesto,  $V(h, k) \equiv O'$ .

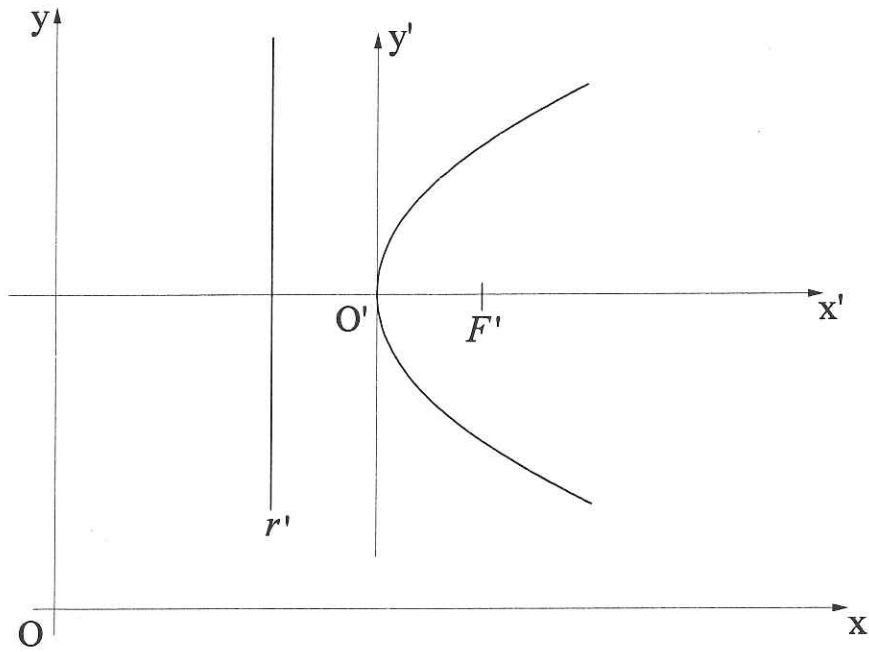


Figura III.2.6

De manera análoga, si

$$r': x' = c, F'(-c, 0), \quad c > 0,$$

se tiene:

$$y'^2 = -4cx' \Leftrightarrow$$

$$(y - k)^2 = -4c(x - h), \quad \text{III.2.10}$$

con

$$V(h, k), F(h - c, k), r: x = c + h,$$

que gráficamente puede verse como:

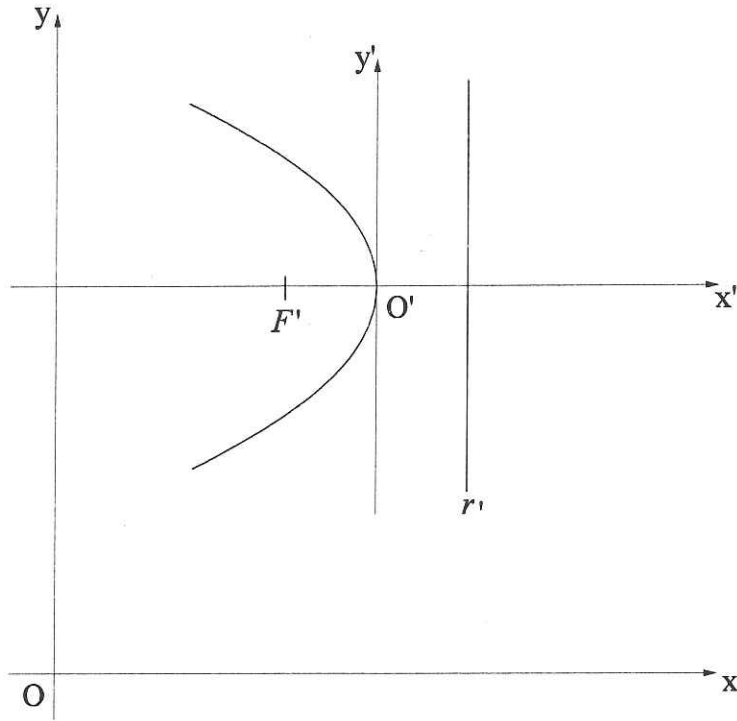


Figura III.2.7

Veamos ahora el caso,

$$x'^2 = 4cy' \Leftrightarrow$$

$$(x - h)^2 = 4c(y - k). \quad \text{III.2.11}$$

Nuevamente,

$$V(h, k) = O',$$

$$r': y' = -c \Leftrightarrow$$

$$r: y = k - c;$$

$$F = O' + F' = (h, k) + (0, c),$$

$$= (h, k + c).$$

La gráfica correspondiente es:

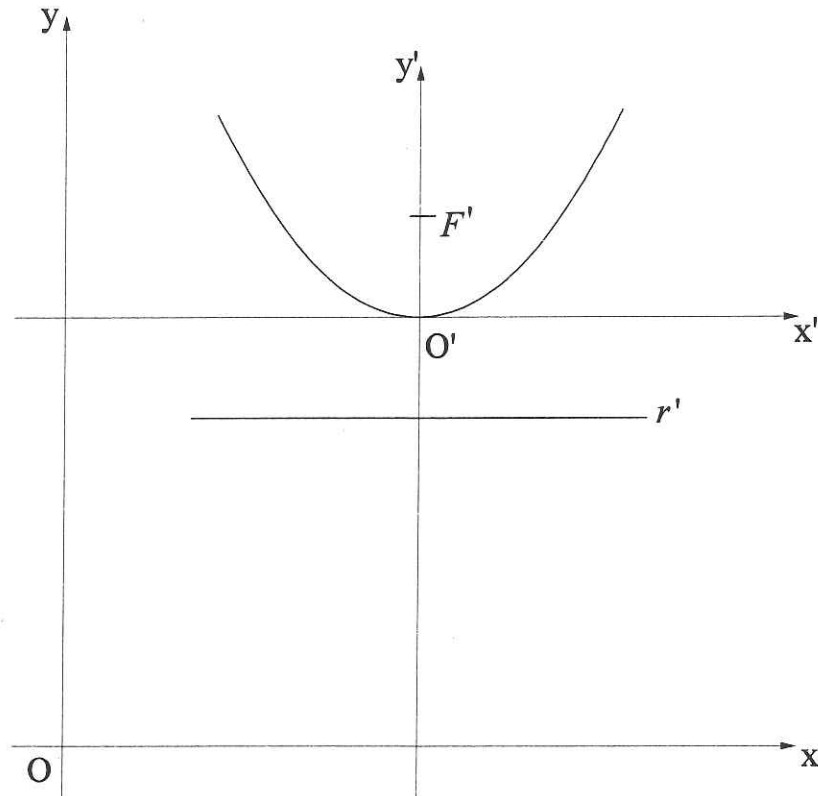


Figura III.2.8

Finalmente, tenemos el caso:

$$x'^2 = -4cy' \Leftrightarrow$$

$$(x - h)^2 = -4c(y - k), \quad \text{III.2.12}$$

donde:

$$V(h, k) = O'$$

$$r': y' = c \Leftrightarrow$$

$$r: y = k + c,$$

$$F = O' + F' = (h, k - c).$$

Gráficamente:



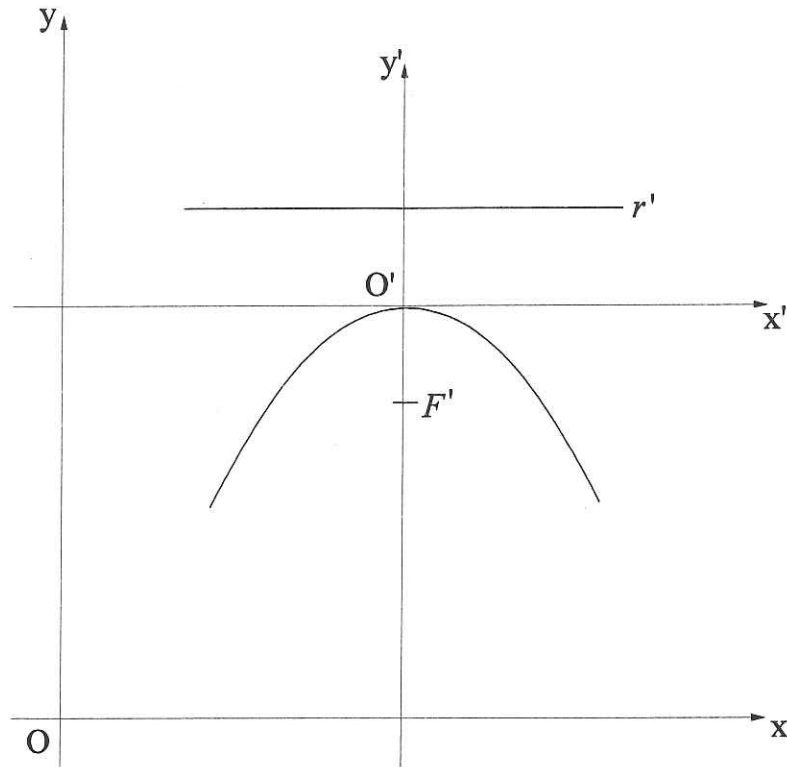


Figura III.2.9

Concluimos esta parte usando Matlab para dibujar las gráficas de:

