#102

SERIE COMPUTACIÓN

Elisa Viso G.

Relaciones

AÑO
2004

VÍNCULOS MATEMÁTICOS

FACULTAD DE CIENCIAS
VÍNCULOS MATEMÁTICOS

RELACIONES

Elisa Viso G.*

VÍNCULOS MATEMÁTICOS No. 102, 2013

(*) Profesora del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM
Impreso en la Coordinación de Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM

Relaciones

Elisa Viso G.
Facultad de Ciencias, UNAM

Índice general

Relaciones

Uno de los principales objetivos de la matemática discreta es atacar problemas donde podemos contar (o enumerar) sus soluciones (en muchas ocasiones, simplemente saber el número de soluciones posibles es ***la solución*** al problema planteado). Para considerar todas las soluciones posibles a un problema dado puede ser conveniente el uso de conjuntos. En otros casos nos interesa cómo se asocian entre sí los elementos de estos conjuntos. Para ello son útiles las nociones matemáticas de *función* y *relación*[1].

El mundo de las ciencias de la computación abunda en relaciones útiles, incluyendo aquellas que vienen de matemáticas entre los números enteros, entre lenguajes de programación y los programas escritos en éstos, individuos y la información que tenemos sobre ellos, conjuntos formados con elementos relacionados entre sí, y así sucesivamente.

En este capítulo estudiaremos dos relaciones importantes, las relaciones de equivalencia y las relaciones de orden. Empezaremos por definir lo que es una relación.

1.1. Producto cartesiano

Si A y B son conjuntos cualesquiera, el *producto cartesiano* de estos conjuntos –denotado por $A \times B$– consiste del conjunto de todas las parejas ordenadas (a, b), tales que $a \in A$ y $b \in B$.

Ejemplo 1.1. Si $A = \{0, 5, 2, 8\}$ y $B = \{1, 3, 4, 7\}$, entonces

$$\begin{aligned} A \times B = \{&(0,1),(0,3),(0,4),(0,7),(5,1),(5,3),(5,4),(5,7),\\ &(2,1),(2,3),(2,4),(2,7),(8,1),(8,3),(8,4),(8,7)\} \end{aligned}$$

[1]Usaremos el término *relación* de manera informal, con su significado usual, hasta que lo definamos matemáticamente.

Ejemplo 1.2. Si A consiste de todos los números naturales, podemos pensar en el producto cartesiano de los naturales consigo mismos:

$$A \times A = \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(1,3),\\ (2,3),(3,1),(3,2)(3,3),(1,4),\ldots\\ \}$$

En este caso, como $\mathbb{N}$ es un conjunto infinito, el producto cartesiano también es infinito. Para describirlo usamos la siguiente notación:

$$A = \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(a,b); a,b \in \mathbb{N}\}$$

Ejemplo 1.3. Si pensamos en parejas formadas por los invitados a una fiesta, donde ponemos en un conjunto a los hombres y en otro a las mujeres:

$$H = \{Juan, Pedro, Mario, Arturo\} \qquad M = \{Ana, Rosa, Margarita\}$$

Las posibles parejas de hombre y mujer que pueden bailar en la fiesta corresponden al producto cartesiano $H \times M$ y son:

$$H \times M = \{(Juan, Ana),(Juan, Rosa),(Juan, Margarita),\\ (Pedro, Ana),(Pedro, Rosa),(Pedro, Margarita),\\ (Mario, Ana),(Mario, Rosa),(Mario, Margarita),\\ (Arturo, Ana),(Arturo, Rosa),(Arturo, Margarita)\\ \}$$

El orden en cada pareja es particularmente importante cuando los conjuntos sobre los que se toma el producto cartesiano no son iguales o no se repite el mismo conjunto, pues el primer elemento de la pareja es de un conjunto y el segundo de otro, o juegan un distinto papel.

Podemos extender el producto cartesiano a tres conjuntos. A cada elemento de este producto cartesiano le llamamos *tripleta* en lugar de pareja.

