#77

Gillermo Grabinsky S.

SERIE MATEMÁTICAS

Ejercicios de análisis funcional

AÑO 2007

VÍNCULOS MATEMÁTICOS

FACULTAD DE CIENCIAS

VÍNCULOS MATEMÁTICOS

"EJERCICIOS DE ANÁLISIS FUNCIONAL"

Guillermo Grabinsky S.*

VÍNCULOS MATEMÁTICOS NO. 77, 2007

* Profesor del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM.

Advertencia Preliminar

El presente trabajo contiene una selección de ejercicios sobre el tema de Análisis Funcional, mismos que he discutido con mis estudiantes durante varios semestres en los que he impartido el curso correspondiente. La mayoría de los ejercicios han sido provistos de sugerencias que tienen la finalidad de facilitar su solución, aunque el camino sugerido no es por lo general el único y otros métodos son deseables.

Por otro lado he tratado de mantener uniforme el grado de dificultad de los ejercicios; sin embargo, algunos me parecen más complejos que otros, pero he optado por no distinguirlos para no prejuiciar al lector. También es importante señalar que existe interdependencia entre algunos ejercicios por lo que sugiero que éstos sean resueltos en orden, aunque en varios casos pueda no ser necesario. Se incluye además una breve bibliografía al final.

Considero un grato deber el expresar mi agradecimiento a Guillermo J. Correa G. por su estupendo trabajo al frente del sistema TeX.

Septiembre del 1987

G. Grabinsky

G.G.S.

EJERCICIOS

(1) Sea X un espacio vectorial sobre K. Pruebe: X admite una base de Hamel, *i.e.* un subconjunto $\{x_i\}_{i\in I}$ que es linealmente independiente sobre K y tal que $X = \langle \{x_i\}_{i\in I} \rangle$. (*Sugerencia:* Use el lema de Zörn.)

(2) Sean $\{x_i\}_{i\in I}$ y $\{y_j\}_{j\in J}$ dos bases de Hamel para X. Pruebe que $\#(I) = \#(J)$. (*Sugerencia:* Si $\#(I) = +\infty$, es útil el teorema de Cantor-Shöerder-Berstein). Llamamos al cardinal común, la **dimensión** de X sobre K denotado $\dim_K(X)$.

(3) Pruebe que dos espacios vectoriales sobre el mismo campo K de igual dimensión, son algebraícamente isomorfos.

(4) Denote $c(K) = \{x : \mathbb{N} \to K \mid \lim\limits_{n\to\infty} x_n \text{ existe}\}$ y $c_0(K) = \{x \in c(K) \mid \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0\}$ con las operaciones usuales de adición y multiplicación escalar. Pruebe: $c = \dim_K(c_0(K)) = \dim_K(c(K)) = \dim_K(l_\infty(K))$.

(*Sugerencia:* considere a $\{(1, r, r^2, \dots) : 0 < r < 1\}$)

(5) Sea $(X, \|\ \|)$ un espacio vectorial normado sobre K. Pruebe:

i) $\oplus : X \times X \to X$ y $\odot : K - \{0\} \times X \to X$ definidas por $\oplus(x,y) = x + y$ y $\odot(\alpha, x) = \alpha \cdot x$ son funciones continuas y abiertas.

ii) Si $A \subset X$, entonces $\overline{A} = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} \{A + B_{\frac{1}{n}}(0)\}$ donde $B_\varepsilon(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\| < \varepsilon\}$.

iii) $A^\circ + B^\circ \subsetneq (A+B)^\circ$ y $\overline{A} + \overline{B} \subsetneq \overline{(A+B)}$. Pruebe con contraejemplos que en ambos casos, puede no tenerse la igualdad.

(6) Hipótesis y notación como en el ejercicio anterior. Pruebe:

i) Si A y B son compactos, entonces $\alpha A + \beta B$ es compacto $\forall \alpha, \beta \in K$. (*Sugerencia:* Use el anterior inciso *(i)*.)

ii) Si A es compacto y B es cerrado, entonces $\alpha A + \beta B$ es cerrado $\forall \alpha, \beta \in K$.

iii) Existen A y B cerrados tales que $A + B$ no es cerrado. (*Sugerencia:* Sea $X = \mathbb{R}^2$ con la norma usual.)

(7) Sean $(X, \|\ \|)$ un espacio vectorial sobre K y $x_1, \dots, x_n$ en X linealmente independientes sobre K. Para cada $\vec{\alpha} \in K^m = K \times \cdots \times K$ (m factores) denote $\|\vec{\alpha}\|_2 = (\sum\limits_{i=1}^{m} |\alpha_i|^2)^{1/2}$ ($\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$). Suponga que $K_0 \subset K^m$ es tal que: $\inf\limits_{\vec{\alpha}\in K_0} \|\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i x_i\| = 0$. Pruebe: $\inf\limits_{\vec{\alpha}\in K_0} \{\|\vec{\alpha}\|_2\} = 0$. Interprete geométricamente.

(*Sugerencia:* Defina $\varphi : K^m \to \mathbb{R}$, poniendo $\varphi(\vec{\alpha}) = \|\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i x_i\|$ y pruebe que es continua. Si $\inf\limits_{\vec{\alpha}\in K_0} \{\|\vec{\alpha}\|_2\} = \varepsilon_0 > 0$ entonces también se tiene: $\inf\limits_{\vec{\alpha}\in K_0} \|\sum\limits_{i=1}^{m} \frac{\alpha_i}{\|\vec{\alpha}\|_2} x_i\| = 0$. Use la compacidad de $\{\vec{\alpha} \in K^m : \|\vec{\alpha}\|_2 = 1\}$ y la continuidad de φ.)

(8) Sea $(X, \|\ \|)$ un espacio vectorial normado sobre K. Pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes para un subconjunto no vacío A de X:

a) A es acotado.

b) $\forall$ vecindad U de $\vec{0}$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $aA \subset U$ $\forall a \in K$ con $|a| < \varepsilon$.

c) Si $D \subset A$ es numerable, entonces D es acotado.

d) Si (x_n) es una sucesión de elementos de A, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n x_n = 0$ para toda sucesión (α_n) en K tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

(9) Sea $(X, \|\ \|)$ un espacio vectorial normado sobre K. Pruebe: $B_r(X_0)$ es homeomorfo a X $\forall r > 0$ y $\forall x_0 \in X$. (*Sugerencia:* Si $x_0 = \vec{0}$ considere el mapeo $x \mapsto \frac{rx}{1+\|x\|}$.)

(10) Pruebe el siguiente resultado conocido como el lema de F. Riesz: Si M es un subespacio **cerrado propio** de $(X, \|\ \|)$ (espacio vectorial normado sobre K) y $r \in (0,1)$ es dado, entonces $\exists x_r \in X \backslash M$ con $\|x_r\| = 1$ y $\|x_r - m\| \geq r$ $\forall m \in M$.

(*Sugerencia:* Sea $x \in X \backslash M$ fijo y sea $d = \inf\{\|x - m\| : m \in M\}$. Entonces $d > 0$ y como $d < \frac{d}{r}$, existe $m_0 \in M$ con $\|x - m_0\| < \frac{d}{r}$. Sea $x_r = \frac{x - m_0}{\|x - m_0\|}$.)

(11) Hipótesis y notación como en el inciso anterior. Pruebe que en general no existe $x_r \in X \backslash M$ con $\|x_r\| = 1$ y $\|x_r - m\| \geq r$ $\forall m \in M$, si $r = 1$.

