#69

SERIE
MATEMÁTICAS

Mary Glazman y Roberto Martínez V.

Conjuntos

AÑO
2007

VÍNCULOS
MATEMÁTICOS

FACULTAD DE CIENCIAS

VÍNCULOS MATEMÁTICOS

CONJUNTOS

Notas de clase
Tercera edición

Mary Glazman*
Roberto Martínez V.**

VÍNCULOS MATEMÁTICOS NO. 69, 2007

* Profesora de la Facultad de Ciencias de la UNAM
** Profesor del Instituto de Matemáticas de la UNAM

CONJUNTOS

INTRODUCCION

La teoría de conjuntos nació del análisis. En matemáticas es común que no se sepa por donde va a saltar la liebre y un buen ejemplo de esto fue el nacimiento de la teoría de conjuntos. Edward Heine, un matemático de la Universidad de Halle, Alemania, le propuso a George Cantor (1845 - 1918), considerado el fundador de la teoría de conjuntos, el siguiente problema planteado por Riemann (1826 - 1866): *dada una función arbitraria, representada por una serie trigonométrica ¿es necesariamente única esta representación?* Con una visión distinta de la de sus predecesores, Cantor planteó el problema de una manera totalmente original, traduciendo el lenguaje de sucesiones al lenguaje de conjuntos de puntos infinitos. Con este lenguaje pudo demostrar el teorema de la unicidad de la representación, pero para hacer una demostración que le resultara plenamente satisfactoria requería de una rigurosa teoría de los números reales. Si bien los conjuntos infinitos habían aparecido en los trabajos de Bolzano y de Riemann, su análisis no había sido riguroso y su estudio no pasaba de una simple mención. Cantor se dio cuenta de que, los números reales, al igual que los números naturales o los números racionales forman un conjunto infinito pero su naturaleza es distinta. La diferencia reside en la cardinalidad de estos conjuntos. Cantor concentró todo su esfuerzo en sistematizar el estudio de la *cardinalidad*, creando así la teoría de los números transfinitos.

El lenguaje de los conjuntos no era nuevo. Como dijimos antes, Bolzano ya había usado conjuntos de puntos infinitos y ciertos conjuntos de puntos fueron utilizados por Dirichlet, Riemann, Lipschitz y Hankel pero fue Cantor quien sistematizó su estudio y elaboró la primer teoría formal sobre ellos. Este trabajo que rompía con la concepción que se tenía sobre lo que debía ser el trabajo matemático contenía, además, una serie de contradicciones que provocaron una violenta reacción en el medio matemático dividiéndose éste en dos bandos: los que defendían el trabajo iniciado por Cantor y los que lo atacaban.

Entre sus defensores se encontraba el matemático Zermelo quien se adbocó a la tarea de eliminar las contradicciones. Para ello tomó el modelo lógico que se había seguido en geometría y en algunos sistemas numéricos y trató de dar definiciones y axiomas que contenían los conceptos fundamentales y las relaciones que se admitían dentro del sistema; el plan de Zermelo fue admitir dentro de la teoría sólo lo que no se prestara a contradicciones.

Estos axiomas fueron mejorados por Abraham Fraenkel (1891 - 1965) y Von Neumann les hizo cambios adicionales.

Desarrollaremos aquí los axiomas de Zermelo, acompañados con ejemplos que nos faciliten su comprensión.

Por otra parte, desde hace algunos años se introdujo en los planes de estudio de la escuela primaria y de la escuela secundaria, la enseñanza de los conjuntos. Nunca ha quedado plenamente claro el porqué. La forma y la profundidad con que se tratan estos temas varía de escuela a escuela y la pregunta que se hacen muchos profesores universitarios de cursos básicos es ¿que se les debe enseñar a los estudiantes de teoría de conjuntos para que puedan entender otras ideas en matemáticas? Según comenta P.Halmos en su libro *TEORIA INTUITIVA DE CONJUNTOS* (Editorial CECSA) : *los matemáticos están de acuerdo en que cada uno de ellos debe saber algo de teoría de conjuntos; el desacuerdo comienza al tratar de decidir qué tanto es algo.*

Sin embargo, casi todos los matemáticos estarán de acuerdo en que para hacer matemáticas se requiere desarrollar el razonamiento lógico y poseer un lenguaje que permita expresarse de manera concisa.

El lenguaje que han utilizado los matemáticos en los últimos tiempos, para desarrollar su trabajo, toma como base la teoría de conjuntos.

Trataremos, por lo tanto, de dar las bases de este lenguaje para poder definir de manera precisa, todos los conceptos que

utilizaremos en matemáticas y que nos permitan también a partir de las definiciones, demostrar teoremas.
Partiremos de cierta noción intuitiva de *conjunto* y de la relación de *pertenencia* o *ser elemento de* y daremos axiomas o reglas que nos permitan trabajar con estos conceptos. Existen muchas dificultades para dar una definición precisa de conjunto, es decir, una definición que no resulte ambigua. Este ha sido un dolor de cabeza para la gente que trabaja en los fundamentos lógicos de las matemáticas. Sin embargo, podemos dar una definición intuitiva lo suficientemente clara para seguir trabajando en esta dirección.

Entendemos por **conjunto** a una colección o familia de objetos.

- Los alumnos de la Facultad de Ciencias.
- Los números naturales.
- Las mujeres que han estado en Júpiter.

