#70

SERIE MATEMÁTICAS

Guillermo Gabrinsky S.

Ejercicios de teoría de la medida e integración de Lebesgue

AÑO 2007

VÍNCULOS MATEMÁTICOS

FACULTAD DE CIENCIAS

VÍNCULOS MATEMÁTICOS

EJERCICIOS DE TEORÍA DE LA MEDIDA E INTEGRACIÓN DE LEBESGUE

Notas de clase

Guillermo Grabinsky S.*

VINCULOS MATEMÁTICOS No. 70, 2007

* Profesor de la Facultad de Ciencias de la UNAM

Ejercicios de Teoría de la Medida e Integración de Lebesgue

Guillermo Grabinsky S.
Facultad de Ciencias
UNAM

Advertencia Preliminar

El presente trabajo contiene una selección de ejercicios sobre el tema de la medida e integración de Lebesgue, mismos que he discutido con mis estudiantes durante varios semestres en los que he impartido el curso correspondiente. La mayoría de los ejercicios han sido provistos de sugerencias que tienen la finalidad de facilitar su solución, aunque el camino sugerido no es por lo general el único y otros métodos son deseables.

Por otro lado he tratado de mantener uniforme el grado de dificultad de los ejercicios; sin embargo, algunos me parecen más complejos que otros, pero he optado por no distinguirlos para no prejuiciar al lector. También es importante señalar que existe interdependencia entre algunos ejercicios por lo que sugiero que éstos sean resueltos en orden, aunque en varios casos pueda no ser necesario.

Procuré mantener la notación lo más apegado posible a la generalmente acepatada; de cualquier manera, se incluye una breve lista de símbolos y su significado, así como una bibliografía recomendada.

Considero un grato deber el expresar mi agradecimiento a Guillermo J. Correa G. por su estupendo trabajo al frente del sistema TEX.

Abril de 1987

G. Grabinsky

Notación

$\mathcal{A}$ = álgebra de subconjuntos de X. Si $X = \mathbb{R}$, entonces $\mathcal{A}$ es el álgebra del ejercicio (5).

$\mathcal{A}(\mathsf{E})$ = álgebra generada por la familia E.

$\mathcal{A}^*$ = σ-álgebra de los μ^*-medibles.

B_X = σ-álgebra de Borel del espacio topológico (X, τ).

$\overline{\lambda} : \mathcal{A}^* \to \overline{\mathbb{R}}$ = la medida de Lebesgue sobre los Lebesgue-medibles de $\mathbb{R}$.

$\mathsf{M}(X, S)$; $\mathsf{M}^+(X, S)$ = clase de funciones $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ que son S-medibles; clase de funciones no-negativas en $\mathsf{M}(X, S)$.

μ una casi-medida = una función conjuntista no-negativa σ-aditiva y con $\mu(\emptyset) = 0$ cuyo dominio es un álgebra.

μ^* = la medida exterior : $\mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}$, generada por la casi-medida μ.

$\overline{\mu}$ = la restricción de μ^* a $\mathcal{A}^*$.

$\mathcal{P}(X)$ = el conjunto potencia de X.

$\overline{\mathbb{R}}$ = recta real extendida, $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

$S \otimes S'$ = σ-álgebra producto. (= σ-álgebra generada por $S \times S = \{E \times E' : E \in S,\ E' \in S'\}$).

S; $S(\mathsf{E})$ = σ-álgebra; σ-álgebra generada por la familia E.

EJERCICIOS

(1) Sea $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ una familia cerrada bajo uniones finitas y diferencias. Sea $(A_n)_1^\infty$ una sucesión de elementos de $\mathcal{R}$. Pruebe que existe una sucesión $(E_n)_1^\infty$ de elementos de $\mathcal{R}$ con las siguientes propiedades:

i) $E_n \subset A_n \qquad \forall n$

ii) $E_n \cap E_m = \emptyset \qquad \forall n \neq m$

iii) $\bigcup\limits_{n=1}^{m} E_n = \bigcup\limits_{n=1}^{m} A_n \qquad \forall m \in \mathbb{N} \qquad (\therefore \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n)$

(*Sugerencia:* Sea $E_1 = A_1$ y $E_n = A_n - \bigcup\limits_{j=1}^{n-1} A_j$ si $n \geq 2$.)

(2) Si $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ es un álgebra con la propiedad de que si para cualquier sucesión de subconjuntos disjuntos $(E_n)_1^\infty$ de $\mathcal{A}$ se tiene que $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$, entonces pruebe $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra

(*Sugerencia:* Use el ejercicio (1).)

(3) Pruebe con un ejemplo que una familia no vacía de subconjuntos de X, cerrada bajo intersecciones numerables y diferencia simétrica no es necesariamente un σ-anillo.

(4) Compruebe que la operación diferencia simétrica $\triangle$ satisface las siguientes propiedades:

i) $A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (C \triangle B)$.

ii) $(A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$.

iii) $(A_1 \cap A_2) \triangle (B_1 \cap B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$.

iv) $(A_1 - A_2) \triangle (B_1 - B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$.

(*Sugerencia:* Si $x \notin A_i \triangle B_i$ entonces $\chi_{A_i}(x) = \chi_{B_i}(x)$ $(i = 1, 2)$.)

(5) Sea $X = \mathbb{R}$ y sea

$$\mathcal{A} = \{\text{unión finita disjunta de intervalos de la forma } (a, b],\ (-\infty, b] \text{ y } (a, +\infty)\}.$$

Pruebe que $\mathcal{A}$ es un álgebra, pero **no** una σ-álgebra.

(6) Sea $\mathsf{E} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \subset \mathcal{P}(X)$ dada, denotamos

$$A^a = \begin{cases} A, & \text{si } a = 0; \\ A^c, & \text{si } a = 1. \end{cases}$$

Para cada $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \{0, 1\}^n$ definimos $E_\alpha = A_1^{\alpha_1} \cap A_2^{\alpha_2} \cap \cdots \cap A_n^{\alpha_n}$. Pruebe:

i) $\mathcal{A}(\mathsf{E}) = \{\bigcup\limits_{\alpha \in D} E_\alpha : D \subset \{0, 1\}^n\}$ (convenimos en poner $\bigcup\limits_{\alpha \in \emptyset} E_\alpha = \emptyset$.)

ii) Concluya que $\#(\mathcal{A}(\mathsf{E})) \leq 2^{2^n}$.

(*Sugerencia:* para probar la cerradura bajo complementación en *(i)*, empiece con E_α y luego trate el caso general.)

(7) Sea $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ un álgebra con un número finito de elementos. Pruebe que $\#(\mathcal{A})$ es una potencia de 2.

(*Sugerencia:* Sean $E_1, E_2, \ldots, E_p$ aquéllos elementos diferentes del vacío obtenidos por el método del ejercicio anterior con $\mathsf{E} = \mathcal{A}$. Pruebe que $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\{E_1, E_2, \ldots E_p\})$, el cual puede ponerse en correspondencia biunívoca con $\{0,1\}^p$.)

(8) Si $\#(X) \geq s$, construya un álgebra $A_p \subset \mathcal{P}(X)$ con $\#(\mathcal{A}_p) = 2^p \ \forall p \in \{1, 2, \ldots, s\}$.

(9) Sea $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ una σ-álgebra con un número infinito de elementos. Pruebe que $\mathcal{S}$ es no-numerable (*i.e.* no hay σ-álgebra numerable infinita.)

(*Sugerencia:* Sea $\{A_1, A_2, \ldots\} \subset \mathcal{S}$ un conjunto infinito. Imitando la construcción de los conjuntos E_α como en (6) pero ahora con $\alpha \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, obtenga una familia numerable infinita $\{E_1, E_2, \ldots\}$ de subconjuntos en $\mathcal{S}$ **no vacíos** y **ajenos**. Halle una función inyectiva $i : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{S}$.)

(10) Sea $\mathsf{E} \subset \mathcal{P}(X)$ fija. Pruebe que $\forall A \in \mathcal{S}(\mathsf{E})$, existe una subfamilia numerable $\mathsf{E}_0 \subset \mathsf{E}$ tal que $A \in \mathcal{S}(\mathsf{E}_0)$.

(*Sugerencia:* Sea $\mathcal{S} = \cup\{\mathcal{S}(\mathsf{E}') : \mathsf{E}' \subset \mathsf{E}$ y E' es numerable $\}$. Pruebe que $\mathcal{S}$ es una σ-álgebra y que $\mathsf{E} \subset \mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathsf{E})$.)

(NOTA: En general unión de σ-álgebras puede **no** ser una σ-álgebra.)

(11) Sea $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ no vacía dada. Pruebe: $\mathcal{R}$ es un anillo $\Leftrightarrow$ $\{\chi_A : A \in \mathcal{R}\}$ es un anillo algebraíco (con las operaciones de suma y producto módulo 2.)

(12) Sea $(E_n)_1^\infty$ una sucesión de subconjuntos de X. Definimos el **límite inferior** y el **límite superior** de (E_n) denotados: $\underline{\lim}_{n\to\infty} (E_n)$ y $\overline{\lim}_{n\to\infty} (E_n)$ respectivamente como los subconjuntos de X definidos por:

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} (E_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k \qquad \text{y} \qquad \overline{\lim}_{n\to\infty} (E_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k.$$

Pruebe:

i) $x \in \underline{\lim}_{n\to\infty} (E_n) \Leftrightarrow \exists n = n(x)$ tal que $x \in E_m \quad \forall m \geq n$.

ii) $x \in \overline{\lim}_{n\to\infty} (E_n) \Leftrightarrow x \in E_n$ para una infinidad de n's.

iii) $\underline{\lim}_{n\to\infty} (E_n) \subset \overline{\lim}_{n\to\infty} (E_n)$. (Dé un ejemplo en el que la contención sea propia.)

iv) $X - \underline{\lim}_{n\to\infty} (E_n) = \overline{\lim}_{n\to\infty} (X - E_n)$ y $X - \overline{\lim}_{n\to\infty} (E_n) = \underline{\lim}_{n\to\infty} (X - E_n)$.

v) Si $E_n \subset E_{n+1} \ \forall n$ o $E_n \supset E_{n+1} \ \forall n$, entonces $\underline{\lim}_{n\to\infty} (E_n) = \overline{\lim}_{n\to\infty} (E_n)$.

(13) Sean $(E_n)_1^\infty$ y $(F_n)_1^\infty$ dos sucesiones de subconjuntos de X. Pruebe:

i) $\overline{\lim}_{n\to\infty} (E_n \cap F_n) \subset \overline{\lim}_{n\to\infty} (E_n) \cap \overline{\lim}_{n\to\infty} (F_n)$. Dé un ejemplo en el que la contención sea propia y pruebe que la igualdad se da si $\cap$ se reemplaza por $\cup$.

ii) $\underline{\lim}_{n\to\infty} (E_n) \cup \underline{\lim}_{n\to\infty} (F_n) \subset \underline{\lim}_{n\to\infty} (E_n \cup F_n)$. Dé un ejemplo en el que la contención sea propia y pruebe que la igualdad se da si $\cup$ se reemplaza por $\cap$.

