#92

SERIE
MATEMÁTICAS

Eduardo Tobias G.

La teoría y la práctica de la convergencia de sucesiones. Parte II: Teoría

AÑO
2007

VÍNCULOS MATEMÁTICOS

Facultad de Ciencias

Vínculos matemáticos

La teoría y la práctica de la convergencia de sucesiones

Parte II: Teoría

Eduardo Tobías G.*

Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias, UNAM

SEGUNDA EDICIÓN

Nº 92. 2011

*Profesores del Instituto Nacional de Investigación Nuclear, Salazar, Edo. de México

Primera edición: 1990

Impreso en la Coordinación de Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM

En este trabajo se presenta el concepto de rapidez de convergencia y sus variantes así como su relación con el número de iteraciones que se necesitan para obtener un error relativo dado.

Agradezco al Dr. Pablo Barrera el gran apoyo que me brindó haciendo posible el presente trabajo. A Gloria Olimpia Rivas su amabilidad al leer con gran espíritu critico el trabajo y señalar algunas correcciones. También agradezco a Lucina Parra A. su excelente trabajo de mecanografiado.

TEORIA

Definición. Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que es convergente si existe un número real X_* tal que*

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X_*$$

Como estamos interesados en la rapidez de convergencia de una sucesión, consideraremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1. Si el têrmino n-ésimo de las sucesiones $\{X_n\}$ y $\{Y_n\}$ es:

$$X_n = \frac{1}{n} + 1 \quad y \quad y_n = \frac{1}{\log(n+1)} + 1$$

respectivamente, entonces es fácil ver que

$$\lim_{n\to\infty} X_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 1$$

¿Cuál de las sucesiones converge más rápido? observe que

$$\frac{1}{n} + 1 < \frac{1}{\log(n+1)}$$

* consideraremos por lo general el caso cuando $X_* \neq 0$

Por lo que podríamos intentar decir que la sucesión $\{X_n\}$ converge más rápido que la sucesión $\{Y_n\}$.

Del ejemplo anterior podemos en primer lugar introducir el siguiente concepto:

<u>Definición.</u> La sucesión $\{X_n\}$ converge más rápido que la sucesión $\{Y_n\}$ a X_* si:

i) $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = \lim\limits_{n\to\infty} Y_n = X_*$

ii) $|X_* - X_n| < |X_* - Y_n|$

para toda $n \geq N$, $n \in \mathbb{N}$

Sin embargo para fines prácticos, a la definición anterior todavía no se le puede sacar mucho provecho, ya que otra cuestión de gran importancia práctica es la de saber por ejemplo si X_n tiene cierto número de cifras decimales correctas, es decir, ¿Cuál es el término más próximo X_{n+p} a X_* con la propiedad de que X_{n+p} tiene una cifra más correcta que X_n?

Lo anterior nos hace ver que de manera natural necesitamos reducirnos a trabajar con cierto tipo de sucesiones monótonas, ya que por ejemplo, la sucesión

$$\{X_* + \frac{1}{2},\ X_* + \frac{1}{1},\ X_* + \frac{1}{4},\ X_* + \frac{1}{2},\ X_* + \frac{1}{8}, \ldots\}$$

evidentemente converge a X_*, en forma precisa puesto que $\{X_n\}$ está dada por

$$X_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n} + X_*, & n \text{ par} \\[2ex] \dfrac{1}{n} + X_*, & n \text{ impar} \end{cases}$$

Sin embargo es claro que la ausencia de monotonía las hace poco deseables desde el punto de vista numérico, lo que nos lleva de manera natural a dar la siguiente.

<u>Definición</u>. La sucesión $\{X_n\}$ converge numéricamente a X_* si:

i) $\{X_n\}$ converge a X_*

ii) $\{|X_n - X_*|\}$ es estrictamente monótona.

<u>Nota</u>. si la sucesión $\{X_n\}$ es numérica a X_*, (converge numéricamente a X_*) entonces la sucesión $\{\alpha_n\}$ donde:

$$\alpha_n = \frac{|X_{n+1} - X_*|}{|X_n - X_*|},$$

está acotada por 1, es decir

$$\alpha_n = \frac{|X_{n+1} - X_*|}{|X_n - X_*|} < 1.$$

Ahora supongamos que la sucesión $\{\alpha_n\}$ está acotada por α, esto es,

$$\alpha_n = \frac{|X_{n+1} - X_*|}{|X_n - X_*|} \leq \alpha < 1.$$

es natural esperar que ésto indique una especie de convergencia a X_* más rápida que en el caso en que fuera solamente numérica.