Estos objetos o elementos determinan al conjunto: si Luis Orozco es alumno de la Facultad de Ciencias, Luis Orozco es un elemento del conjunto de alumnos de la Facultad de Ciencias; como 3 es un número natural, 3 pertenece al conjunto de los números naturales. Esto es, el concepto principal en la determinación de un conjunto es el de *pertenencia.*
Acordaremos pues, decir que A es un **conjunto** cuando dado un objeto x podamos decir, *con toda precisión*, si x pertenece o no a A. Denotaremos $x \in A$ para indicar que x es un elemento de A y $x \notin A$ para indicar que x no es un objeto de A.
Al conjunto de elementos de A lo denotaremos:

$$\{ x \in A\} \quad \text{o} \quad \{ x / x \in A\}$$

EJEMPLOS

1.- Sea F el conjunto de alumnos de la Facultad de Ciencias, ie,
F = { x / x es un alumno de la Facultad de Ciencias}
entonces, Luis Orozco $\in$ F pero $3 \notin$ F.

2.- *Las 10 mejores canciones* no es un conjunto porque dado un objeto cualquiera no podríamos decidir si pertenece o no a esta colección. En este caso no existe un criterio único para determinar cuales son las 10 mejores canciones y aquí lo que se busca es evitar ambigüedades.

3.- *Las mujeres que han estado en Júpiter* sí es un conjunto.

AXIOMA 1. AXIOMA DE EXTENSIONALIDAD.

Dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos.

EJEMPLOS

1.- $\{ 0/15, \ 4/4, \ 6^0, \ \sqrt{1} \} = \{ 0, \ 1\}$

2.- Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y sea B el conjunto de números enteros mayores que 0 y menores o iguales que 3. Entonces $A = B$.

3.- Si $A = \{ 1, 2\}$, $B = \{ a, b\}$ y si sabemos que $A = B$ entonces $a = 1$ y $b = 2$ ó $a = 2$ y $b = 1$.

Observemos que si $A = B$ entonces A y B siempre tienen los mismos elementos. Esta es una verdad puramente lógica, que en particular es cierta para los conjuntos.

DEFINICION

A es un **subconjunto** de B o A **está contenido en B** si y sólo si todo elemento de A es elemento de B.
$A \subset B$ denota que A es un subconjunto de B o que A está contenido en B, también podemos escribirlo como $B \supset A$ para indicar que B contiene a A.

EJEMPLOS

Denotaremos $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ al conjunto de los números naturales y $\mathbb{Z} = \{ ...-3, -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ al conjunto de los números enteros.

1.- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. El conjunto de los números naturales es un subconjunto del conjunto de los números enteros.

2.- La recta cuya ecuación es $y = 2x + 3$ es un subconjunto del plano cartesiano. Este conjunto se puede escribir como
$\{(x, y) \in \text{plano cartesiano} / y = 2x + 3\}$

3.- $\{-2\}$ es un subconjunto del conjunto solución de la ecuación $x^2 - 4 = 0$.

4.- Las vocales forman un subconjunto del abecedario.

5.- Sea P el conjunto de números naturales menores o iguales a 4 y sea $Q = \{1, 2, 3\}$. Entonces $Q \subset P$ pero $Q \neq P$. En este caso diremos que Q es un **subconjunto propio** de P. Todo conjunto es subconjunto de sí mismo $A \subseteq A$. En este caso diremos que A es un **subconjunto impropio de A**.

PROPIEDADES

i. - $A \subset B$ y $B \subset C$ entonces $A \subset C$.
ii.- Si $A \subset B$ y $B \subset A$ entonces $A = B$.

Demostración

i. - Sea $x \in A$, como todo elemento de A es elemento de B, $x \in B$ y como todo elemento de B es elemento de C, $x \in C$. Por lo tanto $A \subset C$.

ii.- Como todo elemento de A es elemento de B y todo elemento de B es elemento de A, por el axioma 1, $A = B$.

A continuación daremos una serie de definiciones que resultarán útiles para entender el axioma 2.

DEFINICION

Una **proposición** es una frase P que es cierta o falsa (pero no ambas cosas).

EJEMPLOS

1.- π es un número irracional.

2.- Los números enteros son un subconjunto de los números naturales.

DEFINICION

Sea A un conjunto. Una **condición S(x) en A** es una frase respecto a x (no se puede decir si es cierta o falsa) tal que si sustituimos x por un elemento arbitrario $a \in A$ obtenemos una proposición S(a).

Llamaremos, indistintamente, a una condición **proposición libre o abierta en A.**

EJEMPLOS

1.- Sea $A = \mathbb{N}$ y sea $S(x) := x > 2$ una condición en A.

$x > 2$ no es una proposición porque no es cierta ni falsa, pero si sustituimos x por cualquier número natural obtendremos una proposición.

Si $x = 4$ entonces $S(4) := 4 > 2$ es verdadera.

Si $x = 1$ entonces $S(1) := 1 > 2$ es falsa.

2.- Si $A = \mathbb{Q}$ y $S(x) := 2x - 3 = 5$ entonces $S(4) = 2.4 - 3 = 5$ es verdadera mientras que $S(2/5)$ es falsa.

AXIOMA 2. AXIOMA DE LA ESPECIFICACION

Sea A un conjunto y S(x) una proposición abierta en A, entonces existe un conjunto B cuyos elementos son, precisamente, aquellos elementos de A que satisfacen o hacen verdadera $S(x)$, y se denota $B = \{ x \in A / S(x)\}$.