(*Sugerencia:* Sea $X = \{x \in C_k([0,1]) : x(0) = 0\}$ con $\|x\| = \max\limits_{t\in[0,1]} |x(t)|$ y $M = \{m \in X : \int_0^1 m(t)dt = 0\}$. Suponga que $\exists x_1 \in X \backslash M$ con $\|x_1 - m\| \geq 1$ $\forall m \in M$ y $\|x_1\| = 1$. Para cada $y \in X \backslash M$ defina $c = \left(\int_0^1 x_1(t)dt\right)\left(\int_0^1 y(t)dt\right)^{-1}$. Claramente $x_1 - cy \in M$ así pues: $1 \leq |c|\|y\|$ o bien, $\left|\int_0^1 y(t)dt\right| \leq \left|\int_0^1 x_1(t)dt\right| \|y\|$. Halle una sucesión (y_n) en $X \backslash M$, con $\|y_n\| = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\left|\int_1^0 y_n(t)dt\right| \uparrow 1$. Para obtener una contradicción sobre x_1.)

(12) Sea $(X, \|\ \|)$ un espacio vectorial normado sobre K y $f : X \to K$ ($f \neq 0$) una funcional lineal. Pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes:

a) f es continua.

b) $\mathcal{N} = \{x \in X : f(x) = 0\}$ es cerrado.

c) $\mathcal{N}$ no es denso en X.

d) f es acotado en alguna vecindad de $\vec{0}$.

(*Sugerencia:* Para (c) $\Rightarrow$ (d), suponga que $B_\epsilon(x) \cap \mathcal{N} = \emptyset$. Si f no es acotada en $B_\epsilon(\vec{0})$ entonces $f(B_\epsilon(\vec{0})) = K$, en particular $\exists z \in B_\epsilon(\vec{0})$ tal que $f(z) = -f(x)$ y obtenga de esto una contradicción.)

(13) Sea $(X, \| \ \|)$ un espacio vectorial y $f \in X^*$ $(f \neq 0)$ dados, si L denota el hiperplano $\{x \in X : f(x) = 1\}$, entonces pruebe que: $\|f\| = \frac{1}{d(\vec{0}, L)}$.

(14) Sean $(X, \| \ \|_X)$ y $(Y, \| \ \|_Y)$ espacios vectoriales normados sobre K y $A : X \to Y$ un operador lineal acotado. Pruebe:

i) $\ker A = \{x \in X : Ax = 0\}$ es un subespacio cerrado de X.

ii) $\exists$ un único operador lineal acotado $B = X/\ker A \to Y$ tal que $\mathbb{B} \circ \Pi_{\ker A}$.

iii) $\|B\| = \|A\|$.

(15) Sean $(X, \| \ \|_X)$ y $(Y, \| \ \|_Y)$ espacios vectoriales normados sobre K con X de dimensión finita y $T : X \to Y$ un operador lineal. Pruebe que T es automáticamente continuo.

(*Sugerencia:* Basta probar que $\|Tz_n\|_Y \to 0$ $(n \to +\infty)$ para toda sucesión $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en X con $\|z_n\|_X \to 0$ $(n \to +\infty)$. Use una base de Hamel para X y aplique el ejercicio (7).)

(16) Pruebe que cualesquiera dos espacios vectoriales normados sobre K de igual dimensión **finita** son homeomórficamente isomorfos (*i.e.* $\exists$ una transformación lineal biyectiva y bicontinua entre ellos).

(17) Sean $\| \ \|_1, \| \ \|_2 : K^n \to \mathbb{R}$ dos normas $(n \geq 1)$. Pruebe que $\exists$ una constante absoluta $M > 0$ tal que $\frac{1}{M}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1$ $\forall x \in K^n$. (NOTA: En general, normas definidas en un espacio vectorial que satisfacen la condición anterior se llaman **equivalentes**.)

(18) Sean $(X, \| \ \|_X)$ y $(Y, \| \ \|_Y)$ espacios vectoriales normados sobre K con $\dim_K(Y) < +\infty$ y $A : X \to Y$ un operador lineal y suprayectivo. Pruebe:

i) A es un mapeo abierto.

ii) A es continuo, si $A^{-1}(\{\vec{0}\})$ es cerrado.

Sugerencia: En ambos casos basta considerar el caso $\dim_K(Y) = 1$. Use los dos ejercicios anteriores y las proyecciones, si $\dim_K(Y) > 1$.)

(19) Sean $(X, \| \ \|)$ un espacio vectorial normado sobre K y $M \subset X$ un subespacio cerrado. Pruebe: Si $(X, \| \ \|)$ es separable, entonces $(X/M, \| \ \|_{X/M})$ lo es también.

G.G.S.

(20) Notación e hipótesis como en el anterior con M de dimensión finita. Pruebe que $\forall x \in X$ $\exists m \in M$ con $\|[x]\|_{X/M} = \|x + m\|$. (*Sugerencia:* Use la compacidad de las bolas cerradas relativas a M.)

(21) Sean X un espacio vectorial sobre K y $f_1, \ldots, f_n : X \to K$ funcionales lineales. Y sea $\mathcal{N}_i = \ker f_i$ $i = 1, \ldots, n$. Pruebe:

i) f_1 es una combinación lineal sobre K de $f_2, \ldots, f_n \Leftrightarrow \bigcap_{i=2}^{n} \mathcal{N}_i \subset \mathcal{N}_1$.

(*Sugerencia:* Sea $T : X \to K^{n-1}$ lineal, dada por $Tx = (f_2(x), \ldots, f_n(x))$ y defina $h : T(X) \to K$ poniendo $h(Tx) = f_1(x)$, entonces h esta bien definida y es lineal. Extienda linealmente h a todo K^{n-1}).

ii) Denote $C_i = \bigcap_{j \neq i} (\mathcal{N}_j \backslash \mathcal{N}_i)$ $(i, j \in \{1, \ldots, n\})$ y pruebe: $f_1, \ldots, f_n$ son linealmente independientes sobre $K \Leftrightarrow C_1 \times \cdots \times C_n \neq \emptyset$.

(22) Sea X un espacio vectorial sobre K. Pruebe:

i) $E_1, E_2 \subset X$ convexos $\Rightarrow \alpha E_1 + \beta E_2$ es convexo $\forall \alpha, \beta \in K$.

ii) $E \subset X$ es convexo $\Leftrightarrow (s + t)E = sE + tE$ $\forall s, t \geq 0$.

iii) Si $A \subset X$ es abierto, entonces su casco convexo es abierto también. (*Sugerencia:* Suma algebraíca de abiertos es un conjunto abierto.)

iv) La imágen inversa bajo un operador lineal de un convexo es convexo así como la imágen directa.

(23) Sean $(X, \| \ \|)$ un espacio vectorial normado sobre K y $E \subset X$ convexo y absorbente. Sea $p_E(x) = \inf\{t > 0 : x \in tE\}$ la funcional de Minkowski y denote: $E_1 = \{x \in X : p_E(x) < 1\}$ y $E_2 = \{x \in X : p_E(x) \leq 1\}$ Pruebe:

i) $E^\circ \subset E_1 \subset E \subset E_2 \subset \overline{E}$.

ii) Si E es abierto, entonces $E_1 = E$. Si E es cerrado, entonces $E = E_2$.

iii) Si p_E es continua, entonces $E^\circ = E_1$ y $E_2 = \overline{E}$. (*Sugerencia:* $p_E^{-1}((-\infty, 1))$ y $p_E^{-1}((-\infty, 1])$ son abierto y cerrado en X, respectivamente.)

iv) p_E es continua $\Leftrightarrow \vec{0} \in E^\circ$.

v) Si E es acotado y $p_E(x) = 0$, entonces $x = \vec{0}$.

(24) Notación e Hipótesis como en el anterior. Pruebe:

i) $p_{E_1} = p_E = p_{E_2}$.

ii) Si E es balanceado (*i.e.* $\lambda E \subset E$ si $|\lambda| \leq 1$) entonces: $p_E(\alpha x) = |\alpha| p_E(x)$ $\forall \alpha \in K$ $\forall x \in X$.

G.G.S.

(NOTA: Por lo tanto, si E es absorbente, convexo, balanceado y acotado es una norma en X.)