Ejemplo 2. Sean $\{\frac{1}{n^2}\}$, $\{\frac{1}{2^n}\}$ dos sucesiones, entonces para la sucesión $\{\frac{1}{n^2}\}$ tenemos que:

$$\alpha_n = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2}, \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 1$$

mientras que para la sucesión $\{\frac{1}{2^n}\}$

$$\alpha_n = \frac{2^n}{2^{n+1}}, \quad \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \frac{1}{2}$$

Observemos como progresan los términos de cada una de las sucesiones.

$$\{\frac{1}{n^2}\} = \{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \frac{1}{36}, \ldots\},$$

$$\{\frac{1}{2^n}\} = \{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \ldots\}$$

lo anterior parece claramente indicar que la sucesión $\{\frac{1}{2^n}\}$ converge más rápido a cero, y esto nos sugiere la siguiente.

<u>Definición.</u> La sucesión $\{X_n\}$ es fuertemente numérica a X_* si

$$\alpha_n = \frac{|X_{n+1} - X_*|}{|X_n - X_*|} \leq \alpha < 1$$

para toda n en $\mathbb{N}$.

La definición anterior es sumamente importante, y en la práctica toda sucesión que cumpla con esta definición se dice que su órden de convergencia es uno. Más tarde veremos la razón de esto; por ahora pasaremos a ver por qué esta definición es útil en la práctica.

Primero observamos que la relación:

$$\frac{|X_{n+1} - X_*|}{|X_n - X_*|} \leq \alpha,$$

se puede escribir en términos del error relativo de X_{n+1} con respecto a X_*, es decir,

$$\frac{\left|\frac{X_{n+1} - X_*}{X_*}\right|}{\left|\frac{X_n - X_*}{X_*}\right|} = \frac{|X_{n+1} - X_*|}{|X_n - X_*|} \leq \alpha,$$

si hacemos

$$\gamma_n = \frac{|X_n - X_*|}{|X_*|}$$

entonces la anterior desigualdad nos dice que

$$\gamma_{n+1} \leq \gamma_n$$

Pero éstas son muy buenas noticias ya que el error relativo está relacionado con el número aproximado de cifras decimales correctas que tiene cualquier aproximación X_k de X_*.

Para precisar lo anterior necesitamos el siguiente resultado.

Lema. Todo número real X positivo se puede escribir en la forma:

$$X = \left(\sum_{k=1}^{\infty} d_K . 10^{-k}\right) x\ 10^{e_x}$$

donde $d_1 \neq 0$, $0 \leq d_K \leq q$, y e_x es un entero con la propiedad:

$$10^{e_x - 1} \leq |X| < 10^{e_x}$$

d_1 es llamado el primer dígito significativo de X.

Sea ahora

$$F_n : R^+ \to R^+,$$

la función que a cada número X le asocia los primeros n dígitos de su expansión decimal, es decir,

$$F_n(X) = \left(\sum_{k=1}^{n} d_K . 10^{-k}\right) x\ 10^{e_x},$$

entonces el siguiente resultado nos indica el error que se comete cuando X se aproxima por $F_n(x)$.

Teorema. Sean X y $F_n(x)$ como se especificó arriba.

Entonces

$$\left|\frac{F_n(x) - x}{x}\right| \leq \frac{1}{1 + 10^{n-1}} < 10^{-n+1}.$$

En particular tenemos

$$\left|\frac{F_{n+k}(x) - x}{x}\right| \leq \frac{1}{1 + 10^{(n+k)-1}} < 10^{-(n+k)+1}$$

combinando las anteriores desigualdades resulta:

$$\frac{|F_{n+k}(x) - X|}{|X|} \leq 10^{-k} \frac{|F_n(x) - X|}{|X|}$$

para toda $X > 0$.