Ejemplo 1.4. Queremos organizar una competencia entre equipos que tengan dos adultos y un niño (identificaremos a cada uno por su inicial). Tenemos el conjunto de los adultos y el conjunto de los niños:

$$A = \{M, J, P, A\}, \qquad N = \{M, J, P\}$$

Los equipos estarán formados por un adulto, que será el capitán, otro adulto, que será el suplente, y un niño; los equipos serán tomados del producto cartesiano $A \times A \times N$ –ignoraremos por el momento el problema de tener dos veces al mismo adulto–. Nuevamente, el orden en que aparecen los jugadores dentro del equipo es importante, pues de eso depende el papel que van a tomar dentro del mismo y de cuál de los conjuntos provienen. El número inicial de equipos es 48, que resulta de asociar a cada adulto con cada uno de los elementos del conjunto de adultos ($4 \times 4 = 16$ parejas) y a cada una de estas parejas con cada uno de los niños ($16 \times 3 = 48$ equipos).

$$\begin{aligned} Equipos = A \times A \times N = \{ & (M,M,M),(M,J,M),(M,P,M),(M,A,M),\\ & (J,M,M),(J,J,M),(J,P,M),(J,A,M),\\ & (P,M,M),(P,J,M),(P,P,M),(P,A,M),\\ & (A,M,M),(A,J,M),(A,P,M),(A,A,M),\\ & (M,M,J),(M,J,J),(M,P,J),(M,A,J),\\ & (J,M,J),(J,J,J),(J,P,J),(J,A,J),\\ & (P,M,J),(P,J,J),(P,P,J),(P,A,J),\\ & (A,M,J),(A,J,J),(A,P,J),(A,A,J),\\ & (M,M,P),(M,J,P),(M,P,P),(M,A,P),\\ & (J,M,P),(J,J,P),(J,P,P),(J,A,P),\\ & (P,M,P),(P,J,P),(P,P,P),(P,A,P),\\ & (A,M,P),(A,J,P),(A,P,P),(A,A,P) \} \end{aligned}$$

Hay varias tripletas que no son válidas, ya que el mismo adulto aparece como capitán y suplente. Si ponemos restricciones a cómo se forman las parejas de adultos, entonces no tenemos al producto cartesiano como relación, sino a un subconjunto de éste. Por eso decimos que una relación es un subconjunto del producto cartesiano. Si usamos el criterio de que un mismo adulto sólo puede aparecer una vez, tendremos a cada adulto formando pareja con los tres restantes ($4 \times 3 = 12$ parejas, ya que eliminamos a las cuatro parejas formadas con el mismo adulto) y a cada una de estas parejas con cada uno de los niños ($12 \times 3 = 36$ equipos), por lo que del conjunto anterior de equipos eliminamos 12 tripletas, que es la cuarta parte de las originales.

Ejemplo 1.5. Supongamos ahora que tenemos un conjunto formado con las asignaturas obligatorias de la licenciatura en Matemáticas (M) y definimos una relación $S \subseteq M \times M$, donde $(m_1, m_2) \in S$ si la asignatura m_1 es prerrequisito directo para la asignatura m_2. En este contexto no es válido que tanto (m_1, m_2) como (m_2, m_1) estén en S –¿ven por qué?–. Podemos tener a una asignatura m_1 relacionada con dos o más materias distintas, o a varias materias distintas relacionadas con una misma asignatura m_2.

Por ejemplo, Álgebra Superior I ($AS1$) es prerrequisito de Cálculo Diferencial e Integral II ($CDI2$) y de Álgebra Superior II ($AS2$), pero también Cálculo Diferencial e Integral I ($CDI1$) y Geometría Analítica I ($GA1$) son prerrequisitos para Cálculo Diferencial e Integral II. De lo anterior tenemos las siguientes parejas que pertenecen a la relación S:

$$S \supseteq \{ (AS1, AS2), (AS1, CDI2), (CDI1, CDI2), (GA1, CDI2)\}$$

Podemos generalizar el producto cartesiano a que sean n–adas (*eneadas*) ordenadas donde el i-ésimo elemento pertenece al i-ésimo conjunto:

$$C = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n); a_i \in A_i\}$$

De los ejemplos anteriores debe quedar claro que los conjuntos A_i pueden o no ser distintos entre sí. Si $n = 2$ los elementos del producto cartesiano son parejas; con $n = 3$ los elementos son tripletas (o triples); y así sucesivamente, usando el término genérico de *eneadas* para el producto cartesiano de n conjuntos.

Definición 1.1. Una *relación* es un conjunto que es subconjunto del producto cartesiano. Una relación es un conjunto de n-adas ordenadas en la que cada n-eada cumple con una cierta propiedad que define a la relación y que posee cada uno de los miembros de la misma.