(25) Sean $(X, \|\ \|)$ un espacio vectorial normado sobre K, $E \subset X$ convexo y $z \in E$. Decimos que z es un **punto extremo** de E si siempre que $z = tx + (1-t)y$ con $t \in (0,1)$, entoces $x \notin E$ o $y \notin E$. Pruebe:

i) Si z es un punto extremo de $\{x \in X : \|x\| \leq 1\}$, entonces $\|z\| = 1$.

ii) Si $X = \mathcal{L}_p([0,1])$ $(1 < p < +\infty)$, entonces z es un punto extremo de $\{x \in \mathcal{L}_p : \|x\|_p \leq 1\} \Leftrightarrow \|z\|_p = 1$.

(*Sugerencia:* Examine las condiciones bajo las cuales se da la igualdad en la desigualdad de Minkowski.)

(26) Sea $(X, \|\ \|)$ un espacio vectorial normado sobre K. Pruebe:

i) z es un punto extremo de $\{x \in X : \|x\| \leq 1\} \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}(x+y)$ con $\|x\| \leq 1$ y $\|y\| \leq 1$, entonces $x = y = z$.

ii) z es un punto extremo de $\{x \in X : \|x\| \leq 1\} \Leftrightarrow \|x + w\| \leq 1$ y $\|x - w\| \leq 1 \Rightarrow w = \vec{0}$.

(*Sugerencia:* Use el inciso anterior.)

(27) Pruebe que la bola cerrada unitaria de $\mathcal{L}_1([0,1])$ no tiene puntos extremos. (*Sugerencia:* Para z con $\|z\| = 1$ defina $A = \{t \in [0,1] : \int_{[0,t]} |z(s)|d\lambda \leq \frac{1}{2}\}$ y sea $t_0 = \sup A$. Sea $x = 2z\chi_{[0,t_0)}$ y use el inciso *(i)* del anterior.)

(28) Pruebe que la bola cerrada unitaria de $(c_0(K), \|\ \|_\infty)$ no contiene puntos extremos.

(29) Describa a los puntos extremos de la bola cerrada unitaria de $C_K([0,1], \|\ \|_\infty)$

(NOTA: La solución depende de K.)

(30) Sean $(X, \|\ \|_X)$ un espacio vectorial normado sobre K de dimensión infinita y $(Y, \|\ \|_Y)$ un espacio vectorial normado sobre K (no trivial), entonces existe un operador lineal $A : X \to Y$ que es discontinuo (compare con el ejercicio (15)).

(*Sugerencia:* Sea $\{x_i\}_{i \in I}$ una base de Hamel para X y $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots\}$ un subconjunto numerable. Sea $y_0 \in Y - \{\vec{0}\}$ fijo y defina $A : X \to Y$ extendiendo linealmente la siguiente aplicación $Ax_{i_n} = n\|x_{i_n}\| y_0$ y $Ax_i = \vec{0}\ \forall i \neq i_n$ $(n \in \mathbb{N}$.)

(31) Sea $(X, \|\ \|)$ un espacio de Banach sobre K. Pruebe: X es de dimensión finita $\Leftrightarrow$ todo subespacio de X es cerrado. (*Sugerencia:* Use el ejercicio (12) y el anterior.)

(32) (El adjunto de un operador lineal)
Sean $(X, \|\ \|_X)$ y $(Y, \|\ \|_Y)$ espacios vectoriales sobre K y $A : X \to Y$ un operador lineal. definimos el **operador adjunto** $A^* : Y^* \to X^*$ como sigue: $\forall f \in Y^*$ y $\forall x \in X$ $A^*f(x) = f(Ax)$. Pruebe:

i) A^* es lineal.

ii) Si $A \in \mathbb{B}(X,Y)$ entonces $A^* \in \mathbb{B}(Y^*, X^*)$ y $\|A^*\| = \|A\|$.

iii) $(\alpha A + \beta B)^* = \alpha A^* + \beta B^*$ $(\alpha, \beta \in K$ y $B : X \to Y$ un operador lineal.)

iv) $(B \circ A)^* = A^* \circ B^*$.

v) Si A es invertible, entonces A^* lo es y $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

(NOTA: Los incisos anteriores prueban que el operador $^* : \mathbb{B}(X,Y) \to \mathbb{B}(Y^*, X^*)$ dado por: $A \mapsto A^*$ es lineal, acotado y de norma igual a 1.)

(33) Sea $A \in \mathbb{B}(X,Y)$ dados y $A^*\mathbb{B}(Y^*, X^*)$ el operador adjunto. Pruebe:

i) A^* es inyectivo $\Leftrightarrow$ $A(X)$ es denso en Y.

ii) A es inyectivo $\Leftrightarrow$ $A^*(Y^*)$ separa los puntos de X (*Sugerencia:* Use el teorema de Hahn-Banach.)

(34) Sean $(X, \|\ \|)$ un espacio vectorial normado sobre K y $M \subset X$ un subespacio. Definimos $M^\perp = \{f \in X^* : f(x) = 0, \forall x \in M\}$ llamado el **anulador** de M.

i) Pruebe que $(M^*, \|\ \|_{M^*})$ es isométricamente isomorfo a $(X^*/M^\perp, \|\ \|_{X^*/M^\perp})$. (NOTA: Primero pruebe que $M^\perp$ es cerrado en X^*).

ii) Si $F \subset X^*$ defina ${}^\perp F = \{x \in X : f(x) = 0\quad \forall f \in F\}$. Pruebe que ${}^\perp(M^\perp) = \overline{M}$.

(35) Hipótesis y notación como en el (32). Pruebe:

i) $A \in \mathbb{B}(X,Y)$ es una isometría de X sobre Y $\Leftrightarrow$ $A^* \in \mathbb{B}(Y^*, X^*)$ es una isometría de Y^* sobre X^*.

ii) Si $A \in \mathbb{B}(X,Y)$, entonces $\overline{A(X)} = {}^\perp(\ker A^*)$.

iii) Si $Y = K$, entonces $A^*(f) = f(1)A\ \forall f \in \mathbb{C}^*$.

(36) Sean $(X, \|\ \|)$ un espacio vectorial normado sobre K y M un subespacio cerrado. Pruebe:

i) $((X/M)^*, \|\ \|_{(X/M)^*})$ es isométricamente isomorfo a $(M^\perp, \|\ \|_{M^\perp})$ (*Sugerencia:* Sea $A : M^\perp \to (X/M)^*$ dada por $Af([x]) = f(x)$. Pruebe que esta bien definida).

ii) $\|[x]\| = \max\{|f(x)| : f \in M^\perp, \|f\| = 1\}$ y obtenga como caso particular: $\|x\| = \max\{|f(x)| : f \in X^*, \|f\| = 1\}$. (*Sugerencia:* Use el teorema de extensión de Hahn-Banach).

(37) Sea $(X, \|\ \|)$ un espacio vectorial normado sobre K y sea $B \in X$ un subconjunto cerrado, convexo y balanceado. Si $x_0 \in X \backslash B$ entonces $\exists f \in X^*$ y $\varepsilon > 0$ tal que $|f(x)| \leq c$ $(x \in B)$ y $|f(x_0)| > c$ para alguna $c > 0$.

(38) Sean $(X, \|\ \|)$ un espacio de Banach sobre K y $M \subset X$ un subespacio. Pruebe:

i) M es cerrado $\Leftrightarrow$ $(M, \|\ \|_M)$ es un espacio de Banach.

ii) Si M es cerrado, entonces $(X/M, \|\ \|_{X/M})$ es un espacio de Banach.

(*Sugerencia:* Pruebe que toda serie absolutamente sumable en $(X/M, \| \|_{X/M})$, es sumable.)

(39) Sean $(X, \| \|_X)$ y $(Y, \| \|_Y)$ espacios vectoriales normados sobre K con X no trivial. Si $\mathbb{B}(X,Y)$ es un espacio de Banach, entonces $(Y, \| \|_Y)$ es de Banach.

(*Sugerencia:* Sean (y_n) una sucesión $\| \|_Y$-Cauchy y $x_0 \in X$ con $\|x_0\|_X = 1$ fijos. Halle $f \in X^*$ con $\|f\| = 1$ y $f(x_0) = \|x_0\|$. Defina $A_n \in \mathbb{B}(X,Y)$ como sigue: $A_n x = f(x) y_n$. Observe que (A_n) es de Cauchy en $\mathbb{B}(X,Y)$.)