El resultado anterior es muy importante ya que x y $F_n(x)$ tienen n dígitos decimales en común, y dice que el error relativo que se comete al aproximar x por $F_n(x)$ es menor que 10^{-n+1}. En particular los errores relativos cometidos al aproximar a X por $F_n(X)$ y $F_{n+1}(X)$ están relacionados por:

$$\frac{|F_{n+1}(x) - X|}{|X|} \leq 10^{-1} \frac{|F_n(x) - X|}{|X|}$$

ó

$$\gamma_{n+1}(x) \leq 10^{-1}\ \gamma_n(x).$$

Pero esta relación se parece mucho a la relación que se obtiene de la convergencia fuertemente numérica que acabamos de introducir, por lo que podemos concluir el siguiente resultado:

Teorema. Si la sucesión $\{X_n\}$ es fuertemente numérica a X_*, y $|X_{n+1} - X_*| \leq \alpha |X_n - X_*|$, entonces:

i) Si $\alpha \approx 10^{-k}$, entonces X_{n+1} tiene k cifras correctas más que X_n como aproximación de X_*, o bien,

ii) Si $\alpha^k \approx 10^{-1}$, entonces X_{n+k} tiene una cifra correcta más que X_n como aproximación de X_*.

Como puede verse, este resultado será de gran utilidad en la práctica.

Podemos generalizar el resultado anterior observando que dado α, la solución de la ecuación

$$\alpha^k = 10^{-1}$$

nos dice cuantas iteraciones se necesitan para conseguir una cifra decimal correcta. Esto es, se tiene que

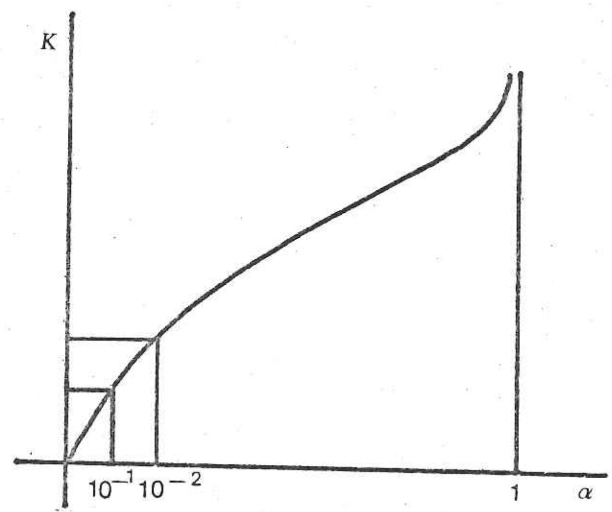
$$k \log_{10} \alpha = -1$$

despejando k tenemos

$$k = \frac{-1}{\log_{10} \alpha}$$

de donde necesitamos $\frac{-1}{\log_{10} \alpha}$ iteraciones para obtener una cifra correcta.

Observemos la gráfica de esta ecuación



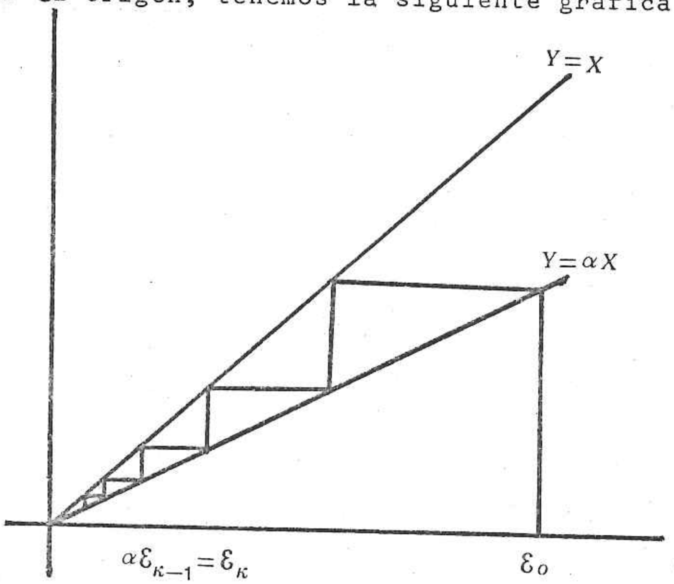
notemos que $\alpha = 1$ es una asíntota vertical de la gráfica, lo que equivale a decir, como es natural, que entre más cercano esté el valor α de uno, más se tarda uno en conseguir nuevas cifras de X_*. Nótese también que si $\alpha = 10^{-1}$ se obtiene una cifra decimal por iteración, si $\alpha = 10^{-2}$ se obtienen dos cifras por iteración.