$$(y - 3)^2 = 8(x - 2) \quad \text{III.2.13}$$

y

$$(x - 2)^2 = -12(y - 3) \quad \text{III.2.14}$$

Obsérvese que nuevamente se tiene:  $c = 2$  para el caso III.2.13 y  $c = 3$  para III.2.14. Además, para ambos casos,  $O'(2,3)$ . Los programas y gráficas correspondientes son:

```

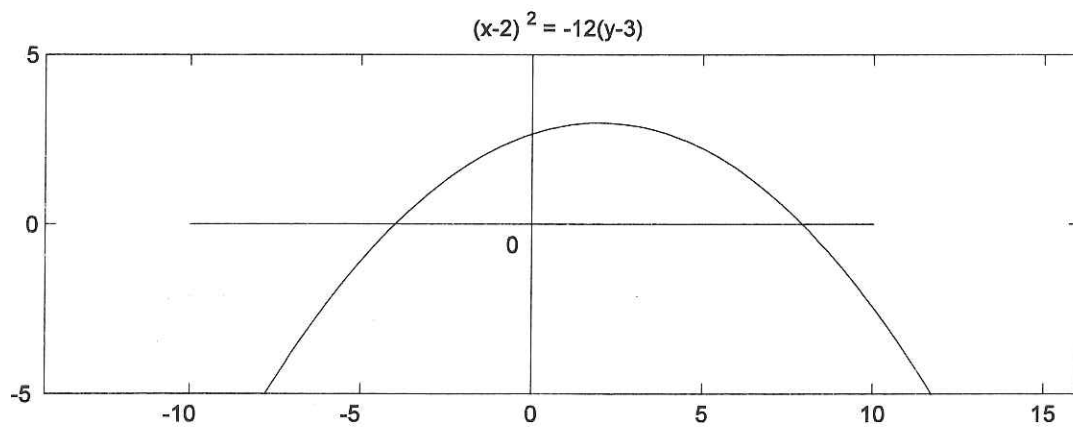
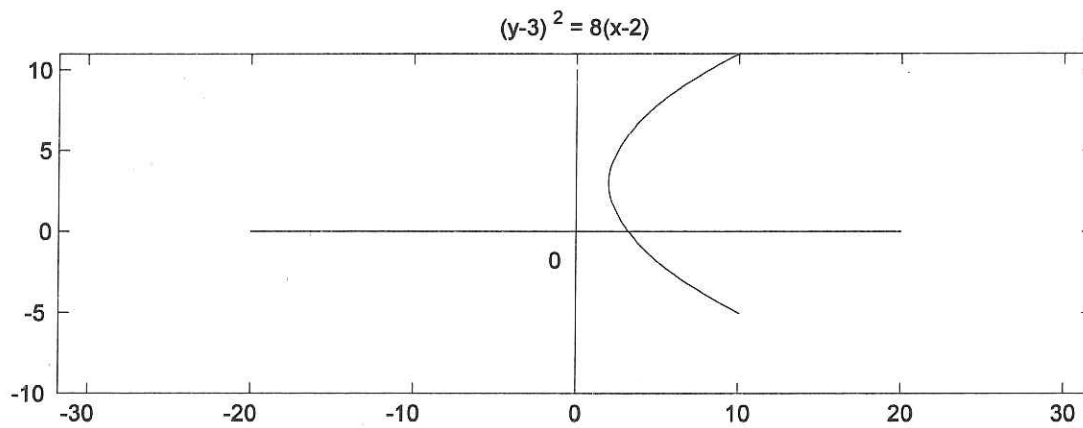
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Programa para dibujar las gráficas de (y-3)^2=8(x-2)
% y de (x-2)^2=-12(y-3)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear all
%
subplot(2,1,1)

```

```

fplot('sqrt(8*(x-2))+3',[2 10])
hold on
fplot('-sqrt(8*(x-2))+3',[2 10])
plot([0 0],[-10 10])
plot([-20 20],[0 0])
axis equal
gtext('0')
title('(y-3)^2 = 8(x-2)')
%
subplot(2,1,2)
fplot('(-(x-2)^2)/12+3',[-10 15 -5 5])
hold on
fplot('(-(x-2)^2)/12+3',[-10 15 -5 5])
plot([0 0],[-10 10])
plot([-10 10],[0 0])
axis equal
gtext('0')
title('(x-2)^2 = -12(y-3)')
print -deps capv_6

```



### III.2.2 La elipse ( $e < 1$ )

Para obtener la forma más simple de esta cónica, tomemos:

$$F(c, 0), c = ae \Rightarrow a > c, V(a, 0) \text{ y } r: x = \frac{a}{e}.$$

Nótese que  $\frac{a}{e} > a$ , ya que  $e < 1$ .

Una primera visión geométrica es:

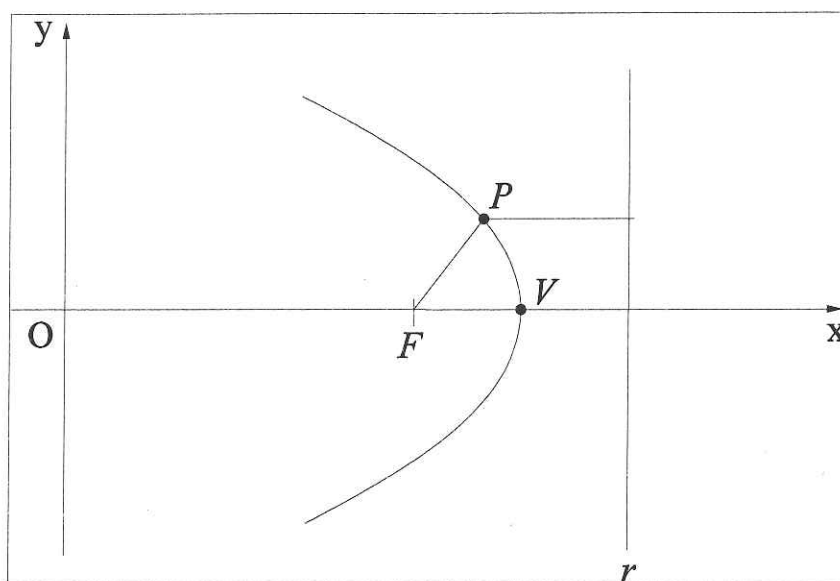


Figura III.2.10

Ahora:

$$\frac{d(P, F)}{d(P, r)} = \frac{\sqrt{(x - ae)^2 + y^2}}{\left| x - \frac{a}{e} \right|} = e \Leftrightarrow$$

$$(x - ae)^2 + y^2 = e^2 \left( x - \frac{a}{e} \right)^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 - 2aex + a^2e^2 = e^2x^2 - 2aex + a^2$$

$$\Leftrightarrow (1 - e^2)x^2 + y^2 = a^2(1 - e^2) \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2}{\frac{a^2(1-e^2)}{1-e^2}} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{III.2.15}$$

donde

$$b^2 = a^2(1 - e^2) > 0, \quad \text{III.2.16}$$

ya que  $e < 1$ , y también:  $b^2 = a^2 - a^2e^2 \Leftrightarrow a^2e^2 = a^2 - b^2 \Leftrightarrow$

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}. \quad \text{III.2.17}$$

Finalmente, de  $a^2e^2 = a^2 - b^2$  y  $c = ae$ , resulta:

$$c^2 = a^2 - b^2 \quad \text{III.2.18}$$

### Observaciones

- 1) Se trata de una ecuación cuya gráfica es simétrica con respecto a ambos ejes coordenados y al origen, puesto que si en III.2.15 se sustituyen  $x$  por  $-x$  y  $y$  por  $-y$ , la ecuación no se altera.
- 2) Si hacemos  $y = 0$ , resulta:

$$x^2 = a^2 \Leftrightarrow$$

$$x = \pm\sqrt{a^2} = \pm a.$$

Análogamente, para  $x = 0$  se tiene:

$$y = \pm b, \text{ y como } b^2 = a^2(1 - e^2),$$

resulta:

$$b = a\sqrt{1 - e^2} < a.$$

En consecuencia, la gráfica correspondiente puede verse como:

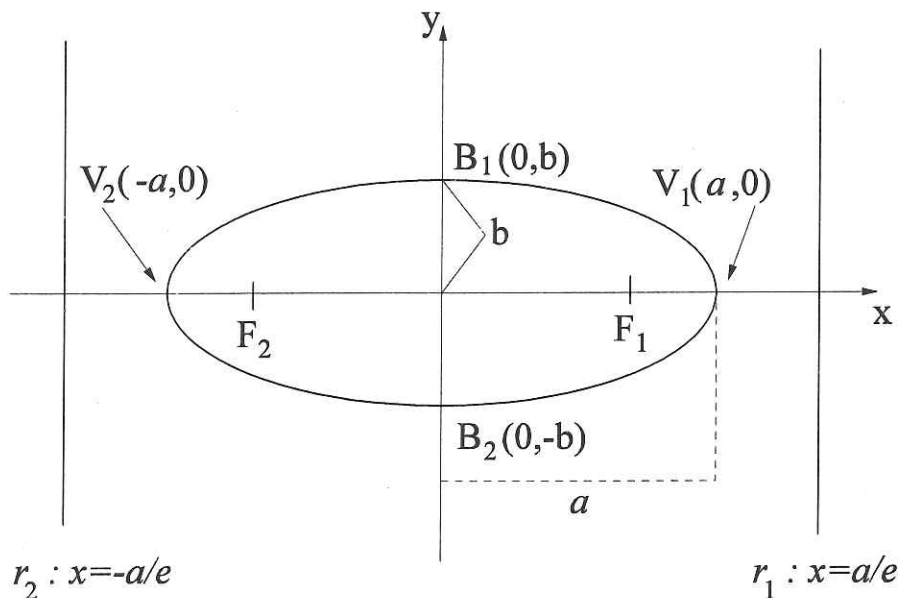


Figura III.2.11

Se trata pues, de una cónica con dos focos, dos vértices y dos directrices. El segmento  $V_2V_1$  se llama eje mayor, y su longitud es  $V_2V_1 = 2a$ . Análogamente, el segmento  $B_1B_2 = 2b$  se conoce como eje menor.

También como  $F_1(c, 0)$ , se tiene que  $F_2(-c, 0)$ , o bien:  $F_1(ae, 0)$ ,  $F_2(-ae, 0)$ .

Además, dado que:  $d(P, r_1) = \left| x - \frac{a}{e} \right|$ , III.2.19

y como  $r_2: x + \frac{a}{e} = 0$ , resulta:  $d(P, r_2) = \left| x + \frac{a}{e} \right|$ . III.2.20

Usando ahora la definición  $\frac{d(P,F)}{d(P,r)} = e \Rightarrow$

$$d(P, F) = ed(P, r). \quad \text{III.2.21}$$

De esta última igualdad y tomando los valores positivos en III.2.18 y III.2.19 resulta:

$$d(P, F_1) = e \left( x - \frac{a}{e} \right) = a - ex \quad \text{III.2.22}$$

y

$$d(P, F_2) = e \left( x + \frac{a}{e} \right) = ex + a, \quad \text{III.2.23}$$

de donde:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a, \quad \text{III.2.24}$$

y como  $P$  es cualquier punto en la **elipse**, resulta que ésta puede definirse como el **lugar geométrico** de los puntos, tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos dados ( $F_1$  y  $F_2$ ), es una constante ( $2a$ ), mayor que  $d(F_1, F_2)$ .