(14) Sea (a_n) una sucesión de números reales (extendidos), definimos el **límite inferior** y el **límite superior** denotados $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ y $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ respectivamente como los números reales (extendidos) a_* y a^* respectivamente

dados por:

$$a_* = \sup_{n\geq 1} \inf_{k\geq n} \{a_k\} \qquad \text{y} \qquad a^* = \inf_{n\geq 1} \sup_{k\geq n} \{a_k\}.$$

(CONVENCION: Si $S \subset \mathbb{R}$ no es acotado superiormente definimos $\sup S = +\infty$. Análogamente, si S no esta acotado inferiormente, definimos $\inf S = -\infty$). Pruebe:

i) a_* y a^* siempre existen en $\overline{\mathbb{R}}$ y $a_* \leq a^*$.

ii) (a_n) converge a $a \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow a_* = a = a^*$.

(15) Sea $(E_n)_1^\infty$ una sucesión de subconjuntos de X. Pruebe:

i) $\chi_{\underline{\lim}_{n\to\infty} (E_n)} = \underline{\lim}_{n\to\infty} \chi_{E_n}$ y $\chi_{\overline{\lim}_{n\to\infty} (E_n)} = \overline{\lim}_{n\to\infty} \chi_{E_n}$.

ii) $(\chi_{E_n})_1^\infty$ converge $\Leftrightarrow \underline{\lim}_{n\to\infty} (E_n) = \overline{\lim}_{n\to\infty} (E_n)$. En cuyo caso $\lim_{n\to\infty} \chi_{(E_n)} = \chi_{\underline{\lim}_{n\to\infty} (E_n)}$.

(16) Sea $(E_n)_1^\infty$ una sucesión de subconjuntos de X. Definimos $D_1 = E_1$, $D_2 = D_1 \triangle E_2$ y en general $D_{n+1} = D_n \triangle E_{n+1}$ para $n = 1, 2, \ldots$. Pruebe : $\underline{\lim}_{n\to\infty} (D_n) = \overline{\lim}_{n\to\infty} (D_n) \Leftrightarrow \underline{\lim}_{n\to\infty} (E_n) = \overline{\lim}_{n\to\infty} (E_n) = \emptyset$

(*Sugerencia:* use el anterior.)

(17) Sea $f : X \to Y$ una función y sea $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(Y)$ dado. Pruebe que:

$$\mathcal{A}(f^{-1}(\mathcal{B})) = f^{-1}(\mathcal{A}(\mathcal{B})) \qquad \text{y} \qquad \mathcal{S}(f^{-1}(\mathcal{B})) = f^{-1}(\mathcal{S}(\mathcal{B})).$$

(*Sugerencia:* Considere a la familia $\mathcal{K} = \{D \subset Y : f^{-1}(D) \in \mathcal{A}(f^{-1}(\mathcal{B}))\}$ y análogamente con $\mathcal{S}(f^{-1}(\mathcal{B}))$.)

(18) Sea $X = \mathbb{R}$ y $\mathcal{S} = \{A \in \mathbb{R} : \#(A) \leq \aleph_0$ ó $\#(\mathbb{R} - A) \leq \aleph_0\}$. Describa a las funciones $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ que son $\mathcal{S}$-medibles.

(19) Sea $(X, \mathcal{S})$ un espacio medible y sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función $\mathcal{S}$-medible, pruebe que $\{x \in X : f(x) = \alpha\} \in \mathcal{S} \quad \forall \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$. Dé un ejemplo de una función $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que $\{x \in X : f(x) = \alpha\} \in \mathcal{S} \quad \forall \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ pero que no sea $\mathcal{S}$-medible.

(20) Sea $(X, \mathcal{S})$ un espacio medible. Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función $\mathcal{S}$-medible. Definimos $\frac{1}{f} : X \to \mathbb{R}$ como sigue:

$$\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } f(x) = 0, \pm\infty; \\ \frac{1}{f(x)}, & \text{si } f(x) \neq 0, \pm\infty. \end{cases}$$

Pruebe que $\frac{1}{f}$ es $\mathcal{S}$-medible.

(21) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable. Pruebe que $f' : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ es Borel medible.

(*Sugerencia:* $f'(x) = \lim_{n\to\infty} n\{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)\}$ $(x \in \mathbb{R})$. Pruebe que $g_a(x) = f(x + a)$ es Borel medible, para cada $a \in \mathbb{R}$ fija.)

(22) Sea (f_n) una sucesión de funciones de X en $\mathbb{R}$ y sea $A = \{x \in X : (f_n(x))$ converge en $\mathbb{R}\}$. Pruebe que:

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{p=1}^{\infty} \left\{x \in X : |f_n(x) - f_{n+p}(x)| < \frac{1}{k}\right\}.$$

(23) Hipótesis como en el anterior. Si $a \in \mathbb{R}$ es dada, entonces:

$$\{x \in X : f_n(x) \not\to a\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{l=n}^{\infty} \left\{x \in X : |f_l(x) - a| > \frac{1}{k}\right\}.$$

(24) Sean $X = \mathbb{N}$ y $S = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Pruebe que **toda** medida en (X, S) se obtiene a partir de una **única** sucesión de reales extendidos no-negativos (a_n) como sigue:

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, & \text{si } E = \emptyset; \\ \sum\limits_{n \in E} a_n, & \text{si } E \neq \emptyset. \end{cases}$$

Pruebe además que:

i) μ es finita $\Leftrightarrow \sum\limits_{1}^{\infty} a_n < +\infty$.

ii) μ es σ-finita $\Leftrightarrow a_n < +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

(25) (La parte fácil del Lema de Borel-Cantelli)

Sea (X, S, μ) un espacio de medida y (E_n) una sucesión de elementos de S tales que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < +\infty$. Pruebe que $\mu(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} E_n) = 0$.

(26) Sea (X, S, μ) un espacio de medida y (E_n) una sucesión de elementos de S. Pruebe:

i) $\mu(\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} E_n) \leq \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \mu(E_n)$. Dé un ejemplo en el que la desigualdad sea estricta.

ii) Si $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n) < +\infty$ entonces $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \mu(E_n) \leq \mu(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} E_n)$. Dé un ejemplo en el que la desigualdad sea estricta.

iii) Pruebe con un ejemplo que *(ii)* puede ser falso si $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n) = +\infty$

(27) Sea (X, S, μ) un espacio de medida y sea $\mathcal{F} = \{A \in S : \mu(A) < +\infty\}$. Definimos una relación $\sim$ en $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ poniendo: $A \sim B$ $(A, B \in \mathcal{F}) \Leftrightarrow \mu(A \triangle B) = 0$.

i) Pruebe que $\sim$ es una relación de equivalencia.

ii) Denotamos por $\tilde{\mathcal{F}}$ el conjunto de clases de equivalencia y por $[A]$ la clase de equivalencia de $A \in F$. Pruebe que $d : \tilde{\mathcal{F}} \times \tilde{\mathcal{F}} \to \mathbb{R}$ dada por $d([A],[B]) = \mu(A \triangle B)$ esta bien definida y que $(\tilde{\mathcal{F}}, d)$ es un espacio métrico completo.

(*Sugerencia:* Si $([A_n])_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión d-Cauchy, halle una subsucesión $([A_{n_k}])_{k=1}^{\infty}$ tal que $d([A_{n_k}],[A_{n_{k+1}}]) < \frac{1}{2^k}$. Sea $A_* = \underline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_{n_k}$. Pruebe que $A_* \in \mathcal{F}$ y $d([A_{n_k}],[A_*]) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Concluya que $d([A_n],[A_*]) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$.)

(NOTA: Si $A^* = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_{n_k}$ entonces, $A^* \in \mathcal{F}$ y también $[A^*] = [A_*]$.)

(28) Hipótesis y notación como el anterior. Pruebe que las operaciones: $\tilde{\mathcal{F}} \times \tilde{\mathcal{F}} \to \tilde{\mathcal{F}}$ con valores: $[A \triangle B]$, $[A \cup B]$, $[A \cap B]$ y $[A - B]$ en $([A],[B]) \in \tilde{\mathcal{F}} \times \tilde{\mathcal{F}}$ son d-uniformemente continuas. Si $\mu(X) < +\infty$, pruebe lo análogo para la operación: $[A] \mapsto [X - A]$.

(*Sugerencia:* Use el ejercicio (4).)

(29) (La completación de un espacio de medida)
Sea (X, S, μ) un espacio de medida y sea $\mathcal{N} = \{N \in S : \mu(N) = 0\}$ el σ-anillo de conjuntos S-medibles de medida cero. Definimos

$$\overline{S} = \{(E \cup M_1) - M_2 : E \in S \text{ y } M_i \subset N_i \in \mathcal{N} \ (i = 1, 2)\}.$$

Pruebe:

i) $F \in \overline{S} \Leftrightarrow F = E \cup M_0$ con $E \in S$ y M_0 un subconjunto de algún $N_0 \in \mathcal{N}$. (E y N_0 **no** son necesariamente únicos.)

ii) $\overline{S}$ es una σ-álgebra y $S \subset \overline{S}$. (*Sugerencia:* use (*i*).)

iii) $\overline{\mu} : \overline{S} \to \mathbb{R}$ dada por $\overline{\mu}(E \cup M_0) = \mu(E)$ esta bien definida, es una medida en $\overline{S}$ y $\overline{\mu}|_S = \mu$.

(30) Hipótesis y notación como en el anterior. Pruebe:

i) Si $F \in \overline{S}$ es tal que $\overline{\mu}(F) = 0$, entonces $A \in \overline{S} \quad \forall A \subset F$. Más generalmente:

ii) Si $E \subset A \subset F$, con E, $F \in \overline{S}$ y $\overline{\mu}(F - E) = 0$, entonces $A \in \overline{S}$.

(NOTA: La propiedad *(ii)* justifica el nombre de μ-completación que se le da al espacio de medida $(X, \overline{S}, \overline{\mu})$.)

(31) Sea (X, S) un espacio medible y sea $\mu : S \to \mathbb{R}$ una función no negativa y aditiva. Pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes para sucesiones (A_k) de elementos de S:

a) $\mu(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \quad (A_l \cap A_k = \emptyset, l \neq k)$ (σ-aditividad).

b) Si $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ y $A = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ entonces: $\mu(A) = \lim\limits_{k \downarrow \infty} \mu(A_k)$ (semicontinuidad por arriba).

c) Si $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ y $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ entonces: $\mu(A) = \lim\limits_{k \uparrow \infty} \mu(A_k)$ (semicontinuidad por abajo).

d) $\mu(\lim\limits_{k \to \infty} A_k) = \lim\limits_{k \to \infty} \mu(A_k)$ (continuidad).

(NOTA: En (d) se supone que (A_k) es tal que $\underline{\lim}_{k \to \infty} A_k = \overline{\lim}_{k \to \infty} A_k$ y $\lim\limits_{k \to \infty} A_k$ denota al conjunto común.)