EJEMPLOS

1.- $A = \mathbb{N}$ y $S_1(x) := x > 2$

$B = \{ x \in A / S_1(x)\} = \{ x \in \mathbb{N} / x > 2\} = \{ 3, 4, \ldots\}$

2.- Si A es el conjunto de letras del abecedario y $S_2(x)$ es la condición := x es una letra de la palabra GUADALAJARA entonces:

$B = \{ x \in A / S_2(x)\} = \{G, U, A, D, L, J, R\}$

3.- $A = \mathbb{N}$ $S_3(x) := x^2 - 144 = 0$

$B = \{ x \in A / S_3(x)\} = \{ 12 \}$

Observemos que si $A = \mathbb{Z}$ se obtiene otro conjunto:

$B' = \{ x \in \mathbb{Z} / S_3(x)\} = \{ -12, 12\}$

4.- Si $A = \mathbb{N}$ y $S_2(x)$ es la condición del ejemplo 2 entonces $B = \{ x \in \mathbb{N} / S_2(x)\} = \{ \}$ no tiene elementos.

Dado un conjunto B, siempre obtenemos una condición $S(x) := x \in B$.

DEFINICION

Decimos que *dos condiciones en A: $S(x)$ y $S'(x)$ son equivalentes* si definen el mismo conjunto.

EJEMPLOS

$S(x) := x^2 - 4 = 0$ $S'(x) := 1 < x < 3$

Si $A = \mathbb{N}$ entonces $\{ x \in A / S(x)\} = \{ x \in A / S'(x)\}$. Por lo tanto, $S(x)$ y $S'(x)$ son equivalentes.

Si consideramos como iguales a las condiciones equivalentes, obtenemos una correspondencia uno a uno entre condiciones y conjuntos: fijando al conjunto A, dada la condición $S(x)$ obtenemos al conjunto B y dado el conjunto B, obtenemos una condición en A.

OBSERVACION

Si $S(x)$ es una condición entonces $\{ x / S(x)\}$ es una **clase**. Una clase no necesariamente es un conjunto. La diferencia entre estos dos conceptos originó parte de los problemas lógicos de Cantor.

¿Qué sucedería si hubiera un conjunto U que tiene a todos los conjuntos como elementos?
Supongamos que tal conjunto existe y consideremos en U la condición $S(x)$: $x \notin x$. Por el axioma 2 existe un conjunto

$$B := \{ x \in U / S(x)\} = \{ x \in U / x \notin x \}$$

Como B es un conjunto, dado un objeto cualquiera z podemos decir con toda precisión si $z \in B$ o $z \notin B$. En particular, dado B se tendrá que $B \in B$ o $B \notin B$.
Si $B \in B$ entonces $B \notin B$ lo cual es una contradicción; si $B \notin B$ entonces $B \in B$ lo cual es otra contradicción.
Suponer que el conjunto U existe nos lleva a una situación ambigua que es precisamente lo que queremos evitar. Por lo tanto el conjunto U no existe. El razonamiento anterior se conoce como *la paradoja de Russell* y en la literatura de la lógica toma muchas formas equivalentes a la que hemos planteado aquí.

Las dificultades aparecen al definir conjuntos muy grandes, así que se procederá a la inversa, garantizando, por medio de axiomas la existencia de conjuntos mínimos y la obtención nuevos conjuntos a partir de éstos mediante las operaciones usuales de la teoría de conjuntos.

AXIOMA 3

Existe al menos un conjunto.

Sea A un conjunto: su existencia está garantizada por el axioma 3 y sea $S(x) := x \neq x$. El axioma 2 asegura la existencia del conjunto $\{ x \in A / S(x)\} = \{ x \in A / x \neq x \}$. Este conjunto no tiene elementos, lo llamaremos **conjunto vacio** y lo denotaremos: $\emptyset = \{\} = \{ x \in A / x \neq x\}$. Obsérvese que $\emptyset \neq \{ \emptyset \}$.

PROPOSICION

Cualquier conjunto contiene al $\emptyset$. En particular el $\emptyset$ es único.

DEMOSTRACION

Sea B un conjunto y sea *p* la proposición:

$$"\emptyset \subset B"$$

Para demostrar que *p* es verdadera bastará demostrar que la negación de *p* es falsa. La negación de *p* es: *existe una elemento del* $\emptyset$ *que no está en* B. Como $\emptyset$ no tiene elementos, la negación de *p* es falsa, por lo tanto *p* es verdadera (estas demostraciones se llaman *demostraciones por vacuidad* pues resulta imposible exhibir un elemento del $\emptyset$ que no esté en B).

Si $\emptyset$ y $\emptyset'$ son dos conjuntos vacios, $\emptyset \subseteq \emptyset'$ y $\emptyset' \subseteq \emptyset$, por lo tanto $\emptyset = \emptyset'$.

Queremos ahora construir nuevos conjuntos a partir de conjuntos dados (como el único conjunto que tenemos es el $\emptyset$, partiremos de él)

AXIOMA 4 (DE LAS PAREJAS)

Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ conjuntos. Existe un conjunto X que tiene a $\mathfrak{A}$ y a $\mathfrak{B}$ como elementos

Por medio del axioma 4 construimos $X = \{ \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \}$ de la siguiente manera: $\{ \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \} = \{ x \in X \ / \ x = \mathfrak{A} \text{ o } x = \mathfrak{B} \}$

EJEMPLOS

1.- Si $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \emptyset$ entonces $\{ \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \} = \{ x \in X \ / \ x = \emptyset \} = \{ \emptyset \}$
Nótese que $\emptyset$ es diferente de $\{ \emptyset \}$ ya que $\emptyset$ no tiene elementos y $\{ \emptyset \}$ tiene un elemento.