También de la igualdad III.2.18, se obtiene.

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

y esto, relacionado con la figura III.18 permite afirmar que, tomando a  $B_1$  o  $B_2$  como centros, existe una circunferencia de radio  $a$  que pasa por  $F_1$  y  $F_2$ .

Ahora, si nos mantenemos en la idea de obtener la forma más simple de – en este caso- la elipse, otra posibilidad es partir de:

$$f(0, c), \quad c = ae \Rightarrow a > c,$$

$$v(0, a) \text{ y } r: y = \frac{a}{e} \Leftrightarrow y - \frac{a}{e} = 0.$$

Tenemos ahora:

$$\frac{d(P, F)}{d(P, r)} = \frac{\sqrt{x^2 + (y - ae)^2}}{\left| y - \frac{a}{e} \right|} = e \Leftrightarrow$$

$$x^2 + (y - ae)^2 = e^2 \left( y - \frac{a}{e} \right)^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + (1 - e^2)y^2 = a^2(1 - e^2) \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2}{a^2(1-e^2)} + \frac{y^2}{a^2} = 2$$

Y dado que, como vimos antes,  $a^2(1-e^2) > 0$ , y pues  $e < 1$ , haciendo nuevamente  $b^2 = a^2(1-e^2)$ , resulta:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \text{III.2.25}$$

El análisis, análogo al caso anterior y que dejamos como ejercicio a nuestros lectores, nos lleva a la gráfica:

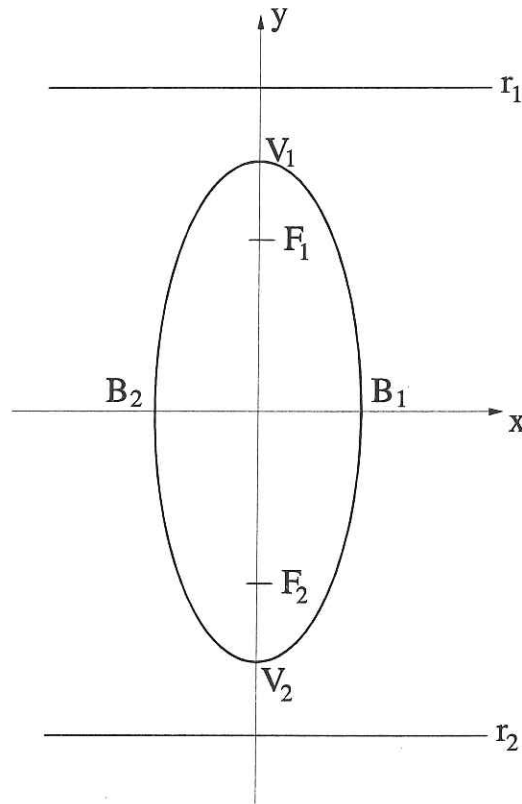


Figura III.2.12

donde:

$$V_1(0, a), V_2(0, -a),$$

$$F_1(0, ea), F_2(0, -ea),$$

$$r_1: y = \frac{a}{e}, \quad r_2: y = -\frac{a}{e}$$

$$B_1(b, 0), \quad B_2(-b, 0).$$

### Una variación

Volvamos a nuestro sistema  $S' \equiv [O', e'_1, e'_2]$ . Tenemos ahora:

#### Primer caso

$$r': x' = \frac{a}{e}, \quad F' (ae, 0).$$

En el sistema  $S'$  la ecuación de la elipse es:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1. \quad \text{III.2.26}$$

y su gráfica se ve como sigue:

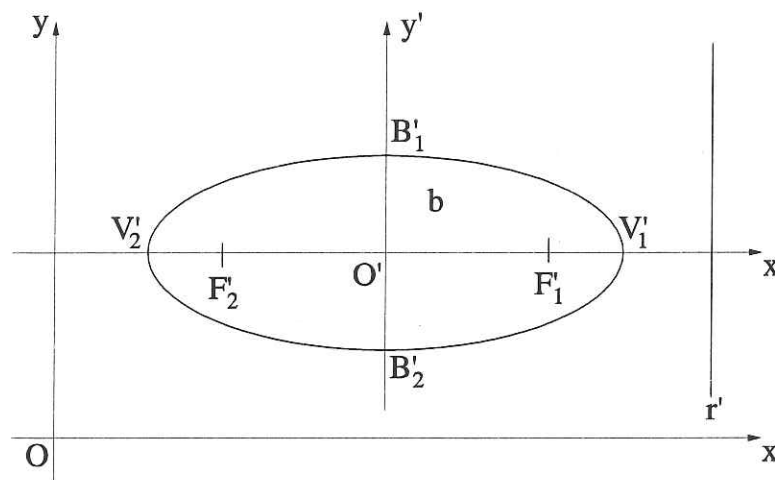


Figura III.2.13

Se tiene, además:

$$V'_1(a, 0), V'_2(-a, 0), B'_1(0, b), B'_2(0, -b)$$



$$F_1'(ae, 0), F_2'(-ae, 0),$$

$$r_1': x' = \frac{a}{e}, \quad r_2': x' = -\frac{a}{e}.$$

Ahora, con respecto al sistema  $S \equiv [0, e_1, e_2]$ , usando III.1.7, resulta:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1, \quad \text{III.2.27}$$

donde:

$$r_1: x - h = \frac{a}{e}, \quad r_2: x - h = -\frac{a}{e},$$

$$F_1 = O' + F_1' = [h, k] + [ae, 0] = [h + ae, 0],$$

$$F_2 = [h - ae, 0], \quad V_1 = O' + V_1' = [h + a, k],$$

$$V_2 = [h - a, k], \quad B_1 = [h, k + b], \quad B_2 = [h, k - b].$$

### Segundo caso

Si partimos de:

$$F'(0, ae), \quad r': y' = \frac{a}{e},$$

la ecuación correspondiente, en el sistema  $S'$  es:

$$\frac{x'^2}{b^2} + \frac{y'^2}{a^2} = 1 \quad \text{III.2.28}$$

y, gráficamente se tiene:

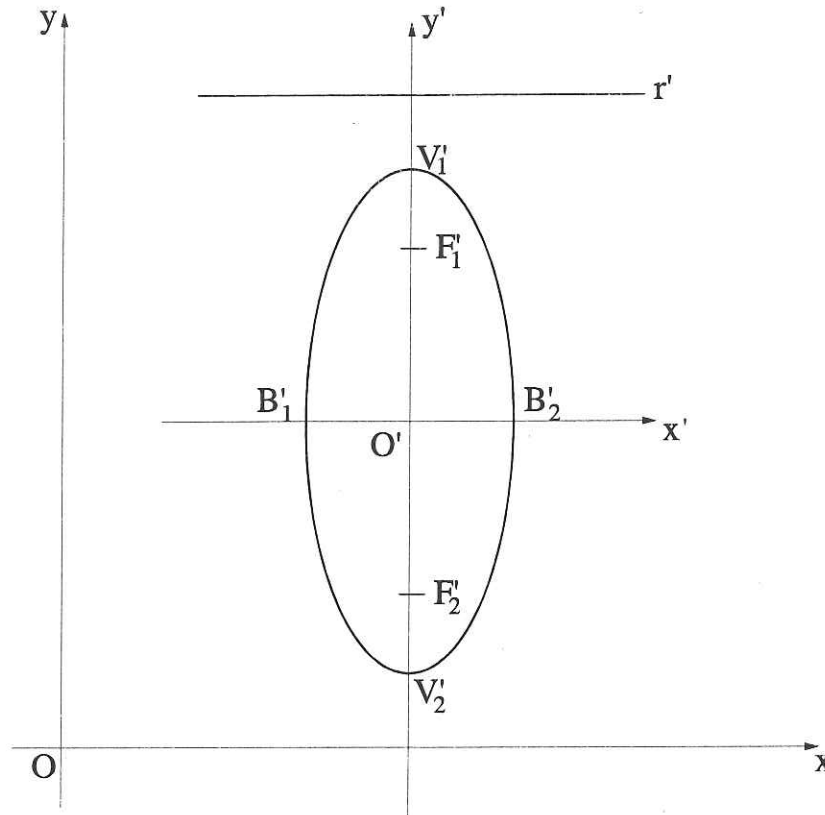


Figura III.2.14

Ahora, aplicando las ecuaciones de traslación III.1.7, tenemos:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1. \quad \text{III.2.29}$$

Además, si

$$V'_1(0, a), V'_2(0, -a), B'_1(b, 0), B'_2(-b, 0), F'_1(0, ae), F'_2(0, -ae),$$

entonces:

$$F_1 = O' + F'_1 = [h, k] + [0, ae] = [h, k + ae],$$

$$F_2 = [h, k - ae], V_1 = O' + V'_1 = [h, k + a],$$

$$V_2 = [h, k - a], B_1 = O' + B'_1 = [h + b, k], \quad B_2 = [h - b, k].$$

### Tangentes, cuerdas y direcciones conjugadas en la elipse

Partiremos de la ecuación

$$E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{III.2.30}$$

y de la ecuación de la recta dada como

$$y = mx + k. \quad \text{III.2.31}$$

Pensemos ahora en la recta  $r_t$  tangente a la elipse en uno de sus vértices (ver figura).