(32) Sea (X, S, μ) un espacio de medida σ-finita y sea $\mathcal{D} \subset S$ una familia consistente de conjuntos ajenos entre sí. Sea $E \in S$ con $\mu(E) > 0$ fijo. Pruebe que la familia $\mathcal{D}_E = \{D \in \mathcal{D} : \mu(E \cap D) > 0\}$ es a lo sumo numerable.

(*Sugerencia:* Empiece con el caso $\mu(E) < +\infty$.)

(33) Sea (X, S, μ) un espacio de medida σ-finita y sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función S-medible. Pruebe que existe una sucesión de funciones S-simples $(s_n)_1^{\infty}$ tales que: $s_n(x) \to f(x) \ \forall x \in X$ y $\mu(\{x \in X : s_n(x) \neq 0\}) < \infty \ \forall n$.

(34) Sean (X, S, μ) un espacio de medida y $f \in \mathrm{M}^+(X, S)$ dados. Pruebe que la función $\mu_f : S \to \overline{\mathbb{R}}$ definida por $\mu_f(E) = \int\limits_E f \, d\mu$ $(E \in S)$ es una medida con la propiedad de que $\mu_f(E) = 0$ si $\mu(E) = 0$.

(*Sugerencia:* Use el teorema de la convergencia monótona.)

(35) Sea $f \in \mathsf{M}^+(X,S)$ tal que $\int f\,d\mu < +\infty$. Pruebe:

i) $\mu(\{x \in X : f(x) = +\infty\}) = 0$.

ii) $\{x \in X : f(x) > 0\}$ es σ-finito.

(36) Si $\mu(X) < +\infty$, entonces $f \in \mathsf{M}^+(X,S)$ satisface $\int f\,d\mu < +\infty \Leftrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n \mu(\{x \in X : f(x) \geq 2^n\}) < +\infty$.

(37) Si $f \in \mathsf{M}^+(X,S)$ es acotada, entonces $\int f\,d\mu < +\infty \Leftrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\mu(\{x \in X : f(x) \geq \frac{1}{2^n}\}) < +\infty$.

(OBSERVACION: puede asumirse que $\mu(X) = +\infty$.)

(38) Pruebe:

$$\int f\,d\mu = \sup\left\{ \int_E f\,d\mu : E \in S, \mu(E) < +\infty \right\} \qquad \forall f \in \mathsf{M}^+(X,S) \qquad \text{con} \qquad \int f\,d\mu < +\infty.$$

(39) Sea $f \in \mathsf{M}^+(X,S)$ dada. Si $\mathcal{P} = (0 = t_0 < t_1 < \cdots)$ es una partición de $[0,+\infty)$, denotaremos $\|\mathcal{P}\| = \sup\limits_k \{t_{k+1} - t_k\}$. Pruebe que si $\int f\,d\mu < +\infty$, entonces: $\int f\,d\mu = \lim\limits_{\|\mathcal{P}\| \to 0} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varsigma_k \mu(\{x \in X : t_k \leq f(x) < t_{k+1}\})$ con $\{\varsigma_k\}$ **cualquier** conjunto de puntos satisfaciendo $\varsigma_0 = 0$ si $k = 0$ y $\varsigma_k \in [t_k, t_{k+1})$ si $k \geq 1$. (Cada una de las sumas anteriores se conocen como suma de Lebesgue.)

(40) *i)* Pruebe con contraejemplos que no hay equivalente al teorema de la convergencia monótona si la sucesión de funciones (f_n) es monótona decreciente. Sin embargo, pruebe que si $f_1 \geq f_2 \geq \cdots \geq 0$ y $\int f_1\,d\mu < +\infty$ entonces:

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu.$$

ii) Pruebe que el lema de P. Fatou puede fallar si no se requiere que $f_n \geq 0$.

(41) Asuma el lema de P. Fatou y pruebe el teorema de la convergencia monótona.

(42) Pruebe:

i) Si (f_n) es una sucesión de elementos en $\mathsf{M}(X,S)$ y si $\exists g \in \mathsf{M}^+(X,S)$ con $\int g\,d\mu < +\infty$ tal que $f_n \geq -g$ (c.d. rel. μ) en $E \in S$, entonces: $\int\limits_E \varliminf\limits_{n\to\infty} f_n\,d\mu \leq \varliminf\limits_{n\to\infty} \int\limits_E f_n\,d\mu$.

ii) Si $\exists g \in \mathsf{M}^+(X,S)$ con $\int g\,d\mu < +\infty$ tal que $f_n \leq g$ (c.d. rel. μ) en $E \in S$ entonces:

$$\varlimsup_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu \leq \int_E \varlimsup_{n\to\infty} f_n\,d\mu.$$

(43) (Lema del promedio)

Sea $f \in \mathcal{L}_1(X,S,\mu)$ dada, tal que $\left| \frac{1}{\mu(E)} \int\limits_E f\,d\mu \right| \leq k$ con $k \geq 0$ constante, $\forall E \in S$ con $0 < \mu(E) < +\infty$. Pruebe que $|f| \leq k$ (c.d. rel. μ).

(*Sugerencia:* Empiece probando que si $f \in \mathcal{L}_1(X,S,\mu)$, entonces $\mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}) < +\infty$, $\forall \alpha > 0$.)

(44) Sea (f_n) una sucesión de funciones de $\mathcal{L}_1(X,S,\mu)$ tal que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int |f_n|\, d\mu < +\infty$. Pruebe que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ converge a una función $f \in \mathcal{L}_1(X,S,\mu)$ que satisface:

$$\int f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n\, d\mu.$$

¿ Qué significa lo anterior si $X = \mathsf{N}$, $S = \mathcal{P}(\mathsf{N})$ y μ es la medida de conteo ?

(45) (Generalización del teorema de la convergencia dominada de H. Lebesgue)
Sea (g_n) una sucesión de elementos de $\mathcal{L}_1^+(X,S,\mu)$ tales que $g_n \to g \in \mathcal{L}_1^+(X,S,\mu)$ (c.d. rel. μ). Sea (f_n) una sucesión en $\mathsf{M}(X,S)$ tal que $|f_n| \leq g_n$ y $f_n \to f \in \mathsf{M}(X,S)$ (c.d. rel. μ). Entonces si $\int g\, d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int g_n\, d\mu$, pruebe que $f \in \mathcal{L}_1(X,S,\mu)$ y $\int f\, d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu$.

(*Sugerencia:* Examine la prueba del teorema de la convergencia dominada.)

(46) Sea (f_n) una sucesión de elementos de $\mathsf{M}^+(X,S)$ tal que: $f_n \to f$ (c.d. rel. μ) y $\int f_n\, d\mu \to \int f\, d\mu < +\infty$. Pruebe que $\int\limits_E f_n\, d\mu \to \int\limits_E f\, d\mu\ \forall E \in S$

(*Sugerencia:* Aplique el lema de Fatou a las sucesiones $(f_n\chi_E)$ y $(f_n\chi_{X-E})$.)

(47) (El teorema de H. Lebesgue)
Para $f : [a,b] \to \mathsf{R}$ y $\delta > 0$ fijas, sea $g_\delta(t) = \inf\{f(x) : x \in (t-\delta, t+\delta) \cap [a,b]\}$ y sea $h_\delta(t) = \sup\{f(x) : x \in (t-\delta, t+\delta) \cap [a,b]\}$. Definimos la **envoltura inferior** de f y la **envoltura superior** de f como sigue:

$$g(t) = \lim_{\delta\uparrow 0} g_\delta(t) \qquad \text{y} \qquad h(t) = \lim_{\delta\downarrow 0} h_\delta(t). \qquad \text{(respectivamente)}$$

Pruebe:

i) g y h son Borel-medibles (*Sugerencia:* Pruebe que $g^{-1}((\alpha,+\infty))$ y $h^{-1}((-\infty,\alpha))$ son abiertos relativos de $[a,b]$, $\forall \alpha \in \mathsf{R}$.)

ii) $g \leq f \leq h$. Además $g(t) = f(t) = h(t) \Leftrightarrow f$ es continua en t.

iii) Si f es acotada y no-negativa, entonces $\underline{R}\int\limits_a^b f\, dt = \int\limits_{[a,b]} g\, d\lambda$ y $\int\limits_{[a,b]} h\, d\lambda = \overline{R}\int\limits_a^b f\, dt$, en donde λ denota la medida de Lebesgue en $\mathsf{B}_{[a,b]}$ y $\underline{R}\int$, $\overline{R}\int$ denotan la integral inferior y superior de Riemann (respectivamente).

(*Sugerencia:* Sea $(\mathcal{P}_n)$ una sucesión de particiones de $[a,b]$ con $\mathcal{P}_n \leq \mathcal{P}_{n+1}$ y $\|\mathcal{P}_n\| \to 0$. Si $\mathcal{P}_n = (a = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{k_n}^n = b)$ defina $e_n(t) = \inf\{f(\varsigma) : \varsigma \in (t_i^n, t_{i+1}^n)\}$ y $E_n(t) = \sup\{f(\varsigma) : \varsigma \in (t_i^n, t_{i+1}^n)\}$ y $e_n(t) = g(t)$, $E_n(t) = h(t)$ si $t = t_i^n$ para alguna $i \in \{0,1,\ldots,k_n\}$. Pruebe que $e_n \uparrow g$, $E_n \downarrow h$ y use el T.C.M. y el ejercicio (38) inciso *(i)*.)

iv) f es Riemann-integrable $\Leftrightarrow f$ es continua (c.d. rel λ) (Teorema de Lebesgue).

v) Si f es Borel-medible y Riemann-integrable entonces $R\int\limits_a^b f\, dt = \int\limits_{[a,b]} f\, d\lambda$. (ver el (72) inciso *(ii)*.)

(48) Pruebe que $\int\limits_0^1 \frac{1}{t}\operatorname{sen}(\frac{1}{t})\, dt$ existe como integral impropia de Riemann, sin embargo pruebe que $\frac{1}{t}\operatorname{sen}(\frac{1}{t}) \notin \mathcal{L}_1((0,1), \mathsf{B}(0,1), \lambda)$. ¿ Contradice esto el ejercicio (45) inciso *(v)* ?

(49) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-medible tal que su restricción a $[a,b]$ es Riemann-integrable $\forall a < b \in \mathbb{R}$. Suponga que $\lim\limits_{n\to\infty} R\int\limits_{-n}^{n} |f(x)|\,dx < +\infty$. Pruebe que $f \in \mathcal{L}_1(\overline{\lambda})$ y que:

$\int\limits_{\mathbb{R}} f\,d\lambda = R\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ (ver el ejercicio (72) inciso *(iii)*.)

(50) Pruebe el ejercicio (27) usando la completez de $\mathcal{L}_1(X,S,\mu)$

(*Sugerencia:* $\mu(A \triangle B) = \int |\chi_A - \chi_B|\,d\mu$ $(A, B \in S)$. Si $\int |\chi_{A_n} - f|\,d\mu \to 0$ $(n \to +\infty)$, pruebe que $f^2 \in \mathcal{L}_1(\mu)$ y que $\int |\chi_{A_n} - f^2|\,d\mu \to 0$ también).