Interpretación Geométrica.

Si $\alpha < 1$ observe que la iteración

$$\varepsilon_{n+1} = \alpha \varepsilon_n$$

donde $\varepsilon_n = |X_n - X_*|$ se puede visualizar geométricamente, ya que si consideramos una recta de pendiente α que pasa por el orígen, tenemos la siguiente gráfica:



Esta es la razón por la cual la convergencia fuertemente numérica recibe el nombre de convergencia lineal, sólo que ésta es más general y se define como sigue:

<u>Definición.</u> Se dice que la sucesión $\{X_n\}$ converge linealmente a X_* si:

i) $\{X_n\}$ converge a X_*

ii) $$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|X_{n+1}-X_*|}{|X_n-X_*|} = \alpha < 1.$$

El siguiente resultado se obtiene directamente de la definición.

<u>Lema.</u> La sucesión $\{X_n\}$ converge linealmente a X_* sí y sólo si existe $\beta > 0$ tal que

i) $\alpha \leqslant \beta < 1$

ii) $|X_{n+1}-X_*| \leqslant \beta |X_n - X_*|$,

para casi toda X_n.

Es natural preguntarse que sucede cuando

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|X_{n+1}-X_*|}{|X_n-X_*|} = 0,$$

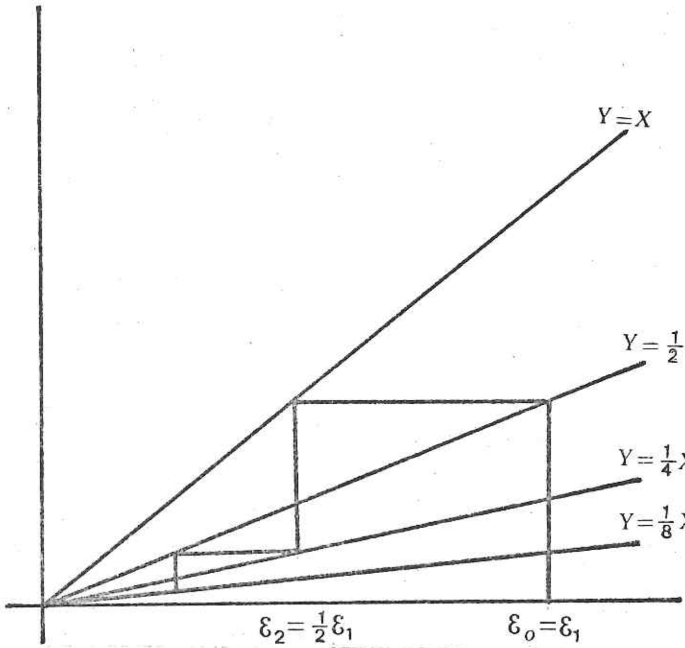
este caso es conocido en la literatura como convergencia super-lineal.

<u>Definición.</u> Se dice que la sucesión $\{X_n\}$ converge super-linealmente a A si

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|X_{n+1}-X_*|}{|X_n-X_*|} = 0.$$

Ejemplo 3. la sucesión $\{\varepsilon_{k+1}\}$, donde $\varepsilon_{k+1} = \frac{1}{2^k}\,\varepsilon_k$ converge super-linealmente.

se puede observar en la figura siguiente como progresan las iteracionea para ésta sucesión.



como podemos observar de la gráfica anterior el progreso de la sucesión $\{\varepsilon_{k+1}\}$ es excelente.

Nota. Como se puede ver la convergencia super-lineal tiene la característica de que en cada iteración se ganan más cifras decimales correctas que en el caso de convergencia lineal.

