#84

SERIE
MATEMÁTICAS

Manuel López Mateos

Matemáticas básicas

VÍNCULOS MATEMÁTICOS

AÑO
2007

FACULTAD DE CIENCIAS

VÍNCULOS MATEMÁTICOS

Matemáticas básicas

Manuel López Mateos*

SERIE: NOTAS DE CLASE

Vínculos Matemáticos No. 84. 2009

(*) Ex profesor del Departamento de Matemáticas de las Facultad de Ciencias de la UNAM
Impreso en la Coordinación de Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM

I N D I C E .

CAPITULO 1. LA NUMERACION

MATEMATICAS BASICAS

Manuel López Mateos

CAPITULO 1. LA NUMERACION

1.1 *Correspondencias*

Mucho antes de que la humanidad construyera el concepto de número se utilizaba sin embargo, una manera primaria de "contar" que consistía realmente en *comparar*. Cuando los pastores de la antigüedad sacaban sus rebaños del redil solían depositar una piedrecilla en una bolsa por cada oveja que iba saliendo; al caer la tarde, al regresar, sacaban una piedra por cada oveja que entraba. De esta manera sabían si habían regresado o no con el rebaño completo. Si al entrar el rebaño quedaba alguna piedra, ello era señal de que faltaba una oveja. Si al entrar el rebaño se terminaban las piedras y seguían llegando ovejas, significaba que traían ovejas de más (ya iría a reclamarla el pastor que tuviera menos ovejas que piedras en su bolsa correspondiente). Esta manera de "contar" consistía en establecer una correspondencia, llamada *biunívoca*, entre las ovejas del rebaño y un conjunto ca que hay más círculos en el conjunto *B* que rectángulos en el conjunto *A*. También podemos decir que el conjunto *B* tiene *más elementos* que el conjunto *A*. Si entre dos conjuntos podemos establecer una correspondencia biunívoca, (Fig. 1.2) estaremos en presencia de una propiedad común a los dos conjuntos; hoy día lo decimos muy fácil: los dos conjuntos tienen el mismo número de elementos. Sin embargo fue todo un proceso lograr expresar la existencia de dicha correspondencia como una relación entre los elementos y el conjunto, a saber *el número de elementos en el conjunto*.

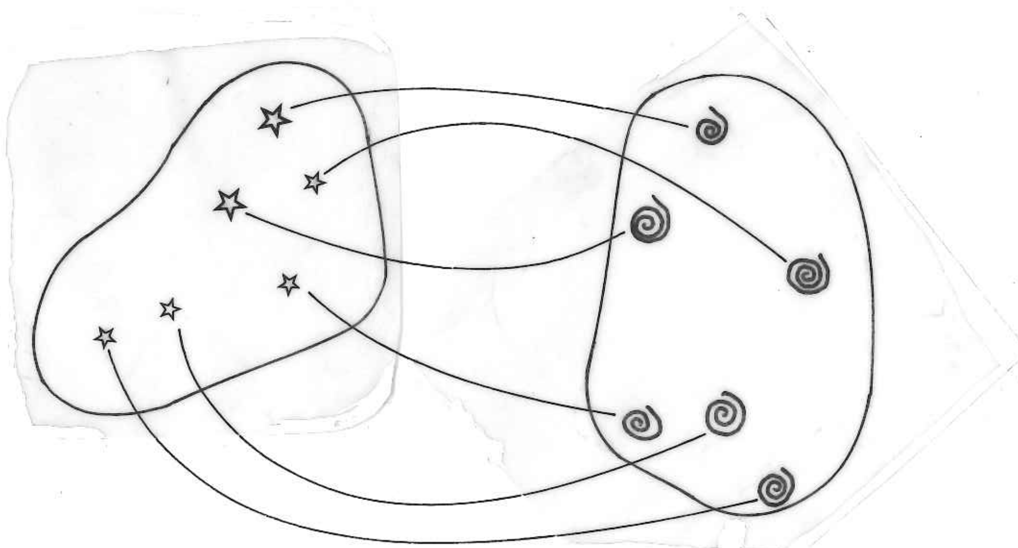


Fig. 1.2 Los conjuntos *C* y *D* tiene el mismo número de elementos.

También es parte de ese proceso la identificación de dicho "número de elementos" mediante un símbolo.

de piedras (las depositadas en la bolsa): a cada oveja le correspondía una piedra, y cada piedra representaba (más que representar, era la correspondiente) a una oveja. Con este método de comparación podemos establecer fácilmente cuándo un conjunto tiene *más* elementos que otro. La figura 1.1 ilustra dos conjuntos, uno que llamaremos *A* y otro que llamaremos *B*. Los -- elementos de *A* son esos pequeños rectángulos ▭ y los elementos de *B* los círculos con una cruz ⊗

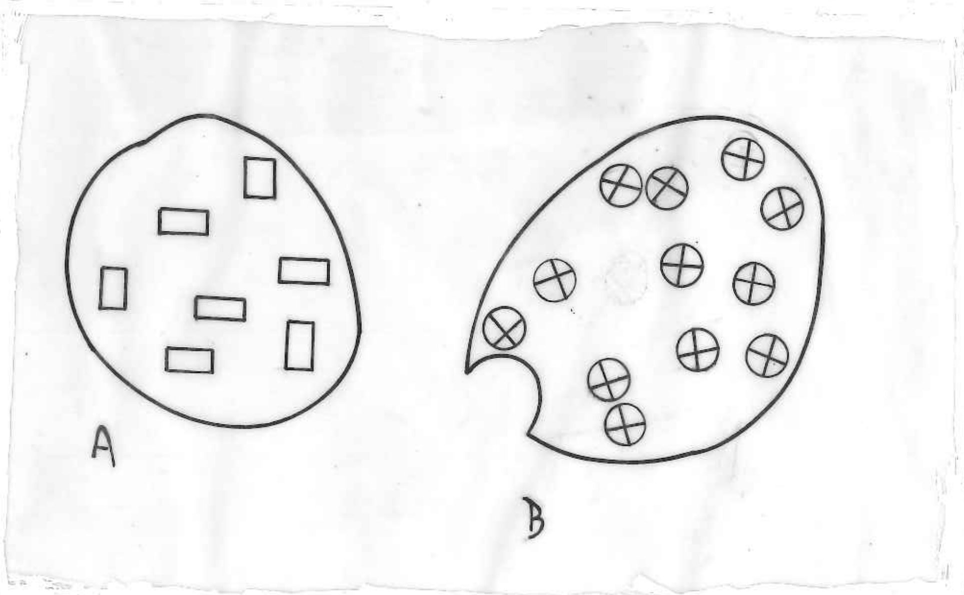


Fig. 1.1 Un conjunto tiene *más* elementos que el otro.

Comparemos estos dos conjuntos, vemos que *a cada* rectángulo le podemos asociar un círculo como su pareja, y vemos también que sobran círculos; hay círculos -- que no son pareja de rectángulo alguno. Esto signifi

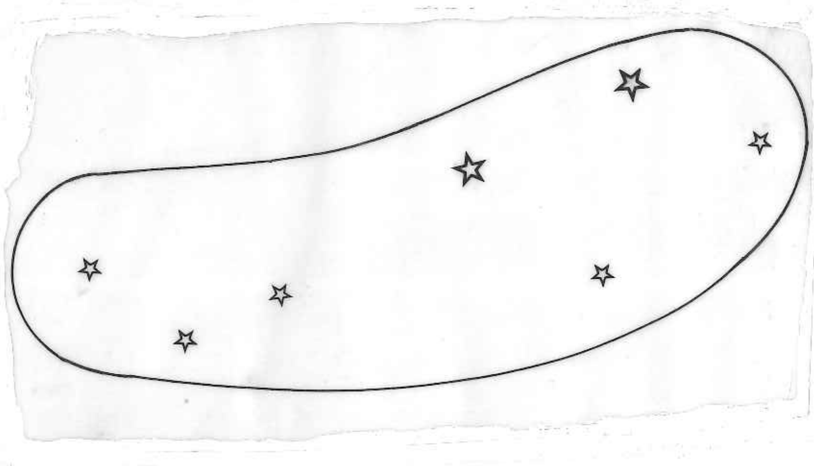


Fig. 1.3 El conjunto E tiene 7 elementos.

1.2 *Números naturales y números enteros.*

Así como en la Fig. 1.3 mostramos un conjunto de 7 elementos, podemos hablar de otros conjuntos. -- digamos que el conjunto de extremidades inferiores de un ser humano tiene 2 elementos, o que el conjunto de semanas en un año tiene 52 elementos, pero el proceso que nos lleva de considerar conjuntos con *más* o con *menos* elementos hasta considerar conjuntos con un determinado *número de elementos*, no se detiene ahí, más adelante, con un grado mayor de abstracción, se consideraría solamente el *número* sin relacionarlo con cierta cantidad de elementos, o si se quiere, el número 7 como representante de todos los conjuntos con 7 elementos, construyendo así el conjunto de los *números naturales* que simbolizamos por la letra $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

Si cada número natural *n* representa los conjuntos de *n* elementos, el número *0* representa a los conjuntos que no tienen elementos que, aunque pueda parecer paradójico, existen, un ejemplo de dicho conjunto lo constituye el conjunto de sillas que saben cantar "El Manicero" (en el apéndice A.1 daremos una discusión más detallada sobre estos conjuntos que se llaman vacíos).

Utilizando este conjunto de números naturales podemos explicarnos el significado de las operaciones elementales.

Al preguntarnos cuál es el resultado de sumar dos números naturales, digamos el 3 y el 7, en realidad nos hacemos la pregunta siguiente: Si tenemos un conjunto de 3 elementos y añadimos a él otros 7 elementos nuevos y distintos, ¿cuántos elementos tiene el nuevo conjunto?