(51) Sea (X,S,μ) un espacio de medida. Si $f \in \mathcal{L}_{p_1}(\mu) \cap \mathcal{L}_{p_2}(\mu)$ con $1 \le p_1 < p_2 < +\infty$, entonces pruebe que $f \in \mathcal{L}_p(\mu)$, $\forall p \in (p_1, p_2)$.

(*Sugerencia:* $p = \alpha p_1 + (1-\alpha)p_2$ para cierta $\alpha \in (0,1)$. Note que $\frac{1}{\alpha}$ y $\frac{1}{1-\alpha}$ son exponentes conjugados.)

(52) (Generalización de la desigualdad de Hölder)
Sea (X,S,μ) un espacio de medida, $p_1, p_2, \ldots, p_n \in (1,+\infty)$ tales que: $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} = 1$ y $f_i \in \mathcal{L}_{p_i}(\mu)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Pruebe que:

i) $f_1 \cdot f_2 \cdots f_n \in \mathcal{L}_1(\mu)$.

ii) $\int |f_1 \cdot f_2 \cdots f_n|\,d\mu \le \|f_1\|_{p_1} \cdot \|f_2\|_{p_2} \cdots \|f_n\|_{p_n}$. (*Sugerencia:* Inducción matemática.)

(53) Sean (X,S,μ) un espacio de medida **finita** y $p \in (0,+\infty]$ dados. Pruebe que si $r \in (0,p)$ y $f \in \mathcal{L}_p(\mu)$, entonces $f \in \mathcal{L}_r(\mu)$ y $\|f\|_r \le \|f\|_p \mu(X)^s$ con $s = \frac{1}{r} - \frac{1}{p}$. (*Sugerencia:* Aplique la desigualdad de Hölder a $|f|^r$ y a $g = 1$).

(54) Sea $X = (0,1)$, $S = \mathbb{B}_{(0,1)}$ y $\mu =$ medida de Lebesgue. Pruebe que $\mathcal{L}_p(\mu) \subsetneq \bigcap\limits_{0<r<p} \mathcal{L}_r(\mu)$ $\forall p > 0$ fija.

(*Sugerencia:* Si $p = 1$, considere $f(x) = \frac{1}{x}$.)

(55) Sean (X,S,μ) un espacio de medida finita y $f \in \mathcal{L}_\infty(\mu)$ dados. Pruebe que: $\|f\|_\infty = \lim\limits_{p\to\infty} \|f\|_p$. (Si $\mu(X) = 1$ entonces por el ejercicio (50), el límite es creciente.)

(56) Sea $X = (0,+\infty)$, $S = \mathbb{B}_{(0,+\infty)}$ y $\mu =$ medida de Lebesgue. Sea $p \in (0,+\infty)$ fija.

i) Pruebe que existe $f_p : X \to \mathbb{R}$ continua con la siguiente propiedad:

$$f_p \in \mathcal{L}_q(\mu) \quad (q \in (0,+\infty)) \qquad \Leftrightarrow \qquad q = p.$$

(*Sugerencia:* Si $p = 1$, considere a la función $f_1(x) = \frac{1}{x(1+|\log x|)^2}$. Examine los casos $x \in (0,1)$ y $x \in (1,+\infty)$ para concluir que $f_1 \in \mathcal{L}_1(\mu)$. Utilice la desigualdad $\rho(1+\log t) \le t^\rho$ $(t \ge 1,\ \rho \in (0,1))$, para $t = \frac{1}{x}$ si $q > 1$ y $x \in (0,1)$; y para $t = x$, si $q \in (0,1)$ y $x \ge 1$.)

ii) Pruebe que existe $f : X \to \mathbb{R}$ continua tal que $f \notin \mathcal{L}_q(\mu)$ $\forall q \in (0,+\infty)$. (*Sugerencia:* $f(x) = e^{1/x}$.)

(57) (X,S,μ) como en el ejercicio (54). Sea $p \in (0,+\infty)$ fija y pruebe: $\bigcup\limits_{p<q} \mathcal{L}_q(\mu) \subsetneq \mathcal{L}_p(\mu)$.

(*Sugerencia:* Considere $f_1(x) = \frac{1}{x(1+|\log x|)^2}$, si $p = 1$.)

(58) Hipótesis y notación como en el (54). Pruebe que $\mathcal{L}_\infty(\mu) \subsetneq \bigcap\limits_{0<p<+\infty} \mathcal{L}_p(\mu)$

(*Sugerencia:* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{2^n} < +\infty \ \forall p \in (0,+\infty)$.)

(59) Sea (X,S,μ) un espacio de medida finita con $\mu(X) = 1$. Definimos $\log(0) = -\infty$ y $\exp(-\infty) = 0$. Sea $f \in \mathcal{L}_1(\mu)$ y pruebe:

i) $\int \log|f|\,d\mu \leq \log\left(\int |f|\,d\mu\right)$. La igualdad ocurre $\Leftrightarrow$ $|f|$ es constante (c.d. rel. μ). (*Sugerencia:* Verifique la desigualdad: $\log(t) \leq t-1$ si $t \in [0,+\infty)$, con igualdad $\Leftrightarrow t = 1$. Sustituya t con $\frac{|f|}{\|f\|_1}$ e integre.)

ii) $\lim_{r\downarrow 0} \|f\|_r = \exp\left(\int \log|f|\,d\mu\right)$. Compare con el (55).

(*Sugerencia:* Pruebe que $\frac{t^r-1}{r} \downarrow \log t \ (r \downarrow 0) \ \forall t \in [0,+\infty)$ para obtener: $\lim_{r\downarrow 0} \frac{1}{r}\left(\int |f|^r\,d\mu - 1\right) = \int \log|f|\,d\mu$. Use *(i)* para concluir que $\frac{1}{r}\left(\int |f|^r\,d\mu - 1\right) \geq \frac{1}{r}\log\int |f|^r\,d\mu \geq \frac{1}{r}\int \log|f|^r\,d\mu = \int \log|f|\,d\mu$.)

(60) Pruebe directamente que el espacio métrico $(\ell_p, \|\ \|_p)$ $(1 \leq p \leq +\infty)$ es completo.

(61) Pruebe que:

i) $\ell_p \subsetneq \bigcap_{0<p<r} \ell_r \ \forall p > 0$ fija.

ii) $\|(x_n)\|_r \leq \|(x_n)\|_p$ si $(x_n) \in \ell_p$ y $0 < p < r \leq +\infty$. (*Sugerencia:* Pruebe que basta considerar los casos $1 = p < r$ y $p < r = 1$. Para establecerlos es útil la desigualdad $(1+t)^s \geq 1 + t^s$ $(t \geq 0)$ si $s \geq 1$, la cual se invierte si $s \in (0,1)$). Compare con el ejercicio (53).

(62) Sea (X,S,μ) un espacio de medida, $f \in \mathcal{L}_p(\mu)$ $(0 < p < +\infty)$ y $\varepsilon > 0$ dadas. Pruebe que:

i) Existe $g \in \mathcal{L}_p(\mu) \cap \mathcal{L}_\infty(\mu)$ tal que: $\|f-g\|_p < \varepsilon$. (*Sugerencia:* Sea (g_n) una sucesión de truncamientos de f con $g_n \to f$. Observe que $|g_n| \leq |f|$ y $|f - g_n| \leq |f| \ \forall n \in \mathbb{N}$.)

ii) Existe $s \in \mathcal{L}_p(\mu)$ simple tal que: $\|f - s\|_p < \varepsilon$.

(63) (Recíproco de la desigualdad de Hölder)
Sean (X,S,μ) un espacio de medida σ-finita y $g \in \mathsf{M}(X,S)$ tales que: $gs \in \mathcal{L}_1(\mu)$ $\forall s$ simple en $\mathcal{L}_p(\mu)$ $(p \in (1,+\infty)$ fijo). Suponga que $\exists M \geq 0$ tal que $\left|\int gs\,d\mu\right| \leq M\|s\|_p \ \forall s$. Pruebe que $g \in \mathcal{L}_q(\mu)$ (con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) y que $\|g\|_q \leq M$.

(*Sugerencia:* Halle una sucesión de funciones simples (t_n) tal que $0 \leq t_n \leq t_{n+1} \to |g|^q$ y $\mu(\{x \in X : t_n(x) \neq 0\}) < +\infty \ \forall n$ (ver el ejercicio (33)). Si $s_n = (t_n)^{1/p}\operatorname{sgn} g$ entonces s_n es simple, pertenece a $\mathcal{L}_p(\mu)$ y $t_n \leq gs_n$. Use la hipótesis y el teorema de convergencia monótona aplicado a la desigualdad anterior.)

(64) Establezca el siguiente resultado de F. Riesz.
Sea $p \in [1,+\infty)$ fija y (f_n) una sucesión de funciones de $\mathcal{L}_p(\mu)$ tal que $f_n \to f \in \mathcal{L}_p(\mu)$ (c.d. rel. μ). Entonces $\|f_n - f\|_p \to 0 \ (n \to \infty) \Leftrightarrow \|f_n\|_p \to \|f\|_p \ (n \to \infty)$.

(*Sugerencia:* El ejercicio (45) es útil.)

(65) Sea $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ una casi-medida y $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ la medida exterior generada. Pruebe:

i) $\forall E \in \mathcal{A}^*$ con $\mu^*(E) < +\infty$ y $\forall \varepsilon > 0 \ \exists A = A(\varepsilon) \in \mathcal{A}$ tal que $\mu^*(E \triangle A) < \varepsilon$.

ii) Inversamente, si $E \subset X$ es tal que $\forall \varepsilon > 0 \ \exists A = A(\varepsilon) \in \mathcal{A}$ con $\mu^*(E \triangle A) < \varepsilon$, entonces $E \in \mathcal{A}^*$.

(66) Sea $X = \mathbb{R}$, $S =$ la σ-álgebra de Lebesgue y $\mu =$ la medida de Lebesgue sobre S. Pruebe que el espacio métrico asociado $(\tilde{\mathcal{F}}, d)$ (ver el (27)) es separable.

(*Sugerencia:* Use el anterior inciso *(i)*.)

(67) (Cubiertas y núcleos medibles)
Hipótesis y notación como en el ejercicio (65).

a) Pruebe:

i) $\forall B \subset X$ con $\mu^*(B) < +\infty$, existe $C \in S(\mathcal{A})$ tal que: a) $B \subset C$ y b) Si $D \subset C - B$ con $D \in S(\mathcal{A})$ entonces $\overline{\mu}(D) = 0$ (C se llama una **cubierta medible** para B) y además $\overline{\mu}(C) = \mu^*(B)$.

ii) $\forall B \subset X$ con $\mu^*(B) < +\infty$, existe $E \in S(\mathcal{A})$ tal que: a) $E \subset B$ y b) Si $F \subset B - E$ con $F \in S(\mathcal{A})$ entonces $\overline{\mu}(F) = 0$ (E se llama un **núcleo medible** para B). (*Sugerencia:* Si C es una cubierta medible para B y C' una cubierta medible para $C - B$, tome $E = C - C'$.)

iii) Pruebe que si C y C' son cubiertas medibles de B, entonces $\overline{\mu}(C \triangle C') = 0$ (Análogamente con núcleos medibles).

b) Asuma que μ es σ-finita y pruebe los incisos anteriores si $\mu^*(B) = +\infty$.