Definición 1.2. Decimos que un a relación es *binaria* si es subconjunto del producto cartesiano de *dos* conjuntos; es *terciaria* si es subconjunto del producto cartesiano de tres conjuntos; en general, es n-*aria* si es subconjunto del producto cartesiano de n conjuntos.

Ejemplo 1.6. En el ejemplo 5 no podemos pensar en n-adas para definir que cada materia está relacionadas con todas aquellas para las que es prerrequisito, porque como este número no es el mismo para todas las asignaturas, no tendríamos la misma n para todas las n-adas. Sin embargo, podemos elegir todas las parejas que tengan a un mismo primer elemento (todas las parejas que tengan a esa asignatura como prerrequisito) o todas las parejas que tengan a un mismo segundo elemento (todas aquellas asignaturas que sean prerrequisito de la asignatura dada). Podemos denotarlo así:

$$PCDI2 \subseteq S = \{(m, CDI2) \in S\} = \{(AS1, CDI2), (CDI1, CDI2), (GA1, CDI2)\}$$

Ejemplo 1.7. Denotemos a $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $R = \{(a, b); a < b\}$. Esta relación consiste de todas las parejas de enteros en los que el primer elemento es menor que el segundo. No todos los elementos del producto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ están en la relación.

Ejemplo 1.8. El conjunto A consiste de todos aquellos individuos que tienen López como primer o segundo apellido. Consideremos $F \subseteq A \times A$, $F = \{(p, h); p \text{ es padre de } h\}$. En esta relación, si $(Juan, Pedro) \in F$, entonces $(Pedro, Juan) \notin F$. Es claro que $R \subset A \times A$.

Ejemplo 1.9. Consideremos el producto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y la relación $suma \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $suma = \{(r, s, t); r + s = t\}$. Algunas de las tripletas que están en $suma$ son (1,2,3), (4,2,6), (2,4,6), (10,10,20). La segunda y tercera tripleta son distintas, pues en el caso de relaciones (y del producto cartesiano) el orden es importante.

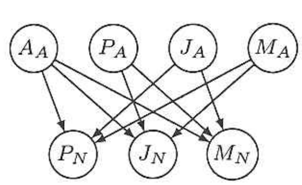
Una relación binaria se puede representar como lo hemos hecho hasta ahora, con la notación usual de conjuntos, ya sea listando todos sus elementos –esto es posible sólo en los conjuntos finitos–, indicando con puntos sucesivos a un conjunto infinito cuyos elementos siguen el patrón dado o describiendo la propiedad que deben cumplir; sin embargo, esta notación es poco operativa cuando queremos manipular de alguna manera a la relación. Tenemos otras opciones para el caso en que los conjuntos en los que se define la relación sean finitos. La primera de ellas es una tabla con un renglón para cada elemento de A_1 y una columna para cada elemento de A_2. Se marcan aquellos elementos que estén en la relación (con una cruz, un 1 o con el valor booleano *verdadero*). En el caso de conjuntos infinitos, la tabla se puede dejar indicada.

Ejemplo 1.10. Usemos los conjuntos A y N del ejemplo (4). Queremos formar las parejas posibles donde el primer elemento de la pareja es un adulto y el segundo un niño. La relación está definida por aquellas parejas cuyos elementos tengan distinto nombre. La tabla se muestra a continuación:

Adultos↓Ñiños→	M	J	P
M		×	×
J	×		×
P	×	×	
A	×	×	×

Otra forma de representar relaciones es mediante una gráfica dirigida. La definición de una *gráfica dirigida* es $G = (V, A)$ donde V corresponde a vértices, nodos o puntos (elementos de un conjunto), y A corresponde a parejas ordenadas extraídas de $V \times V$ y que indican que el primer vértice está relacionado con el segundo de la pareja. En general se muestran visualmente como círculos o puntos representando a los elementos de V y si $(v_1, v_2) \in A$ tenemos una flecha que sale de v_1 y llega a v_2 –la forma particular de la flecha no importa, excepto que tiene que mostrar conexión y dirección–. En el caso de relaciones binarias $A \times B$, $V = A \bigcup B$ –cada elemento de cada uno de los conjuntos corresponde a un vértice de la gráfica– y cada arco, que es un elemento de $A \times B$ y corresponde a parejas de la forma (a, b) donde $a \in A$ y $b \in B$. Cuando la relación tiene alguna pareja (a, a), se dibuja un arco que sale y llega al mismo vértice, a lo que llamamos un *bucle*.

