#81

SERIE
MATEMÁTICAS

Pablo Barrera Sánchez

La teoría y la práctica de la convergencia de sucesiones. Parte I: Motivación

AÑO
2007

VÍNCULOS MATEMÁTICOS

FACULTAD DE CIENCIAS

VÍNCULOS MATEMÁTICOS

LA TEORÍA Y LA PRÁCTICA DE LA CONVERGENCIA DE SUCESIONES
PARTE I: MOTIVACIÓN

Pablo Barrera Sánchez*

VÍNCULOS MATEMÁTICOS NO. 81. 2009

(*) Profesor de la Facultad de Ciencias de la UNAM. Primera edición: 1990
Impreso en la Coordinación de Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM

En este trabajo se discute la necesidad de contar con conceptos que nos puedan indicar que tan rápido converge una sucesión. En la segunda parte se presentarán algunos de estos conceptos formalmente, y en una tercera parte se presentaran sus aplicaciones en algunos métodos numéricos.

Agradezco a Gloria Olimpia Rivas su amabilidad al leer el trabajo y sugerir algunas correcciones. También agradezco a Lucina Parra A. su excelente trabajo de mecanografiado.

MOTIVACION

En esta plática quiero difundir algunos conceptos Matemáticos que se han desarrollado recientemente y - que son de gran relevancia por sus aplicaciones en la práctica.

Sucede que para una enorme cantidad de problemas Matemáticos la solución no se puede encontrar por medio de fórmulas después de un número finito de operaciones.

Ejemplo:

Calcular las raíces de

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Cuando esta ecuación tiene soluciones, éstas se pueden obtener a través de la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

sin embargo, las soluciones de:

$$e^x = x + 2$$

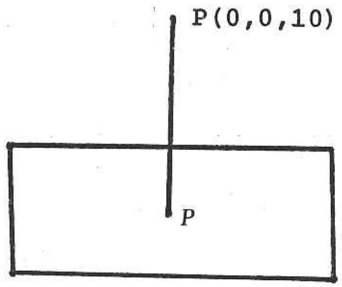
$$y = e^x$$

$$y = x + 2$$

no se pueden obtener por medio de una fórmula análoga al caso de la ecuación cuadrática.

Ejemplo

Supongase que se quiere encontrar el punto P_0 mas cercano del plano $x+y+z=1$ al punto $P=(0,0,10)$



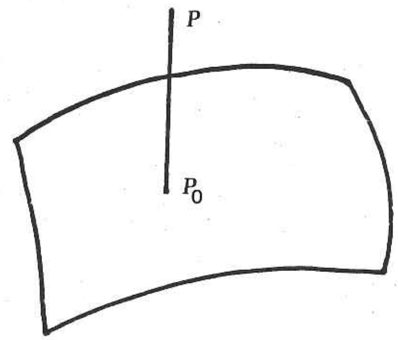
$x+y+z=1$

este problema clásico de la geometría analítica lo resolvemos esencialmente a partir del hecho, que la recta PP_0 tiene que ser ortogonal al plano $x+y+z=1$, es decir encontramos la recta que pasa por $P(0,0,10)$ y - que es normal al plano $x+y+z=1$, finalmente encontramos el punto de intersección de la recta y el plano; esto es equivalente a resolyer un sistema de ecuaciones lineales, que es un problema que se puede resolver en un número finito de operaciones.

Consideremos ahora el problema semejante de encontrar las coordenadas del punto P_0 de la superficie:

$$Z = xy + \operatorname{sen}(xy) + x - y^2$$

al punto $P(0,0,1)$.



este problema se aborda en forma totalmente análoga al anterior, sin embargo esta vez las condiciones de ortogonalidad nos llevan a la solución de un sistema de ecuaciones no-lineales.

$$f_1(x,y) = 0$$

$$f_2(x,y) = 0$$

Esta vez no contamos con un método general para resolver este problema, mucho menos con una fórmula.

Resulta que en muchos problemas de la Ingeniería y otras ramas de la Ciencia se presentan problemas que se pueden traducir a problemas geométricos análogos a este último: lo que cambia usualmente es el número de variables, las funciones son de lo mas variado y las que abundan son las no-lineales.