(68) Hipótesis y notación como en el (65). Para $B \subset X$ defina:
$\mu_*(B) = \sup\{\overline{\mu}(F) : F \subset B,\ F \in S(\mathcal{A})\}$. Pruebe:

i) $\mu_*(B) = \overline{\mu}(E)$ $\forall E$ núcleo medible para B (compare con el anterior, inciso *(i)*).

ii) Si $\mu^*(B) < +\infty$, entonces $B \in \mathcal{A}^* \Leftrightarrow \mu^*(B) = \mu_*(B)$. ($\mu_*$ se llama la **medida interior**).

(69) Sean $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ una casi-medida σ-finita, μ^* y $\mu_* : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ las medidas exterior e interior generadas por μ y $(B_n)_1^\infty$ una sucesión de subconjuntos de X. Pruebe:

i) Si $B_1 \subset B_2 \subset \cdots$, entonces: $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \lim_{n\uparrow\infty} \mu^*(B_n)$.

ii) Si $B_1 \supset B_2 \supset \cdots$ y $\mu^*(B_m) < +\infty$ para alguna m, entonces: $\mu_*(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n) = \lim_{n\downarrow\infty} \mu_*(B_n)$.

iii) Si $B_n \cap B_m = \emptyset$ $(n \neq m)$, entonces: $\mu_*(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_*(B_n)$ (σ-sobre-aditividad).

(*Sugerencia:* Use cubiertas y núcleos medibles.)

(70) Hipótesis y notación como en el (65). Sea $A \in \mathcal{A}^*$ con $\overline{\mu}(A) < +\infty$ y sea $B \subset A$. Pruebe: $B \in \mathcal{A}^* \Leftrightarrow \overline{\mu}(A) = \mu^*(B) + \mu^*(A - B)$.

(*Sugerencia:* Use el (68) inciso *(ii)*.)

(71) Pruebe que si μ es σ-finita, entonces la completación de $S(\mathcal{A})$ con respecto a $\mu^*|_{S(\mathcal{A})}$ coincide con $\mathcal{A}^*$ (ver el (29)).

(72) Asuma que $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ es σ-finita. Pruebe:

i) $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es $\mathcal{A}^*$-medible $\Leftrightarrow f = g$ (c.d. rel μ) con $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ alguna función $S(\mathcal{A})$-medible.

(NOTA: En particular una función es Lebesgue-medible $\Leftrightarrow$ es igual casi dondequiera a una función Borel-medible.)

(*Sugerencia:* Para cada $r \in \mathbb{Q}$ sea $E_r = \{x \in X : f(x) > r\}$. Por el ejercicio anterior $E_r = A_r \cup M_r$ con $A_r \in S(\mathcal{A})$, $M_r \subset N_r \in S(\mathcal{A})$ y $\mu(N_r) = 0$. Sea $N = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} N_r$ y defina $g(x) = f(x)$ si $x \notin N$ y $g(x) = 0$ si $x \in N$. Inversamente, si $N = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ entonces $\forall \alpha \in \mathbb{R}$: $\{x \in X : f(x) > \alpha\} = (\{x \in X : g(x) > \alpha\} \cup \{x \in N : f(x) > \alpha\}) - \{x \in N : f(x) \leq \alpha\}$.)

ii) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es Riemann-integrable entonces f es Lebesgue-medible y $R\int_a^b f\,dt = \int_{[a,b]} f\,d\overline{\lambda}$. (ver el (47)).

iii) Pruebe el ejercicio (49), pero sin asumir que f es Borel-medible.

(73) Hipótesis y notación como en el ejercicio (66) y el (27). Pruebe que $(\tilde{\mathcal{F}}, d)$ es conexo. (*Sugerencia:* Para cada $[A] \in \tilde{\mathcal{F}}$ fija, defina $\gamma : [0,+\infty) \to \tilde{\mathcal{F}}$ como sigue: $\gamma(s) = [A \cap (-s,s)]$ pruebe que γ es continua, $\gamma(0) = [\emptyset]$ y $d(\gamma(s),[A]) \to 0$ ($s \to +\infty$). Use la conexidad de $[0,+\infty)$). Pruebe que de hecho $(\tilde{\mathcal{F}}, d)$ es conectable por trayectorias.

(74) Pruebe que $(\tilde{\mathcal{F}}, d)$ puede no ser compacto aún si $\mu(X) < +\infty$, (ver el (27)). (*Sugerencia:* Sea $X = [0,1]$, $S = \mathsf{B}_{[0,1]}$ y μ = medida de Lebesgue. Considere $A_n = \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} \left[\frac{2k-1}{2^n}, \frac{2k}{2^n}\right]$ ($n \geq 1$) y pruebe que $d([A_n],[A_m]) = \frac{1}{2}$ ($n \neq m$)). Más generalmente, pruebe que puede no ser localmente compacto.

(75) Sea $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la transformación afín $T(x) = \alpha x + \beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha \neq 0$. Observe que si $T_1(x) = x + \beta$, $T_2(x) = -x$ y $T_3(x) = \alpha x$ si $\alpha > 0$, entonces $T = T_1 \circ T_3$ si $\alpha > 0$ o $T = T_1 \circ T_2 \circ T_3$ si $\alpha < 0$. Pruebe:

i) $T_i(\mathsf{B}_{\mathbb{R}}) = \mathsf{B}_{\mathbb{R}}$ $i = 1,2,3$. En general, si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un homeomorfismo entonces $h(\mathsf{B}_{\mathbb{R}}) = \mathsf{B}_{\mathbb{R}}$.

ii) $\forall E \subset \mathbb{R} : \lambda^*(T_i(E)) = \lambda^*(E)$ $i = 1,2$ y $\lambda^*(T_3(E)) = \alpha\lambda^*(E)$.

iii) $T_i(\mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}) = \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$ $i = 1,2,3$. (NOTA: Existen homeomorfismos tales que $h(\mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}) \neq \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$ (ver el (83)).

iv) $\forall E \in \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}} : \overline{\lambda}(T(E)) = |\alpha|\overline{\lambda}(E)$.

(76) Hipótesis y notación como en el ejercicio anterior. Pruebe: Si $E \in \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$ y $f \in \mathcal{L}_1(\overline{\lambda})$, entonces $f \circ T \in \mathcal{L}_1(\overline{\lambda})$ y $\int_E f \circ T\,d\overline{\lambda} = |\alpha|^{-1} \int_{T(E)} f\,d\overline{\lambda}$.

(77) (Teorema de H. Steinhauss)
Sean $A, B \in \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$ dados con $\overline{\lambda}(A) < +\infty$ y $\overline{\lambda}(B) < +\infty$. Defina $\overline{\lambda}_{A,B} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como sigue: $\overline{\lambda}_{A,B}(x) = \overline{\lambda}(A \cap (B + x))$ en donde $B + x = \{b + x : b \in B\}$. Pruebe que $\overline{\lambda}_{A,B}$ es continua y concluya que si $\overline{\lambda}(A) > 0$ entonces $\exists \delta > 0$ tal que $\overline{\lambda}(A \cap (A + x)) > 0$ si $|x| < \delta$ y que $A - A = \{a - a' : a, a' \in A\}$ contiene al intervalo abierto $(-\delta, \delta)$.

(*Sugerencia:* Empiece con A y B igual a intervalos, luego con A y B igual a unión finita disjunta de intervalos y por aproximación (ver el (65)) trate el caso general.)

(78) Denote por $x = .x_1x_2\cdots$ la expansión decimal (sin cola de nueves) de $x \in [0,1)$. Sean $A_1 = \{x \in [0,1) : x_i \neq 7\ \forall i \in \mathbb{N}\}$ y $A_2 = \{x \in [0,1) : \text{si } x_j = 3 \text{ entonces } \exists i < j \text{ tal que } x_i = 2\}$. Pruebe que A_1 y A_2 pertenecen a $\mathsf{B}_{[0,1)}$ y halle $\overline{\lambda}(A_i)$ ($i = 1,2$) (*Solución:* $\overline{\lambda}(A_1) = 0$, $\overline{\lambda}(A_2) = \frac{1}{2}$).

(79) *i)* $\forall \alpha \in (0,1)$ construya un boreliano $C_\alpha \subset [0,1]$ que sea: a) denso en ninguna parte b) perfecto y c) $\overline{\lambda}(C_\alpha) = \alpha$ (*Sugerencia:* Imite la construcción del conjunto ternario de Cantor, pero omitiendo subintervalos abiertos más pequeños.)

ii) Pruebe que $[0,1]$ contiene un subconjunto P de primera categoría tal que $P \in \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$ y $\overline{\lambda}([0,1]-P) = 0$. (*i.e.* P es la unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte.)

iii) Generalice el inciso anterior como sigue: $\forall E \in \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$, $\exists P \subset E$, $P \in \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$ de primera categoría tal que: $\overline{\lambda}(E-P) = 0$.

iv) Concluya que todo $E \in \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$ puede escribirse como: $E = P \cup N$ con P, N en $\mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$, ajenos entre sí y tales que P es de primera categoría y $\overline{\lambda}(N) = 0$.

(80) *i)* Si $V \subset [0,1]$ es un conjunto no-medible de Vitali y $F \subset V$, $F \in \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$ entonces $\overline{\lambda}(F) = 0$. (*Sugerencia:* Si $F_i = F + r_i$, $r_i \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$, entonces $F \subset \bigcup_{r_i} F_i$ (disjuntos); o bien, pruebe que $V - V$ no puede contener intervalos y use el ejercicio (77).)

ii) Si $\lambda^*(E) > 0$ ($E \subset \mathbb{R}$), entonces $\exists M \subset E$ con $M \notin \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$ (Teo. de H. Rademacher. 1916).

(*Sugerencia:* Si $E \subset (0,1)$ considere $M_i = (V + r_i) \cap E \quad r_i \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$. Si $E \not\subset (0,1)$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda^*(E \cap (-n,n)) > 0$. Halle una transformación afín que lleve $(-n,n)$ en $(0,1)$, use el ejercicio (75) y el caso anterior.)

(81) En 1908 F. Bernstein construyó un conjunto $B \subset \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades: Si $C \subset \mathbb{R}$ es cerrado y no-numerable arbitrario, entonces: $C \cap B \neq \emptyset$ y $C - B \neq \emptyset$. Pruebe:

i) $B \notin \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$ (*Sugerencia:* Si $B \in \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$, entonces $\overline{\lambda}(B) = \sup\{\overline{\lambda}(C) : C \subset B, C \text{ cerrado}\}$.)

ii) Pruebe el inciso *(ii)* del ejercicio anterior usando a B.