Es natural extender ahora el concepto de convergencia lineal, por lo que introducimos la siguiente

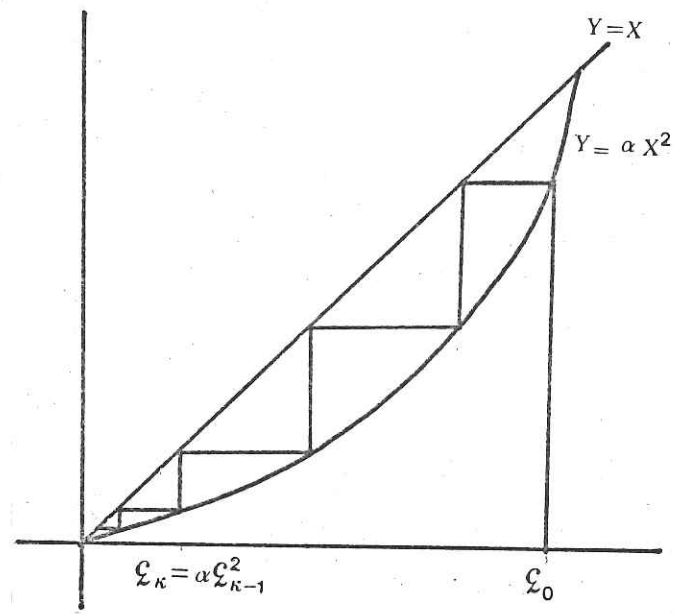
Definición. La sucesión $\{X_n\}$ se dice que converge cuadráticamente a X_*, si converge a X_* y

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|X_{n+1}-X_*|}{|X_n-X_*|^2} = \alpha \neq 0$$

Nota. En este caso no es necesario que $\alpha < 1$. Nuevamente si $\varepsilon_n = |X_n-X_*|$ se puede visualizar el progreso de la sucesión $\{\varepsilon_n\}$, donde la iteración

$$\varepsilon_{n+1} = \alpha\,\varepsilon_n^2$$

en la figura siguiente



si $\gamma_n = \dfrac{|X_n - X_*|}{|X_*|}$ es el error relativo en el paso n-ésimo, entonces:

<u>Teorema</u>. Si la sucesión $\{X_n\}$ converge cuadráticamente a X_* y $\alpha|X_*| = 1$, entonces el término X_{n+1} de la sucesión $\{X_n\}$ tiene el doble de cifras decimales correctas que X_n como aproximación de X_*.

<u>Dem.</u> Por hipótesis sabemos que:

$$|X_{n+1} - X_*| \leq \alpha |X_n - X_*|^2$$

de donde se tiene que:

$$\frac{|X_{n+1} - X^*|}{|X_*|} \leq \alpha \frac{|X_n - X_*|^2}{|X_*|}$$

$$= \alpha \; |X_*| \left[\frac{X_n - X_*|}{|X_*|} \right]^2$$

y dado que $\alpha|X_*| = 1$, obtenemos

$$\gamma_{n+1} \leq \gamma_n^2$$

ahora si $\gamma_n \approx 10^{-k}$, entonces

$$\gamma_{n+1} \leq (10^{-k})^2 = 10^{-2k}$$

lo de que demuestra la afirmación del teorema.

<u>Corolario</u>. Si $\alpha|X_*| = 10^{-\ell}$ y X_n tiene k cifras decimales correctas, entonces X_{n+1} tiene $2k + \ell$ cifras decimales correctas.

Una generalización respecto al órden de convergencia se da a continuación.

<u>Definición</u>. Una sucesión $\{X_n\}$ converge a X_* con órden $P \geq 1$ si

i) La sucesión $\{X_n\}$ converge a X_*

ii) $\overline{\lim_{n\to\infty}} \dfrac{|X_{n+1} - X_*|}{|X_n - X_*|^P} \leq \alpha \neq 0.$

<u>Teorema</u>. Si la sucesión $\{X_n\}$ converge a X_* con órden P, y si

i) X_n tiene k cifras decimales correctas

ii) $\alpha|X_*|^{P-1} \approx 10^{-\ell}$

entonces X_{n+1} tiene $kp + \ell$ cifras decimales correctas.

<u>Dem</u>. el resultado se sigue inmediatamente de la desigualdad:

$$\frac{|X_{n+1} - X_*|}{|X_*|} \leq 10^{-\ell}(10^{-k})^P$$

$$\leq 10^{-(kp+\ell)}$$

<u>Corolario</u>. Si $P > 1$ entonces la sucesión $\{X_n\}$ converge a X_* super-linealmente.