¿Como se atacan en la práctica estos problemas no-lineales?

Lo usual es el método del "Tanteometro" organizado, es decir:

A) Propongo una "solución" por "inspección".

Como probablemente no es la solución, entonces:

B) Determino una modificación, usualmente pequeña que nos permita corregir nuestra elección inicial, es decir:

$$x_1 = x_0 + s_0$$

en caso de que x_1 no sea una solución vuelvo a buscar una modificación y así obtengo

$$x_2 = x_1 + s_1$$

C) En general así procedemos y generamos una sucesión $\{x_n\}$ que esperamos converja a la solución de nuestro problema.

El procedimiento anterior requiere de la elaboración de:

1/ Un método para generar una aproximación inicial.

2/ Un criterio para decidir cuando ya tenemos una buena solución.

3/ Alguna garantia de que el método funciona, es decir, que $\{X_n\}$ converge

Esta vez no vamos a centrar la atención sobre alguno de los puntos anteriores, sino sobre uno que tiene una enorme importancia práctica, pues aunque tengamos satisfechos los requérimientos anteriores de nada nos - sirven si el proceso iterativo anterior no es realizable porque la sucesión $\{X_n\}$ converge muy lentamente a la solución X^*, es decir, necesitamos contestar a la pregunta ¿Qué tan rápido la sucesión $\{X_n\}$ converge?

Aquí es donde aparece un nuevo problema "qué tan - rápido". Ya que usualmente en Matemáticas nos contentamos con hacer ver si una sucesión es convergente o no - y hasta ahora no nos interesaba "qué tan rápido". Pero la gente que trabaja en problemas prácticos, donde no basta que estas sucesiones converjan sino que necesita calcular los límites, necesita saber cuanto tiempo le llevará calcular el límite, y además si vale la pena el esfuerzo, porque si el esfuerzo es excesivo, entonces no es de utilidad práctica el proceso iterativo en cuestión, y habrá que buscar otro ó abandonar el problema o buscar otra formulación del mismo.

Entremos ahora al problema que nos hemos planteado y veremos que dentro de la teoría de la convergencia de sucesiones, existen elementos suceptibles de generalizarse y que serán de utilidad en los procesos iterativos de aplicación práctica.

Recordemos algunas definiciones.

Consideraremos por ahora solo sucesiones de numeros reales aunque la discusión se puede llevar a cabo en têrminos mucho mas generales.

$\{X_n\}$ converge a X^* si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N_{(\varepsilon)}$ tal que:

$$|X_n - X^*| < \varepsilon \quad \text{si } n > N_{(\varepsilon)}$$

es decir si todos los têrminos de la sucesión con índice $n > N_{(\varepsilon)}$ se encuentran en una vecindad, de radio $\in$ de X^*.

Para ver porque ésta definición da cabida a fenómenos poco deseables desde el punto de vista práctico, consideremos los siguientes ejemplos:

Ejemplos:

a) $X_n = 1$ para toda n

b) $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ para toda n

c) $$x_n = \begin{cases} 10^n & \text{para } n \leqslant 1{,}000{,}000 \\ . & \\ 1 & \text{para } n > 1{,}000{,}000 \end{cases}$$

d) $$x_n = \begin{cases} 1 + k & \text{si } n = 10^k \text{ para alguna } k \\ 1 + \frac{1}{2n} & \text{si } n \neq 10^k \end{cases}$$

En el primer caso tenemos el caso trivial de las sucesiones constantes.

En el segundo

$$x_1 = 1 + 1 = 2$$

$$x_2 = 1 + \frac{1}{2} = 1.5$$

$$x_3 = 1 + \frac{1}{3} = 1.333$$

$$x_4 = 1 + \frac{1}{4} = 1.25$$

$$\vdots$$

$$x_{10} = 1.1$$

$$\vdots$$

$$x_{100} = 1.01$$

$$\vdots$$

$$x_{500} = 1.002$$

$$\vdots$$

$$x_{1000} = 1.001$$

como se puede ver progresa muy lentamente la sucesión ya que al cabo de 1000 términos x_{1000} solo cuenta con 3 cifras correctas, pero no esta mal.