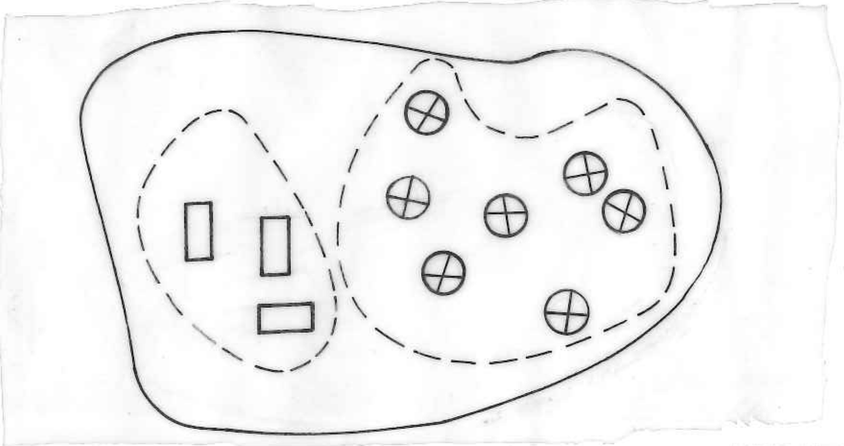


Fig. 1.4. $3 + 7 = 10$

Claramente la respuesta consiste en contar los elementos del nuevo conjunto y ver que son 10. ¡Sumar significa añadir! De la misma manera vemos que restar significa disminuir, quitar elementos a un conjunto - si tengo 5 naranjas sobre la mesa y retiro 2, ¿cuántas quedan? Todos sabemos que la respuesta es 3. -- Sin embargo no siempre es posible efectuar restas con números naturales, si en el caso de las naranjas sobre la mesa, en lugar de quitar 2, intentáramos quitar 9, no podríamos, ¡sólo hay 5! En la escuela nos decían que 5-9 "no se puede", lo cual es verdad si -- hablamos de los números naturales. Precisamente para que tenga sentido ese tipo de substracción, extendemos los números al conjunto de *números enteros*, simbolizados por la letra $\mathbb{Z}$,

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \ldots\}$$

Este conjunto de números enteros consta de los núme-- ros naturales ya conocidos, añadiéndoles los *números negativos*. Estos números pueden representar "ausencia de elementos", como en el caso de las naranjas: tenemos 5 y pretendemos quitar 9, podemos retirar las 5 - disponibles pero para poder quitar 9 harían falta 4 - más. Esto lo expresamos diciendo que 5 menos 9 son - "menos 4" y lo escribimos

$$5 - 9 = -4$$

1.3 *La recta numérica*

Una representación fundamental de estos números, que además nos permitirá comprender las operaciones es la *resta numérica*. Tracemos una recta, puede ser cualquiera, para comodidad la elegimos horizontal; - elijamos además una *orientación*, misma que nos indicará cuál es la *dirección positiva;* es costumbre considerar la dirección positiva la que va de izquierda a derecha en la recta horizontal trazada, marcamos esta dirección con una flecha en el extremo derecho. - Sobre esta *recta orientada* señalamos un punto arbitrario que llamaremos el *cero* o el *origen*, y del cero -- hacia la dirección positiva señalamos otro punto cualquiera y lo llamamos el *uno*, al segmento comprendido entre el cero y el uno lo llamamos *segmento unidad*.

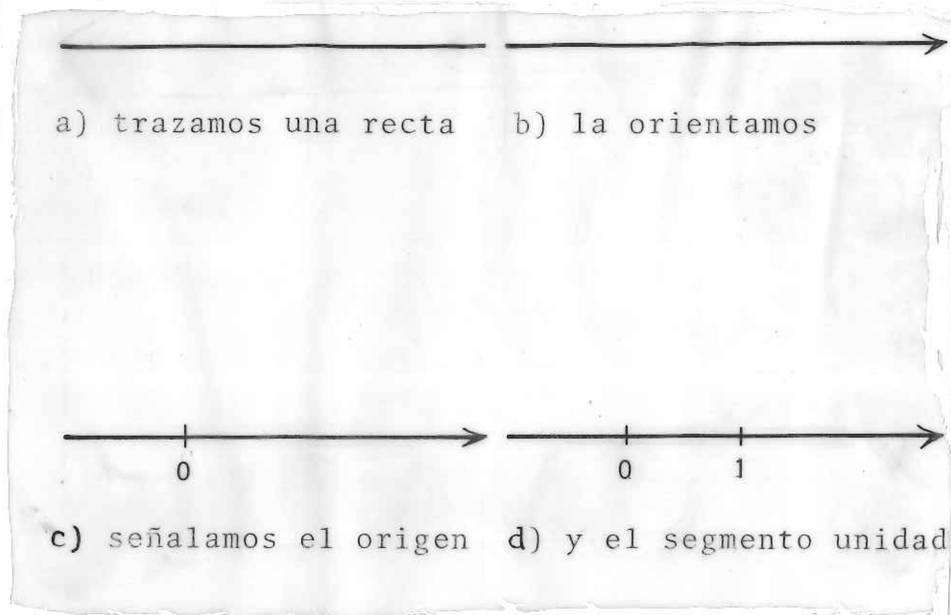


Fig. 1.5 La recta numérica.

Será fácil ahora representar sobre la recta cualquier número entero, ya sea positivo (los números naturales también se llaman *números enteros positivos*), o negativo. Si queremos localizar el lugar correspondiente al número 6, basta transportar mediante un compás la *longitud* del segmento unidad seis veces, una a continuación de otra, partiendo del cero y *hacia la dirección positiva* de la recta, también llamada *eje*.

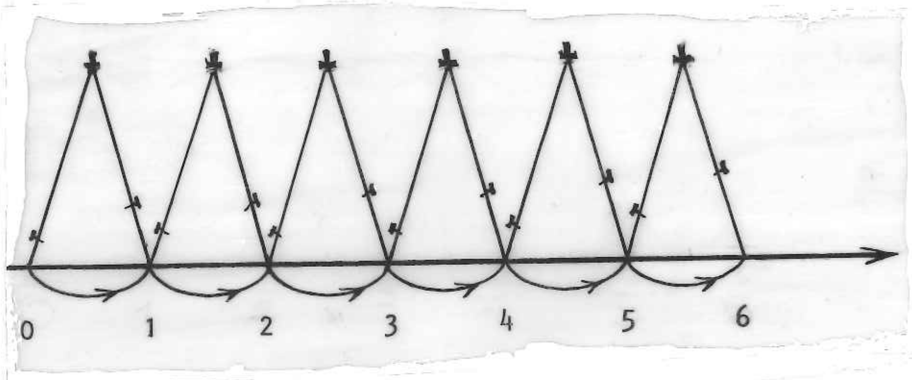


Fig. 1.6 Localizando el lugar del 6.

Para localizar el sitio que corresponde al -4 transportamos *cuatro veces* la longitud del segmento unidad, una a continuación de otra, *partiendo del cero*, pero ahora *hacia la dirección negativa* del eje, es decir, hacia la dirección contraria de aquélla que elegimos como positiva.

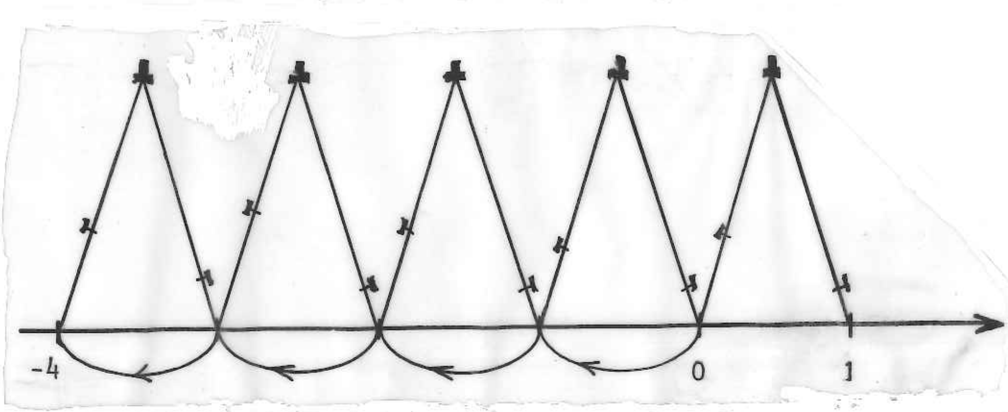


Fig. 1.7 Localizando al lugar del -4.

Es claro que mediante este procedimiento podemos localizar en la recta cualquier número positivo a negativo, basta tener orientada la recta, señalado el origen y la longitud de la unidad. La fig. 1.8 ilustra dicha representación.

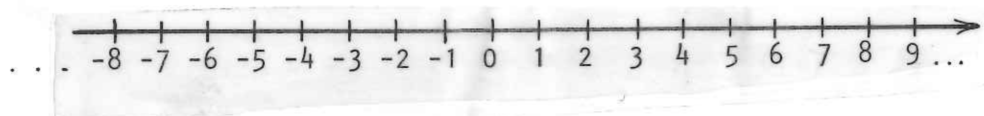
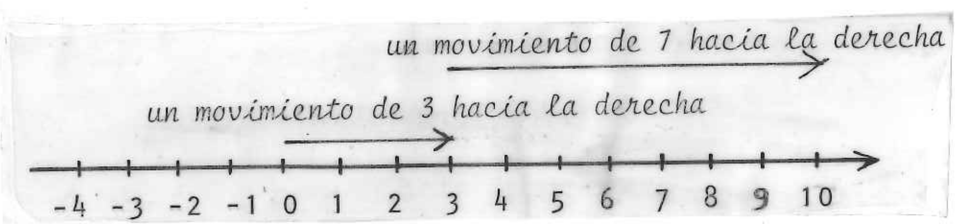


Fig. 1.8 Los números enteros en la recta numérica.