(82) La función "escalera" de Cantor.

Para cada $x \in [0,1]$, sea $.\alpha_1\alpha_2\ldots$ su expansión ternaria (*i.e.* $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{3^i}$ con $\alpha_i = 0, 1$ o 2). Sea $N = N(x) \in \mathbb{N}$ el primer índice para el que $\alpha_N = 1$. (Si no hay tal N, sea $N = +\infty$). Defina $\psi : [0,1] \to [0,1]$ la llamada **escalera de Cantor** como sigue:

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\beta_i}{2^i} + \frac{1}{2^N} \qquad \text{con } \beta_i = \frac{\alpha_i}{2}.$$

Sea C el conjunto ternario de Cantor. Pruebe que:

i) ψ esta bien definida (*i.e.* $\psi(x)$ no depende de las posibles expansiones de x) y que ψ es no decreciente.

ii) ψ es continua, $\psi'(t) = 0 \ \forall t \notin C$ y $\int_0^1 \psi(t)\,dt = \frac{1}{2}$.

iii) $h : [0,1] \to [0,1]$ definida por $h(x) = \frac{1}{2}(x + \psi(x))$ es un homeomorfismo.

iv) $\overline{\lambda}(h([0,1] - C) = \frac{1}{2} = \overline{\lambda}(h(C))$.

(*Sugerencia:* Pruebe que $\psi([0,1] - C)$ es un conjunto numerable, con cada uno de los valores tomado en cada intervalo abierto del complemento de C. Note también que $h(C)$ y $h([0,1] - C) \in \mathrm{B}_{[0,1]}$ y son ajenos.)

(OBSERVACION: $h(C)$ es denso en ninguna parte y de medida positiva.)

(83) Pruebe:

i) Existen homeomorfismos tales que $h(\mathcal{A}^*_{[0,1]}) \neq \mathcal{A}^*_{[0,1]}$. (*Sugerencia:* Sea h como en el ejercicio anterior. Halle por el ejercicio (80) inciso *(ii)* un subconjunto no-medible M contenido en $h(C)$.)

ii) $\mathsf{B}_{[0,1]} \subsetneq \mathcal{A}^*_{[0,1]}$ (*Sugerencia:* Considere $h^{-1}(M)$, con h y M los sugeridos en *(i)*.)

(NOTA: Puede probarse que $\#(\mathsf{B}_{\mathsf{R}}) = c$ y $\#(\mathcal{A}^*_{\mathsf{R}}) = 2^c$.)

(84) (Desigualdad de P. Tchebyshev)
Sean (X, S, μ) un espacio de medida y $\varphi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ una función no decreciente y mayor que cero en $(0, +\infty)$ dada. Si $f \in \mathsf{M}(X, S)$ es tal que $\varphi \circ |f| \in \mathcal{L}_1(\mu)$ entonces $\forall \alpha > 0$:

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| \geq \alpha\}) \leq \frac{1}{\varphi(\alpha)} \int \varphi \circ |f| \, d\mu$$

(85) Sea (X, S, μ) un espacio de medida **finita**. Para cada $f \in \mathsf{M}(X, S)$ defina $r(f) = \int \frac{|f|}{1+|f|} \, d\mu$. Pruebe:

i) $r(f) < +\infty$ y $d(f, g) = r(f - g)$ define una pseudo-métrica en $\mathsf{M}(X, S)$.

ii) $d(f_n, f) \to 0$ $(n \to +\infty) \Leftrightarrow f_n \underset{\mu}{\longrightarrow} f$ $(n \to +\infty)$. (*Sugerencia:* $\varphi(t) = \frac{t}{1+t}$ satisface las condiciones del ejercicio anterior.)

iii) Si (f_n) es una sucesión d-Cauchy en $\mathsf{M}(X, S)$, entonces $\exists f \in \mathsf{M}(X, S)$ tal que $d(f_n, f) \to 0$ $(n \to +\infty)$.

(86) Pruebe que el lema de Fatou continúa siendo válido si "convergencia c.d." se reemplaza por "convergencia en medida" en el siguiente sentido: Si (f_n) es una sucesión de funciones en $\mathsf{M}^+(X, S)$ y $f_n \underset{\mu}{\longrightarrow} f$, entonces: $\int f \, d\mu \leq \underline{\lim}_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu$. Enuncie el análogo al teorema de convergencia dominada y pruébelo.

(87) Sea (X, S, μ) un espacio de medida **finita**. Pruebe:

$f_n \to f$ c.u. (casi uniformemente) $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ fija, $\mu(B_n(\varepsilon)) \to 0$ $(n \to +\infty)$ con $B_n(\varepsilon) = \bigcup_{k \geq n} \{x \in X : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$

(88) *i)* Sea $X = [0, \pi]$, $S = \mathsf{B}_{[0,\pi]}$ y $\mu =$ la medida de Lebesgue. Defina $f_n(x) = \frac{n \operatorname{sen} x}{1+n^2 \operatorname{sen} nx}$, Dada $\varepsilon > 0$, Halle explícitamente un conjunto de Egorov E_ε con $\mu(E_\varepsilon) < \varepsilon$ tal que (f_n) converge uniformemente en $X - E_\varepsilon$.

ii) Muestre con ejemplos que el teorema de Egorov puede fallar si $\mu(X) = +\infty$

(89) Pruebe el teorema de N. N. Luzin (1913):

i) $f : \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ es Lebesgue-medible $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists E = E(\varepsilon)$ abierto con $\overline{\lambda}(E) < \varepsilon$ y tal que $f|_{\mathsf{R}-E} : \mathsf{R} - E \to \mathsf{R}$ es continua.

(*Sugerencia:* Sea $\{\mathcal{U}_i\}_{i=1}^{\infty}$ una base numerable para la topología de R y $\varepsilon > 0$ dadas. Como $f^{-1}(\mathcal{U}_i) \in \mathcal{A}^*_{\mathsf{R}}$, existe un cerrado F_i y un abierto G_i tal que $F_i \subset f^{-1}(\mathcal{U}_i) \subset G_i$ y $\overline{\lambda}(G_i - F_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}$ $(i \in \mathsf{N})$. Sea $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} (G_i - F_i)$. Inversamente sea E_i abierto con $\overline{\lambda}(E_i) < \frac{1}{i}$ $(i \in \mathsf{N})$ y con $f_i = f|_{\mathsf{R}-E_i}$ continua. Si $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$ entonces $\overline{\lambda}(E) = 0$ y $f^{-1}(\mathcal{U}) - E = \bigcup_{i=1}^{\infty} f_i^{-1}(\mathcal{U})$ $\forall \mathcal{U} \subset \mathsf{R}$ abierto.)

ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es Lebesgue-medible $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ existe $g_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, tal que: $\overline{\lambda}(\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq g_\varepsilon(x)\}) < \varepsilon$.

(*Sugerencia:* Use el inciso anterior y el teorema de extensión de Tietze. Inversamente, sean $E_n = \{x \in X : f(x) \neq g_{\frac{1}{2^k}}(x)\}$ y $E = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, E_n$. Pruebe que $f = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, g_{\frac{1}{2^k}}$ en $X - E$.)

(90) Pruebe el teorema de M. Frechet:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es Lebesgue-medible $\Leftrightarrow$ $\exists$ una sucesión de funciones continuas $(f_n)_1^\infty$ tal que $f_n \to f$ (c.d. rel. λ) $(f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R})$.

(*Sugerencia:* Ver el anterior.)

(91) *i)* Pruebe que $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0; \\ \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

es Borel-medible, pero no existe una función continua $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $f = g$ (c.d. rel. $\overline{\lambda}$).

ii) Halle $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ Borel-medible y acotada tal que $\|f - g\|_1 > 0$ $\forall g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua.

(92) Sean $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}, \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}, \overline{\lambda})$, $p \in [1, +\infty)$ y $\varepsilon > 0$ dadas:

i) Pruebe que $\exists A = A(\varepsilon) > 0$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua con $g(x) = 0$ $\forall x \notin [-A, A]$ tal que $\|f - g\|_p < \varepsilon$.

ii) Pruebe que $\exists g$ escalonada (o lineal por tramos o bien diferenciable) tal que $\|f - g\|_p < \varepsilon$.

(93) Sean $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}, \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}, \overline{\lambda})$ y $p \in [1, +\infty)$ fijas. Defina $f_t(x) = f(t + x)$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Pruebe que $f_t \in \mathcal{L}_p(\overline{\lambda})$ y que: $\lim\limits_{t\to 0} \|f_t - f\|_p = 0$. Mas aún, pruebe que la función: $\mathbb{R} \to \mathcal{L}_p(\overline{\lambda})$ dada por $t \mapsto f_t$ es uniformemente continua.

(*Sugerencia:* Empiece asumiendo que f es continua e igual a cero en $\mathbb{R} - [-A, A]$ $(A > 0)$. Use el ejercicio anterior inciso *(i)*.)

(94) Pruebe el lema de Riemann-Lebesgue: Si $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}, \overline{\lambda})$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) \begin{Bmatrix} \cos nx \\ \operatorname{sen} nx \end{Bmatrix} d\overline{\lambda} = 0.$$

El mismo resultado se tiene si $n \to \infty$, con $n \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$.

(*Sugerencia:* Empiece asumiendo que f es escalonada e igual a cero en $\mathbb{R} - [-A, A]$ $(A > 0)$. Use el ejercicio (92).)

(95) Sea $X = (0, +\infty)$, $S = \mathcal{A}^*_X$ y $\mu = \overline{\lambda}$. Para $f \in \mathcal{L}_p(X, S, \mu)$ $(p \in (1, +\infty))$, defina $F : X \to \mathbb{R}$ poniendo: $F(x) = \frac{1}{x} \int\limits_{(0,x)} f\, d\overline{\lambda}$. Pruebe la desigualdad de G. Hardy: $\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_p$. La igualdad ocurre $\Leftrightarrow$ $f = 0$ (c.d. rel. $\overline{\lambda}$)

(*Sugerencia:* Suponga que f es continua, $f \geq 0$ y $f(x) = 0$ si $x > A$ $(A > 0)$. Integrando por partes obtenga: $\int\limits_0^\infty F^p(x)\, dx = -p \int\limits_0^\infty F^{p-1}(x) \cdot x \cdot F'(x)\, dx < +\infty$. Observe que $x \cdot F' = f - F$; sustituya en la integral y aplique la desigualdad de Hölder a F^{p-1} y f. Concluya el caso general con ayuda del ejercicio (92) inciso *(i)*.)

(96) Una familia de funciones $\{f_i\}_{i\in I}$ en $\mathcal{L}_1(\mu)$ se llama **uniformemente integrable** si $\lim\limits_{c\to\infty} \sup\limits_{i\in I} \int\limits_{\{|f_i|\geq c\}} |f_i|\, d\mu = 0$.
Pruebe:

i) Si I es finito ó si $\exists g \in \mathcal{L}_1(\mu)$ tal que $|f_i| \leq g$ $\forall i \in I$, entonces $\{f_i\}_{i\in I}$ es uniformemente integrable.

ii) Si (f_n) es una sucesión de elementos en $\mathcal{L}_p(\mu)$ ($p \in [1,+\infty)$ fija) tal que $f_n \xrightarrow[\mathcal{L}_p]{} f$, entonces $\{|f_n|^p\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente integrable.