En el tercer ejemplo

$$x_1 = 10; \quad x_2 = 100, \quad x_3 = 1000,$$

$$x_4 = 10,000, \ldots, x_{1000} = 10^{1000} \ldots$$

desde el punto de vista práctico, es difícil que en base a los valores que va tomando la iteración, nos crean que la sucesión converge a 1, ni aunque pongamos por delante a la "progenitora" de nuestros días. La experiencia demuestra que las voluntades mas férreas se derrumban ante las apariencias.

Algo similar sucede con el último ejemplo.

$$x_1 = 1 + 1 = 2, \quad x_2 = 1 + \frac{1}{2} = 1.5, \; x_3 = 1.25$$

$$x_4 = 1.125, \ldots, x_8 = 1.0625, \; x_9 = 1.03125.$$

$$x_{10} = 2, \; x_{11} = 1.0078\ldots$$

$$x_{50} = 1.00000000000000888$$

$$x_{99} = 1.\underbrace{000\ldots0}_{29}01577$$

$$x_{100} = 3$$

Así que después de mostrar los resultados a una persona será imposible convencerla de que la sucesión no-converge, lo mas probable es que nos diga que tenemos algún error y que la sucesión converge a 1.

De esta forma nos vemos obligados a responder a las nuevas necesidades con conceptos apropiados a sus necesidades, no quiere decir que nuestros conceptos estan mal ni mucho menos, sino solamente que aprovechamos la oportunidad de ser útiles y de enriquecer a la Matemática.

Volvamos al ejemplo segundo en el que consideramos a la sucesión $x_n = 1 + \frac{1}{n}$, este era el mas satisfactorio así que es natural que busquemos que propiedades tiene.

Como observamos facilmente la propiedad que salta a la vista, es el hecho que la sucesión $\{1 + \frac{1}{n}\}$ es monótona decreciente. Esto automáticamente nos sugiere que quizá este tipo de sucesiones sean deseables en la práctica.

Recordemos entonces:

Una sucesión $\{x_n\}$ es monótona creciente si $x_n \leqslant x_{n+1}$ para toda n, y monótona decreciente si $x_n \geqslant x_{n+1}$ para toda n.

Esto parece ser bastante bueno, y entonces debemos preguntarnos si no hay sucesiones que no sean monótonas que se vea que puedan ser de utilidad en la práctica, empezamos a buscar entre los ejemplos y nos encontramos inmediatamente con el siguiente:

Ejemplo

$$\{x_n\} : \ x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{2^n}$$

$x_1 = .5, \ \ x_2 = 1.25, \ \ x_3 = .875,$

$x_4 = 1.0625, \ x_5 = .96875, \ \ x_6 = 1.015625$

$x_7 = .9921875, \ \ x_8 = 1.00390625,$

$x_9 = .998046875,$ etc.

Como podemos observar esta sucesión converge a 1 en forma bastante satisfactoria y no es monótona.

¿Porqué es satisfactoria esta sucesión? Bueno como podemos ver facilmente cada x_n esta mas cerca de 1 que la anterior x_{n-1}, es decir, encontramos que esta propiedad también la tenian las monótonas y creimos que la condición natural era pedir convergencia monótona pero vemos que lo que realmente tenemos que pedir es que lo que tiene que ser monótono es la aproximación al límite de la sucesión y no la sucesión misma, es decir:

Dada $\{x_n\}$ convergente a x^* nos interesa que la sucesión de distancias al límite $\{|x_n - x^*|\}$ sea monótona decreciente:

$$|x_{n+1} - x^*| < |x_n - x^*|$$

Entonces podemos introducir la siguiente definición:

La sucesión $\{x_n\}$ se dice que es numéricamente convergente a x^* si la sucesión $\{|x_n - x^*|\}$ es monótona decreciente y converge a cero.

Hemos encontrado un subconjunto de las sucesiones convergentes que parece ser mas indicado para su uso en procesos iterativos prácticos. Es decir, sería deseable establecer si una sucesión dada, proveniente de un método iterativo es o no numéricamente convergente, esta respuesta ya podría dar una idea de la viabilidad del proceso iterativo en la práctica.