<u>Dem</u>. Como la sucesión $\{X_n\}$ converge a X_* con órden $P > 1$, tenemos:

$$|X_{n+1} - X_*| \leqslant \alpha |X_n - X_*|^P,$$

multiplicando ambos miembros de la desigualdad por

$\dfrac{1}{|X_n - X_*|}$ se tiene

$$\frac{|X_{n+1} - X_*|}{|X_n - X_*|} \leqslant \alpha \frac{|X_n - X_*|^P}{|X_n - X_*|} = \alpha |X_n - X_*|^{P-1}$$

Por lo tanto como $p > 1$

$$\overline{\lim} \frac{|X_{n+1} - X_*|}{|X_n - X_*|} = 0$$

lo que prueba la afirmación del corolario.

Después de haber analizado las propiedades de las sucesiones $\{X_n\}$ que convergen linealmente, super-lineal y cuadráticamente a X_* llegamos de manera natural a un concepto superior de convergencia, a saber:

<u>Definición.</u> Se dice que la sucesión $\{X_n\}$ converge cúbicamente a X_* si converge a X_* y

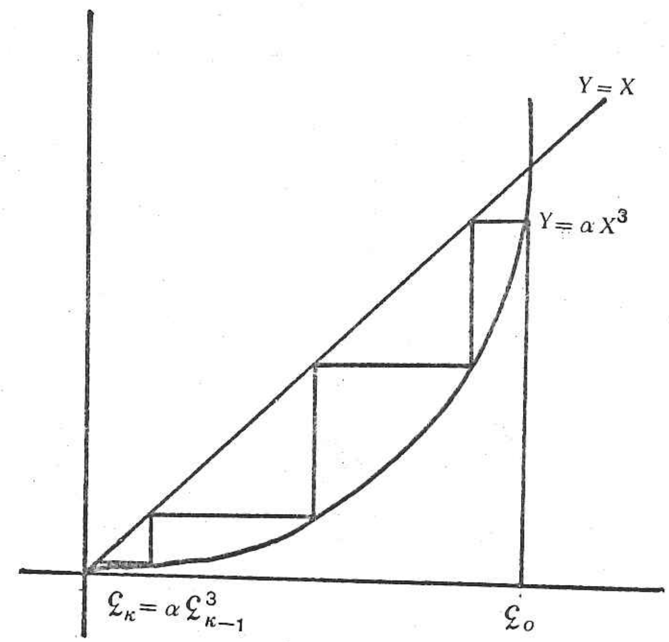
$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{|X_{n+1} - X_*|}{|X_n - X_*|^3} = \alpha \neq 0.$$

<u>Nota</u> De nuevo no es necesario que $\alpha < 1$.

si $\mathcal{E}_n = |X_n - X_*|$ podemos visualizar el progreso de la sucesión $\{\mathcal{E}_n\}$ donde

$$\mathcal{E}_{n+1} = \alpha \mathcal{E}_n^3$$

en la figura siguiente



notemos que el progreso de las iteraciones es sumamente rápido Naturalmente esto significa numéricamente que en cada paso se ganan un mayor número de cifras decimales correctas que en el caso de convergencia lineal, super-lineal y cuadrática, como se puede ver en los siguientes resultados:

Si $\gamma_n = \dfrac{|X_{n+1} - X_*|}{|X_*|}$ es el error relativo en el paso n-ésimo de la aproximación a X_*, entonces tenemos:

Teorema. Si la sucesión $\{X_n\}$ converge cubícamente a X_* y $\alpha|X_*|^2 = 1$ entonces X_{n+1} tiene el triple de cifras decimales correctas que X_n como aproximación de X_*.

Dem. Como por hipótesis $\alpha|X_*|^2 = 1$, tenemos

$$\gamma_{n+1} \leq \alpha|X_*|^2 \gamma_n^3 = \gamma_n^3,$$

si $\gamma_n \approx 10^{-k}$ entonces

$$\gamma_{n+1} \leq (10^{-k})^3 = 10^{-3k}$$

lo que prueba la afirmación del teorema.

Corolario. Si $\alpha|X_*|^2 = 10^{-\ell}$ y X_n tiene k cifras decimales corectas, entonces X_{n+1} tiene $3k+\ell$ cifras decimales correctas.