2.- Si $\mathfrak{A} = \emptyset$ y $\mathfrak{B} = \{ \emptyset \}$ entonces $X = \{ \emptyset , \{ \emptyset \}\}$

De esta manera construimos torres de conjuntos: $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$, ..., $\{...\{\{\emptyset\}\}...\}$. ¿Son conjuntos distintos? Intente dar una demostración.

3.- Sea $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ un conjunto. Entonces $X = \{ \mathfrak{A} \} = \{ \mathfrak{B} \}$. Esto significa que un conjunto puede ser, a la vez, elemento de otro conjunto.

Si A y B son conjuntos, queremos reunir a sus elementos en un solo conjunto. Este conjunto es diferente del que se construyó en el axioma 4, mientras los elementos del axioma 4 son los conjuntos A y B, nuestro nuevo conjunto tendrá por elementos a los elementos de A y de B. Por ejemplo: si $A = \{1, 2\}$ y $B = \{a\}$ entonces $\{\{1, 2\}, \{a\}\} \neq \{1, 2, a\}$.

AXIOMA 5 (DE LAS UNIONES)

Sea $\mathfrak{C}$ un conjunto de conjuntos. Existe un conjunto X que tiene a todos los elementos que pertenecen a algún conjunto de $\mathfrak{C}$.

DEFINICION

Sea $\mathfrak{C}$ un conjunto de conjuntos. Definimos $\bigcup \mathfrak{C}$ o $\bigcup_{Y \in \mathfrak{C}} Y$ como:

$$\bigcup \mathfrak{C} = \{ x \in X \ / \ x \in Y \text{ para alguna } Y \in \mathfrak{C} \}$$

Si $\mathfrak{C} \neq \emptyset$ definimos $\bigcap \mathfrak{C}$ o $\bigcap_{Y \in \mathfrak{C}} Y$

$$\bigcap \mathfrak{C} = \{ x \in X \ / \ x \in Y \text{ para toda } Y \in \mathfrak{C} \}$$

EJEMPLOS

1.- Si $\mathfrak{C} = \{ A \}$ entonces:

$$\bigcup \mathfrak{C} = \{ x \in X \ / \ x \in A \} = A = \bigcap \mathfrak{C}$$

2.- Si $\mathfrak{C} = \{ A, B \}$ entonces:

$$\bigcup \mathfrak{C} = \bigcup \{ A, B\} = A \cup B = \{ x \in X \ / \ x \in A \ \textbf{o} \ x \in B \}$$

$$\bigcap \mathfrak{C} = \bigcap \{ A, B\} = A \cap B = \{ x \in X \ / \ x \in A \ \textbf{y} \ x \in B \}$$

3- Si $\mathfrak{C} = \{ A_i / \ i \in I\}$ donde la I denota un conjunto que nos sirve para distinguir a los elementos de $\mathfrak{C}$ entonces

$\bigcup \mathfrak{C} := \bigcup_{i \in I} A_i = \{ x / x \in A_i$ para alguna $i \in I\}$

$\bigcap \mathfrak{C} := \bigcap_{i \in I} A_i = \{ x / x \in A_i$ para toda $i \in I\}$

OPERACIONES CON CONJUNTOS

Detengámonos un momento en el conjunto:

$A \cup B = \{ x / x \in A$ o $x \in B\}$

Este nuevo conjunto tiene algunas propiedades fáciles de demostrar.

1.- $A \cup \emptyset = A$

2.- $A \cup B = B \cup A$ Conmutatividad

3.- $A \cup A = A$ Idempotencia

4.- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ Asociatividad

5.- $A \subseteq A \cup B$ y $B \subseteq A \cup B$

6.- $A \subset B$ si y sólo si $A \cup B = B$

Veamos cual sería la técnica para demostrar la propiedad 6.

Observemos que esta propiedad consta de dos proposiciones:

"$\Rightarrow$".) Si $A \subset B$ entonces $A \cup B = B$

"$\Leftarrow$".) Si $A \cup B = B$ entonces $A \subset B$

"$\Rightarrow$") Tenemos que demostrar que $A \cup B = B$; por el axioma 1 esto equivale a decir que $A \cup B \subset B$ y que $B \subset A \cup B$.

Sea x un elemento arbitrario de $A \cup B$; eso significa que $x \in A$ o $x \in B$. Si $x \in B$ habremos terminado porque eso significa que cualquier elemento que esté en $A \cup B$ está en B. Si $x \in A$, la hipótesis $A \subset B$ nos indica que $x \in B$ y por lo tanto $A \cup B \subset B$ en ambos casos.

Por la propiedad 5; $B \subset A \cup B$ de donde $B = A \cup B$.

"$\Leftarrow$")Supongamos que $A \cup B = B$. Sea $x \in A$ entonces $x \in A \cup B = B$, es decir, $x \in B$. Por lo tanto $A \subset B$.