(*Sugerencia:* $\forall E \in S$ se tiene: $\int\limits_E |f_n|^p\, d\mu \leq 2^p \int |f_n - f|^p\, d\mu + 2^p \int\limits_E |f|^p\, d\mu$ y pruebe que dadas $g \in \mathcal{L}_p(\mu)$ y $\varepsilon > 0$ $\exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $\mu(E) < \delta$, entonces $\int\limits_E |g|^p\, d\mu < \varepsilon$.)

iii) Dé un ejemplo de una sucesión de funciones en $\mathcal{L}_1(\mu)$ que no esté dominada en valor absoluto por una función en $\mathcal{L}_1^+(\mu)$, pero que sea uniformemente integrable.

(*Sugerencia:* Sean $X = [0,1]$, $S = \mathrm{B}_{[0,1]}$, μ = medida de Lebesgue y $f_n = \frac{n}{\log n}\chi_{[0,1/n)}$ $n \geq 2$. Note que $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n} = +\infty$.)

(97) Pruebe el siguiente resultado de G. Vitali:
Sean (X,S,μ) un espacio de medida finita y $p \in [1,+\infty)$ fijos. Si (f_n) es una sucesión de funciones en $\mathcal{L}_p(\mu)$ tal que $f_n \xrightarrow[\mu]{} f \in \mathcal{L}_p(\mu)$ y $\{|f_n|^p\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente integrable entonces $\|f_n - f\|_p \to 0$ ($n \to +\infty$).

(*Sugerencia:* Pruebe que $(g_n = |f_n - f|^p)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente integrable. Por el teorema de F. Riesz existe una subsucesión (f_{n_k}) tal que: $f_{n_k} \to f$ (c.d. rel. μ) y en medida.)

(98) Sean (X,S) un espacio medible y $\rho : S \to \overline{\mathbb{R}}$ una medida con signo, entonces $\forall E \in S$: $\rho^+(E) = \sup\{\rho(F) : F \subset E,\, F \in S\}$ y $\rho^-(E) = -\inf\{\rho(F) : F \subset E,\, F \in S\}$. Además $-\rho^-(E) \leq \rho(E) \leq \rho^+(E)$. Concluya que $|\rho(E)| \leq |\rho|(E)$.

(99) Sea ρ una medida con signo σ-finita sobre (X,S). Pruebe:

$$i)\ |\rho|(E) = \max\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |\rho(F_i)| : \{F_i\}_1^{\infty} \text{ partición numerable de } E\ (F_i \in S)\right\}$$

ii) $|\rho|(E) = \sup\left\{\int\limits_E f\, d\rho : f \in \mathcal{L}_1(|\rho|),\ |f| \leq 1\right\}$ $\forall E \in S$ fijo. Si $|\rho|(E) < +\infty$, entonces en *(ii)* sup puede reemplazarse por max.

(NOTA: En *(ii)* se ha definido $\int\limits_E f\, d\rho$ como $\int\limits_E f\, d\rho^+ - \int\limits_E f\, d\rho^-$. Observe que $f \in \mathcal{L}_1(|\rho|) \Leftrightarrow f \in \mathcal{L}_1(\rho^+)$ y $f \in \mathcal{L}_1(\rho^-)$.)

(100) Sean μ y ν medidas con signo sobre (X,S). Pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes:

a) $\nu \ll \mu$ b) $\nu^+ \ll \mu$ y $\nu^- \ll \mu$ y c) $|\nu| \ll |\mu|$.

(101) Sean μ_1 y μ_2 dos medidas sobre (X,S) (alguna de ellas finita) y sea $\rho = \mu_1 - \mu_2$ Pruebe: $\rho^+ = \mu_1$ y $\rho^- = \mu_2$ $\Leftrightarrow$ $\mu_1 \perp \mu_2$.

(102) Sea (X,S) un espacio medible fijo. Denotamos por $\mathcal{M}(X,S)$ el conjunto de medidas con signo **finitas** en (X,S). Pruebe que $\mathcal{M}(X,S)$ es un espacio de Banach sobre $\mathbb{R}$, bajo las operaciones: $(\mu_1 + \mu_2)(E) =$

$\mu_1(E) + \mu_2(E)$, $\quad (\alpha\mu)(E) = \alpha\mu(E)$ $(E \in S)$ $\quad$ y con la norma $\|\mu\| = |\mu|(X)$.

(103) Sea (X, S, μ) un espacio de medida. Para $f_i \in \mathcal{L}_1(\mu)$ $(i = 1, 2)$ fijas, defina dos medidas con signo finitas $\rho_i : S \to \mathsf{R}$ $(i = 1, 2)$ como sigue: $\rho_i(E) = \int_E f_i \, d\mu$ $(E \in S)$. Pruebe: $\rho_1 \equiv \rho_2 \Leftrightarrow \mu(\{x \in X : f_1(x) = 0\} \,\triangle\, \{x \in X : f_2(x) = 0\}) = 0$.

(*Sugerencia:* Observe que $|\rho_i|(\cdot) = \int_{(\cdot)} |f_i| \, d\mu$ y pruebe la afirmación para $|\rho_i|$ $(i = 1, 2)$.)

(104) Hipótesis y notación como en el anterior. Si $\rho_1 \equiv \rho_2$ halle explícitamente la derivada de Radon-Nikodým $\frac{d\rho_2}{d\rho_1}$. ¿ Será cierto que $\rho_1 \perp \rho_2 \Leftrightarrow \mu(\{x \in X : f_1(x) = 0\} \,\triangle\, \{x \in X : f_2(x) \neq 0\}) = 0$?

(105) Sean μ, ν medidas con signo σ-finitas sobre (X, S) tales que: $\nu \ll \mu$. Pruebe:

i) $\nu(\{x \in X : \frac{d\nu}{d\mu}(x) = 0\}) = 0$.

ii) Si $f \in \mathcal{L}_1(|\nu|)$ y $\rho(E) = \int_E f \, d\nu$ $(E \in S)$, entonces $\rho \ll \mu$ y $\frac{d\rho}{d\mu} = f\frac{d\nu}{d\mu}$.

(106) Sean (X, S, μ) un espacio de medida finita y $f \in \mathcal{L}_1(\mu)$ dados. Sea $\rho : S \to \mathsf{R}$ definida por: $\rho(E) = \int_E f \, d\mu$ $(E \in S)$. Halle la descomposición de Lebesgue $\mu = \mu_0 + \mu_1$ de μ con respecto a ρ, con $\mu_0 \perp \rho$ y $\mu_1 \ll \rho$. Describa a $\frac{d\mu_1}{d\rho}$ en términos de f. ¿ Que condición debe satisfacer f para que $\rho \equiv \mu$?

(107) Sea $\mu : \mathsf{B}_{\mathsf{R}} \to \mathsf{R}$ una medida σ-finita. Defina $g : \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ poniendo $g(x) = \mu((-\infty, x])$ $(x \in \mathsf{R})$. Pruebe que g es no-decreciente, continua por la derecha, $\mu((a, b]) = g(b) - g(a)$ y $\mu(\mathsf{R}) = \lim_{x \uparrow \infty} g(x)$ (g se llama la **distribución** de μ). Inversamente, sea $g : \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ no-decreciente, continua por la derecha. Sea $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathsf{R})$ el álgebra del ejercicio (5), defina $\lambda_g : \mathcal{A} \to \mathsf{R}$ extendiendo aditivamente los siguientes valores: $\lambda_g((a, b]) = g(b) - g(a)$, $\lambda_g((-\infty, b]) = g(b) - \lim_{x \downarrow -\infty} g(x)$, $\lambda_g((a, \infty]) = \lim_{x \uparrow \infty} g(x) - g(a)$ y $\lambda_g((-\infty, +\infty)) = \lim_{x \uparrow \infty} g(x) - \lim_{x \downarrow -\infty} g(x)$. Pruebe que existe una única medida $\overline{\lambda}_g$ definida en una σ-álgebra completa $\mathcal{A}_g^*$ que contiene a B_{R}. ($\overline{\lambda}_g : \mathsf{B}_{\mathsf{R}} \to \mathsf{R}$ se llama la **medida de Lebesgue-Stieltjes** generada por g).

(*Sugerencia:* Use el teorema de extensión de Hahn-Caratheodory. La continuidad por la derecha de g es indispensable para probar que λ_g es una casi-medida.)

(OBSERVACION: $\overline{\lambda}_g$ es σ-finita y $\overline{\lambda}_g$ es finita $\Leftrightarrow$ g es acotada. Además, $\overline{\lambda}g(\{x\}) = 0 \Leftrightarrow g$ es continua en x.)

(108) Sea $\overline{\lambda}_g : \mathsf{B}_{\mathsf{R}} \to \mathsf{R}$ la medida de Lebesgue-Stieltjes generada por g (como en el ejercicio anterior). Pruebe:

i) $\overline{\lambda}_g \ll \overline{\lambda}$ (medida de Lebesgue) $\Leftrightarrow \forall a < b$ en R y $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon, a, b)$ tal que si $\{(a_i, b_i)\}_{i \in \mathsf{N}}$ denota cualquier colección numerable disjunta de subintervalos abiertos contenidos en $[a, b]$ tal que : $\sum_{i \in \mathsf{N}} (b_i - a_i) < \delta$ entonces: $\sum_{i \in \mathsf{N}} (g(b_i) - g(a_i)) < \varepsilon$. (NOTA: $g : \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ que satisface la propiedad anterior se llama **absolutamente continua**. (G. Vitali, 1905))

ii) Si $\overline{\lambda}_g \ll \overline{\lambda}$, entonces: $g' = \frac{d\lambda_g}{d\lambda}$ (c.d. rel. λ).

(*Sugerencia:* Si g es no-decreciente, entonces g' existe (c.d. rel. $\overline{\lambda}$) y es integrable en cualquier intervalo $[a, b]$ (Teorema de Lebesgue). Recuerde la siguiente propiedad de las integrales de Riemann-Stieltjes: $\int_a^b f \, dg =$

$\int_a^b fg'\,dt,\ \forall f:[a,b]\to\mathsf{R}$ continua.)

(109) Sea $\psi:[0,1]\to[0,1]$ la función escalera de Cantor (ejercicio (82)).

a) Pruebe que $\psi(\frac{1}{3}x)=\frac{1}{2}\psi(x)$ y $\psi(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\psi(x)$ $(x\in[0,1])$.

b) Extienda ψ a todo R poniendo $\psi(x)=0$ si $x<0$ y $\psi(x)=1$ si $x>1$ y pruebe que si $\overline{\lambda}_\psi$ es la medida de Lebesgue-Stieltjes generada por ψ entonces:

i) $\int_{[0,1]} e^{ax}\,d\overline{\lambda}_\psi = e^{a/2}\prod_{k=1}^{\infty}\cosh\left(\frac{a}{3^k}\right)$ (coseno hiperbólico).

ii) $\int_{[0,1]} \operatorname{sen}\pi x\,d\overline{\lambda}_\psi = \prod_{k=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi}{3^k}\right)$.