(40) Sea $(X, \| \|)$ un espacio de Banach sobre K. Pruebe:

i) Si $A \in \mathbb{B}(X)$ es tal que $\|A\| < 1$, entonces $(I + A)^{-1}$ existe y esta dado por la serie $\| \|$-convergente definida por $(I + A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-A)^n$. (donde $A^0 = I$ y $A^n = A \circ \cdots \circ A$ (n-veces)).

ii) Además $\|(I + A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$.

(41) Hipótesis y notación como en el anterior. Pruebe:

i) Si $A \in \mathbb{B}(X)$ es invertible y $B \in \mathbb{B}(X)$ es tal que $\|B - A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ entonces B es invertible, $B^{-1} \in \mathbb{B}(X)$ y $\|B^{-1} - A^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1-\|B-A\|\,\|A^{-1}\|}$.

(*Sugerencia:* $B = ((B - A)A^{-1} + I)A$ y use el ejercicio anterior.)

ii) $I(X) = \{A \in \mathbb{B}(X) : A$ es invertible y $A^{-1} \in \mathbb{B}(X)\}$ es abierto en $\mathbb{B}(X)$.

(42) Sean $(X, \| \|_X)$ y $(Y, \| \|_Y)$ espacios de Banach sobre K, denote por

$$I(X,Y) = \{A \in \mathbb{B}(X,Y) : A \text{ es invertible y } A^{-1} \in \mathbb{B}(Y,X)\}$$

análogamente con $I(Y,X)$. Defina $\mathcal{U} : I(X,Y) \to I(Y,X)$ dada por $\mathcal{U}(A) = A^{-1}$. Pruebe que $\mathcal{U}$ es continua.

(*Sugerencia:* $A^{-1} - B^{-1} = A^{-1}B(I_X - B^{-1}A)B^{-1}$.)

(43) Para $x : [0,1] \to K$ acotada, defina $\|x\|_\infty = \sup\{|x(t)| : t \in [0,1]\}$ y $\omega_\delta(x) = \sup\{|x(s) - x(t)| : s,t \in [0,1], |s - t| < \delta\}$ $(\delta > 0)$.

Para cada $\alpha \in [0,1]$ sea, $\mathrm{LIP}(\alpha) = \{x : [0,1] \to K \mid \sup_{\delta>0} \frac{\omega_\delta(x)}{\delta^\alpha} < +\infty\}$ y $\|f\|_\alpha = \|f\|_\infty + \sup_{\delta>0} \frac{\omega_\delta(f)}{\delta^\alpha}$ $\forall f \in \mathrm{LIP}(\alpha)$. Pruebe:

i) $(\mathrm{LIP}(\alpha), \| \|_\alpha)$ es un espacio de Banach sobre K.

ii) $\mathrm{lip}(\alpha) = \{f \in \mathrm{LIP}(\alpha) : \lim_{\delta\to 0} \frac{\omega_\delta(f)}{\delta^\alpha} = 0\}$ es un subespacio cerrado de $\mathrm{LIP}(\alpha)$.

(44) Sea $(X, \| \|)$ un espacio de Banach sobre K de dimensión infinita. Pruebe que toda base de Hamel es necesariamente no-numerable.

(*Sugerencia:* Suponga lo contrario y exhiba a X como la unión numerable creciente de subespacios de dimensión finita y use el teorema de R. Baire.)

(45) *i)* Pruebe el ejercicio anterior estableciendo un isomorfismo entre $\ell_\infty(K)$ y un subespacio de X. (Ver el ejercicio (4).)

(*Sugerencia:* Sea $X_1 \supset X_2 \supset \cdots$ una sucesión de subespacios de X con $\mathrm{cod}_X(X_n) = n$ (v. gr. núcleos de funcionales). Sea $x_n \in X_n \setminus X_{n-1}$ con $\|x_n\| = \frac{1}{2^n}$ y considere la aplicación $(\varsigma_n) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \varsigma_n x_n$)

ii) Si $(X, \| \|)$ es separable, pruebe además que $\dim_K(X) = c$

(46) Asuma que $(X, \| \|)$ es de Banach y pruebe el ejercicio (31) haciendo uso la sucesión (x_n) construida en la sugerencia para el inciso *(i)* del ejercicio anterior. (*Sugerencia:* $\langle\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\rangle$ no es cerrado en X).

(47) *i)* Pruebe que $\ell_p(K)$ $(1 \leq p < +\infty)$ es separable.

ii) Pruebe que $\ell_\infty(K)$ no es separable.

(*Sugerencia:* Sea $D = \{x^{(n)} : n \in \mathbb{N}\} \subset \ell_\infty(K)$ un subconjunto numerable arbitrario. Defina $x \in \ell_\infty(K)$ poniendo: $x_k = \begin{cases} 0, & \text{si } |x_k^{(k)}| \geq 1; \\ 1 + |x_k^{(k)}|, & \text{si } |x_k^{(k)}| < 1. \end{cases}$ Examine $\|x - x^{(n)}\|_\infty$.)

(48) Sean $\Omega = [0,1]$, $S = \sigma$-álgebra de Borel en $[0,1]$ y λ = medida de Lebesgue sobre S. Pruebe:

i) $\mathcal{L}_p(\Omega, S, \lambda)$ es separable $(1 \leq p < +\infty)$. (*Sugerencia:* Use el teorema de Luzin y el de aproximación de Weierstrass).

ii) $\mathcal{L}_\infty(\Omega, S, \lambda)$ no es separable. (*Sugerencia:* Exhiba un subconjunto $\{x_\alpha : \alpha \in [0,1]\}$ de $\mathcal{L}_\infty$ con $\|x_\alpha - x_\beta\|_\infty = 1$ si $\alpha \neq \beta$).

(49) Sean $X = C_{\mathbb{R}}([a,b])$ y $\|x\| = \max\{|x(t)| : t \in [a,b]\}$ $(x \in X)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina $X_n = \{x \in X : \exists t_0 \in [a,b)$ con $|x(t) - x(t_0)| \leq n(t - t_0)$ $\forall t \in [t_0, b]\}$. Pruebe:

i) X_n es cerrado y denso en ninguna parte. (*Sugerencia:* dadas $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ y $x \in X_n$, es posible hallar una función $y \in X$ que sea lineal por tramos de tipo "zig-zag" con derivadas laterales derechas mayores en valor absoluto que n en todo punto de $[a,b)$ y con $\|x - y\| < \varepsilon$).

ii) Si $X' = \{x \in X : x$ no es diferenciable en ningún punto de $[a,b)\}$, entonces X' contiene un subconjunto denso en X de tipo G_δ. (*Sugerencia:* Use el inciso anterior y el teorema de R. Baire).

(50) Sean (X,d) un espacio métrico y $f : X \to K$ dadas. Para cada subconjunto no vacío $E \subset X$ defina $\omega(E) = \sup_{x,y\in E} |f(x) - f(y)|$. (NOTA: $\omega(E) \in [0,+\infty]$). Defina la **oscilación** de f en x como la función $\omega : X \to \bar{\mathbb{R}}$ dada por: $\omega(x) = \lim_{\delta \downarrow 0} \omega(B_\delta(x))$. Pruebe:

i) $\omega(x) = 0 \Leftrightarrow f$ es continua en x.

ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\{x \in X : \omega(x) < \varepsilon\}$ es abierto en X.

iii) $\{x \in X : f$ es discontinua en $x\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : \omega(x) \geq \frac{1}{n}\}$. Concluya que el conjunto de discontinuidades de f es un F_σ.

iv) No existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea discontinua sólo en $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

(51) Hipótesis y notación como en el anterior. Suponga además que (X,d) es completo o de segunda categoría en sí mismo. Sea (f_n) una sucesión de funciones continuas de X en $\mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ existe en $\mathbb{R}$ $\forall x \in X$. Pruebe: $D = \{x \in X : f$ es discontinua en $X\}$ es de primera categoría en X.