Notemos que ahora tenemos a nuestra disposición, para efectuar operaciones, a todos los números enteros; es decir, podemos preguntarnos cuál es la suma de -5 más 11, o la diferencia del 3 menos el -6. Esto es, podemos preguntarnos el resultado de las siguientes operaciones: $(-5) + 11$, $3 - (-6)$, $7 + 2$, $10 - 4$, $(-6) - (-2)$, $(-4) + (-7)$, $2 - 8$, $(-3) - 4$, $4 + (-4)$.

1.4 *Suma de enteros.*

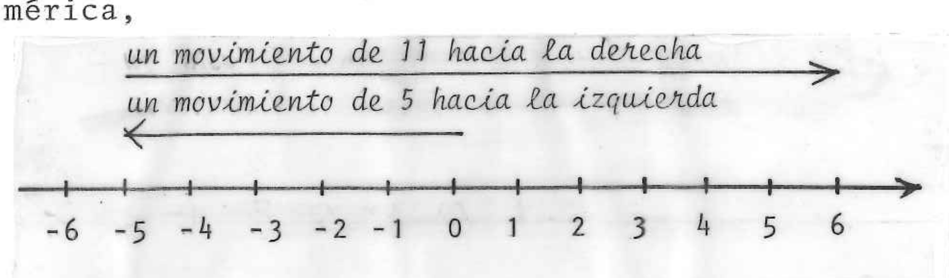
Procederemos a describir cómo se efectúan dichas operaciones, comencemos por la *suma*. Hagamos la suma 3 + 7. Para ello debemos efectuar un desplazamiento desde el cero hasta el primer sumando, en este caso el 3, y de ahí nos desplazaremos el número de unidades indicado por el segundo sumando. Los desplazamientos serán hacia la derecha si el sumando es positivo, o serán hacia la izquierda, en caso de que el sumando sea negativo; en el caso que nos ocupa tenemos



es decir

$$3 + 7 = 10.$$

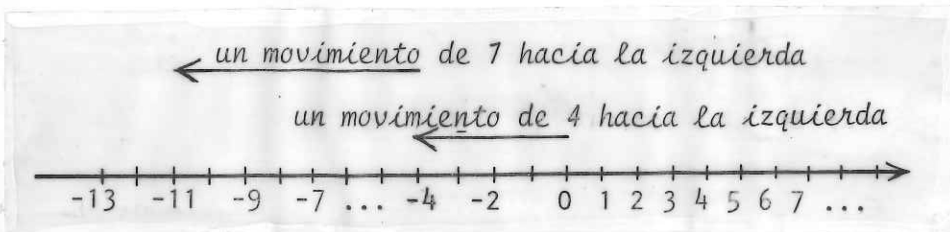
Efectuemos la suma (-5) + 11 con ayuda de la recta numérica,



con lo cual obtenemos

$$(-5) + 11 = 6.$$

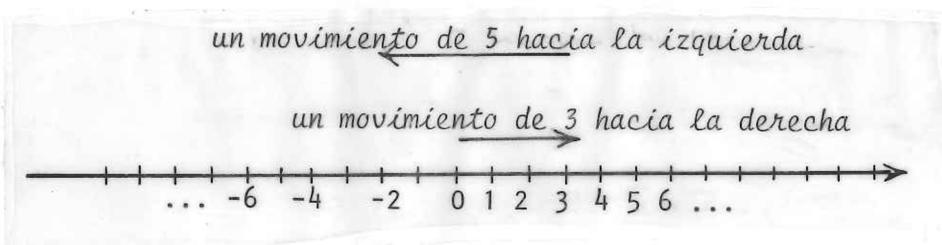
Consideremos ahora la suma (-4) + (-7), hagámosla con la ayuda de la recta numérica,



es decir

$$(-4) + (-7) = 11,$$

Realicemos la suma 3 + (-5), con ayuda de la recta numérica



es decir

$$3 + (-5) = -2.$$

Entonces, para sumar dos números enteros con ayuda de la recta numérica, partimos del cero, de ahí efectuamos un desplazamiento según la unidades del primer sumando, el movimiento será a la derecha si el sumando es positivo, o a la izquierda si es negativo. Desde este punto se efectúa un segundo desplazamiento, cuya longitud y dirección está determinado por las unida-- des y el *signo* del segundo sumando (a la derecha si - es positivo, o a la izquierda si es negativo).

1.5 *Sustracción de números enteros.*

Para las sustracciones utilizaremos esa idea de "ausencia" mencionada en el parágrafo 1.2, así efectuar la resta 7 - 5 será equivalente a responder la -- pregunta; ¿cuánto le falta a 5 para llegar a 7?, o dicho de otra manera, ¿qué número hay que sumar a 5 para obtener 7? Si a ese número que buscamos lo representamos por "x", podemos expresar la última pregunta simbólicamente como

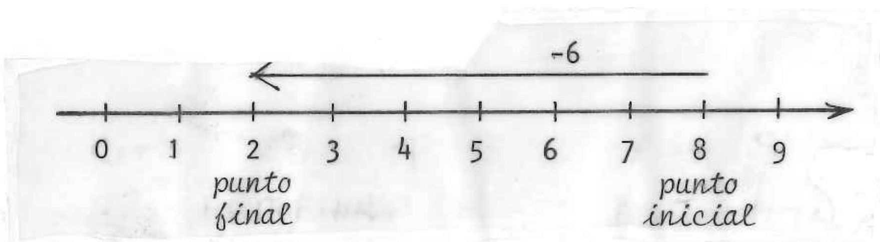
$$5 + x = 7.$$

Así efectuar la resta 7 - 5 significa *resolver la ecuación* anterior: encontrar el valor de x que sumado a 5 nos de 7. En este caso sabemos que la respuesta es $x = 2$, ya que $5 + 2 = 7$. También podemos ayudarnos con la recta numérica para hallar la solución. Localicemos en la recta numérica el número del cual partimos, en este caso el 5, y el número al cual queremos llegar, en este caso el 7. Ahora efectuemos un movimiento desde el punto inicial 5 hacia el punto final 7.

Se trata de un desplazamiento de 2 unidades hacia la *derecha* y por lo tanto es positivo. Entonces

$$7 - 5 = 2 \quad \text{porque} \quad 5 + 2 = 7.$$

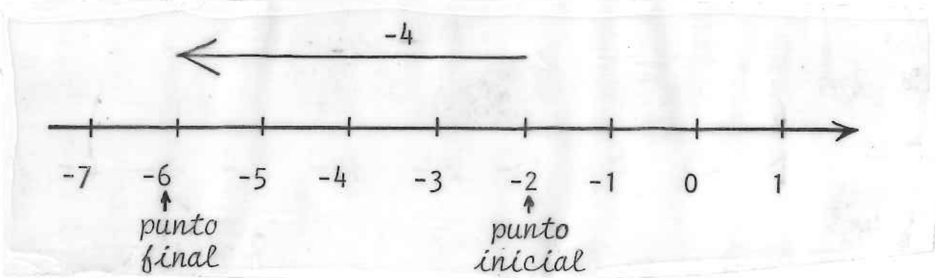
Efectuemos la resta 2 - 8, es decir respondamos a la pregunta ¿cuánto le falta a 8 para ser igual a 2? o simbólicamente, ¿para qué valor de x tenemos que $8 + x = 2$? Ayudémonos con la recta numérica, localicemos 8 y de ahí efectuemos un desplazamiento hasta el 2



Se trata de un desplazamiento hacia la *izquierda*, por lo tanto es *negativo*. La longitud del desplazamiento es de 6 unidades, entonces el número x buscado es -6; es decir:

$$2 - 8 = -6 \quad \text{porque} \quad 8 + (-6) = 2.$$

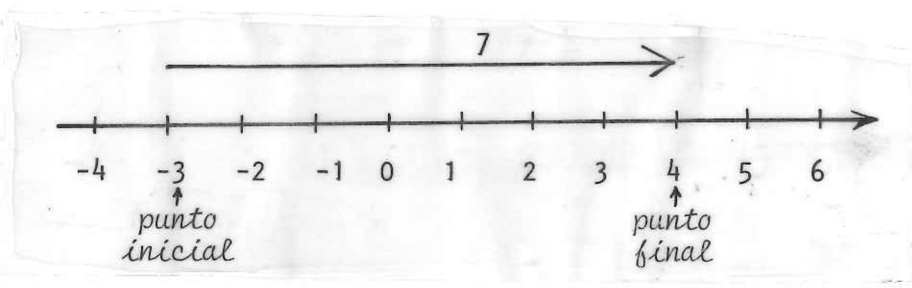
Hagamos ahora la resta (-6) - (-2), es decir, queremos saber cuando le falta a -2 para ser igual a -6, dicho de otra forma, queremos saber para que valor de x tenemos que $(-2) + x = -6$. Localicemos -2 en la recta numérica y desde ahí efectuemos un desplazamiento hasta u-6:



Se trata de un desplazamiento hacia la *izquierda* y por lo tanto es *negativo*. La longitud del desplazamiento es de 4 unidades. Entonces el valor de x buscado es -4, es decir

$$(-6) - (-2) = -4 \quad \text{porque} \quad (-2) + (-4) = -6.$$

Ahora queremos saber cuanto es 4 - (-3), es decir ¿cuánto le falta a -3 para ser igual a 4? o simbólicamente, ¿para qué valor de x tenemos $(-3) + x = 4$? Localicemos en la recta numérica -3 y desde ahí efectuemos un desplazamiento hasta 4:



Se trata de un desplazamiento hacia la *derecha* y por lo tanto es *positivo*. La longitud del desplazamiento es de 7 unidades. Por lo tanto el valor de x buscado es 7, es decir

$$4 - (-3) = 7 \quad \text{porque} \quad (-3) + 7 = 4$$

EJERCICIOS .