Sin embargo el proceso anterior no nos indica "que tan rápido" una sucesión converge.

Un primer paso en la dirección de cuantificar la rapidez, sería,dadas dos sucesiones $\{x_n\}$ y $\{x'_n\}$ ambas convergentes a x^*, decir cual de las dos converge mas rápido a x^*. Lo que de manera natural nos lleva a decir que $\{x_n\}$ converge mas rápido que $\{x'_n\}$ a x^* si

$$|x_n - x^*| < |x'_n - x^*|.$$

Como vemos esta comparación la podemos llevar a cabo independientemente de que $\{x_n\}$ sea numéricamente - convergente o no, pero nos interesa mas un concepto - que tome en cuenta el caso cuando ambas son numéricamente convergentes, es decir, si $\{x_n\}$ y $\{x'_n\}$ son numéricamente convergentes entonces sabemos que

$$|x_{n+1} - x^*| \leqslant |x_n - x^*| \quad \forall_n$$

$$|x'_{n+1} - x^*| \leqslant |x'_n - x^*|$$

y lo que se nos antoja hacer es tratar de comparar ambas desigualdades. Para ello necesitamos escribirlas de manera conveniente para que eso sea posible rápidamente nos damos cuenta que se pueden escribir de la forma siguiente:

$$\frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|} \leqslant 1 \quad \text{para toda } n$$

$$\frac{|x'_{n+1} - x^*|}{|x'_n - x^*|} \leqslant 1 \quad \text{para toda } n$$

y de aquí podemos observar que el cociente correspondiente al valor más pequeño indica que hubo una reducción mayor con respecto al paso anterior, que en el otro caso.

Ejemplo.

$$x_n = 1 + \frac{1}{n^2}$$

$$x^* = 1$$

$$x'_n = 1 + \frac{1}{n}$$

$$\frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|} = \frac{\dfrac{1}{(n+1)^2}}{\dfrac{1}{n^2}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2$$

$$\frac{|x'_{n+1} - x^*|}{|x'_n - x^*|} = \frac{\left|\dfrac{1}{n+1}\right|}{\left|\dfrac{1}{n}\right|} = \frac{n}{n+1}$$

Como $\frac{n}{n+1} < 1$ esto implica que:

$$\frac{n^2}{(n+1)^2} < \frac{n}{n+1} < 1$$

y vemos entonces que en efecto el cociente mas pequeño corresponde a la sucesión $\{1 + \frac{1}{n^2}\}$ que es la que se aproxima mas rápido a 1. Podemos entonces decir que

$\{1+\frac{1}{n^2}\}$ converge más rápido que $\{1+\frac{1}{n}\}$.

En consecuencia podemos definir: dadas dos sucesiones $\{x_n\}$, $\{x'_n\}$ numéricamente convergentes a x^*, diremos que la sucesión $\{x_n\}$ converge mas rapidamente que la sucesión $\{x'_n\}$ si sucede.

$$\frac{|x_{n+1}-x^*|}{|x_n - x^*|} \leqslant \frac{|x'_{n+1}-x^*|}{|x'_n - x^*|}$$

Es importante hacer ver que dadas dos sucesiones $\{x_n\}$, $\{x'_n\}$, numéricamente convergentes a x^* no siempre se pueden comparar y decir cual es más veloz.

Ejemplo

$$x_0 = 2$$

$$n \geqslant 0 \quad x_{n+1} = \begin{cases} 1+\frac{1}{2}(x_n - 1) & \text{si n es par} \\ 1+\frac{1}{4}(x_n - 1) & \text{si n es impar} \end{cases}$$

$$x'_0 = 2$$

$$x'_{n+1} = 1 + \frac{3}{8}\ (x'_n - 1)$$

primero comprobemos que son numéricamente convergentes, en efecto de la definición de la primera sucesión tenemos

$$|x_{n+1} - 1| = \frac{1}{2}\ |x_n - 1| \quad \text{si n es par}$$

$$|x_{n+1} - 1| = \frac{1}{4}\ |x_n - 1| \quad \text{si n es impar}$$

lo que claramente nos garantiza:

$$|x_{n+1} - 1| < |x_n - 1|.$$

Lo que confirma que $\{x_n\}$ es numéricamente convergente a 1. Pasando a la segunda

$$|x'_{n+1} - 1| = \frac{3}{8}\ |x'_n - 1|$$

y de aquí claramente

$$|x'_{n+1} - 1| < |x'_n - 1|$$

Y por consiguiente $\{x'_n\}$ tambiém es numéricamente monótona.