EJEMPLOS

1.- Sea $A = \{ x \in \mathbb{N} / x < 10 \}$ y sea $B = \{ x \in \mathbb{N} / x^2 - 144 = 0\}$

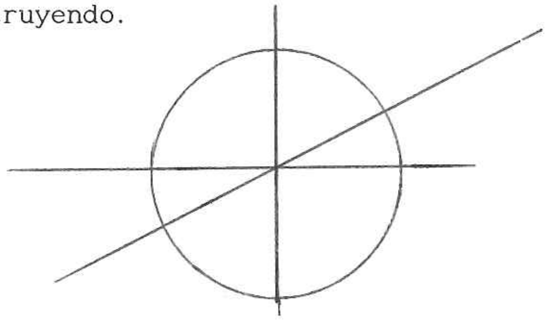
$A \cup B = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12 \}$

2.- Sea $M = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 3 x \}$

$N = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1 \}$

$M \cup N = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \; y = 3 x \quad o \quad x^2 + y^2 = 1 \}$

En este caso, un dibujo describe mejor el nuevo conjunto que estamos construyendo.



3.- Como $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ tenemos que $\mathbb{N} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$.

4.- Sea $P = \{ x \in \mathbb{N} / x$ es par$\}$

$I = \{ x \in \mathbb{N} / x$ es impar$\}$

Entonces $P \cup I = \mathbb{N}$.

Consideremos ahora la intersección de dos conjuntos A y B:

$A \cap B = \{ x / x \in A$ y $x \in B \} = \{ x \in A / x \in B\} = \{ x \in B / x \in A\}$

Algunas propiedades de este conjunto son:

1.- $A \cap \emptyset = \emptyset$

2.- $A \cap B = B \cap A$ conmutatividad

3.- $A \cap A = A$ idempotencia

4.- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ asociatividad

5.- $A \cap B \subset A$ y $A \cap B \subset B$

6.- $A \subset B$ si y sólo si $A \cap B = A$

DEFINICION

Dos conjunto A y B son *ajenos* (*disjuntos*) si $A \cap B = \emptyset$.

EJEMPLOS

5.- Sea $A = \{ x \in \mathbb{N} / x < 10 \}$ y sea $C = \{ x \in \mathbb{N} / 3 \leq x \leq 12\}$

$A \cap C = \{ 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$

6.- Sean M y N los conjuntos del ejemplo 2

$M \cap N = \{ (x, y) / x^2 + y^2 = 1 \quad y \quad y = 3x \}$

$M \cap N = \{ (\sqrt{10}/10, 3\sqrt{10}/10), (-\sqrt{10}/10, -3\sqrt{10}/10)\}$

7.- $\mathbb{R} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$

8.- Sean P e I los conjuntos del ejemplo 4; entonces $P \cap I = \emptyset$

Dos propiedades importantes que relacionan uniones e intersecciones con las *leyes distributivas*:

1.- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

2.- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

DEMOSTRACION

Por el axioma 1 tenemos que demostrar que:

a.) $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$ y que

b.) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$

a.) Sea $x \in A \cap (B \cup C)$, eso significa que $x \in A$ y que $x \in B \cup C$, ie, $x \in B$ o $x \in C$.

Si $x \in B$, como $x \in A$, $x \in A \cap B$ y por lo tanto, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Si $x \in C$, como $x \in A$, $x \in A \cap C$, y de ahí que $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

b.) Sea $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, es decir, $x \in A \cap B$ ó $x \in A \cap C$.

Si $x \in A \cap B$, entonces $x \in A$ y $x \in B$, de donde, $x \in B \cup C$, ie, $x \in A \cap (B \cup C)$.

Si $x \in A \cap C$, entonces $x \in A$ y $x \in C$, de donde, $x \in B \cup C$, ie, $x \in A \cap (B \cup C)$.

Por lo tanto $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$.

De a.) y b.) concluimos que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

2.- Ejercicio.

Dados dos conjuntos A y B podemos de nuevo utilizar el axioma 2 de la especificación para definir un nuevo conjunto llamado **la diferencia entre A y B** y que denotaremos $A \setminus B$, ie,

$$A \setminus B = \{ x \in A \ / \ x \notin B\}$$

EJEMPLOS

1.- Sea $A = \{ x \in \mathbb{N} \ / \ x < 10\}$ y sea $B = \{ x \in \mathbb{Z} \ / \ x \text{ es par}\}$
Entonces $A \setminus B = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$

2.- Sea $A = \{ x \ / \ x$ es una letra del abecedario$\}$ y sea
$B = \{ x \ / \ x$ es una vocal$\}$
$B \setminus A = \emptyset$

Al realizar alguna actividad se tiene como referencia, explícita o implícitamente, un universo del discurso; es decir, un marco de referencia dentro del cual se trabaja. Este universo del discurso incluye a todos los elementos al cual nos referimos en una situación explícita y es, por lo tanto, un conjunto. A este conjunto lo llamaremos **conjunto universal** o **universo** y lo denotaremos con la letra U.

Si $A \subset U$ podemos definir el conjunto:
$A' = U \setminus A = \{ x \in U \ / \ x \notin A\}$
A este conjunto lo llamaremos **el complemento de A** (con respecto a U).

Este conjunto tiene las siguientes propiedades:
1.- $(A')' = A$
2.- $\emptyset' = U$ y $U' = \emptyset$
3.- $A \cap A' = \emptyset$ y $A \cup A' = U$
4.- $A \subset B$ si y solo si $B' \subset A'$
5.- $(A \cup B)' = A' \cap B'$ y $(A \cap B)' = A' \cup B'$ leyes de Morgan.