1. Hacer las siguientes sumas: $9+(-2)$, $(-7)+(-5)$, $2+8$, $13+(-5)$, $5+(-1)+3+(-5)$, $4+(-1)+(-3)$, $(-3)+10+(-8)$.

2. Hacer las restas siguientes: $(-1)-14$, $9-(-3)$, $0-7$, $(-7)-(-2)$, $(-9)-0$, $(-7)-(-4)$.

3. Comparar los resultados de los siguientes pares de operaciones:

(a) $5-(-2)$; $5+2$	(b) $3-(-6)$; $3-6$
(c) $-7+1$; $7-1$	(d) $11-(-8)$; $11+8$
(e) $-6+8$; $-6-(-8)$	(f) $4+7$; $-4-7$
(g) $-6+11$; $6-11$	(h) $13-7$; $-13+7$
(i) $-8-7$; $8+7$	(j) $-9+4$; $-9-4$
(k) $6-5$; $6+(-5)$	(l) $-8-2$; $-8+(-2)$
(m) $13-(-2)$; $13+2$	(n) $-6-(-3)$; $-6+3$
(o) $-1-4$; $-1+(-4)$	(p) $5-6$; $5+(-6$_
(q) $5-5$; $5+(-5)$	(r) $7+(-7)$; $7-7$.

4. Redactar en forma de "leyes" las observaciones -- realizadas en el ejercicio anterior.

1.6 *Signos.*

Cada número entero tiene su *simétrico;* el resultado de sumar un número con su simétrico es *cero.* -- Así, el simétrico de 4 es -4 y el simétrico de 13 es -13, porque $4+(-4) = 0$ y $13+(-13) = 0$. A su vez, el simétrico de -13 es -(-13) y el simétrico de -4 es -(-4), ello significa que $(-13)+(-(-13))=0$ y que $(-4)+(-(-4))=0$. De aquí, y del párrafo anterior obtenemos el siguiente resultado:

$$(-4) + 4 = 0$$

$$(-4) + (-(-4)) = 0.$$

Podemos entonces concluir que

$$4 = -(-4),$$

lo cual significa que tanto el 4 como el -(-4) son simétricos del -4, o, dicho de otra manera:

> el simétrico del simétrico de un
> número, es el número mismo.

También observamos que

$$(-13) + 13 = 0$$

$$(-13) + (-(-13)) = 0$$

De donde deducimos que $13 = -(-13)$.

En realidad esto sucede para todos los números enteros.

En los ejercicios anteriores pudimos observar que es posible expresar una resta, digamos 5-9, como una suma, empleando el simétrico, en este caso: $5-9 = 5+(-9)$. Esto es posible en todos los casos, si utilizamos las letras a y b para representar dos números enteros cualesquiera, es cierto que

$$a - b = a + (-b) \qquad (1)$$

lo cual se puede leer: a menos b es igual a sumar a más el simétrico de b. También podemos expresar simbólicamente la conclusión sobre el simétrico del simétrico: diremos que para cualquier número entero a, se tiene que

$$a = -(-a) \qquad (2)$$

De las observaciones en los ejercicios anteriores también podemos deducir que el simétrico de una suma es la suma de los simétricos, es decir

$$-(a+b) = (-a) + (-b) \qquad (3)$$

que, utilizando la fórmula (1), podemos expresar como:

$$-(a+b) = -a - b \qquad (4)$$

Así podemos escribir $-3-5 = -(3+5) = -8$.

EJERCICIO

1. Efectuar las operaciones siguientes:

   (a) $-(7+1)-6$ (b) $13-15$

   (c) $(-8+10)-5$ (d) $(11-4)-(3-(-6))$

   (e) $((-5)+6)-2.$

1.7 *Multiplicación de números enteros.*

El producto de dos factores en realidad expresa una suma repetida. La interpretación de dicha suma depende del signo de los factores. Cuando el primer factor es *positivo* indica el número de veces que hay que sumar el segundo factor, ya sea que éste sea positivo o negativo. Así, por ejemplo:

$$3 \times 4 = \underbrace{4 + 4 + 4}_{3 \text{ veces}}.$$

$$5 \times (-2) = \underbrace{(-2)+(-2)+(-2)+(-2)+(-2)}_{5 \text{ veces}}.$$

Ilustremos con la recta numérica:

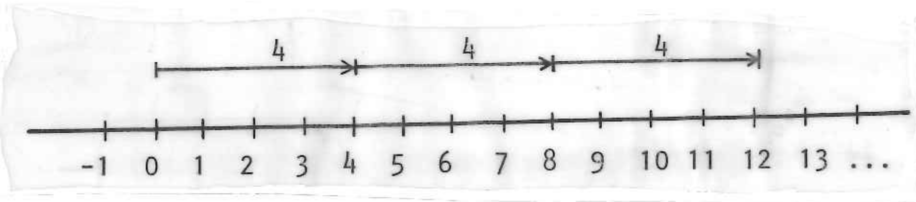


Fig. 1.9 $3 \times 4 = 12$.

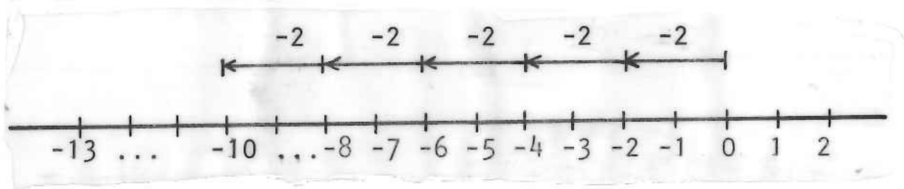


Fig. 1.10 $5 \times (-2) = -10$.

Cuando el primer factor es *negativo* nos fijamos en el número de unidades, independientemente del signo, - - ellas nos indican el número de veces que hay que sumar el *simétrico del segundo factor.* por ejemplo el producto $(-6) \times 7$ significa que hay que sumar 6 veces el simétrico de 7, es decir

$$(-6) \times 7 = \underbrace{(-7)+(-7)+(-7)+(-7)+(-7)+(-7)}_{6 \text{ veces}}$$

Del caso anterior podemos deducir que esta última suma no es más que el producto $6 \times (-7)$, es decir

$$(-6) \times 7 = 6 \times (-7).$$

El resultado de este última operación, ya lo sabemos, es -42.

Veamos algunos ejemplos:

1. Efectuar la multiplicación 3×8.

$$3 \times 8 = \underbrace{8+8+8 = 24}_{3 \text{ veces}}.$$

2. ¿Cuánto es $5 \times (-12)$?

$$5 \times (-12) \underbrace{= (-12)+(-12)+(-12)+(-12)+(-12) = -60}_{5 \text{ veces}}.$$

3. Encontrar el resultado de $(-2) \times 7$.

$$(-2) \times 7 = \underbrace{(-7)+(-7) = -14.}_{2 \text{ veces.}}$$

Nótese que $(-2) \times 7 = 2 \times (-7)$.

4. Efectuar la multiplicación $(-6) \times (-4)$.

$$(-6) \times (-4) = \underbrace{4+4+4+4+4+4}_{6 \text{ veces}} = 24.$$

Nótense dos cosas. Primera: el simétrico de -4 es 4

Segunda: $(-6) \times (-4) = 6 \times 4$.

Observando estos ejemplos y realizando otros podemos deducir dos reglas que son válidas para cualquier producto de enteros:

1. Si los dos factores tienen el mismo signo, el resultado es positivo.

2. Si los factores tienen signo distinto, el resultado es negativo.

El ejemplo siguiente nos ilustra otra regla que comunmente se enuncia como: *el orden de los factores no altera el producto.*

EJEMPLO:

Efectuar la multiplicación $7 \times (-3)$.

$$7 \times (-3) = \underbrace{(-3)+(-3)+(-3)+(-3)+(-3)+(-3)+(-3) = -21}_{7 \text{ veces}}.$$

Invertimos ahora el orden de los factores:

$$(-3) \times 7 = \underbrace{(-7)+(-7)+(-7)}_{3 \text{ veces.}} = -21.$$

El producto o resultado es el mismo independientemente del orden en que consideremos los factores.