Tratemos ahora de ver si son comparables:

$$\frac{|x_{n+1} - 1|}{|x_n - 1|} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si n par} \\ \frac{1}{4} & \text{si n impar} \end{cases}$$

$$\frac{|x'_{n+1} - 1|}{|x'_n - 1|} = \frac{3}{8} \quad \text{para toda n}$$

como $$\frac{1}{4} < \frac{3}{8} < \frac{1}{2}$$

$$.25 < .375 < .5$$

Tenemos entonces que:

$$\text{si } n \text{ es par } \frac{|x'_{n+1}-1|}{|x'_n - 1|} < \frac{|x_{n+1}-1|}{|x_n - 1|}$$

$$\text{si } n \text{ es impar } \frac{|x_{n+1}-1|}{|x_n - 1|} < \frac{|x'_{n+1}-1|}{|x'_n - 1|}$$

De donde resulta que no podemos decir cual es mas rápida de las dos.

Resulta natural, si queremos hablar de rapidez de convergencia, que se introduzcan alguna o algunas sucesiones modelo con respecto a las cuales hacer la comparación. Afortunadamente no tenemos que buscar mucho para encontrar un buen modelo, ya que las sucesiones geométricas nos proporcionan el ejemplo más simple de sucesiones que son numéricamente convergentes, concretamente

$$x_n = Aa^n \qquad -1 < a < 1$$

son sucesiones muy fáciles de manejar que convergen a cero. ¿Cuáles son las correspondientes que convergen a x^*?. Para responder a esta pregunta es conveniente reescribir las sucesiones geométricas en la forma

$x_0 = A;\ x_{n+1} = ax_n$ para $n \geqslant 1$ como el límite en este caso es cero lo podemos escribir en la forma:

$$x_0 = A;\ (x_{n+1}-0) = a(x_n - 0): \text{ para } n \geqslant 1$$

ó $$x_{n+1} - x^* = a(x_n - x^*);\ n \geqslant 1.$$

y $$\frac{|x_{n+1}-x^*|}{|x_n - x^*|} = |a|$$

En otras palabras, observamos que las sucesiones geométricas estan caracterizadas precisamente por el hecho de que el cociente

$$\frac{|x_{n+1}-x^*|}{|x_n - x^*|} = |a| = \text{cte} < 1$$

podemos entonces hablar de las sucesiones que son mas rápidas que las geométricas en términos muy simples es decir solo necesitamos hacer referencia a $|a|$ y entonces podemos definir.

La sucesión $\{x_n\}$ es fuertemente numérica si existe α tal que $0 < \alpha < 1$ y que:

$$\frac{|x_{n+1}-x^*|}{|x_n - x^*|} \leqslant \alpha \quad \text{para toda } n$$

es decir si $|x_{n+1}-x^*| \leq \alpha|x_n-x^*|$.

Como es natural la magnitud de α va a jugar un papel importante en la rapidez pues entre mas pequeña sea α más rápido la sucesión se aproxima a x^*, para hacerlo ver mas claro consideremos:

Ejemplos

$$x_0 = x'_0 = x''_0 = 2$$

$$x_{n+1} = 1 + 1(x_n - 1)$$

$$x'_{n+1} = 1 + .5(x'_n - 1)$$

$$x''_{n+1} = 1 + .9(x''_n - 1)$$

x_n	x'_n	x''_n	n
2	2	2	0
1	1.5	1.9	1
1.1	1.25	1.81	2
1.01	1.125	1.729	3
1.001	1.0625	1.6561	4
1.0001	1.03125	1.59049	5
etc.	etc.	etc.	etc.