DEMOSTRACION DE 4

"$\Rightarrow$".) Supongamos que $A \subset B$. Sea $x \in B'$, ie, $x \notin B$, como $A \subset B$, entonces $x \notin A$ de donde, $x \in A'$. Por lo tanto $B' \subset A'$.
"$\Leftarrow$".) Supongamos que $B' \subset A'$. Sea $y \in A$, ie, $y \notin A'$, como $B' \subset A'$, entonces, $y \notin B'$, de donde, $y \in B$. Por lo tanto $A \subset B$.

Observemos que:
$A \setminus B = \{ x \in A \ / \ x \notin B\} = \{ x \in A \ / \ x \in B'\} = A \cap B'$
Además $A \subset B$ si y solo si $A \setminus B = \emptyset$.

AXIOMA 6 (DE LAS POTENCIAS)

Para todo conjunto A existe un conjunto X que tiene, como elementos a los subconjuntos de A.

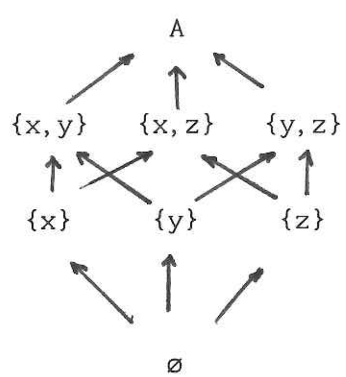
DEFINICION

$X = \mathcal{P}(A) = \{ a \ / \ a \subseteq A\}$
Llamaremos a $\mathcal{P}(A)$ **la potencia de A**.

EJEMPLOS

1.- Si $A = \emptyset$ entonces $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(\emptyset) = \{ \emptyset \}$.
2.- Si $A = \{ x\}$ entonces $\mathcal{P}(A) = \{ \emptyset, A\}$.
3.- Si $A = \{ x, y\}$ entonces $\mathcal{P}(A) = \{ \emptyset, \{x\}, \{y\}, A\}$.
4.- Si $A = \{ x, y, z\}$ entonces $\mathcal{P}(A) = \{ \emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{ x, y\}, \{ x, z\}, \{ y, z\}, A\}$

REPRESENTACION DE $\mathcal{P}(A)$ MEDIANTE UN DIAGRAMA



PROPIEDADES

1.- $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F) = \mathcal{P}(E \cap F)$

2.- $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) \subset \mathcal{P}(E \cup F)$

DEMOSTRACION

1.- $A \in \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F) \Leftrightarrow A \in \mathcal{P}(E)$ y $A \in \mathcal{P}(F) \Leftrightarrow A \subset E$ y $A \subset F \Leftrightarrow$ $A \subset E \cap F \Leftrightarrow A \in \mathcal{P}(E \cap F)$.

Veamos a través de un ejemplo que en 2 no se tiene la igualdad:
Sea $E = \{1, 2\}$ y $F = \{a, b, c\}$
$E \cup F = \{1, 2, a, b, c\}$
entonces $\{1, a\} \in \mathcal{P}(E \cup F)$ pero $\{1, a\} \notin \mathcal{P}(E)$ y $\{1, a\} \notin \mathcal{P}(F)$.

PAREJAS ORDENADAS

$\{a\}$ es el **conjunto singular** que sólo tiene a **a** por elemento.
Observese que $\{a, a\} = \{a\}$.
Además, $\{a\} \subset \{a, b\}$

DEFINICION

La **pareja ordenada** con primera coordenada a y segunda coordenada b es el conjunto definido de la forma:

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

Observese que si $a = b$ entonces:
$(a, a) = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}$
es un conjunto singular.

Sean (a, b) y (x, y) dos parejas. Demostraremos que $(a, b) = (x, y)$ si y sólo si $a = x$ y $b = y$.

i.) Si $a = b$ entonces $(a, a) = (x, y)$ si y sólo si $\{\{a\}\} = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ pero el segundo miembro de la igualdad es un conjunto singular, por lo tanto $\{x\} = \{x, y\}$, ie, $x = y$

en este caso tendremos:

$\{\{ a \}\} = \{\{x\}, \{x, x\}\} = \{\{x\}, \{x\}\} = \{\{x\}\}$ lo cual implica que $y = x = a$, ie,

$$(a, a) = (x, x) \text{ si y sólo si } a = x$$

ii.) Supongamos que $a \neq b$ y que $(a, b) = (x, y)$. En este caso $\{ a \} = \{ x \}$ porque si $\{ a \} = \{ x, y\}$ tendríamos que $\{ x, y\}$ sería un conjunto singular y en este caso $\{ a, b\}$ también sería singular, ie, $a = b$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\{ a \} = \{ x \}$ ie., $a = x$ y $\{ a, b \} = \{ x, y \}$, ie, $b \in \{ x, y \}$. Como $x = a \neq b$ entonces $b = y$. Por lo tanto:

$$(a, b) = (x, y) \text{ si y solo si } a = x \text{ y } b = y$$

Sean A y B conjuntos. Si $a \in A$ y $b \in B$ entonces $\{ a \} \subset A$ y $\{b\} \in B$ y $\{ a, b\} \subset A \cup B$.