Ejemplo 1.11. La gráfica correspondiente al ejemplo (10) se muestra a continuación, donde indicamos con subíndice el conjunto al que pertenece cada elemento para distinguirlo del que se llama igual en el otro conjunto.



Adicionalmente, parecido a las tablas pero más manejables matemáticamente hablando, podemos representar a una relación con una matriz booleana: en cada posición (i, j) de la matriz se pone un 1 si los elementos a_i y a_j están en la relación y 0 si no. Al igual que en las tablas, los conjuntos infinitos pueden quedar indicados. Es importante mencionar que si el producto cartesiano corresponde a una relación binaria sobre el mismo conjunto, o si ambos conjuntos tienen el mismo número de elementos, estas matrices son cuadradas.

Ejemplo 1.12. La matriz booleana correspondiente al ejemplo 10 se encuentra a continuación:

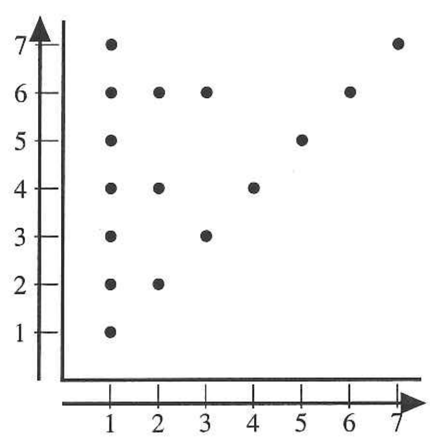
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} M & J & P \end{array} \\ \begin{array}{c} M \\ J \\ P \\ A \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

En lo que sigue hablaremos de relaciones binarias refiriéndonos a ellas simplemente como relaciones. Cuando la relación no sea binaria, haremos explícito el índice de la relación.

Diagramas de coordenadas

Cuando tenemos relaciones binarias entre conjuntos de números, particularmente $\mathbb{N}$ o $\mathbb{Z}^+$, podemos representar la relación como puntos en un plano, donde los ejes del plano están etiquetados a distancias constantes por los elementos del conjunto listados en un cierto orden.

Ejemplo 1.13. Supongamos tenemos el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y la relación $mult$ de $A \times A$ definida como $(a, b) \in mult$ si $b = k \times a$. Podemos representar esta relación con un plano cuyos ejes están etiquetados con los enteros $1, 2, \ldots, 7$ y los que están relacionados entre sí se representan con un punto en las coordenadas (a, b):



Este tipo de diagramas se puede aplicar, en general, siempre que podamos dar un orden a cada uno de los conjuntos de la relación, para que uno se coloque en el eje horizontal y el otro en el eje vertical.

Tenemos dos relaciones especiales, la relación *identidad* y la relación *universal* definidas sobre A, un conjunto cualquiera (finito):

Definición 1.3. La *relación identidad* sobre un conjunto A, denotada por I_A, es la relación de igualdad definida por $I_A = \{(a, b) \; ; \; a, b \in A, a = b\}$, es decir, todo elemento está relacionado consigo mismo nada más.

La matriz definida para I_A es la que tiene 1 en la diagonal y 0 en el resto de las posiciones, mientras que la gráfica dirigida correspondiente a esta relación tiene tantos vértices como elementos hay en el conjunto y cada vértice tiene un bucle, pero no hay arcos que no sean bucles.

Definición 1.4. La *relación universal* sobre un conjunto A, denotada por U_A, es la relación definida por $U_A = \{(a, b) \; ; \; \forall a, b \in A\}$. Esto es, cada elemento está relacionado con todos los demás, inclusive consigo mismo.

La matriz definida para U_A tiene únicamente 1 en todas las posiciones, mientras que la gráfica tiene un arco entre cualesquiera dos vértices, además de un bucle para cada vértice.

Ejercicios

1.1.1.- Para cada una de las relaciones que siguen, $R \subseteq A \times A$, dibuja

(a) el diagrama de coordenadas,
(b) la gráfica dirigida y
(c) la matriz booleana.

(a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $(a, b) \in R$ si y sólo si $a < b$.

(b) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $(a, b) \in R$ si y sólo si $a = b$.

(c) $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $(a, b) \in R$ si y sólo si a y b son ambas vocales o a y b son ambas consonantes.

(d) Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y consideremos $\wp(A) = \{\text{todos los subconjuntos de } A\}$. $(a, b) \in R$ si y sólo si $a \subseteq b$.