Como puede observarse en los ejemplos es importante determinar cual es la α mas pequeña para la cual se satisface la definición de fuertemente numérica. Ya que si una sucesión - satisface el ser fuertemente numérica con una constante $\alpha = .1$ también lo es para una constante $\alpha = .9$ es decir si:

$$\frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|} < .1 \text{ para toda } n$$

también tenemos

$$\frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|} < .9 \text{ para toda } n$$

Lo que nos indica que la α óptima podría ser usada como medidor de la rapidez de convergencia, y entonces

Definición: Una sucesión $\{x_n\}$ es fuertemente numérica con constante $0 < \alpha < 1$ si:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}-x^*|}{|x_n - x^*|} = \alpha$$

Esta definición la refinaremos mas adelante, pero para fines prácticos no va a cambiar significativamente.

Antes de proceder a la elaboración mas matemática de este concepto, es importante ver si este satisface algunos - requerimientos prácticos, como aquel de que, ¿Al cabo de cuantas iteraciones tengo, por ejemplo, 5 cifras correctas?. Esta pregunta necesita traducirse a una forma matemática precisa, y en efecto es fácil ver que es equivalente a preguntar: ¿Cuál es la primera n para la cual

$$\frac{|x_n - x_*|}{|x_n|} \leq 10^{-5} \; ?$$

es decir ¿Cuándo el error relativo es menor que 10^{-5}?

A primera vista esta pregunta nos sorprende y no sabemos como abordarla, así que conviene que volvamos a nuestro punto de partida y veamos si podemos hacer alguna conexión que nos ayude.

Nuestro punto de partida fue la desigualdad

$$\frac{|x_{n+1} - x_*|}{|x_n - x_*|} \leq \alpha$$

Como no puede uno resistir la tentación de dividirla entre $|x_*|$, obtenemos

$$\frac{\dfrac{|x_{n+1} - x_*|}{|x_*|}}{\dfrac{|x_n - x_*|}{|x_*|}} \leq \alpha$$

y observamos con alegría que lo que obtenemos es el ¡Cociente de los errores relativos consecutivos!

$$\text{si } \gamma_n = \frac{|x_{n+1} - x_*|}{|x_*|}$$

entonces

$$\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \leq \alpha$$

Como lo que necesitamos es encontrar n tal que

$$\gamma_n \leq 10^{-5}$$

y como de la desigualdad anterior obtenemos

$$\gamma_n \leq \alpha^n \gamma_0$$

entonces si conocemos γ_0 y α podemos determinar n, a partir de:

$$\alpha^n \gamma_0 = 10^{-5}$$

$$\alpha^n = \frac{10^{-5}}{\gamma_0}$$

$$n \log_{10} \alpha = -5 - \log \gamma_0$$

$$n = \frac{-5 - \log \gamma_0}{\log_{10} \alpha}$$

para visualizar esto analicemos los valores de n para el ejemplo anterior.

$$\alpha_1 = .1; \quad \alpha_2 = .5; \quad \alpha_3 = .9$$

$$\gamma_0 = 1 = \gamma_0' = \gamma_0''$$

$$n_1 = \frac{-5}{-1} = 5; \qquad n_2 = \frac{-5}{\log_{10}(.5)} = 16.60$$

$$n_3 = \frac{-5}{\log_{10}(.9)} = 109.27$$

Lo que los resultados nos dicen es impresionante, en el primer caso al cabo de 5 iteraciones, en el segundo 17 y en el último 110

Pero para entender más el dramatismo que en la práctica involucran estos números consideremos los casos

$$\alpha_4 = .99 \quad y \quad \alpha_5 = .999$$

obtenemos.

$$n_4 = \frac{-5}{\log(.99)} = 1145.52$$

$$n_5 = \frac{-5}{\log(.999)} = 11507.16$$

Tal vez ahora estemos en posibilidad de comprender que cuando alguien necesite calcular algo en la práctica y le propongamos un método iterativo, no es suficiente con decirle que el procedimiento converge.