EJERCICIOS

1. Efectuar las siguientes multiplicaciones.

   (a) 7x8 (b) 7x(-8)

   (c) (-7)x(-8) (d) (-7)x8

2. Efectuar las operaciones siguientes.

   (a) 5x(4+2) (b) (-6)x(7-5)

   (c) 9x(-3-(-4)) (d) (-13)x((-4)+(-1))

   (e) (7+6)x(-10-8) (f) (-3+(-8))x(2-5)

3. Efectuar las operaciones siguientes.

   (a) (8x3)+(5x(-2)) (b) ((-3)x11)-4x(-7))

   (c) (6x4)+(12x4) (d) ((-2)x5)-((-2)x8)

   (e) 4x(6+12) (f) (-2)x(5-8)

1.8 *Factor común.*

Si observamos los resultados de las operaciones (c), (d), (e) y (f) del ejercicio 3 anterior podemos obtener conclusiones que también son válidas para otros casos similares. Cuando efectuamos sumas o restas de números que a su vez están presentados como el producto de dos enteros, sucede a menudo que dichos productos tienen un *factor común*, por ejemplo, los productos 2 x 6, 2 x 5, 2 x (-7), tienen un factor común: el número 2 es uno de los factores en cada uno de los productos. Efectuemos la suma de productos

$$(2x6)+(2x(-7)) = \underbrace{(6+6)}_{2\text{ veces}}+\underbrace{((-7)+(-7))}_{2\text{ veces}} = 12+(-14) = -2.$$

El resultado de esta operación es el mismo que si *sacamos el factor común*, sumamos los otros factores y ese resultado lo multiplicamos por el factor común, es decir:

$$(2x6)+(2x(-7)) = 2x(6+(-7)) = 2x(-1) = -2.$$

Podemos expresar simbólicamente lo anterior diciendo que si a, b y c son tres números enteros cualesquiera, entonces

$$ab + ac = a(b+c) \qquad (5)$$

1.9 *La división.*

Cuando nos preguntamos el resultado de una división entre números enteros, en realidad nos estamos preguntando cúal es un factor en una cierta multiplicación La pregunta ¿cuánto es 36 entre 9?, se expresa simbólicamente de cualquiera de las maneras siguientes:

$$9\overline{)36}, \quad \frac{36}{9}, \quad 36 \div 9$$

Y como dijimos inicialmente, hace referencia a otra pregunta que es: ¿Cuál es el número que multiplicado por 4 da 36? Si llamamos x al número en cuestión, podremos expresar simbólicamente la última pregunta de la manera siguiente: Encontrar qué número x cumple con

$$9x = 36.$$

(En este caso se omite la cruz del símbolo de multiplicar).

Sabemos que 9x4 = 36, es decir 4 es el número que al multiplicarlo por 9 da 36, esto significa que 4 es el resultado de dividir 36 entre 9. Es común interpretar la división como una *repartición* da cierto número de objetos entre un determinado número de personas, el resultado será la cantidad de objetos que le corresponde a cada persona. En el ejemplo anterior pudiéramos suponer que tenemos 36 naranjas y las vamos a repartir entre 9 niñas, nos preguntamos entonces cuántas naranjas le corresponde a cada una; la respuesta es que a cada una le corresponden 4 naranjas.

EJEMPLO:

Efectuar la división $21 \div 7$. Ello equivale a encontrar un número x de manera que al multiplicarlo por 7, de 21. simbólicamente, encontrar x tal que

$$7x = 21$$

El factor buscado es 3 porque $7 \times 3 = 21$, es decir

$$21 \div 7 = 3$$

EJEMPLO:

Efectuar la división $48 \div 6$. Esto equivale a encontrar el factor que multiplicado por 6, de 48. Entonces

$$48 \div 6 = 8 \quad \text{porque} \quad 6 \times 8 = 48.$$

En una división, el producto conocido se llama *dividendo*; el factor conocido, *divisor* y el factor buscado, *cociente*. En el ejemplo anterior 48 es el dividendo, el número 6 es el divisor y el 8 es el cociente.

Plantear una división significa descomponer en dos factores un producto dado: el dividendo, donde también está dado uno de los factores: el divisor.

EJEMPLO:

Efectuar la división $(-24) \div 3$.

El producto conocido, o dividendo, es -24, el factor dado, o divisor, en 3. La pregunta es ¿cuál es el -- factor (al que llamaremos cociente) que multiplicado por 3 da -24? La respuesta es

$$(-24)\div 3 = -8 \quad \text{porque} \quad 3x(-8) = -24.$$

EJEMPLO:

Efectuar la división $(-42) \div (-6)$. La respuesta es

$$(-42)\ (-6) = 7 \quad \text{porque} \quad (-6)x7 = -42.$$

Al efectuar divisiones entre números enteros encontramos dos dificultades principales. Una es que la división *no sea exacta*, es decir que el producto del factor dado por otros ciertos factores, sólo *se aproxima* al producto dado, por ejemplo, efectuemos $15 \div 2$: - - que número multiplicado por 2, de 15? Sabemos que -- $2 \times 7 = 14$ y que $2 \times 8 = 16$; ningún entero multiplicado -- por 2 da 15. En todo caso podemos expresar el producto dado como el factor dado multiplicado por otro factor, que también llamaremos cociente, y sumado a un - *resto* que es la cantidad que le falta a este producto para igualar el producto dado; en este caso el producto dado que es 15, lo podemos expresar como

$$15 = 2 \times 7 + 1,$$

el cociente es 7 y el resto es 1.

Pera encontrar el cociente y resto tenemos el conocido método llamado "algoritmo de la división". Si queremos efectuar la división 5372 ÷ 21 lo hacemos así

$$
\begin{array}{r|l}
 & 255 \\
21 & 5372 \\
 & 117 \\
 & \;\;122 \\
 & \;\;\;17
\end{array}
$$

El cociente es 255 y el resto o *residuo* es 17. Significa que podemos expresar el producto dado como

$$5372 = 21 \times 255 + 17.$$

1.10 *Fracciones.*

Para ilustrar la otra dificultad nos restringiremos a los enteros positivos; consiste en que si el -- producto dado es menor que el factor dado, es decir - si el dividendo es menor que el divisor, entonces no habrá cociente que siquiera aproxime al dividendo cuando lo multipliquemos por el factor dado, por ejemplo la división 7 ÷ 56 plantea encontrar un número que multiplicado por 56, nos de 7. La imposibilidad de efectuar esta operación utilizando solamente números enteros nos la ilustraban en la escuela con la dificultad de repartir 7 naranjas, *sin partirlas*, entre ¡56 niñas!

Esta última ilustración esboza una posible solución - que sería precisamente *partir las naranjas*. Si hay - 56 niñas pues partamos *cada naranja* en 56 *partes iguales*, y de cada naranja demos a cada niño una de esas 56 partes (a cada una de esas 56 partes iguales se le llama un cincuenta y seisavo de naranja, también se escribe así: un 56-avo de naranja; y simbólicamente se representa así:

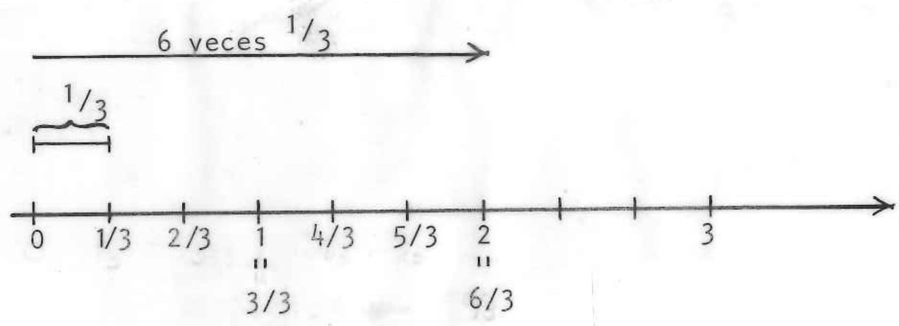
$$\frac{1}{56}$$

que significa el resultado de partir la unidad en 56 partes iguales). Como hay 7 naranjas, a cada niña le corresponderán 7 de esos cincuenta y seis-avos de naranja. Esto, simbólicamente, se escribe así

$$\frac{7}{56}$$

y se lee: "siete cincuenta y seis-avos"

En esta solución, donde repartimos en partes iguales lo que tenemos aunque nadie obtenga una unidad, introdujimos subrepticiamente un nuevo tipo de número, las fracciones. Ejemplos de fracciones son 1/5, 3/7, - - 21/44. La primera representa una parte de las obtenidas al dividir en 5 partes la unidad; la segunda nos indica que dividamos la unidad en 7 partes y que consideremos 3 de ellas; la última nos dice que dividamos la unidad en 44 partes y que consideremos 21 de ellas. Notemos que, siguiendo este tren de ideas, que también 6/3 es una fracción, estrictamente hablando. Indica que dividamos la unidad en 3 partes; ilustremos con la recta numérica



y que consideremos la suma de esa fracción 1/3, 6 veces. Esto proceso nos conduce al entero 2 y nos obliga a afirmar que "seis tercios es igual a dos" lo cual es cierto: $6 \div 3 = 2$ porque $3 \times 2 = 6$. ¡Hay consistencia entre nuestro concepto de división y el de fracción!

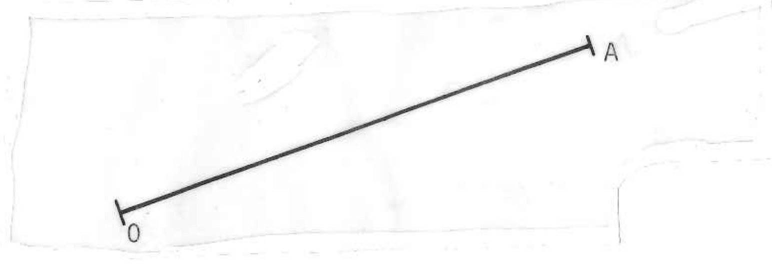
Vemos entonces que expresiones tales como 13/5, 20/9 ó 57/13, también son fracciones.

Las *fracciones o números racionales positivos* son los números que expresan la división de dos enteros positivos, en este caso al dividendo se le llama *numerador* y al divisor se le llama *denominador*. A las fracciones se les exige que tengan el *denominador distinto de cero* (¿qué significado tiene dividir la unidad en cero partes?). Estos números racionales positivos también tienen su lugar en la recta numérica. Localicemos en la recta numérica el lugar de la fracción 13/5. Según nuestra definición, la fracción 13/5 ocupa el lugar señalado al colocar 13 veces la longitud correspondiente a un quinto de la unidad. El problema se reduce a dividir el segmento unidad en cinco partes iguales, la longitud de una de ellas será precisamente 1/5.

Dividir un segmento de recta dado en un número determinado de partes iguales, constituye un problema de geometría, cuya solución se basa en propiedades de triángulos semejantes y en axiomas que conforman la base de la geometría. A continuación ilustramos el método con un ejemplo.