Por lo tanto $\{ a \} \in \mathcal{P} (A \cup B)$y $\{a, b\} \in \mathcal{P} (A \cup B)$ y $(a, b) = \{\{ a \}, \{ a, b \}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$

NOTA

Menciona Paul R. Halmos en su libro TEORIA INTUITIVA DE CONJUNTOS (Editorial CECSA) que algunos eruditos pensaban que la teoría de conjuntos era una enfermedad de la cual era deseable que las matemáticas se recobrasen pronto. Por ello algunas consideraciones fueron llamadas patológicas. La definición $(a, b) := \{ a, \{a, b\}\}$ entra dentro de esta clase.

Sea $A \times B := \{ x \,/\, x = (a, b) \text{ para alguna } a \in A, b \in B\}$ el conjunto que reúne a todas estas parejas ordenadas. A este conjunto lo llamaremos **el producto cartesiano de A y B**.

Si A, B y C son conjuntos, para cada $a \in A$, $b \in B$ y $c \in C$ podemos definir, de manera análoga:

$$(a, b, c) := \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\} \qquad (*)$$

y denotamos al conjunto de ternas $A \times B \times C$.

Si A es un conjunto, entonces $A^n = A \times A \times A \ldots \times A$ n veces

denota al conjunto de n - adas (a_1, a_2,..., a_n) es una generalización de (*).
Ejemplos de conjuntos de este tipo son $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$,..., $\mathbb{R}^n$.

EJEMPLOS

1.- Sea $A = \{ 1, 2, 3 \}$ y $B = \{ a, b \}$ entonces
$A \times B = \{ (1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$

2.- Si $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$ entonces $A \times B = \emptyset$.

PROPIEDADES

1.- $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

2.- $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

3.- $(A \cap B) \times (X \cap Y) = (A \times X) \cap (B \times Y)$

4.- $(A \setminus B) \times X = (A \times X) \setminus (B \times X)$.

El siguiente axioma es útil para demostrar que existen conjuntos infinitos y se utiliza en una de las construcciones de los números naturales.

AXIOMA 7 (AXIOMA DEL INFINITO)

Existe un conjunto W tal que
i.) $\emptyset \in W$
ii.) Si $w \in W$ entonces $w \cup \{ w \} \in W$

Observemos que si $\emptyset \in W$ entonces $\emptyset \cup \{ \emptyset \} = \{ \emptyset \} \in W$.
Como $\{ \emptyset \} \in W$ entonces $\{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{ \emptyset, \{ \emptyset \}\} \in W$, etc.

AXIOMA 8 (AXIOMA DE ELECCION)

Sea $\mathscr{C}$ una colección distinta del vacío de conjuntos diferentes del vacío. En cada conjunto $A \in \mathscr{C}$ podemos elegir un elemento $f_A \in A$.

Estos ocho axiomas fueron dados por primera vez por Zermelo y permiten construir toda la matemática a través de la teoría de conjuntos, es decir, todas las definiciones, proposiciones y teoremas se dan partiendo únicamente de conjuntos.
De estos axiomas el ocho es el más profundo y el que más controversias ha suscitado y resulta equivalente a otros axiomas ampliamente utilizados en la matemática.
Estos axiomas evitan dificultades como la paradoja de Rusell y no se han encontrado contradicciones en su uso.
Sin embargo K. Gödel demostró que no se puede demostrar que no conducen a contradicciones y que es imposible demostrar que ciertas afirmaciones son verdaderas o falsas.

EJERCICIOS

1. - Diga cuáles de las siguientes expresiones son correctas y cuáles son falsa. Si la expresión es falsa, explique porqué.

a.- $A \supset \emptyset$ b.- $5 = \{ 5 \}$

c.- $\{ \} \in \{ \emptyset \}$ d.- $\emptyset \subset \{ \}$

e.- $3 \in \{ 3, 5 \}$ f.- $\{ 3 \} \in \{ 3, 5\}$

g.- $\{ 4, 8, 2^3, 3 \} = \{(-2)^4, 8, 3 \}$

h.- $\{ a, b, c \} = \{ c, b, d, a \}$

i.- $A \supset U$ j.- $0 \in \emptyset$

k.- $4 \in \{\{1, 4\}, \{2, 4\}\}$ l.- $\{ 2, 4 \} = \{\{ 2 \}, \{ 4\}\}$

m.- $\{ \emptyset, 0, 1 \} = \{ \emptyset, 1 \}$ n.- $\{ \emptyset \} = \{ 0 \}$

o.- $\{ x \in \mathbb{N} / x < 3 \} = \{ 2, 1\}$

p.- $\{ x \in \mathbb{N} / 1 < x < 2 \} = \{ 0 \}$

2.- Indique las relaciones de inclusión que existen entre los siguientes conjuntos:

$\mathbb{N}$ $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$

$A = \{ x \in \mathbb{Z} / x \text{ es par}\}$

$B = \{ n \in \mathbb{R} \ / \ n = m^2 \quad m \in \mathbb{Z} \}$

$C = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ x = y^2 \quad y \in \mathbb{Q} \}$

$D = \{ x \in \mathbb{N} \ / \ x = y^2 - n \quad y \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{Z} \}$

3.- Sea $U = \mathbb{N}$ $\quad A = \{ n \in \mathbb{N} \ / \ n \text{ es par}\}$ $\quad B = \{ n \in \mathbb{N} \ / \ n < 10 \}$

Determine los siguientes conjuntos:

a.- $A \cap B$ b.- $A \cup B$

c.- $A' \cup B'$ d.- $A' \cap B$

e.- $(A \cap B)'$ f.- $A \setminus B$

4.- Sea $U = \mathbb{R}^2 = \{ (x, y) \ / \ x, y \in \mathbb{R} \}$

$A = \{(x, y) \ / \ y - x^2 \geq 0\}$ $\quad B = \{(x, y) \ / \ y + x - 1 \leq 0\}$

Determine los conjuntos:

a.- $A \cap B$ b.- $B \setminus A$

c.- $A \setminus B$ d. - $A \cup B$

5.- Determine cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas. Si solo un lado de una doble implicación es cierta, decir en que sentido sí lo es. Justifique sus respuestas haciendo demostraciones en los casos en que se pueda y dando contraejemplos en los casos necesarios.