(*Sugerencia:* Denote por $\rho(a)$ a la integral en *(i)*. Observe que $\overline{\lambda}_\psi((\frac{1}{3},\frac{2}{3}))=0$, por lo que basta considerar a la integral sobre $[0,\frac{1}{3}]$ y $[\frac{2}{3},1]$ y use el inciso (a) para obtener: $\rho(a)=e^{a/3}\cosh\left(\frac{a}{3}\right)\rho\left(\frac{a}{3}\right)$. Procediendo de manera inductiva obtenga $\rho(a)=e^{a/3}e^{a/9}\cdots e^{a/3^k}\prod_{j=1}^{k}\cosh\left(\frac{a}{3^j}\right)\rho\left(\frac{a}{3^k}\right)$. Justifique el hecho de que $\rho(a)\to 1$ si $a\to 0$. *(ii)* Se sigue de *(i)* si se consideran valores particulares para $a\in\mathbb{C}$.)

(110) Pruebe que $\mathsf{B}_{\mathsf{R}^{n+m}}=\mathsf{B}_{\mathsf{R}^n}\otimes\mathsf{B}_{\mathsf{R}^m}$.

(111) *i)* Sea (X,ρ) un espacio métrico separable. Pruebe que: $D=\{(x,x):x\in X\}$, la **diagonal** de $X\times X$, pertenece a $\mathsf{B}_X\otimes\mathsf{B}_X$.

ii) Sea X no-numerable y $S=\{A\subset X:\#(A)\le\aleph_0$ o $\#(X-A)\le\aleph_0\}$. Pruebe que $D\notin S\otimes S$.

(*Sugerencia:* Si $D\in S\otimes S$, entonces $D\in S(\mathsf{E}_0)$, para alguna subfamilia numerable $\mathsf{E}_0\in S\times S$ (ver el ejercicio (10)). Por definición de S, E_0 puede tomarse igual a $\{(x_m,x_n):m,n\in\mathsf{N}\}$ para algún conjunto numerable $\{x_n\}\subset X$. Obtenga de esto una contradicción.)

(112) Enuncie y pruebe los resultados análogos a los de los ejercicios (75) y (76) para transformaciones afines $T:\mathsf{R}^n\to\mathsf{R}^n$. (*Sugerencia:* Sea $T(\vec{x})=A\vec{x}+\vec{b}$; Si $\det(A)\ne 0$, entonces A corresponde a una matriz que puede ser llevada a la matriz identidad mediante una composición de transformaciones elementales aplicadas a sus renglones. Examine el efecto de éstas sobre celdas n-dimensionales.)

(113) Enuncie y pruebe los resultados análogos a los incisos del ejercicio (79) para subconjuntos de R^n $(n>1)$.

(114) Imitando la construcción de G. Vitali, obtenga un subconjunto no-medible contenido en $[0,1]\times\cdots\times[0,1]$ (n-factores).

(115) Sea (X,S,μ) un espacio de medida y $\nu:\mathcal{P}(\mathsf{N})\to\overline{\mathsf{R}}$ la medida de conteo. Pruebe:

i) $E\in S\otimes\mathcal{P}(\mathsf{N})\Leftrightarrow E^n\in S,\ \forall n\in\mathsf{N}$.

ii) $\mu\otimes\nu(E)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E^n)$ $(E\in S\otimes\mathcal{P}(\mathsf{N}))$.

iii) $f:X\times\mathsf{N}\to\overline{\mathsf{R}}$ es $S\otimes\mathcal{P}(\mathsf{N})$-medible $\Leftrightarrow f^n$ es S-medible $\forall n\in\mathsf{N}$. (f^n denota la n-sección de f).

iv) $f \in \mathcal{L}_1(\mu \otimes \nu) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \int |f^n|\, d\mu < +\infty$, en cuyo caso:

$$\int_{X\times\mathbb{N}} f\, d(\mu\otimes\nu) = \sum_{n=1}^{\infty} \int f^n\, d\mu = \int \sum_{n=1}^{\infty} f^n\, d\mu.$$

Enuncie cada uno de los incisos anteriores para el caso en el que $X = \mathbb{N}$, $S = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y $\mu = \nu$.

(116) Sean (X, S, μ) un espacio de medida y $f \in \mathrm{M}^+(X, S)$ dados. Defina $\mathcal{O}_*(f) = \{(x,t) \in X \times \overline{\mathbb{R}} : 0 \le t < f(x)\}$ el conjunto **ordenado inferior** de f. Pruebe:

i) $\mathcal{O}_*(f)$ es $S \otimes \mathrm{B}_{\mathbb{R}}$-medible.

ii) $\int f\, d\mu = \mu \otimes \lambda(\mathcal{O}_*(f))$. ($\therefore$ la integral es el "área bajo la curva").

iii) $\Gamma(f) = \{(x,t) : t = f(x)\}$ es $S \otimes \mathrm{B}_{\mathbb{R}}$-medible y si $f \in \mathcal{L}_1(\mu)$ entonces: $\mu \otimes \nu(\Gamma(f)) = 0$

(*Sugerencia:* En *(i)* y *(ii)* empiece con f una función S-simple y aproxime. Para *(iii)* considere $\{(x,t) : 0 \le t \le f(x)\}$.)

(117) Sean (X, S, μ) un espacio de medida, $\varphi_1, \varphi_2 : X \to \mathbb{R}$ funciones S-medibles y acotadas con $\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$ $\forall x \in X$ y $E = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} : x \in X, \quad \varphi_1(x) \le t \le \varphi_2(x)\}$. Pruebe:

i) $E \in S \otimes \mathrm{B}_{\mathbb{R}}$. (*Sugerencia:* Aproxime φ_1 y φ_2 con funciones S-simples, acotadas s y s' con: $s \le \varphi_1 < \varphi_2 \le s'$.)

ii) Si$F : E \to \mathbb{R}$es$S\otimes\mathrm{B}_{\mathbb{R}}$-medibley $F \in \mathcal{L}_1(\mu\otimes\overline{\lambda})$, entonces $\int_E F(x,t)\, d(\mu\otimes\overline{\lambda}) = \int_X \int_{[\varphi_1(x),\varphi_2(x)]} F(x,t)\, d\overline{\lambda}\, d\mu$.

(*Sugerencia:* Considere las x-secciones de χ_E.)

iii) Sea $c \in (0,1)$ fijo. Defina $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como sigue:

$$F(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{1-y}{x-y}\right)^c, & \text{si } 0 \le y < x,\ 0 < x \le 1; \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

Pruebe que $F \in \mathcal{L}_1(\overline{\lambda} \otimes \overline{\lambda})$ y halle $\int_E F(x,y)\, d(\overline{\lambda} \otimes \overline{\lambda})$. (*Sugerencia:* Una de las integrales iteradas es mas sencilla. Solución $= \frac{1}{2(1-c)}$.)

(118) $\forall E \subset \mathbb{R}$ defina $\gamma(E) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \in E\}$. Pruebe:

i) Si $E \in \mathrm{B}_{\mathbb{R}}$, entonces $\gamma(E) \in \mathrm{B}_{\mathbb{R}^2}$ (*Sugerencia:* Verifique que $D : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $D(x,y) = x - y$ es una función abierta.)

ii) Si $\overline{\lambda}(E) = 0$, entonces $\gamma(E) \in \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}^2}$. (*Sugerencia:* Pruebe que $(\overline{\lambda} \otimes \overline{\lambda})^*(\gamma(E)) = 0$.)

iii) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es $\mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$-medible, entonces la función $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $F(x,y) = f(x-y)$ es $\mathcal{A}^*_{\mathbb{R}^2}$-medible. (*Sugerencia:* Use el (72) inciso *(i)* y los incisos anteriores.)

iv) Si $A, B \in \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$ son tales que: $\overline{\lambda}(A) < +\infty$ y $\overline{\lambda}(B) < +\infty$, entonces $\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\lambda}(A \cap (B + x))\, dx = \overline{\lambda}(A)\overline{\lambda}(B)$

(Ver el ejercicio (77)).

v) Si $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ son $\mathcal{A}^{*}_{\mathbf{R}}$-medibles e integrables, entonces la función $f * g : \mathbf{R} \to \overline{\mathbf{R}}$ definida mediante la fórmula: $f * g(x) = \int_{\mathbf{R}} f(x-y) g(y)\, d\overline{\lambda}(y)$ $(x \in \mathbf{R})$ es $\mathcal{A}^{*}_{\mathbf{R}}$-medible, es finita (c.d. rel. $\overline{\lambda}$) y $\int (f * g)\, d\overline{\lambda} = \left(\int f\, d\overline{\lambda}\right)\left(\int g\, d\overline{\lambda}\right)$. Además $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

(NOTA: La función $f * g$ se llama la **convolución** de f con g.)

(119) Comprube las siguientes propiedades de la convolución:

i) $f * g = g * f$.

ii) $f * (g * h) = (f * g) * h$.

iii) $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$.

(*Sugerencia:* En *(i)*, *(ii)* y *(iii)* usar el teorema de Fubini.)

iv) $f_n \xrightarrow[\mathcal{L}_1]{} f$ y $g_n \xrightarrow[\mathcal{L}_1]{} g$ $(n \to +\infty)$ entonces $f_n * g_n \xrightarrow[\mathcal{L}_1]{} f * g$.

(120) Enuncie y pruebe los resultados análogos a los dos ejercicios anteriores para convoluciones de sucesiones de números reales.

BIBLIOGRAFIA RECOMENDADA

De nivel introductorio:

(1) "The elements of Integration" R. G. Bartle. *John Wiley & Sons.*

(2) "Introduction to Measure and Integration" M. E. Munroe. *Addison-Wesley.*

(3) "An introduction to the Theory of Integration" A. C. Zaanen. *Interscience Publishers.*

De nivel intermedio:

(1) "Measure and Integration" S. K. Berberian. *Chelsea.*

(2) "Measure Theory" P. R. Halmos. *Springer-Verlag.* G.T.M. # 18.

(3) "Real and Abstract Analysis" E. Hewitt y K. Stromberg. *Springer-Verlag.* G.T.M. # 25.

(4) "Theory of Functions of a Real Variable" I. P. Natanson, Vols. I, II. *Frederick Ungar.*

(5) "Measure and Category" J. C. Oxtoby. *Springer-Verlag.* G.T.M. # 2.

(6) "Integral, Measure and Derivative: a Unified Approach" G. E. Shilov y B. L. Gurevich. *Dover.*

De interés histórico:

(1) "Lebesgue's Theory of Integration: It's Origins and Development" T. Hawkins. *Chelsea.*

(2) "Theory of the Integral" S. Saks. *Dover.*