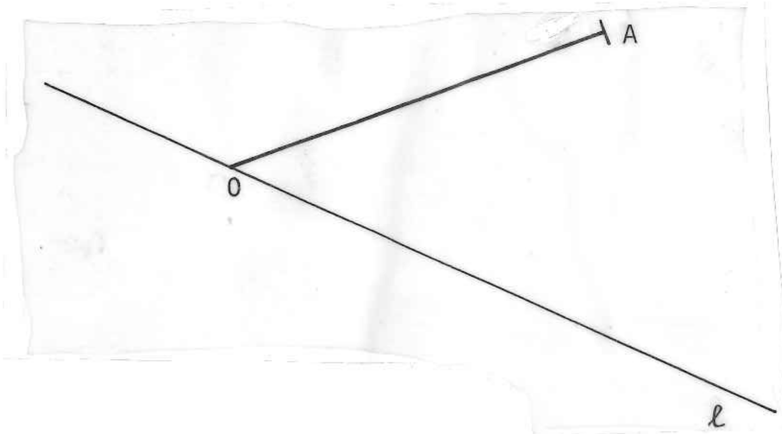
EJEMPLO:

Dividir el segmento OA en 3 partes iguales

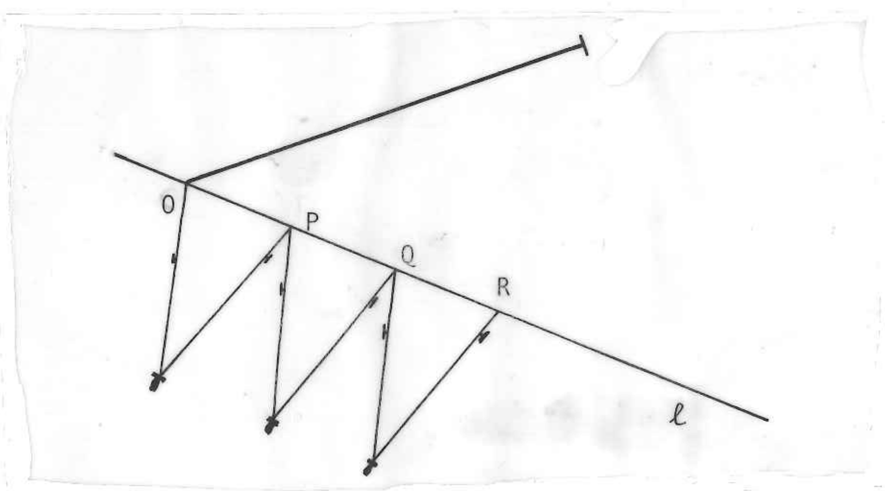


Para ello trazamos un recta *cualquiera* ℓ que pase por

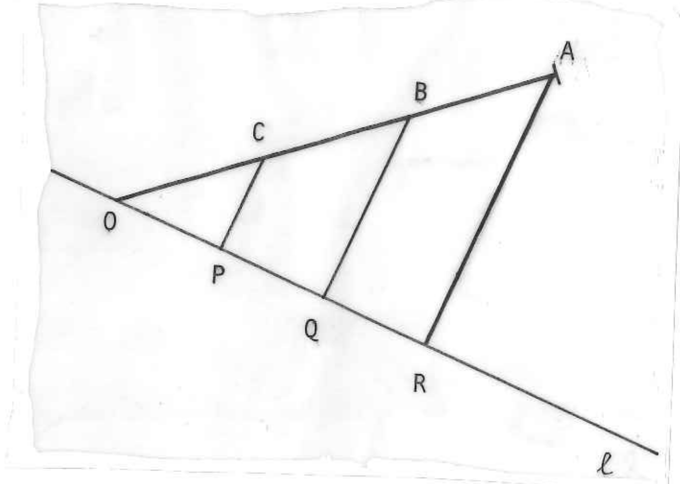
0, pero que no contenga al segmento OA



Con un compás con abertura *cualquiera, pero sin cambiarla*, señálense a partir de 0 y sobre la recta ℓ, - 3 veces esa longitud, marcando los puntos *P*, *Q* y *R*



A continuación únanse los puntos *R* y *A* por una recta, y trácense paralelas a esta recta por los puntos - - *Q* y *P* obteniendo los puntos *B*, *C* donde cortan las paralelas al segmento OA.



Los puntos *B* y *C* dividen al segmento en 3 partes iguales.

Volviendo al problema de localizar el lugar de la fracción 13/5 en la recta numérica, aplicamos el método anterior y dividimos el segmento unidad en cinco -- partes iguales: Por el origen trazamos una recta, sobre esa recta y a partir del origen marcamos cinco longitudes iguales obteniendo puntos *P*, *Q*, *R*, *S* y *T*; unimos *T* con el extremo del segmento unidad, con el lugar del número 1. A continuación, por los puntos *P*, *Q*, *R*, y *S* trazamos paralelas a la recta que une *T* con 1 y -- obtenemos los puntos *A*, *B*, *C* y *D* de corte. Estos puntos constituyen la división del segmento unidad en cinco partes iguales. Ver la Figura 1.11

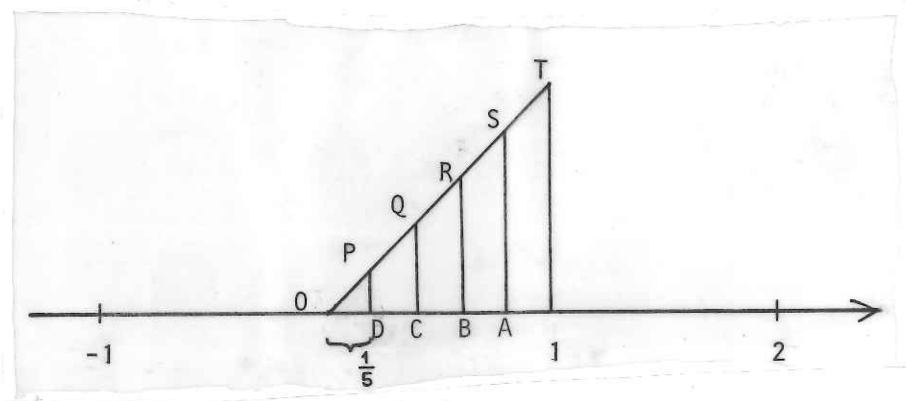


Fig. 1.11 Una quinta parte del segmento unidad.

Una vez dividido en cinco partes iguales al segmento - unidad, efectuamos una desplazamiento desde el cero -- hacia la derecha, de 13 veces esa longitud correspon-- diente a 1/5

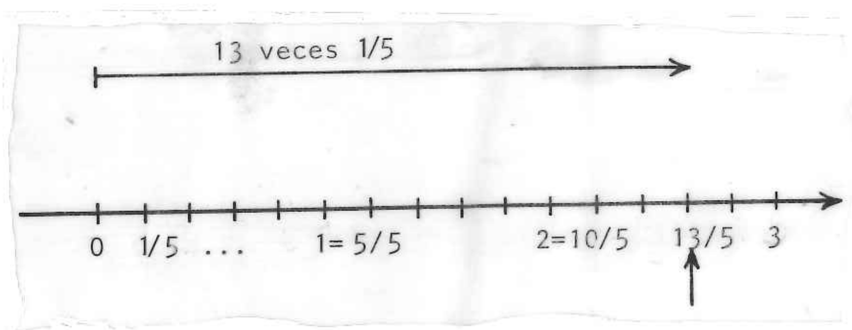


Fig. 1.12 13/5 = 2 + 3/5

La figura 1.12 ilustra dicha localización, se trata de un punto situado entre el 2 y el 3, de hecho a una dis_ tancia de 3/5 del 2.

Con el mismo método podemos localizar cualquier fracción p/q donde p y q son números enteros positivos y q es distinto de cero: Se divide el segmento unidad en q partes iguales y se hace un movimiento a partir del cero, hacia la derecha, de p veces esa longitud de un q-ésimo. Esto nos sitúa en el lugar de la fracción p/q.

Nótese que a cada fracción le corresponde un lugar en la recta numérica y que a fracciones "iguales" o "equivalentes", como 4/2 y 10/5; o como 2/6 y 4/12, les corresponde el mismo punto.

También consideraremos las fracciones negativas como las simétricas de las positivas, por ejemplo, la simétrica de 1/5 es -1/5, la de 12/7 es -12/7. El lugar de -13/5 se encuentra así: con un compás hacemos centro en 0 y con abertura correspondiente a la longitud del segmento que va del cero a la fracción 13/5, señalamos un punto en el lado opuesto de la recta; ese es el lugar de -13/5. Ver Figura 1.13.

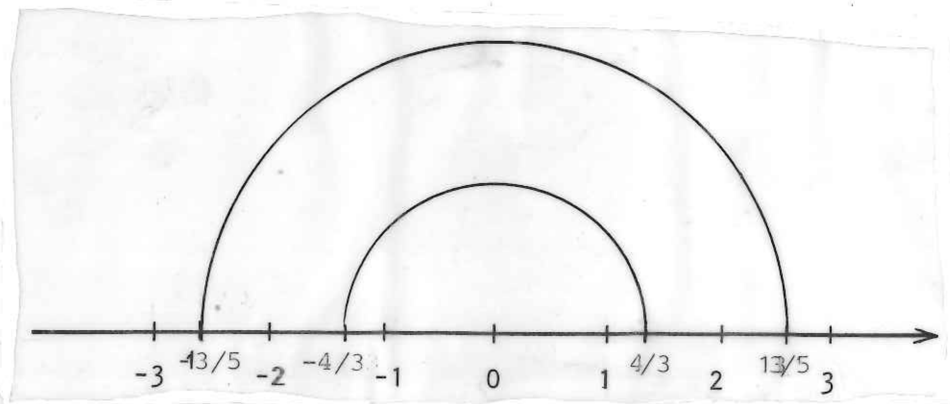


Fig. 1.13 El lugar del simétrico.