(*Sugerencia:* Sea $\varepsilon > 0$ arbitraria, basta probar que $\{x \in X : \omega_f(x) > 5\varepsilon\}$ es denso en ninguna parte (ver el *(iii)* del ejercicio anterior). Defina $E_n = \bigcap_{i,j\geq n} \{x \in X : |f_i(x) - f_j(x)| \leq \varepsilon\}$ $(n \in \mathbb{N})$, entonces $E_n \subset E_{n+1}$ y $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ y use el teorema de Baire.)

(52) Sean $X = C_K([a,b])$ con $\|x\| = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|$. Denote por CBV y AC a los subespacios de X consistentes de las funciones continuas de variación acotada y las absolutamente continuas (respectivamente). Pruebe que ambos subespacios son densos y de primera categoría. (*Sugerencia:* Como AC $\subset$ CBV basta probar que CBV es de primera categoría y que AC es denso. Note que las funciones continuas que son lineales por tramos pertenecen a AC. Sea $X_n = \{x \in \text{CBV} : V_a^b(x) \leq n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ pruebe que X_n es cerrado en X con interior vacío.)

(53) Pruebe que $f \in (\ell_1(K))^* \Leftrightarrow \exists y = y(f) \in \ell_\infty(K)$ única, tal que: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ $\forall x \in \ell_1(K)$ y además $\|f\| = \|y\|_\infty$.

(54) Pruebe que no existe una representación similar a la del ejercicio anterior para $f \in (\ell_\infty(K))^*$ con $y \in \ell_1(K)$.

(55) Pruebe que toda $f \in (c(K))^*$ tiene la siguiente y única forma: $f(x) = (\lim_{n\to\infty} x_n)(y_0 - \sum_{i=1}^{\infty} y_i) + \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$ con $(y_0, y_1, \ldots) \in \ell_1(K)$ y además $\|f\| = |y_0 - \sum_1^{\infty} y_i| + \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|$.

(*Sugerencia:* Sean $e_j \in c(K)$ definidas por $e_j(i) = \delta_{ij}$ $\forall i \in \mathbb{N}$, $(j \in \mathbb{N})$ y $e_0 \in c(K)$ dada por $e_0(i) = 1$ $\forall i \in \mathbb{N}$. Pruebe que $c(K) = \overline{\langle\{e_0, e_1, \ldots\}\rangle}$.)

(56) Pruebe que todo espacio de Banach de dimensión finita es reflexivo.

(57) Sea $(X, \|\ \|_X)$ un espacio de Banach sobre K. Pruebe:

i) $(X, \|\ \|_X)$ es reflexivo $\Leftrightarrow (X^*, \|\ \|_{X^*})$ lo es. (*Sugerencia:* Si $i(X) \subsetneq X^{**}$, entonces $\exists H \in X^{***}$, $H \neq 0$ tal que $H(i(x)) = 0$ $\forall x \in X$).

ii) Si $(X, \|\ \|_X)$ es reflexivo y $M \subset X$ es un subespacio cerrado, entonces $(M, \|\ \|_M)$ es reflexivo (*Sugerencia:* Use el ejercicio (34).)

(58) Sea $(X, \|\ \|)$ un espacio de Banach sobre K. Pruebe que X es reflexivo o sus sucesivos duales: $X^{**}, X^{****}, \ldots$ son todos diferentes.

(59) Sea $\Omega = (0,1)$, $S = \sigma$-álgebra de Borel en $(0,1)$ y $\lambda =$ medida de Lebesgue sobre S. Pruebe:

i) $\mathcal{L}_2(\lambda)$ es de primera categoría en $\mathcal{L}_1(\lambda)$. (*Sugerencia:* $\varphi : (\mathcal{L}_2(\lambda), \|\ \|_2) \to (\mathcal{L}_1(\lambda), \|\ \|_1)$ definida por $\varphi(x) = x$ es continua pero no suprayectiva. Use el teorema del mapeo abierto.)

ii) $\mathcal{L}_p(\lambda)$ es de primera categoría en $\mathcal{L}_r(\lambda)$ si $1 \leq r < p$

iii) $\bigcup_{r<p} \mathcal{L}_p(\lambda)$ es de primera categoría en $\mathcal{L}_r(\lambda)$.

(60) Enuncie los resultados análogos a los del ejercicio anterior para los espacios de Banach $(\ell_p, \|\ \|_p)$. $(1 \leq p < +\infty)$.

(61) Sean $(X, \|\ \|_X)$, $(Y, \|\ \|_Y)$ espacios de Banach sobre K y $A \in \mathbb{B}(X,Y)$. Pruebe:

$$(X/\ker A, \|\ \|_{X/\ker A})$$

es homeomórficamente isomorfo a $(A(X), \|\ \|_{A(X)}) \Leftrightarrow A(X)$ es cerrado en Y. (*Sugerencia:* Use el teorema del mapeo abierto).

(62) (El teorema de Banach-Steinhauss)
Sean $(X, \|\ \|_X)$, $(Y, \|\ \|_Y)$ espacios vectoriales sobre K con $(X, \|\ \|_X)$ de Banach. Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de operadores lineales acotados: $X \to Y$. Suponga que $\sup_{i\in I}\{\|A_i x\|\} < +\infty$ $\forall x \in X$. Use el teorema de R. Baire para probar: $\sup_{i\in I}\{\|A_i x\|_Y\} < +\infty$. (*Sugerencia:* Sea $X_n = \{x \in X : \sup_{i\in I}\{\|A_i x\|_Y\} \leq n\|x\|_X\}$ $(n \in \mathbb{N})$.)

(63) Sea X el subespacio de $\ell_1(K)$ definido por $\{x \in \ell_1(K) : x_n = 0$ para casi todo $n \in \mathbb{N}\}$. Sea $e_m \in X$ dado por $e_m(n) = \delta_{m,n}$ $(m, n \in \mathbb{N})$. Defina $T_n \in X^*$ $(n \in \mathbb{N})$ poniendo $T_n(e_m) = n\delta_{m,n}$ $\forall m \in \mathbb{N}$ y extendiéndola linealmente a X. Pruebe que $\sup_{n\in\mathbb{N}} |T_n x| < +\infty$ $\forall x \in X$, pero $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| = +\infty$. ¿ Contradice esto el teorema de Banach-Steinhauss ?

(64) Sean $(X, \|\ \|_X)$, $(Y, \|\ \|_Y)$ espacios vectoriales normados sobre K. Pruebe: $A \in \mathbb{B}(X,Y) \Leftrightarrow f \circ A \in X^*$, $\forall f \in Y^*$. (*Sugerencia:* $E \subset X$ es acotado $\Leftrightarrow f(E)$ es acotado $\forall f \in X^*$.)

(65) Sean $(X, \| \|_X)$, $(Y, \| \|_Y)$ espacios vectoriales normados sobre K con $(X, \| \|_X)$ de Banach. Sea $f : X \times Y \to K$ una transformación bilineal y continua en cada variable. Pruebe: f es continua.

(*Sugerencia:* Basta probar que f es continua en $(0,0)$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea $V_m = \{y \in Y : \|y\|_Y \leq \frac{1}{m}\}$. Si $\varepsilon > 0$ es dada, defina $A_m = \{x \in X : |f(x,y)| < \varepsilon, \forall y \in V_m\}$. pruebe que $X = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m$ y use el teorema de R. Baire para obtener: $|f(x,y)| < 2\varepsilon$ si $y \in Y_m$ para alguna m y para cada x en alguna vecindad de $\vec{0} \in X$.)

(66) Sean $(X, \| \|_X)$, $(Y, \| \|_Y)$ espacios de Banach sobre K y $A \in \mathbb{B}(X,Y)$ invertible. Pruebe usando el teorema de la gráfica cerrada que $A^{-1} \in \mathbb{B}(Y,X)$. (*Sugerencia:* $h : X \times Y \to Y \times X$ definido por $h(x,y) = (y,x)$ es un homeomorfismo).