Sean A, B y C conjuntos

a.- $C \subset A$ o $C \subset B$ si y solo si $C \subset A \cup B$

b.- Si $A \cap B \subset C$ entonces $A \subset C$ y $B \subset C$

c.- $A \setminus (B \setminus A) = A \setminus B$

d.- $A \setminus (A \setminus B) = B$

e.- $A \subset B'$ si y solo si $A' \subset B$

f.- $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$

g.- $(A \cap B) \cup (A \setminus B) = A$

h.- $A \subset C$ y $B \subset D$ si y solo si $A \times B \subset C \times D$

i.- $C \subset A$ o $C \subset B$ si y solo si $A \cap B \supset C$

j.- Si $A \cup B \subset C$ entonces $A \subset C$ o $B \subset C$

k.- $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$

l.- $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$

m.- $(A \times B) \setminus (C \times D) = (A \setminus C) \times (B \setminus D)$

6.- Sean A, B y C conjuntos. Demuestre que:

a.- $A \cup (A' \cap B) = A \cup B$

b.- $A \cap (A' \cup B) = A \cap B$

c.- $A \cup [B \cap (A \cup C)] = A \cup (B \cap C)$

d.- $A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$

e.- $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A) = (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)$

f.- $A = (A \cap B') \cup (A \cap B)$

g.- $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$

h.- $(A \setminus B) \setminus (A \setminus C) = A \cap (C \setminus B)$

i.- $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$

j.- $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \setminus B$

k.- $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$

l.- $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$

m.- $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$

n.- $A' \setminus B' = B \setminus A$

7.- Sea X un conjunto tal que $A \subset X$ y $B \subset X$

i. Demuestre que si $A \cup B = X$ entonces $A' \subset B$

ii. Demuestre que si $A \cap B = \varnothing$ entonces $B \subset A'$

iii. Utilizando los incisos anteriores demuestre que $B = A'$ si y solo si $A \cup B = X$ y $A \cap B = \varnothing$.

8.- Demuestre que si $A \subseteq C$ entonces $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$
¿Será cierto este resultado si se suprime la hipótesis $A \subseteq C$?
Demuestre que $A \subseteq C$ si y solo si $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$.

9.- Sean A y B conjuntos. Se define $A \oplus B := (A \cap B') \cup (A' \cap B)$
Demuestre:

a.- $A \oplus A = \varnothing$

b.- $A \oplus \varnothing = A$

c.- $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$

d.- $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$

e.- Si $A \oplus B = A \oplus C$ entonces $B = C$

A $\oplus$ se le llama la *diferencia simétrica*: $A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

10.- Demuestre

a.- $\{ a \} = \{ b, c\}$ si y solo si $a = b = c$

b.- $\{ \{a\}, \{a,b\}\} = \{\{c\}, \{c,d\}\}$ si y solo si $a = c$ y $b = d$

c.- $A \subset \{ A \}$ si y solo si $A = \varnothing$

d.- $A \times B = \emptyset$ si y solo si $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$

e.- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

f.- Si $A \subset B$ entonces $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$

g.- $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

11.- Diga cuáles de los siguientes conjuntos son finito e indique su cardinalidad:

a.- $\{ n \in \mathbb{N} / n < 100 \}$

b.- $\{ n \in \mathbb{N} / n \leq 36 \}$

c.- $\{ n^2 \in \mathbb{N} / n \in \mathbb{N}$ y $n^2 \leq 36 \}$

d.- $\{ n \in \mathbb{N} / n^3 \leq 36 \}$

e.- $\{ n \in \mathbb{Z} / n < 5 \}$

f.- $\{ n \in \mathbb{N} / n^2 - 3 = 0\}$

f.- $\{ (x, y, z) / x \in \{0, 1, 2\}, \ y \in \{3, 4\}, \ z \in \{ 0, 2, 4\}\}$

g.- $\{ (x, y) / x \in \{0, 1, 2\}, \ y \in \mathbb{N} \}$

h.- $\{ x \in \mathbb{Q} / 0 < x < 1 \}$

BIBLIOGRAFIA

Amor, J.A. 19-- . Conceptos y resultados básicos de Teoria de conjuntos. Publicaciones Internas, Facultad de Ciencias, UNAM. 1993.

Dauben J., 1990. *GEORGE CANTOR, His Mathematics and Philosophy of the Infinite.* Princeton University Press.

Enderton, H. *Elements of Set Theory.* Academic Press. 1977

Halmos P., 1965. *Teoria Intuitiva de Los Conjuntos.* CECSA.

Kline, M. 1972. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.* Oxford University Press.

Rowe D. y McCleary J.-1989. *The History of Modern Mathematics. Vol 1.* Academic Press.