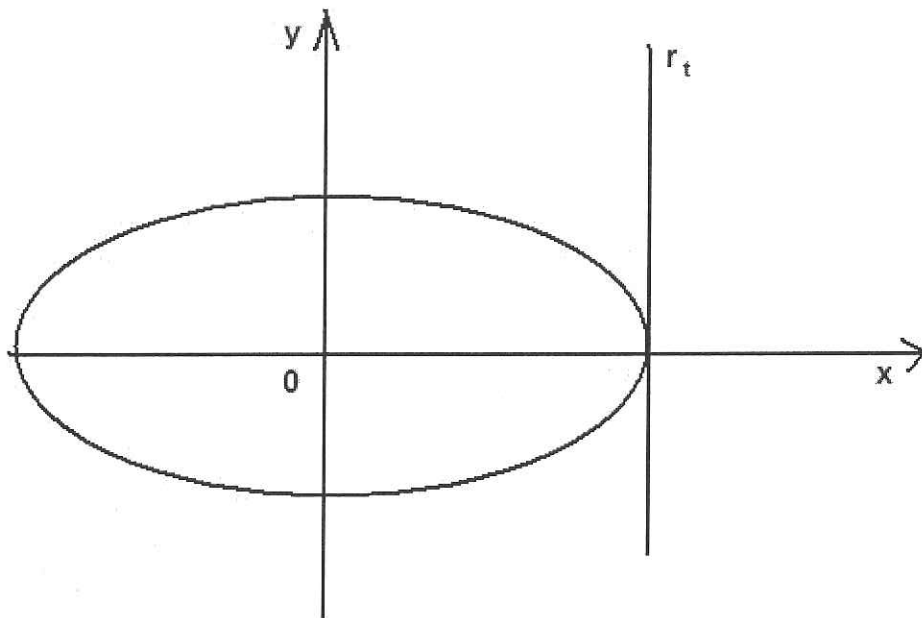


Figura III.2.15

En este caso, se tiene una situación análoga a la que vimos respecto de la circunferencia; esto es, si consideramos la familia de cuerdas  $F_t$  paralelas a  $r_t$ , una de ellas (la correspondiente al eje  $y$ ), pasa por el centro de la elipse, que es también el punto medio de la cuerda, y resulta que el semieje mayor de la elipse está formado por los puntos medios de la familia de cuerdas, y es ortogonal a ellas.

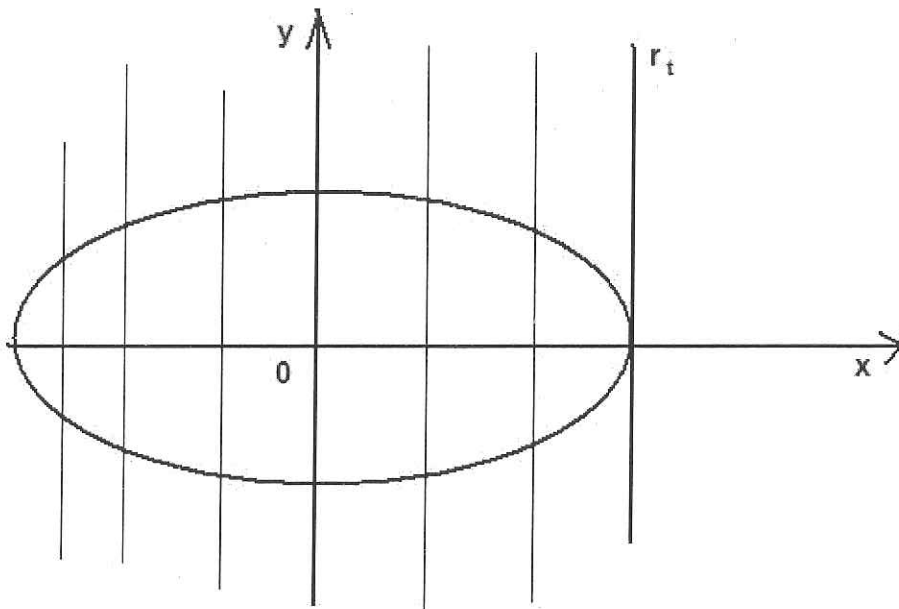


Figura III.2.16

Ahora, si tomamos  $P_0$  en la elipse, tal que no coincida con alguna de las intersecciones de ésta con los ejes coordenados, y consideramos la recta  $r_t$  tangente a  $E$  en  $P_0$  y la familia  $F_t$  de cuerdas paralelas a  $r_t$ , nuevamente habrá una cuerda de la familia que pase por el centro de la elipse, que es justamente el punto medio de dicha cuerda, pues el centro de la elipse coincide con el origen, que es un punto de simetría de  $E$ .

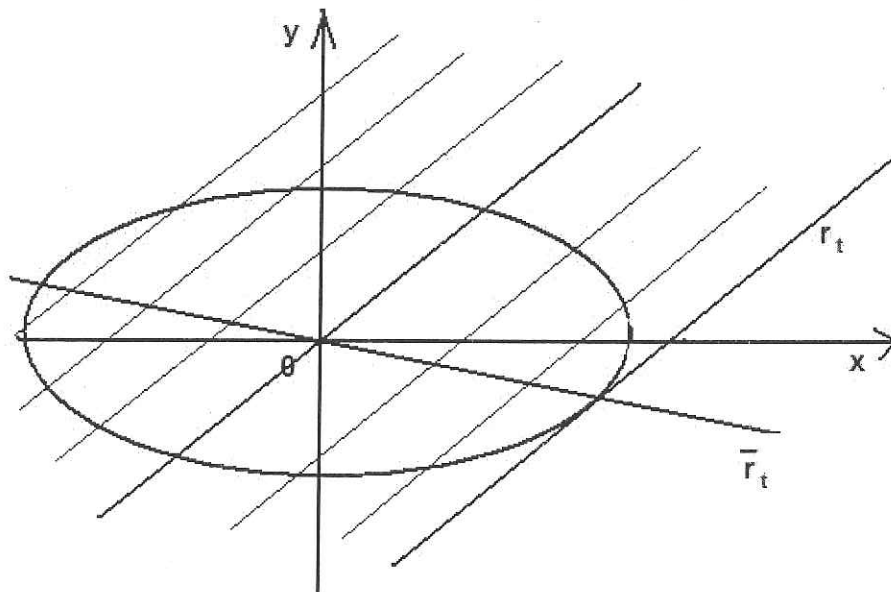


Figura III.2.17

De nuevo se tiene que los puntos medios de las cuerdas están sobre una recta  $\bar{r}_t$  que pasa por el centro de la elipse, sólo que en este caso las direcciones dadas por  $r_t$  y  $\bar{r}_t$  no son ortogonales sino que se conocen como **direcciones conjugadas**.

Para construir  $\bar{r}_t$ , una manera de hacerlo es calcular los puntos medios de dos cuerdas, que pueden obtenerse mediante el procedimiento usual de sustituir la ecuación III.2.31 en III.2.30, de lo que se obtiene:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx + k)^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$b^2x^2 + a^2(mx + k)^2 - a^2b^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$b^2x^2 + a^2(m^2x^2 + 2mkx + k^2) - a^2b^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(b^2 + a^2m^2)x^2 + 2a^2mkx + (a^2k^2 - a^2b^2) = 0$$

De aquí, resolviendo para  $x$ , resulta

$$x = \frac{-2a^2mk \pm \sqrt{4a^4m^2k^2 - 4(b^2 + a^2m^2)(a^2k^2 - a^2b^2)}}{2(b^2 + a^2m^2)}$$

$$= \frac{-2a^2mk \pm \sqrt{4a^2b^2(b^2 + a^2m^2 - k^2)}}{2(b^2 + a^2m^2)}$$

$$= \frac{-2a^2mk \pm 2ab\sqrt{b^2 + a^2m^2 - k^2}}{2(b^2 + a^2m^2)}$$

$$x = \frac{-a^2mk \pm ab\sqrt{b^2 + a^2m^2 - k^2}}{b^2 + a^2m^2} \quad \text{III.2.32}$$

Usando los valores de  $x$  dados por III.2.32 y la ecuación III.2.31 pueden obtenerse los puntos de intersección de la recta con la elipse, y a partir de ellos el punto medio  $P_m$  de la cuerda, dado por:

$$P_m \left( \frac{-a^2mk}{a^2m^2 + b^2}, \frac{kb^2}{a^2m^2 + b^2} \right). \quad \text{III.2.33}$$

Si ahora se toman valores de  $k$  para los cuales la raíz en III.2.32 sea real – manteniendo  $m$  fija-, se obtienen puntos medios de cuerdas que están sobre la recta

$$\bar{r}_t: y = -\frac{b^2}{a^2m}x, \quad \text{III.2.34}$$

lo que es verificable directamente, ya que

$$\frac{kb^2}{a^2m^2 + b^2} = -\frac{b^2}{a^2m} \left( -\frac{a^2mk}{a^2m^2 + b^2} \right) = \frac{kb^2}{a^2m^2 + b^2}$$

En particular, cuando en III.2.32 el valor de la expresión  $b^2 + a^2m^2 - k^2$  es cero, esto es, cuando  $b^2 + a^2m^2 = k^2$ , se tiene, sustituyendo en III.2.32,

$$x = -\frac{a^2m\sqrt{b^2 + a^2m^2}}{b^2 + a^2m^2} = -\frac{a^2m}{\sqrt{b^2 + a^2m^2}}$$

lo que, al sustituir en III.2.31 produce los puntos

$$P_{t1} \left( \frac{a^2m}{\sqrt{b^2 + a^2m^2}}, \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + a^2m^2}} \right)$$

y

$$P_{t1} \left( -\frac{a^2m}{\sqrt{b^2 + a^2m^2}}, -\frac{b^2}{\sqrt{b^2 + a^2m^2}} \right),$$

donde las rectas paralelas

$$r_{t1}: y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

y

III.2.35

$$r_{t2}: y = mx - \sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

son tangentes a la elipse.

**Veamos un ejemplo.** Sean  $E: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$  y  $y = x + k$ .

Si hacemos  $k = 0$ , el punto medio de la cuerda dada por  $y = x$  es el origen, esto es,  $P_{m1}(0, 0)$ . Ahora, si  $k = 1$ , como  $a = 4$  y  $b = 2$ , usando III.2.33 resulta  $P_{m2} \left( -\frac{4}{5}, \frac{1}{5} \right)$ .

Con estos dos puntos se construye la **recta**  $y = -\frac{1}{4}x$ , que es la misma que se obtiene usando la ecuación III.2.34.