También consideraremos al cero como una fracción, lo cual tiene sentido, por ejemplo 0/3 = 0 ya que si no tengo naranjas y quiero repartirlas entre 3 niñas, -- pues a cada una le corresponde 0 naranjas.

Nótese además que cualquier número entero es una fracción. Por ejemplo el 7 = 7/1, aunque también 7 = 14/2; análogamente -4 = -4/1 ó digamos, -4 = -12/3.

Podemos concluir que hemos ampliado el conjunto de números a nuestra disposición, dentro de los cuales están los enteros. Tenemos ahora el conjunto de los *números racionales o fracciones*, que representaremos por la letra $\mathcal{Q}$.

Recordemos que cada número natural es a su vez un número entero; vemos ahora que cada número entero es a su vez un número racional.

Expresamos simbólicamente esta situación, de la siguiente manera:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

Esto se lee así: "Los números naturales están contenidos en los números enteros que a su vez están contenidos en los números racionales", y significa lo mencionado en el párrafo anterior.

Tenemos ahora nuevos números a nuestra disposición y con ellos podemos efectuar las operaciones elementales El significado de las operaciones no varía, sin embargo tenemos aquí maneras de efectuar operaciones entre fracciones reduciéndolas a operaciones entre números enteros. Las reglas son las siguientes:

Si a, b, c y d son números enteros y b y d son diferentes de cero, entonces:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \tag{6}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \tag{7}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc} \tag{8}$$

Nuevamente se define la resta como la suma con el simétrico:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \left(\frac{-c}{d}\right) \qquad (9)$$

Es importante notar que en este caso siempre es posible efectuar la división entre dos fracciones (con el divisor distinto de cero) y el resultado es otra fracción.

EJERCICIOS.

1. Localizar en la recta numérica las siguientes - - fracciones: 2/7, -3/4, 12/4, 7/5, 1/3, -5/2, 6/9, 3/10, 5-/10.

2. Efectúa las operaciones siguientes:

(a) $\frac{3}{5} + \frac{2}{8}$

(b) $\frac{7}{6} - \frac{8}{6}$

(c) $\frac{4}{11} + \left(\frac{-5}{3}\right)$

(d) $\frac{2}{3} \times \frac{7}{4}$

(e) $\frac{-6}{8} \times \frac{1}{13}$

(f) $\left[\frac{5}{7}\left(\frac{-2}{13} + \frac{3}{2}\right)\right] \div \frac{7}{10}$

(g) $\left(\frac{6}{5} \div \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{2}{15} \times \frac{3}{7}\right)$

(h) $\left(\frac{6}{9} \times \frac{-3}{2}\right) - \left(\frac{1}{4} \times \frac{9}{12}\right)$

(i) $\left(\frac{-7}{9} + \frac{8}{3}\right) \div \frac{10}{11}$

(j) $\frac{9}{5}\left(\frac{2}{7} - \frac{3}{4}\right)$

1.11. *Simplificaciones.*

Habremos notado, al hacer los ejercicios anteriores, que muchas veces es posible expresar una fracción de forma más sencilla, por ejemplo 2/8 = 1/4, ó 6/9 = 2/3, ó 9/12 = 3/4, ó -6/8 = -3/4. El criterio que nos permite establecer la igualdad de dos fracciones es el siguiente:

$$a/b = c/d \text{ si sucede que } ad = bc \qquad (10)$$

Entonces, 2/8 = 1/4 porque 2x4 = 8x1, 9/12 = 3/4 porque 9x4 = 12x3 y -6/8 = -3/4 porque (-6)x4 = 8x(-3).

La manera como obtenemos formas más simples de una fracción es detectando si el numerador y el denominador tienen algún factor común, por ejemplo.

$$\frac{9}{12} = \frac{3x3}{4x3}$$

Esta descomposición en factores puede descomponerse en una multiplicación de fracciones

$$\frac{9}{12} = \frac{3x3}{4x3} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{3}$$

y sabemos que 3/3 es precisamente 1, obtenemos

$$\frac{9}{12} = \frac{3x3}{4x3} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{3} = \frac{3}{4} \times 1 = \frac{3}{4}$$

que esta forma simplificada podemos describir este proceso diciendo simplemente que "sacamos tercera al numerador y al denominador", esto fue posible porque ambos son divisibles por 3. Otro ejemplo; simplificar 10/14. Sacando mitad la numerador y al denominador obtenemos

$$\frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

Se corrobora fácilmente que este proceso conduce a una fracción equivalente, en este caso: 10x7 = 14x5.

EJERCICIO

1. Realizar las simplificaciones posibles en el ejercicio anterior.

1.12 *Mediciones.*

Hasta ahora tenemos un conjunto de números, los racionales, con los cuales podemos efectuar las operaciones elementales. Nos ocuparemos a continuación de un proceso que la humanidad efectúa desde hace miles de años, el proceso de *medir.* Consideremos el problema siguiente: *Medir la longitud del segmento de recta* *AB* mostrado a continuación.

Medir la longitud de un segmento significa decir *cuantas veces cabe una unidad prefijada en el segmento dado*, así que para resolver el problema plantedo, de medir el segmento dibujado arriba, es necesario disponer de un *segmento unidad o unidad de medición*. Supongamos, para ilustrar el concepto de medir, que la unidad de medición es el segmento u mostrado a continuación

Tiene sentido así, resolver el problema; si transladamos la longitud u mediante la abertura de un compás y comenzando por A lo llevamos consecuentemente a lo largo del segmento AB; según desprendemos de la figura 1.14, el segmento u cabe 2 veces en el segmento AB, pero no llega a caber 3. Decimos entonces que AB mide 2 unidades u, *y fracción* sin embargo, sólo,

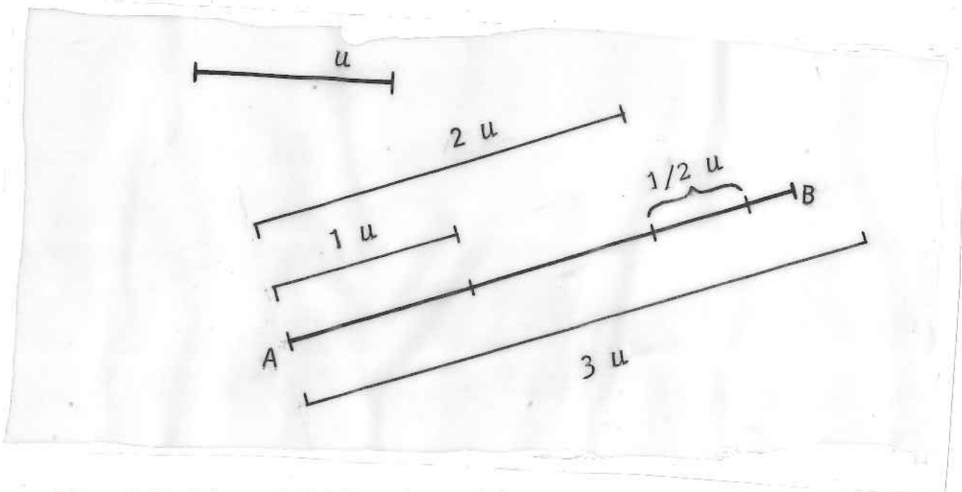


Fig. 1.14 Midiendo AB

sólo constituye una primera aproximación. El uso de la frase "... y fracción" conlleva multitud de posibilidades respecto a lograr más y *mejores* aproximaciones. Si analizamos la figura 1.14 vemos que si bien el segmento u no cabe en AB una tercera vez, sí cabe la mitad. Podemos entonces decir que AB mide 2 veces y media u, más una fracción. Hemos realizado una segunda aproximación. Si quisiéramos una nueva aproximación intentaríamos expresar esa fracción que "queda sin medir" con alguna división de u en partes iguales, y añadirla en la descripción de la medición de la longitud de AB. Nótese que en este proceso de aproximación empleamos una unidad de medida *prefijada* y la medición quedará expresada en términos de *esa* unidad. Si cambiáramos la unidad cambiaría la *medición*. No queremos decir con ello que cambie la longitud del segmento AB, esta *longitud* es una, lo que cambia es su *medición* dependiendo de la *unidad* utilizada.

A este respecto hay dos consideraciones de importancia. La primera es la relación existente entre contar y medir, recordemos que sumar significa contar, en determinada dirección, en la recta numérica, cierto número de veces el segmento unidad que va de 0 a 1. Como los enteros positivos marcados en la recta numérica señalan el número de veces que se ha transportado la longitud del segmento unidad a lo largo del eje, esto significa que *podemos usar la recta numérica para medir*. Si hacemos coincidir el 0 de la recta numérica con el extremo A del segmento y hacemos coincidir el eje con el segmento AB de manera que B esté del lado de los enteros positivos, entonces, así, el punto B coincidirá con algún punto de la recta numérica. El número correspondiente a ese punto será la medición de la longitud en términos de la unidad escogida, en este caso dependerá de la longitud del segmento unidad de la recta numérica. Entonces: hemos usado la recta numérica para medir.