(67) Para cada $x \in \mathcal{L}_1([-\pi,\pi])$ sea $\hat{x}(n) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{[-\pi,\pi]} x(t)e^{-int}\, d\lambda$ $(n \in \mathbb{Z})$, el enésimo coeficiente de Fourier de x. Sea $X \subset \mathcal{L}_1$ un subespacio cerrado tal que $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} |\hat{x}(n)| \leq M\|x\|_1$. (*Sugerencia:*Pruebe que el operador $T : (X, \| \|_1) \to \ell_1(K)$ dado por: $(T(x))(n) = \hat{x}(n)$ $(n \in \mathbb{Z})$ es lineal y cerrado.)

(68) (Operadores Compactos)
Sean $(X, \| \|_X)$ y $(Y, \| \|_Y)$ espacios vectoriales normados sobre K. Un operador lineal $A : X \to Y$ se dice que es **compacto** (o completamente continuo) si $\overline{A(B_1^X(\vec{0}))}^Y$ es compacto en Y. Pruebe:

i) A es compacto $\Leftrightarrow$ $\forall$ sucesión acotada (x_n) en X se tiene que (Ax_n) admite una subsucesión convergente.

ii) Si $C(X,Y) = \{A : X \to Y : A \text{ es compacto}\}$ entonces $C(X,Y)$ es un subespacio cerrado de $\mathbb{B}(X,Y)$ (y es por lo tanto un espacio de Banach).

iii) Si $A \in \mathbb{B}(X,Y)$ y $\dim_K(A(X)) < +\infty$, entonces $A \in C(X,Y)$ (NOTA: Dichos operadores se llaman **degenerados**).

iv) $C(X) = C(X,X)$ es un ideal bilateral de $\mathbb{B}(X)$. (*i. e.* si $A \in C(X)$ y $B \in \mathbb{B}(X)$, entonces $A \circ B$ y $B \circ A$ pertenecen a $C(X)$).

(69) Pruebe que todo operador compacto envía sucesiones débilmente convergentes en sucesiones convergentes.

(70) Si $A \subset \mathbb{B}(X,Y)$ es compacto y A^{-1} existe. Pruebe: $A^{-1} \in \mathbb{B}(Y,X) \Leftrightarrow \dim_K(X) < +\infty$. (*Sugerencia:* Use el ejercicio (18) inciso *(i)*.)

(71) Sea $A \in \mathbb{B}(X,Y)$ dado. Si $(Y, \| \|_Y)$ es de Banach y A es compacto, pruebe que A^* es compacto.

(72) Sea $X = \ell_1(K)$ y $\|x\| = \sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|$ $(x \in X)$. Defina $A : X \to X$ como sigue: $(A(x))(i) = \frac{x_i}{i}$ $(i \in \mathbb{N})$. Pruebe que A es un operador compacto.

(73) Sean $X = C_K([a,b])$ y $Y = C_K([c,d])$ con la norma uniforme. Para $f : [a,b] \times [c,d] \to K$ continua, defina $A = A_f : X \to Y$ como sigue: $Ax(t) = \int_a^b f(x,t)x(s)ds$ $(x \in X)$. Pruebe que A es un operador compacto. (*Sugerencia:* Pruebe que $\overline{A(B_1^X(\vec{0}))}$ es uniformemente equicontinuo y acotado).

(74) Sean $X = \mathcal{L}_2([a,b])$ y $M \in \mathcal{L}_2([a,b] \times [a,b])$ dados. Defina $A_M : X \to X$ como sigue: $A_M x(t) = \int\limits_{[a,b]} M(x,t)x(s)\, ds$. Pruebe:

i) $A_M x \in X$ $\forall x \in X$ y $A_M \in \mathbb{B}(X)$.

ii) Si $M(x,t) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i(s)y_i(t)$ $(x_i, y_i \in X)$, entonces A_M es un operador degenerado.

iii) Si $M' \in \mathcal{L}_2([a,b]) = \times[a,b])$ entonces: $\|A_M - A_{M'}\| \leq \|M - M'\|_2$.

iv) A_M es un operador compacto.

(*Sugerencia:* Use el teorema de Luzin y el de Stone-Weierstrass para aproximar a M en la norma de $\mathcal{L}_2$ mediante funciones continuas de la forma descrita en el inciso *(ii)* y use el ejercicio (68) incisos *(ii)* y *(iii)*.)

(75) Sea $(X, \| \|)$ un espacio vectorial normado y (x_n) una sucesión en X tal que $x_n \to x$ débilmente. Pruebe que existe una sucesión (y_i) tal que :

i) Cada y_i es una combinación convexa de un número finito de las x_n.

ii) $\|y_i - x\| \to 0$ $(i \to +\infty)$.

(76) Sea $X = \ell_p(K)$ $(1 < p < +\infty)$. Para $m, n \in \mathbb{N}$ defina $x_{n,m} = e_n + ne_m \in X$ $(e_n(i) = \delta_{i,n})$ y sea $F = \{x_{n,m} : m > n\}$. Pruebe:

i) F es cerrado.

ii) $\vec{0}$ es un punto de acumulación débil de F.

iii) No existe una sucesión de F que converja debilmente a $\vec{0}$ ($\therefore$ τ_ω no es metrizable).

(77) Pruebe que todo conjunto secuencialmente compacto es debilmente secuencialmente compacto, pero no inversamente. (*Sugerencia:* Considere la bola unitaria en un espacio reflexivo de dimensión infinita.)

(78) Sea $(X, \| \|)$ un espacio vectorial normado sobre K que sea separable. Pruebe sin usar el teorema de L. Alaoglu que $\{f \in X^* : \|f\| \leq 1\}$ es secuencialmente compacto (rel. τ_{ω^*}). (*Sugerencia:* Use el método diagonal de Cantor).

(79) Pruebe que el ladrillo de Hilbert $L \subset \ell_2(K)$ definido por $L = \{x \in \ell_2(K) : |x(i)| \leq \frac{1}{i} \quad \forall i \in \mathbb{N}\}$ es compacto y $L^\circ = \emptyset$.

(80) Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado sobre K. Pruebe el siguiente resultado de F. Riesz haciendo uso del ejercicio (10).
X es de dimensión finita $\Leftrightarrow \overline{B_1}(\vec{0})$ es compacto.

(*Sugerencia:* Si X no es de dimensión finita, es posible construir una sucesión $(x_n) \subset \overline{B_1}(\vec{0})$ tal que $\|x_n - x_m\| \geq 1/2 \ \forall n \neq m$.)

(NOTA: Es claro que basta pedir que X sea localmente compacto.)

(81) Sea $X = \mathcal{L}_2([-1,1])$. Para cada $\alpha \in K$, sea $E_\alpha = \{f \in C_K([-1,1]) : f(0) = \alpha\}$. Pruebe:

i) E_α es convexo $\forall \alpha$ y $E_\alpha \cap E_\beta = \emptyset$ $(\alpha \neq \beta)$;

ii) E_α es denso en X $\forall \alpha$.

iii) Si $\alpha \neq \beta$ entonces no existe $f \in X^*$ que separe E_α de E_β.

(*Sugerencia:* Sea $f \in X^*$ $(f \neq 0)$, describa a $f(X_\alpha) \subset K$.)

(82) (El teorema de S. N. Bernsteĭn)
Sea $X = C_K([0,1])$ y $\|x\| = \max\limits_{0\leq t\leq 1} |x(t)|$. Defina $B_n : X \to X$ $(n \in \mathbb{N})$ poniendo: $B_n(x)(t) = \sum_{k=0}^{n} x\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$. Pruebe el teorema de Bernsteĭn estableciendo los siguientes incisos:

i) $B_n \in \mathbb{B}(X)$, de hecho $\|B_n\| = 1$ $(n \in \mathbb{N})$.

ii) $\|B_n(e^{\lambda t}) - e^{\lambda t}\| \to 0$ $(n \to +\infty)$ $\forall x \in X$ (*Sugerencia:* Si $a_n(t) \to a(t)$ uniformemente, entonces $\left(1 + \frac{a_n(t)}{n}\right)^n \to e^{a(t)}$ uniformemente.)

iii) $\|B_n(x) - x\| \to 0$ $(n \to +\infty)$ $\forall x \in X$ (*Sugerencia:* Por el teorema de de Stone-Weierstrass $\overline{\langle\{1, e^t, e^{2t}, \ldots\}\rangle} = X$.)