Finalmente, usando III.2.35 obtenemos las rectas

$$r_{t1}: y = x + \sqrt{20}$$

y

$$r_{t2}: y = x - \sqrt{20},$$

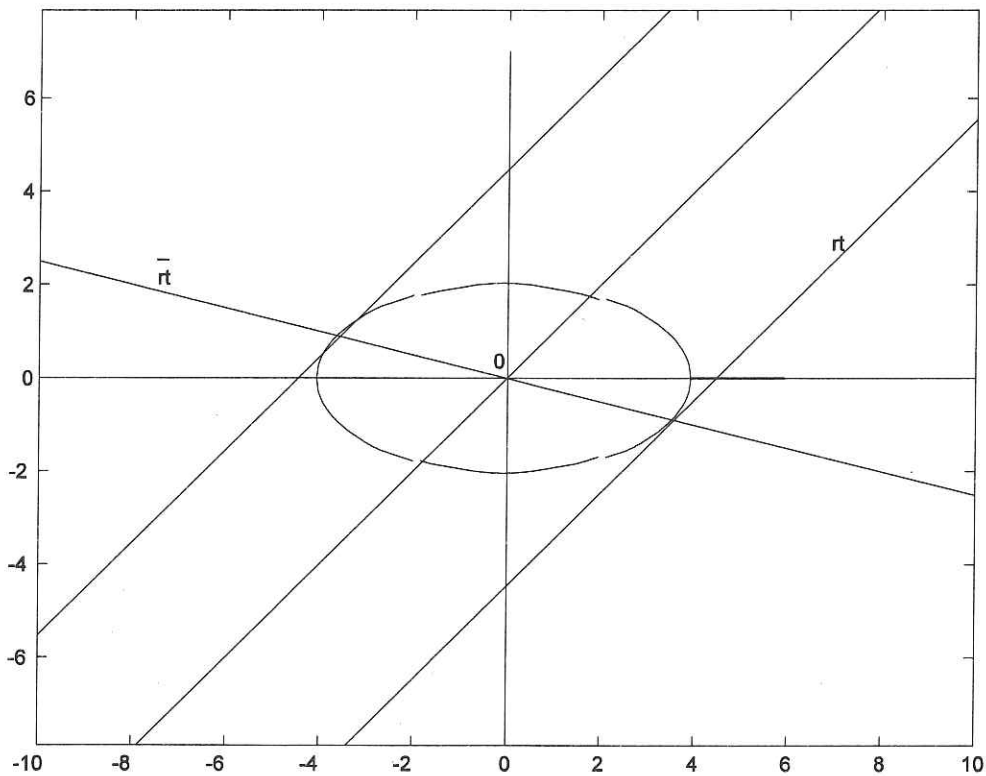
tangentes a la elipse en los puntos  $P_{t1} \left( \frac{16}{\sqrt{20}}, \frac{4}{\sqrt{20}} \right)$  y  $P_{t2} \left( -\frac{16}{\sqrt{20}}, -\frac{4}{\sqrt{20}} \right)$ .

A continuación, el correspondiente programa en Matlab.

```

%%%%%%%%%%
% Programa que produce la versión gráfica del
% ejemplo anterior
%%%%%%%%%%
clear all
fplot('sqrt(4*(1-x^2/16))',[-10 10])
hold on
fplot('-sqrt(4*(1-x^2/16))',[-10 10])
axis equal
plot([0 0],[-8 7])
plot([-10 10],[0 0])
fplot('x',[-10 10])
fplot('x+sqrt(20)',[-10 10])
fplot('x-sqrt(20)',[-10 10])
fplot('-4*x/16',[-10 10])
gtext('rt')
gtext('rt')
gtext('_')
gtext('0')
print -deps capv_8

```



Volveremos sobre esto cuando estudiemos la geometría en tres dimensiones, pero desde ahora podemos decir que las ideas que hemos expuesto sobre las direcciones conjugadas, están en la base del método de gradientes conjugados, de gran relevancia en el ámbito de la optimización numérica.

### III.2.3 La hipérbola ( $e > 1$ )

Nuevamente partimos de:

$$F(ae, 0), \quad r: x = \frac{a}{e} < 1.$$

Si  $P(x, y)$  está en la hipérbola, entonces aplicando la definición:

$$\frac{d(P, F)}{d(P, r)} = \frac{\sqrt{(x - ae)^2 + y^2}}{\left|x - \frac{a}{e}\right|} = e \Leftrightarrow$$

$$(x - ae)^2 + y^2 = e^2 \left(x - \frac{a}{e}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 = a^2(1 - e^2) \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1.$$

Si, al igual que en el caso de la elipse, hacemos  $a^2(1 - e^2) = b^2$ , dado que ahora se tiene  $e > 1$ , entonces  $a^2(1 - e^2) < 0$  por lo que debemos hacer

$b^2 = -a^2(1 - e^2)$ , y de esto resulta la ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{III.2.36}$$

Observaciones:

1. Al igual que en el caso de la elipse, la curva correspondiente a III.2.36 es simétrica con respecto a ambos ejes coordenados.
2. Si hacemos  $x = 0$ , se tiene:  $-y^2 = b^2$ , por lo que la gráfica no corta al eje  $Y$ , mientras que si  $y = 0$ , entonces hay dos intersecciones con el eje  $X$  dadas por  $x = \pm a$ , llamadas vértices de la hipérbola. La gráfica correspondiente tiene la forma:



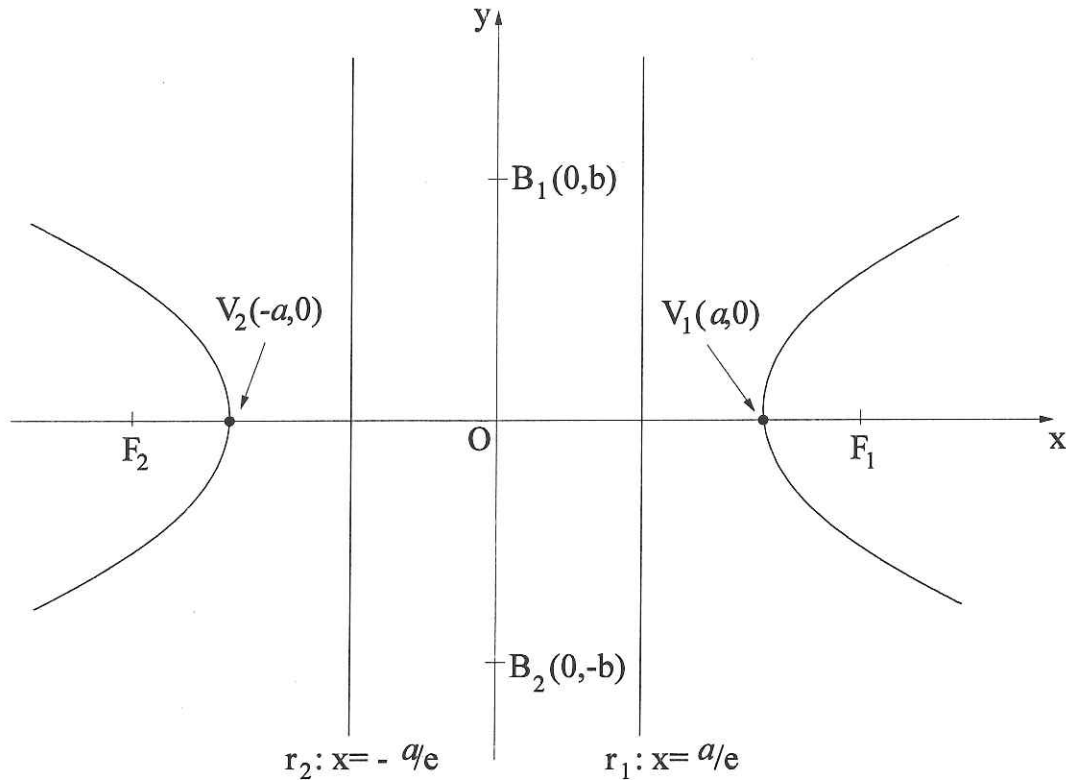


Figura III.2.18

El segmento  $V_1V_2$  se llama eje transverso y el  $B_1B_2$  eje conjugado.

Nótese que de la igualdad  $b^2 = -a^2(1 - e^2)$  resulta  $|b| > |a|$ , dado que  $e > 1$ . Además,  $V_1(a, 0), V_2(-a, 0), B_1(0, b), B_2(0, -b), V_1V_2 = 2a$  y  $B_1B_2 = 2b$ .

Por un procedimiento análogo al seguido en el caso de la elipse, se llega a que la **hipérbola** puede definirse como el **lugar geométrico** de los puntos  $P$ , tales que la diferencia en valor absoluto de sus distancias a dos puntos fijos,  $F_1$  y  $F_2$ , satisface  $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$ .

Veamos ahora el caso dado por:

$$F(0, ae), \quad r: y = \frac{a}{e} < 1.$$

Si  $P(x, y)$  está en la hipérbola, entonces, de la definición III.2.1 se tiene:

$$\frac{d(P, F)}{d(P, r)} = \frac{\sqrt{(y - ae)^2 + x^2}}{\left|y - \frac{a}{e}\right|} = e \Leftrightarrow$$

$$(y - ae)^2 + x^2 = e^2 \left(y - \frac{a}{e}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$y^2 - 2aey + a^2e^2 + x^2 = e^2y^2 - 2aey + a^2 \Leftrightarrow$$

$$(1 - e^2)y^2 + x^2 = a^2(1 - e^2) \Leftrightarrow$$

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{a^2(1 - e^2)} = 1.$$

Nuevamente, dado que  $e > 1$ , resulta  $a^2(1 - e^2) < 0$  y debemos hacer  $b^2 = -a^2(1 - e^2)$ , con lo que obtenemos:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1, \quad \text{III.2.37}$$

En este caso, tenemos una gráfica que no corta al eje  $X$ , y las intersecciones con el eje  $Y$ , y están dadas por:

$$y^2 = a^2 \Leftrightarrow y = \pm a.$$

La gráfica asociada es:

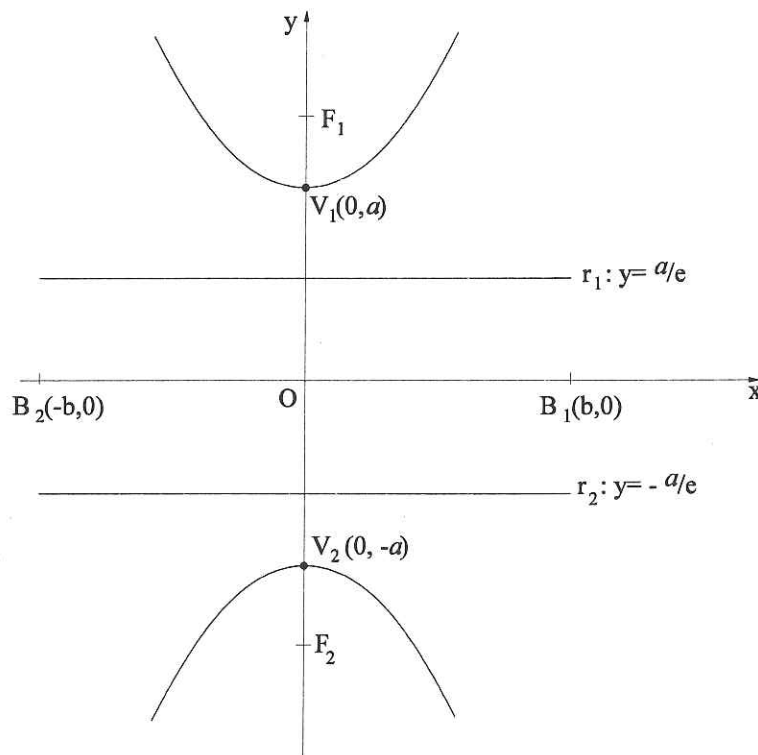


Figura III.2.19

### Una variación

Con relación al sistema  $S' \equiv [O', e'_1, e'_2]$  tenemos:

#### Primer caso

$$r': x' = \frac{a}{e}, F'(ae, 0).$$

La ecuación de la hipérbola, así como su gráfica, respecto a  $S'$  son:

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

III.2.38

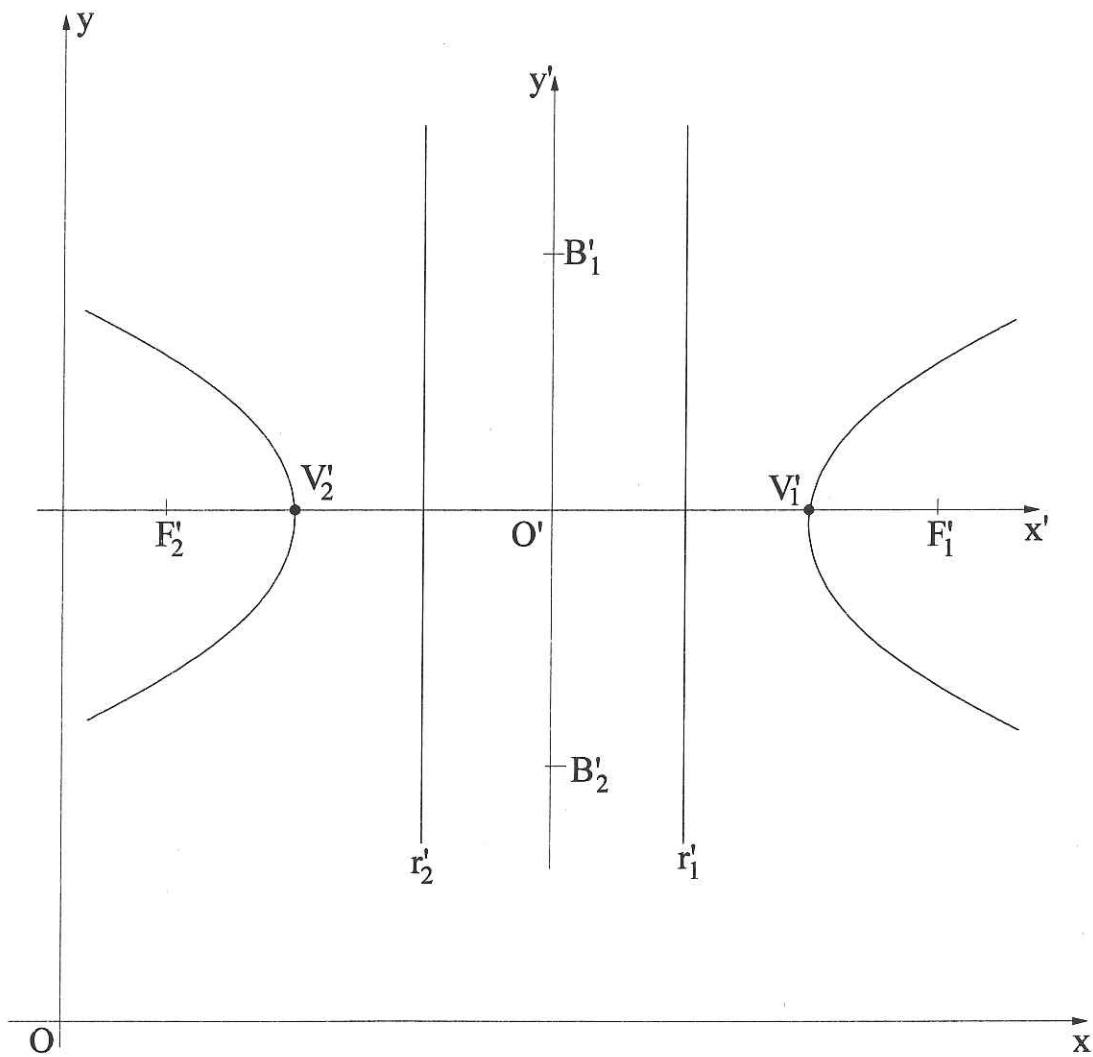


Figura III.2.20

Se tiene para este caso:

$$V_1'(a, 0), V_2'(-a, 0), B_1'(0, b), B_2'(0, -b),$$
$$F_1'(ae, 0), F_2'(-ae, 0), r_1': x' = \frac{a}{e}, r_2': x' = -\frac{a}{e}.$$

En consecuencia, con respecto al sistema  $S \equiv [0, e_1, e_2]$  resulta:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1, \quad \text{III.2.39}$$

con:

$$r_1: x = h + \frac{a}{e}$$

$$r_2: x = h - \frac{a}{e}$$

$$F_1 = 0' + F_1' = [h + ae, k], F_2 = 0' + F_2' = [h - ae, k]$$

$$V_1 = 0' + V_1' = [h + a, k], V_2 = 0' + V_2' = [h - a, k]$$

$$B_1 = [h, k + b], B_2 = [h, k - b].$$

### Segundo caso

Si partimos de:

$$F'(0, ae), r': y' = \frac{a}{e},$$

la ecuación en  $S'$  es:

$$\frac{y'^2}{a^2} - \frac{x'^2}{b^2} = 1, \quad \text{III.2.40}$$

y la gráfica correspondiente:

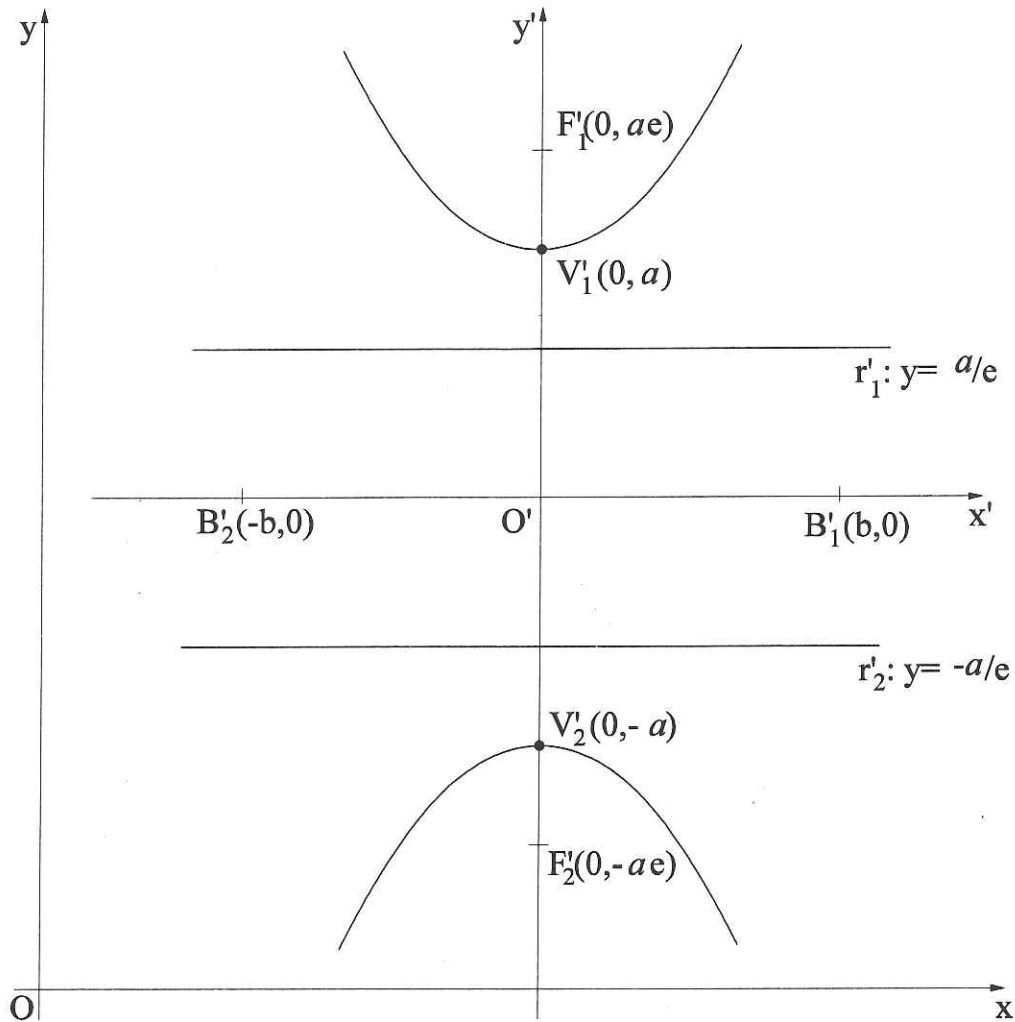


Figura III.2.21

Ahora bien, con respecto al sistema  $S$  se tiene:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1, \quad \text{III.2.41}$$