La segunda se refiere a la elección de la unidad de medida. Es fácil imaginar los problemas que tendríamos si cada uno usáramos para medir unidades distintas, que incluso variáramos cada vez. No tendría sentido comunicar resultados de nuestras mediciones - ni comparar mediciones efectuadas con unidades de medida distinta, a menos que conociéramos la relación - que guardan entre sí esas unidades. Estos problemas se presentaron realmente en la antigüedad, las mediciones de lienzos en *varas* dependían de la longitud - de la vara que usara un comerciante u otro. Actualmente hay lugares donde se venden frutas o granos por - "medida", donde esta "medida" es un cuenco de madera cuyo tamaño varía según el vendedor. La extensión del comercio y la relación entre pueblos más lejanos exigieron la adopción de una determinada unidad de medida, aceptada socialmente. Esta unidad la conocemos como *el metro*. El metro es la unidad de medida socialmente aceptada. Es esa longitud prefijada que mencionamos al definir el proceso de medición. Ahora bien, si el metro es la unidad de medida prefijada ¿donde está prefijada? ¿donde está la longitud que tomaremos como referencia? Con el afán de que esa longitud fuera un invariante en la naturaleza, de manera de poder "recuperarla" cada vez que fuera necesario, se definió el metro como la diezmillonésima parte de la longitud de un cuadrante de meridiano terrestre; esta referencia resultó poco práctica e inexacta. Posteriormente se construyó una barra de platino iridiado con dos marcas definiendo como metro la longitud entre esas dos marcas. La definición actual es: un metro es igual a 1,650,763.73 longitudes de onda, en el vacío, de kriptón 86, del nivel $2p_{10}$ a nivel $5d_5$. Seguramente la definición del metro irá evolucionando conforme avance la ciencia y la tecnología.

Para efectos prácticos, al menos para estas Notas, usaremos como unidad el *centímetro* que es una centésima parte del metro, es la longitud obtenida al dividir el metro en cien partes iguales. Al hacer que la longitud del segmento unidad de la recta numérica sea un centímero, estaremos conviertiéndola en un instrumento para medir. Entonces: Requerimos *una* unidad de medida, esta es el centímetro.

Volvamos al problema con que iniciamos este parágrafo. Se trata de medir la longitud del segmento AB dibujado. Podemos reformular el problema mediante la pregunta ¿cuántos centímetros mide el segmento AB?.

Ahora el problema se reduce a disponer de una recta numérica, un ejemplar físico, cuyo segmento unidad corresponda con la longitud de un centímetro (en realidad, en las papelerías venden trozos de rectas numéricar les llaman decímetros y se usan en la escuela; en las ferreterías venden trozos mas grandes de dichas rectas). Aplicamos dicho instrumento al segmento AB,

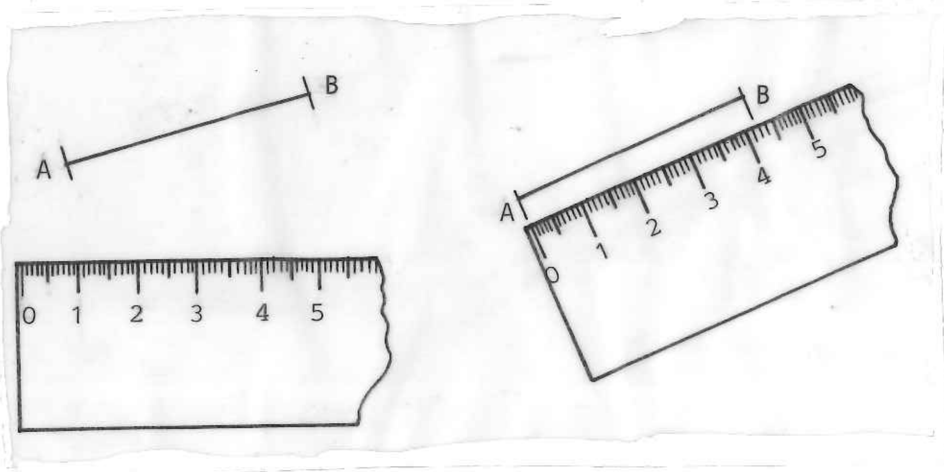


Fig. 1.15. Midiendo AB.

como se ilustra en la figura 1.15. Como ya dijimos, el extremo B del segmento coincidirá con algún punto en la recta numérica; el número correspondiente a ese punto, será la longitud de AB expresada en centímetros.

1.13 *Decimales.*

Según la figura 1.15, el segmento AB mide 4cm. y fracción. Esta fracción la expresaremos en términos de partes iguales en la que dividimos el centímetro. Dividamos el centímetro en 10 partes iguales, cada una de ellas será 1/10 de centímetro. Vemos en la figura 1.15. que en AB caben 4 cm, mas 2/10 de centímetros y queda todavía un pequeño segmento sin medir. Si queremos lograr una mejor aproximación, dividiendo este décimo de centímetro en 10 partes iguales, obtendríamos un segmento de longitud igual a 1/100 de centímetro y si mediante una lente de aumento observáramos el pedazo que falta por medir, veríamos cuántos de estos centésimos de centímetros caben ahí, digamos que cupieran 7/100, entonces la medida del segmento expresada en centímetros sería;

$$4 + \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \text{(posiblemente) una fracción.}$$

Nótese que dependiendo de nuestros recursos tecnológicos podemos continuar este proceso y lograr *mejores aproximaciones* en nuestra medición. Como respuesta a la cuestión planteada al principio del parágrafo 1.12, podemos decir que el segmento mide aproximadamente $4 + \frac{2}{10} + \frac{3}{100}$ centímetros. Este número tiene como *expresión decimal* la siguiente:

$$4 + \frac{2}{10} + \frac{7}{100} = 4.27$$

Esto nos ilustra el significado de los números decimales. Los dígitos a la derecha del punto decimal representan, cada uno, el número a considerar de subsecuentes divisiones de la unidad en 10 partes iguales.

Así como dado un punto en la recta numérica localizamos su expresión decimal, que puede requerir inclu so una infinidad de divisiones subsecuentes, también, dada una expresión decimal, podemos localizar un punto en la recta numérica que sea su correspondiente. Lo ilustraremos con un ejemplo:

EJEMPLO: Localizar en la recta numérica el punto correspondiente al número decimal 2.375

El punto estará situado a 2 unidades más un segmento. Dividamos el segmento que va de 2 a 3 en 10 partes iguales y ubiquemos el punto $2 + \frac{3}{10}$.

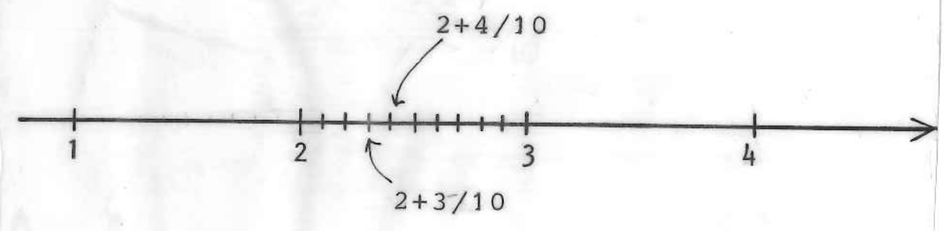


Fig. 1.16 Décimas

Ahora dividamos el segmento que va de $2 + \frac{3}{10}$ a $2 + \frac{4}{10}$ en 10 partes iguales. Amplifiquemos la figura anterior.

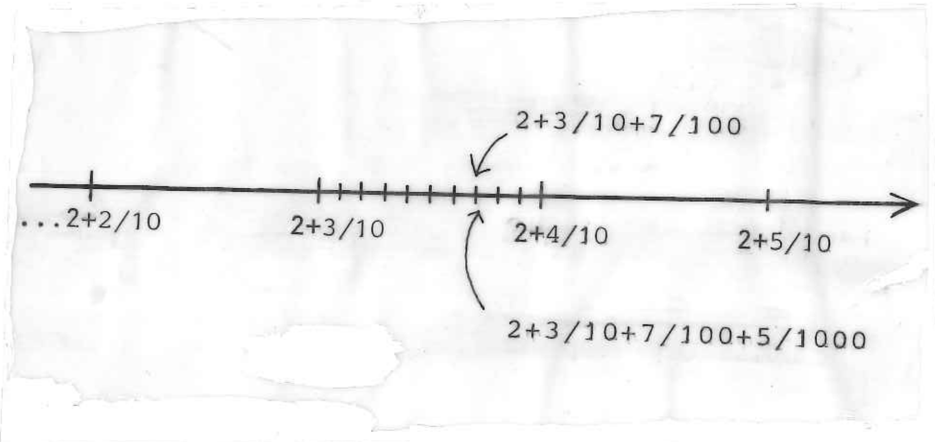


Fig. 1.17. Centésimas y, con imaginación, milésimas.

En ese segmento contemos 7/100 y localizaremos el punto correspondiente a 2.37. Es difícil continuar, en la práctica, este proceso; si dividimos al centésimo en 10 partes iguales obtendremos milésimos y de ahí mediríamos 5 milésimas. El resultado sería la localización del punto, que en la figura 1.17 hemos hecho de manera aproximada,

Hemos ampliado nuestro conjunto de números. Tenemos números naturales, enteros, fracciones y decimales. Los representamos todos en la recta numérica y con ellos podemos efectuar las operaciones elementales: suma, recta, multiplicación y división.

En este capítulo hicimos una descripción sencilla de los números que conforman la recta numérica. En los capítulos posteriores veremos cómo es posible representar matemáticamente gran variedad de problemas y resolverlos con ayuda de estos números y sus operaciones.

★ ★ ★

BIBLIOGRAFIA

1. O Figueras, E. Filloy y otros
Matemática, 100 horas
Fondo Educativo Interamericano, México, 1981.

2. S. Rosell
Matemática. Primera parte.
Editora del Ministerio de Educación, La Habana, 1963.

3. S. Rosell
Matemática. Segunda parte.
Pueblo y Educación. La Habana, 1968.