(83) Sean $\Omega = (0,1)$, S = σ-álgebra de Borel de Ω, λ = medida de Lebesgue sobre S y $p \in (1, +\infty)$ dado. Pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes para funciones x_n y x de $\mathcal{L}_p(\lambda)$:

a) $x_n \to x$ debilmente.

b) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \{\|x_n\|_p\} < +\infty$ y $\int_E x_n \, d\lambda \to \int_E x \, d\lambda$ $\forall E \subset S$.

c) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \{\|x_n\|_p\} < +\infty$ y $\int_{(0,t]} x_n \, d\lambda \to \int_{(0,t]} x \, d\lambda$ $\forall t \in (0,1)$.

(84) (Ω, S, λ) como en el anterior y $p \in (0,1)$ fijo. Defina $d(x,y) = \int_\Omega |x-y|^p \, d\lambda$ $(x, y \in \mathcal{L}_p(\lambda))$. Pruebe:

i) d es una métrica (identifique funciones iguales c.d. y pruebe que $(a+b)^p \leq a^p + b^p$ $\forall a, b \geq 0$).

ii) Si $x \in \mathcal{L}_p(\lambda)$ $x \neq 0$ entonces existe una descomposición $x = y + z$ en donde $y, z \in \mathcal{L}_p$ y con $d(y,0) = d(z,0) = \frac{1}{2}d(x,0)$. (*Sugerencia:* Use la continuidad de $\varphi(r) = \int_{(0,r)} |x|^p \, d\lambda$ y sea $y = x\chi_{(0,r)}$ para alguna $r \in (0,1)$.)

iii) Si $f \in (\mathcal{L}_p(\lambda))^*$, entonces $f \equiv 0$ (M. M. Day (1940)). (*Sugerencia:* Si $f(x) = 1$ para alguna x, entonces por *(i)* es posible construir una sucesión de elementos (x_n) en $\mathcal{L}_p(\lambda)$ tal que $d(x_n, 0) \to 0$ pero $|f(x_n)| \geq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$).

(85) Hipótesis y notación como en el anterior. Pruebe:

i) Los únicos subconjuntos abiertos convexos de $\mathcal{L}_p(\lambda)$ son el vacío y el total. (*Sugerencia:* Si V es abierto convexo y $\vec{0} \in V$, halle $r > 0$ tal que $n^{p-1}d(x, \vec{0}) < r$ y una partición $P = (0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1)$ de $[0,1]$ tal que $\int_{(t_i, t_{i+1}]} |x|^p \, d\lambda = \frac{1}{n}d(x,0)$ $\forall i = 0, \ldots, n-1$. Defina $x_i = nx\chi_{(t_i,t_{i+1}]}$, pruebe que $x_i \in V$ y $x = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$.)

ii) Concluya que $(\mathcal{L}_p(\lambda), d)$ no es normable. (M. M. Day (1940))

(86) Sea M un subespacio de $X = \mathcal{L}_p([0,1])$ $(0 < p < 1)$ de codimensión finita (ver el anterior). Pruebe que M es d-denso en X (*Sugerencia:* Considere $\Pi_M : X \to X/M$ la proyección natural. Use el ejercicio (12) y (16).)

(87) Sea $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio euclideo sobre K. Pruebe que z es un punto extremo de $\{x \in X : \|x\| \leq 1\} \Leftrightarrow \|z\| = 1$.

(88) Sean $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio euclideo sobre K y $x_1, \ldots, x_n \in X$ dados. Pruebe:

i) $x_1, \ldots, x_n$ son linealmente independientes sobre $K \Leftrightarrow$ el determinante de Gramm $\Delta_n = \det(\langle x_i, x_j\rangle)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ es diferente de cero. (J. P. Gramm (1881)). (*Sugerencia:* Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ tales que $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$, tomo el producto interior con $x_1, \ldots, x_n$ y examine el sistema lineal resultante.

ii) Si $\Delta_n \neq 0 \Rightarrow \Delta_1, \ldots, \Delta_{n-1}$ son todos diferentes de cero.

(NOTA: Se puede probar que si $\Delta_n \neq 0$, entonces $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ son todos positivos.)

(89) Sea $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio euclideo sobre K. Pruebe:

i) $x_m \to x$ debilmente $\Leftrightarrow \langle x_m, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ $\forall y \in X$.

ii) Si $(x_n)_1^\infty$ es una sucesión ortonormal en X, entonces $x_n \to 0$ debilmente. (Lema de Riemann-Lebesgue).

iii) $x_n \to x$ y $y_n \to y \Rightarrow \langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$ $(n \to +\infty)$.

(90) Sea $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio euclideo sobre $K = \mathbb{C}$. Pruebe:

i) Si $T \in \mathbb{B}(X)$ es tal que $\langle Tx, x\rangle = 0$ $\forall x \in X$, entonces $T = 0$.

ii) Si $S, T \in \mathbb{B}(X)$ son tales que $\langle Tx, x\rangle = \langle Sx, x\rangle$ $\forall x \in X$, entonces $T = S$.

iii) El inciso *(i)* es falso si $K = \mathbb{R}$ (*Sugerencia:* Sea $X = \mathbb{R}^2$ con el producto interno usual y $Tx = e^{i\theta}x$ para cierta $\theta \in \mathbb{R}$.)

(91) (El teorema de Lax-Milgram)
Sea $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio de Hilbert sobre K y $f : H \times H \to K$ un operador sesquilineal. Suponga que $M = \sup\{|f(x,y)| : \|x\| = \|y\| = 1\} < +\infty$. Pruebe que existe un **único** operador $S \in \mathbb{B}(H)$ tal que: $f(x,y) = \langle x, Sy\rangle\ \forall x, y \in H$ y $\|S\| = M$.

(*Sugerencia:* Pruebe que para cada $y \in H$, la y-sección de f pertenece a $\mathbb{B}(H)$ y use el teorema de representación de F. Riesz.)

(92) Pruebe los siguientes resultados:

i) Si (x_n) es una sucesión ortonormal completa y (y_n) ortonormal en un espacio de Hilbert $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ y (y_n) es una sucesión en H tal que $\sum_1^\infty \|x_n - y_n\|^2 < 1$, entonces (y_n) es completa también. (N. K. Bari)

ii) El inciso anterior continúa siendo válido si sólo se asume que $\sum \|x_n - y_n\|^2 < +\infty$ (G. D. Birkhoff)

(93) Sea $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio euclideo sobre K. Suponga que $M = M^{\perp\perp}$ $\forall$ subespacio cerrado de X. Pruebe que $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ es un espacio de Hilbert. (*Sugerencia:* Pruebe que la función $A : H \to H^*$ dada por $Ax(y) = \langle x, y\rangle$ es suprayectiva. Examine la prueba del teorema de representación de Riesz.)

(94) Pruebe el siguiente resultado de G. Vitali:
Una sucesión ortonormal (x_n) en $\mathcal{L}_2([a,b])$ es completa $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^\infty \left| \int_{[a,t]} x_n\, d\lambda \right|^2 = t - a\ \forall t \in [a,b]$. (*Sugerencia:* $\int_{[a,t]} x_n\, d\lambda = \langle x_n, \chi_{[a,t]}\rangle$.)

(95) Pruebe que un espacio de Hilbert H sobre K es separable $\Leftrightarrow$ toda base de Hilbert sobre K de H, es numerable.