con:

$$F_1 = O' + F'_1 = [h, k + ae], F_2 = O' + F'_2 = [h, k - ae],$$

$$V_1 = O' + V'_1 = [h, k + a], V_2 = O' + V'_2 = [h, k - a],$$

$$B_1 = O' + B'_1 = [h + b, k], B_2 = O' + B'_2 = [h - b, k].$$

Además:

$$r_1: y - k = \frac{a}{e}, r_2: y - k = -\frac{a}{e}.$$

**Veamos ahora un par de ejemplos:**

1. Dada la ecuación en  $S'$ :

$$\frac{x'^2}{16} - \frac{y'^2}{9} = 1, \quad \text{III.2.42}$$

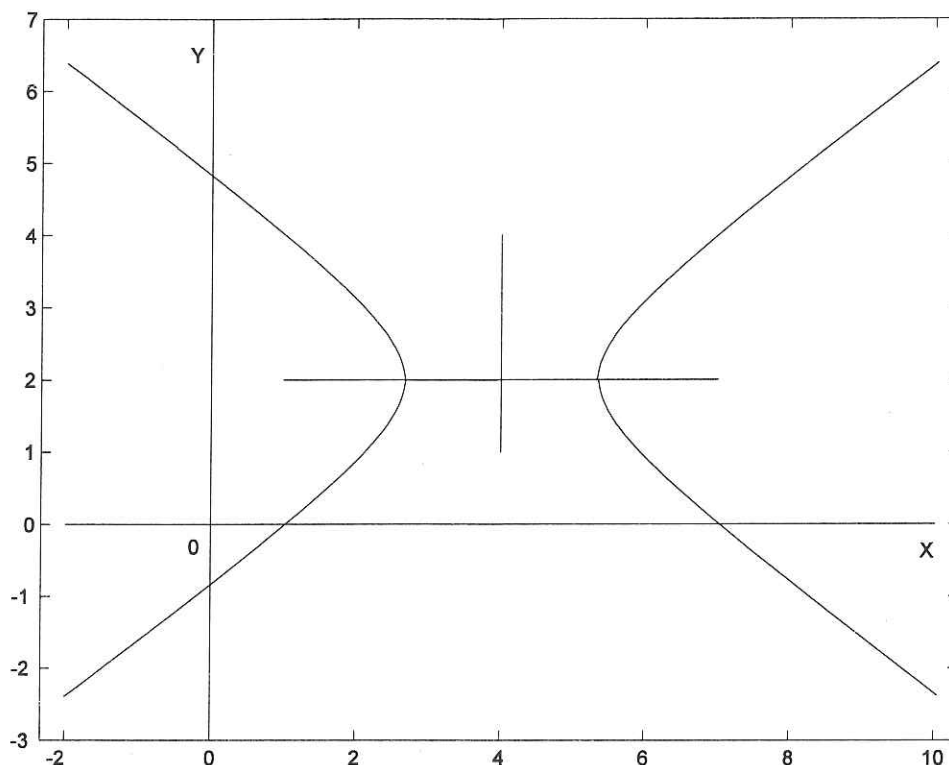
construir su formulación correspondiente en el sistema  $S$ , y usar Matlab para dibujar su gráfica, considerando que con respecto a  $S$ , se tiene  $O'(4,2)$ .

Veamos: usando las ecuaciones III.7, III.2.42 se transforma en:

$$\frac{(x-4)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1. \quad \text{III.2.43}$$

Damos a continuación un programa en Matlab para dibujar la gráfica III.2.43.

```
%%%%%%%%%%%%%%
% Programa para dibujar la gráfica de (x-4)^2/16-(y-2)^2/9 = 1.
%%%%%%%%%%%%%%
clear all
fplot('2+sqrt(9*(((x-4)^2)/16)-1)',[-2 10])
hold on
fplot('2-sqrt(9*(((x-4)^2)/16)-1)',[-2 10])
fplot('2',[1 7])
plot([4 4],[1 4])
plot([0 0],[-3 7])
plot([-2 10],[0 0])
axis equal
gtext('O')
gtext('X')
gtext('Y')
print -deps capv_7
```



2. Aplicar una traslación que permita “llevar” la ecuación

$$\frac{(y-6)^2}{9} - \frac{(x-2)^2}{4} = 1. \quad \text{III.2.44}$$

a su forma más simple.

En este caso, lo que corresponde es usar las ecuaciones III.6 con  $O'(6,2)$ , lo que permite obtener la ecuación

$$\frac{(y'+6-6)^2}{9} - \frac{(x'+2-2)^2}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{y'^2}{9} - \frac{x'^2}{4} = 1. \quad \text{III.2.45}$$

### III.2.4 Algo sobre aplicaciones

Un problema importante de las matemáticas aplicadas es el de calcular un mínimo –o máximo– de una función del tipo (para el caso de una variable):

$$f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Pensemos que la gráfica de  $f$  es una curva del siguiente estilo:

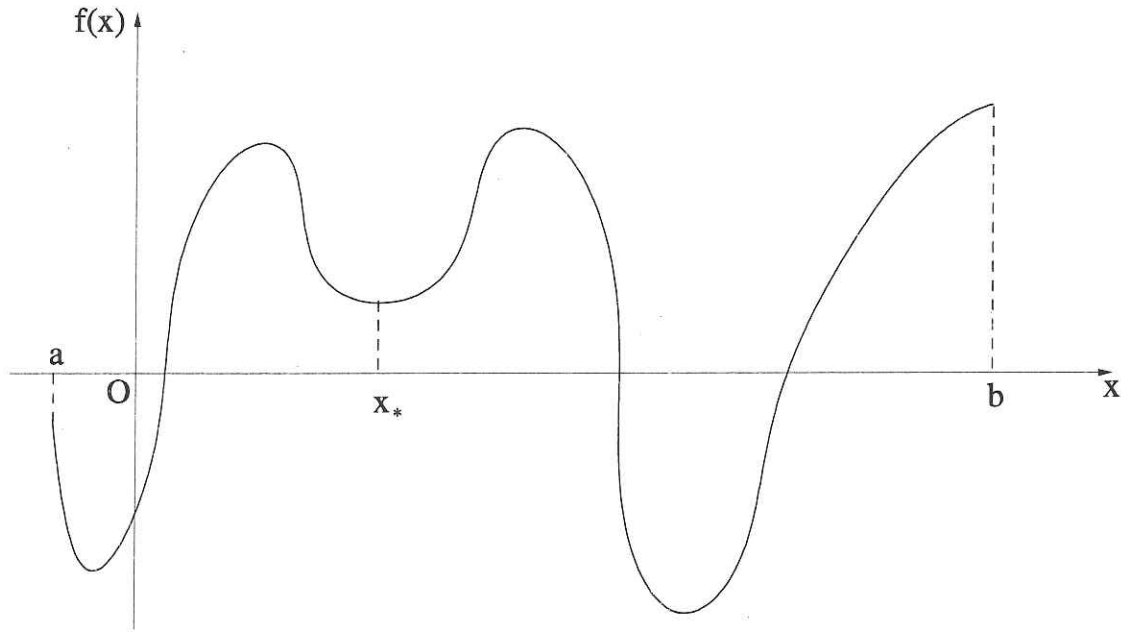


Figura III.2.22

y consideremos el problema de determinar el punto  $x_* \in [a, b]$  que da lugar al mínimo local (puesto que  $f$  tiene otros mínimos en  $[a, b]$ ), que se muestra en la gráfica.

Dentro de las posibles estrategias para resolver este problema hay una que puede generalizarse para  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , y para el caso nuestro con  $n = 1$  puede verse en forma esquemática como sigue:

- i. Suponer que, en una vecindad  $\nu$  de  $x_*$ ,

$$f(x) \approx m(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2,$$

esto es, en  $\nu$ ,  $f$  "parece" una parábola. Esto es así dado que si hacemos  $m(x) = y = a_0 + a_1x + a_2x^2$  entonces:

$$y + \left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 = a_0 + \left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 + a_1x + a_2x^2 \Leftrightarrow$$

$$a_2 \left(x + \frac{a_1}{2a_2}\right)^2 = y + \left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 + a_0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x + \frac{a_1}{2a_2}\right)^2 = \frac{y}{a_2} + \frac{\left[\left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 + a_0\right]}{a_2} \Leftrightarrow$$

$$\left(x + \frac{a_1}{2a_2}\right)^2 = \frac{1}{a_2} \left(y + \left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 + a_0\right) \equiv$$



$$(x + h)^2 = \frac{1}{a_2}(y + k)$$

que es una de las formas de la ecuación de la parábola.

- ii. Calcular el punto  $\tilde{x}_*$  donde  $m(x)$  alcanza su valor mínimo y proponer a  $\tilde{x}_*$  como una aproximación de  $x_*$ .

En primer lugar hemos de comentar que, para una clase amplia de funciones y una adecuada elección de  $v$ , la suposición hecha en (i) es, en términos generales, razonable.

Por lo que toca al cálculo de  $\tilde{x}_*$ , la propuesta consiste en:

Dada la función  $m(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ :

- i. Considerar la recta

$$r: y = k$$

y calcular la intersección  $m(x) \cap r$ . Esto da como resultado los puntos  $P_1(x_1, k), P_2(x_2, k)$ , tales que

$$m(x_1) = m(x_2) = k.$$

- ii. Hacer

$$\tilde{x}_* = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Gráficamente se tiene:

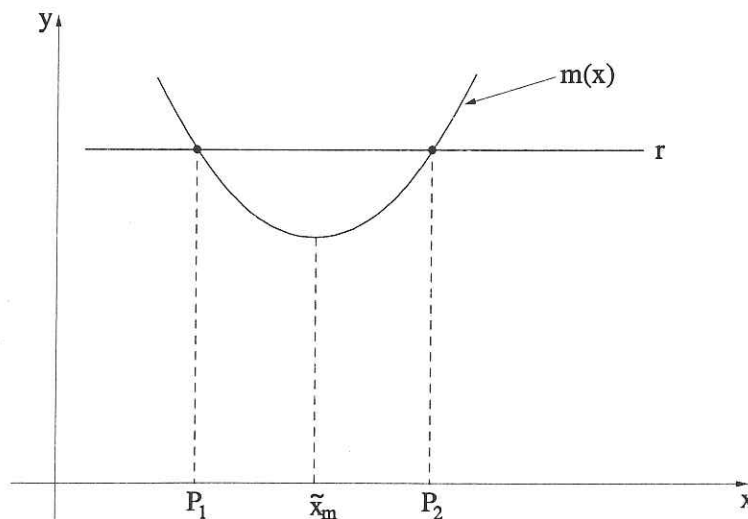


Figura III.2.23

Por supuesto, si la función original  $f$  es la parábola dada por  $m$ , hay un único mínimo de  $f$  y éste coincide con  $\tilde{x}_*$ . En caso contrario, la "bondad" de la aproximación  $\tilde{x}_*$  calculada dependerá de qué tan buen representante de la función  $f$  es el modelo  $m(x)$  en la vecindad  $v$ . Si  $\tilde{x}_*$  no se considera una solución razonable, una idea –en términos generales– es, a partir de ella calcular nuevas aproximaciones hasta conseguir una que sea aceptable.