Existen otra clase de sucesiones que convergen más

rápido que las lineales pero que no son de órden P.

Ejemplo 4. Sea $\{X_n\}$ tal que converge a X_* cuadráticamente. Definamos a y_n como sigue:

$$y_n = \begin{cases} X_m & \text{si } n = 2m \\ X_{m-1} & \text{si } n = 2m-1 \end{cases}$$

Observe que la sucesión $\{y_n\}$ converge a X_* cuadráticamente cada dos iteraciones ya que:

$$\frac{|Y_{k+2} - X_*|}{|y_k - X_*|} = \frac{|X_{m+1} - X_*|}{|X_m - X_*|}.$$

Nota. Se podría pensar que si tenemos una sucesión que converge linealmente, entonces cada dos pasos sería cuadrática, sin embargo esto es erróneo ya que lo que obtenemos es una sucesión que converge linealmente pero con una constante de convergencia igual al cuadrado de la original, como se puede ver en el siguiente lema.

Lema. Si la sucesión $\{X_n\}$ converge a X_* linealmente con constante de convergencia q, entonces, la sucesión $\{X_{n+k}\}$ converge linealmente a X_* con constante de convergencia q^k.

Dem. por hipótesis:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|X_{n+1} - X_*|}{|X_n - X_*|} = q$$

y

$$= \frac{|X_{n+k} - X_*|}{|X_n - X_*|} = \frac{|X_{n+1} - X_*|}{|X_n - X_*|} \cdot \frac{|X_{n+k} - X_*|}{|X_{n+1} - X_*|}$$

$$= \frac{|X_{n+1} - X_*|}{|X_n - X_*|} \cdot \frac{|X_{n+2} - X_*|}{|X_{n+1} - X_*|} \cdot \frac{|X_{n+k} - X_*|}{|X_{n+2} - X_*|}$$

$$= \frac{|X_{n+1} - X_*|}{|X_n - X_*|} \cdot \frac{|X_{n+2} - X_*|}{|X_{n+1}\ X_*|} \cdot \frac{|X_{n+k} - X_*|}{|X_{n+2}\ X_*|} \cdots \frac{|X_{n+k} - X_*|}{|X_{n+(k-1)} - X_*|} \cdot$$

Por lo tanto

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|X_{n+k} - X_*|}{|X_n - X_*|} = q^k,$$

lo que demuestra nuestro lema.

En la siguiente definición se generaliza el concepto de convergencia a k - pasos.

Def. Se dice que la sucesión $\{X_n\}$ es de orden $p > 1$ cada k-pasos si:

i) $\{X_n\}$ converge a X_*

ii) $$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|X_{n+k} - X_*|}{|X_n - X_*|^p} = \alpha < \infty$$

Teorema. Si la sucesión $\{X_n\}$ converge a X_* con orden p cada k pasos y X_n tiene ℓ cifras correctas, y $\alpha|X_*|^{p-1}=1$ entonces X_{n+k} tiene $p\ell$ cifras correctas.

Dem. por hipótesis tenemos que:

$|X_{n+k} - X_*| \leqslant \alpha |X_n - X_*|^p$, α etc. de convergencia.

Ahora

$$\frac{|X_{n+k} - X_*|}{|X_*|} \leqslant \alpha \frac{|X_n - X_*|^p}{|X_*|}$$

$$= \alpha \frac{|X_*|^p}{|X_*|^p} \frac{|X_n - X_*|^p}{|X_*|}$$

$$= \alpha\, |X_*|^{p-1} \left[\frac{|X_n - X_*|}{|X_*|} \right]^p$$

por lo tanto

$$\gamma_{n+k} \leqslant (10^{-\ell})^p$$

$$= 10^{-(p\ell)}$$

lo que demuestra el teorema.

Del resultado anterior se sigue inmediatamente el siguiente:

<u>Corolario</u>. Con las hipótesis anteriores, si X_n tiene ℓ cifras correctas entonces, X_{n+mk} tiene $p^m \ell$ cifras decimales correctas.

Como consecuencia de los dos últimos resultados tenemos el siguiente corolario.

<u>Corolario</u>. Si la sucesión $\{X_n\}$ converge a X_* con orden p entonces la sucesión $\{X_n\}$ es de orden p^k cada k-pasos.