(96) Sea $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio de Hilbert sobre K y sea $\{x_i\}_{i\in I}$ una familia ortogonal en H. Pruebe:

i) $\{x_i\}_{i\in I}$ es sumable en H $\Leftrightarrow$ $\{\|x_i\|^2\}_{i\in I}$ es sumable en $\mathbb{R}$.

ii) Si $x = \sum_{i\in I} x_i$, entonces $\|x\|^2 = \sum_{i\in I} \|x_i\|^2$.

(97) Sea $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio de Hilbert sobre K y $\mathbb{B} = \{x_i\}_{i\in I}$ un sistema ortonormal completo **infinito**. Pruebe que $\mathbb{B}$ **no** es una base de Hamel para H.

(*Sugerencia:* Sea $\{x_1, x_2, \ldots\} \subset \mathbb{B}$ un subconjunto numerable infinito, y pruebe que $\sum_{k=1} \infty \frac{x_k}{k^2}$ define un elemento de H que no pertenece a $\langle \mathbb{B} \rangle$.)

(98) Sea $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio de Hilbert sobre K y $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de subespacios cerrados tales que $M_i \perp M_j\ \forall i \neq j\ (i, j \in I)$. Pruebe: $\overline{\langle \bigcup_{i\in I} M_i \rangle} = \bigoplus_{i\in I} M_i$, en donde $\bigoplus_{i\in I} M_i = \{x \in H : x = \sum_{i\in I} x_i,\ x_i \in M_i \text{ único}\}$.

(99) Sea I fijo no-numerable y defina $\ell^2_K(I) = \{x : I \to K \mid \sum_{i\in I} |x(i)|^2 < +\infty\}$. Pruebe:

i) $\langle x, y\rangle = \sum_{i\in I} x(i)\overline{y(i)}$ tiene sentido en K y define un producto interior en $\ell^2_K(I)$.

ii) $(\ell^2_K(I), \langle\ ,\ \rangle)$ es un espacio de Hilbert.

iii) La dimensión de Hilbert de $\ell^2_K(I)$ es $\#(I)$.

(100) Sea $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio de Hilbert sobre K y $M \subset H$ un subespacio cerrado. Sean $P : H \to M$ la proyección ortogonal sobre M y $x \in X$ fija. Pruebe:

i) $\|x - Px\| \leq \|x - m\|\ \forall m \in M$.

ii) $\|x - Px\| = \sqrt{\|x\|^2 - \|Px\|^2}$.

iii) $(H/M, \|\ \|_{H/M})$ es un espacio de Hilbert con producto interior definido por:

$$\langle [x], [y] \rangle_{H/M} = \langle x - Px, y - Py \rangle$$

(*Sugerencia:* $\|[x]\|_{H/M} = d(x, M)$.)

(101) Sea M un subespacio de $\mathcal{L}_2([0.1])$ y suponga que existe una constante $A > 0$ tal que: $|x(t)| \leq A\|x\|_2\ \forall t \in [0,1], \forall x \in M$. Pruebe que la dimensión de Hilbert de M no excede a A^2.

(*Sugerencia:* Sea $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset M$ un sistemas ortonormal finito. Use el teorema de representación de Riesz y la desigualdad de Bessel para probar: $\sum_{i=1}^n |x_i(t)|^2 \leq A^2\ \forall t \in [0,1]$.)

(102) Sea M un subespacio de $\mathcal{L}_\infty([0,1])$ que es cerrado como subespacio de $\mathcal{L}_2([0,1])$. Pruebe que M es finito dimensional. (Teorema de A. Grothendieck (1954))

(*Sugerencia:* Pruebe que M es cerrado en $C_K([0,1])$ con la norma uniforme. Use el teorema del mapeo abierto para probar que M satisface la hipótesis del ejercicio anterior.)

(103) Sea $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio de Hilbert sobre K y sea $A : H \to H$ una transformación lineal tal que $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle\ \forall x, y \in H$. Pruebe que $A \in \mathbb{B}(H)$. (Hellinger y Toeplitz (1910)). (*Sugerencia:* Si $x \to 0$, entonces $Ax_n \to 0$ debilmente y use el teorema de la gráfica cerrada).

(104) Sean $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio de Hilbert sobre K y $T \in \mathbb{B}(H)$ dados. Pruebe:

i) $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

ii) $T^* \circ T = T \circ T^* \Leftrightarrow \|Tx\| = \|T^*x\| \; \forall x \in H$.

(105) Sean $(H, \langle\, , \rangle)$ un espacio de Hilbert sobre K y $P, Q \in \mathbb{B}(H)$ .Defina una relación de orden en $\mathbb{B}(H)$ como sigue: $P \leq Q \Leftrightarrow \langle Px, x\rangle \leq \langle Qx, x\rangle \; \forall x \in H$. Si P y Q son proyecciones auto-adjuntas, pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes:

i) $P \leq Q$.

ii) $P(H) \subset Q(H)$.

iii) $P \circ Q = P$.

iv) $Q \circ P = P$.

(106) Sean $(H, \langle\, , \rangle)$ un espacio de Hilbert separable, $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ una base de Hilbert y $A \in \mathbb{B}(H)$ tal que: $\sum_{i=1}^{\infty} \|A(e_i)\| < +\infty$. Pruebe que A es compacto.

(*Sugerencia:* Sean $H_N = \langle\{e_1, \ldots, e_N\}\rangle$ y $P_N : H \to H_N$ la proyección ortogonal. Pruebe que $\forall x \in H$ con $\|x\| \leq 1$ y $\varepsilon > 0$ arbitraria, $\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\|Ax - AP_Nx\| < \varepsilon$. Ahora pruebe la compacidad de ' $A(\overline{B_1}(\bar{0}))$.)

(107) Sea $(a_{i,j})$ $i, j \in \mathbb{N}$ una matriz infinita con elementos en K tal que: $\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2 < +\infty$.

Mediante las ecuaciones $y(i) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}x(j)$ define un operador lineal $A : \ell_2(K) \to \ell_2(K)$.

Pruebe que A es compacto y $\|A\| \leq \left(\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2\right)^{1/2}$.

(108) Sean $(H, \langle\, , \rangle)$ un espacio de Hilbert separable y $p \in [1, +\infty)$ dados. Defina $\ell_p(H) = \{x : \mathbb{N} \to H : \sum_{i=1}^{\infty} \|x(i)\|^p < +\infty\}$ y $\|(x)\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|x(i)\|^p\right)^{1/p}$. Pruebe:

i) $\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x(i), y(i)\rangle| \leq \|(x)\|_p \|(y)\|_q$. Con $q \in (1, +\infty)$ el exponente conjugado de $p \in (1, +\infty)$.

ii) $(\ell_p(H), \|(\;)\|)$ es un espacio de Banach, el cual es de Hilbert $\Leftrightarrow p = 2$.

Halle condiciones sobre x y y que garanticen la igualdad en *(i)*.

(109) Imitando la construcción del ejercicio (108) defina a $\ell_\infty(H)$. Pruebe:

***i)* $(\ell_\infty(H), _\infty)$ es un espacio de Banach.**

***ii)* La desigualdad de Hölder con $p = 1$ y $q = +\infty$ correspondiente al inciso *(i)* del (108).**

BIBLIOGRAFIA RECOMENDADA

(1) "Measure, Integration and Functional Analysis" R. B. Ash. *Academic Press.*

(2) "Functional Analysis" B. Bachman y L. Narici *Academic Press.*

(3) "An Introduction to Hilbert Space" P. R. Halmos. *Chelsea.*

(4) "Real and Abstract Analysis" E. Hewitt y K. Stromberg. *Springer-Verlag.* G.T.M. # 25.

(5) "Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional" A. N. Kolmogorov y S. V. Fomin. *MIR.*

(6) "Real Analysis" H. L. Royden. *Mc Millan.*

(7) "Functional Analysis" W. Rudin. *Mc Graw Hill.*

(8) "Introduction to Topology and Modern Analysis" G. F. Simmons. *Mc Graw Hill.*

(9) "An Introduction to Functional Analysis" A. E. Taylor. *Wiley-Toppan.*