Más adelante volveremos sobre este problema y analizaremos el caso  $n = 2$ , usando las ideas expuestas sobre direcciones conjugadas, pero podemos también decir que, además de la aplicación anterior, las cónicas son útiles para resolver problemas de suavizamiento de curvas, y se conoce también la relación de la elipse con las órbitas planetarias, y de la parábola con cierto tipo de antenas y con los tiros parabólicos. Al respecto, si partimos de las ecuaciones

$$y^2 = 4cx \quad y \quad \text{III.2.46}$$

$$y = mx + b \quad \text{III.2.47}$$

Sustituyendo III.2.47 en III.2.46 se tiene:

$$\begin{aligned} (mx + b)^2 = 4cx &\Leftrightarrow m^2x^2 + 2mbx + b^2 - 4cx = 0 \Leftrightarrow \\ m^2x^2 + (2mbx - 4c)x + b^2 &= 0. \end{aligned} \quad \text{III.2.48}$$

Resolviendo para  $x$  resulta:

$$\begin{aligned} x &= \frac{4c - 2mb \pm \sqrt{(2mb - 4c)^2 - 4m^2b^2}}{2m^2}, \quad m \neq 0 \Leftrightarrow \\ x &= \frac{4c - 2mb \pm 4\sqrt{c(c - mb)}}{2m^2} \Leftrightarrow \\ x &= \frac{2c - mb \pm 2\sqrt{c(c - mb)}}{m^2}. \end{aligned} \quad \text{III.2.49}$$

Dependiendo del valor de la cantidad bajo el radical, se tendrán

- a) Dos intersecciones reales si el valor es positivo.
- b) Ninguna intersección real, si es negativo.
- c) Una intersección real, si es cero.

Si estamos en el caso c), éste se da cuando la recta representada por III.2.47 es tangente a la parábola cuya ecuación es III.2.46, lo que sucede cuando en III.2.49 se tiene que  $b = c/m$ , de lo que resulta  $x = c/m^2$ , que al sustituirse en III.2.46 produce el valor  $y = 2c/m$ .

Tenemos entonces que para  $m \neq 0$ , la recta

$$r_t: y = mx + c/m \quad \text{III.2.50}$$

es tangente a la parábola  $y^2 = 4cx$  en el punto  $P(c/m^2, 2c/m)$ .

Una gráfica ilustrativa es la siguiente:

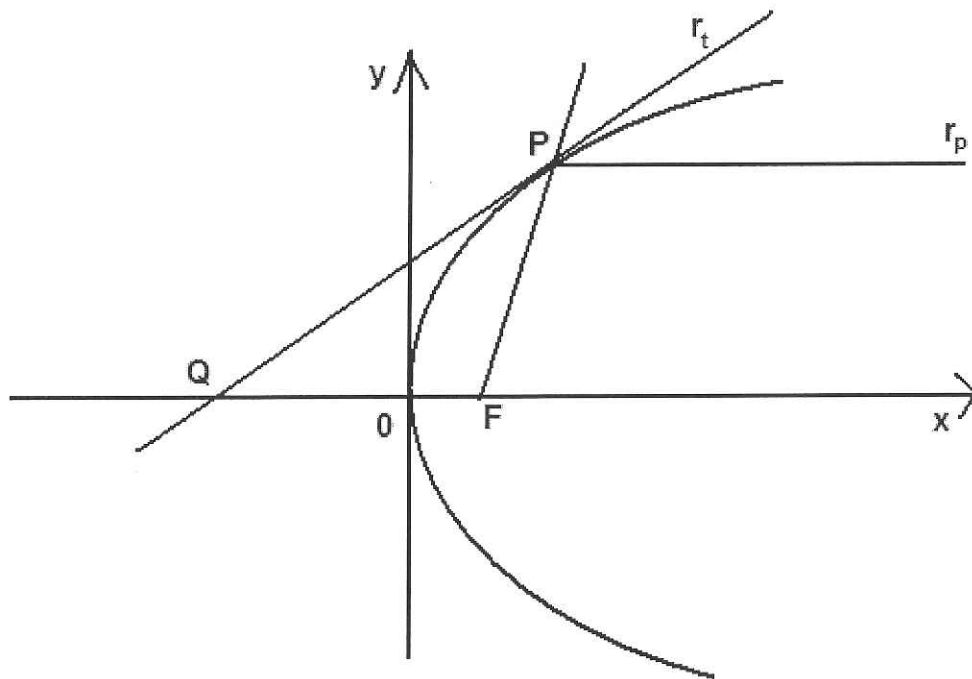


Figura III.2.24

Como se observa, la tangente dada en III.2.50 corta al eje  $x$  en el punto  $Q(-c/m^2, 0)$ .

Es directo mostrar que  $d(F, P) = d(F, Q)$ , por lo que el triángulo  $QFP$  es isósceles, de donde:  $\widehat{FPQ} = \widehat{PQF}$ , pero también este ángulo es igual al formado por las rectas  $r_t$  y  $r_p: y = 2c/m$ . De esto se tiene que si la figura III.2.24 la interpretamos como un corte transversal de un espejo parabólico que incluye al foco – por ejemplo, el faro de un automóvil-, entonces, si una fuente luminosa se sitúa en el foco de la parábola, los rayos de luz se reflejarán sobre el espejo siguiendo trayectorias paralelas al eje de la parábola, obedeciendo la ley física que afirma que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.

En los ejercicios y la bibliografía se dan elementos que ilustran el importante universo de las aplicaciones.

## Ejercicios

- 1) Prueba el siguiente resultado: un punto  $P(x, y)$  está en la parábola con foco  $F(c, 0)$  y directriz  $x = -c$ , si y sólo si satisface la ecuación  $y^2 = 4cx$ .
- 2) En cada inciso encuentra la ecuación de la parábola que satisface las condiciones indicadas y haz un dibujo.
  - a)  $V(1, -4)$  y  $F(-5, -4)$ .
  - b)  $F(-3, 2)$  directriz  $r: x = 7$ .
- 3) Construye las ecuaciones de la elipse y la hipérbola, a partir de:  
 $F(-c, 0)$ ,  $c = ae$  y  $r: x = -a/e$ .
- 4) Siguiendo un procedimiento análogo al presentado para el caso de la elipse, prueba que la hipérbola puede definirse como el lugar geométrico de los puntos  $P$  tales que  $d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a$ .
- 5) Encuentra la ecuación de la parábola con foco  $F(3, 4)$  y directriz  $r: 2x - y + 3 = 0$ .
- 6) Encuentra las ecuaciones de las elipses cuyos elementos son los que se indican:
  - a) Vértices  $V_1(7, -2)$ ,  $V_2(-5, -2)$ ;  $e = \frac{2}{3}$
  - b) Focos  $F_1(5, 1)$ ,  $F_2(-1, 1)$ ; longitud del eje menor 10 unidades.
- 7) Construye la ecuación de una elipse con centro en el origen y que pasa por los puntos  $P_1(1, 3)$ ,  $P_2(4, 2)$ .
- 8) Construye las ecuaciones de las hipérbolas que cumplen con las siguientes condiciones:
  - a) Centro  $c(-5, 3)$ ,  $2a = 10$ ,  $2b = 6$ , eje focal paralelo al eje  $x$
  - b) Focos  $F_1(7, 1)$ ,  $F_2(-5, 1)$ , longitud del eje transversal igual a 6
- 9) Encuentra los elementos (centro, ejes, focos, vértices y excentricidad) de la hipérbola dada por la ecuación  $16(x + 3)^2 - 4(y - 5)^2 = 64$ . Haz también un dibujo.

10) Construye la ecuación de la hipérbola cuyos focos son  $F_1(-1, 4)$ ,  $F_2(2, -3)$  y la longitud del eje transversal es  $2a = 6$ .

11) Analiza todos los casos posibles de la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = k, \quad k \in \mathbb{R}$$

12) Un arco de un puente tiene forma semi-elíptica con el eje mayor horizontal. La base del arco mide 30 metros y la parte más alta está a 10 metros por encima de la carretera horizontal que pasa por abajo del puente. Calcula la altura del arco sobre el punto del suelo que está a 6 metros del centro.

13) Se tiene un reflector parabólico cuya forma se obtiene haciendo girar, alrededor de su eje, un arco de parábola que empieza en el vértice. Si el foco está a 9 cm del vértice y el arco parabólico tiene 16 cm de profundidad. Determina la abertura del reflector.

## Bibliografía

- Banchoff, Thomas, y Wermer, John, (1992), *Linear Algebra Through Geometry*, Springer-Verlag, USA.
- Eisenhart, Luther P., (1966), *Coordinate Geometry*, Dover Publication, Inc., USA.
- Preston, G. C., y Lovaglia, A. R., (1971), *Modern Analytic Geometry*, Harper&Row, Publishers, Inc., USA.
- Ramírez, Ana I., *Cónicas, Cuádricas y Aplicaciones*, (En prensa), Instituto de Matemáticas, UNAM, México.
- Wooton, W., Beckenbach, E. P. y Fleming, F.J., (1985), *Geometría Analítica Moderna*, Publicaciones Cultural, S.A. de C.V., México.