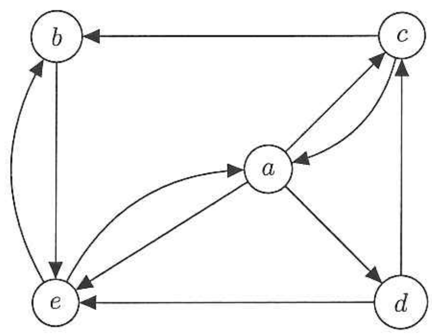
(e) $A = \{a, b, c, d\}$.
$R = \{(a, b), (a, c), (a, e), (b, a), (b, d), (c, b), (d, a), (d, d)\}$.

1.1.2.- Tenemos las siguientes matrices M_R y M_S que denotan a dos relaciones binarias R y S respectivamente:

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Enumera los elementos de R y S.
(b) Dibuja las gráficas dirigidas de R y S.

1.1.3.- Una relación R sobre el conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$ tiene la gráfica dirigida que se muestra a continuación:



(a) Lista los elementos de R.
(b) Escribe la matriz booleana de R.

1.1.4.- Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \wp(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$. Sea R una relación entre A y B, denotada por la siguiente matriz booleana:

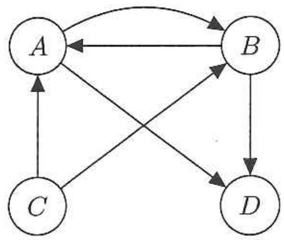
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lista los elementos de R, suponiendo que los renglones y las columnas están etiquetadas en el orden en que aparecen los elementos de A y B respectivamente.

1.1.5.- Tenemos cuatro equipos de fútbol, A, B, C, y D, que juegan cada uno contra los otro tres equipos dos partidos, uno en casa y otro en la casa del oponente. Una relación R en el conjunto $J = \{A, B, C, D\}$ está definida de la siguiente manera:

$$(X, Y) \in R \text{ si y sólo si } X \text{ le gana a } Y \text{ cuando } X \text{ juega en casa.}$$

El siguiente diagrama es la gráfica dirigida de R.



Lista los elementos de R y escribe su matriz booleana.

1.2. Relaciones en un conjunto

En general podemos hablar de relaciones **en** un conjunto, lo que quiere decir que tanto el primer como el segundo elemento de la pareja pertenecen al mismo conjunto, esto es, son subconjuntos del producto cartesiano de un conjunto consigo mismo.

Ejemplo 1.14. Si tomamos al producto cartesiano **en** los números enteros, podemos listar las siguientes relaciones:

$$
\begin{aligned}
R_1 &=\{(a,b)\,;\; a,b\in\mathbb{Z}, a<b\}\\
R_2 &=\{(a,b)\,;\; a,b\in\mathbb{Z}, a\leqslant b\}\\
R_3 &=\{(a,b)\,;\; a,b\in\mathbb{Z}, a=b\}\\
R_4 &=\{(a,b)\,;\; a,b\in\mathbb{Z}, a \bmod c = b \bmod c\}\\
R_5 &=\{(a,b)\,;\; a,b\in\mathbb{Z}, c>1, (a\div c)=(b\div c)<b\} \qquad \text{donde } \div \text{ es cociente entero}\\
R_6 &=\{(a,b)\,;\; a,b\in\mathbb{Z}, a \text{ divide a } b\ (a\,;\,b)\}\\
R_7 &=\{(a,b)\,;\; a,b\in\mathbb{Z}, a \text{ no es múltiplo de } b\}
\end{aligned}
$$

Daremos algunos ejemplos de parejas que se encuentran en las relaciones del ejemplo anterior; sin embargo, como todas estas relaciones son infinitas, no podremos más que dar una pequeña lista de ejemplos, terminando la descripción con puntos sucesivos indicando que siguen un número infinito de parejas que están en la relación definida.

Ejemplo 1.15. Volvemos a tomar el producto cartesiano de los números enteros y definimos las siguientes relaciones:

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \{\ \ldots(-1,0),(-2,-1),(-2,0),(1,2),(1,3),(1,4),\ldots,(2,3),(2,4),\ldots\}\\
R_2 &= R_1\cup\{(1,1),(2,2),(3,3),\ldots\}\\
R_3 &= \{\ (1,1),(2,2),(3,3),\ldots\}\\
R_4 &= \ \text{Si consideramos, por ejemplo, } c=5,\ \text{entonces}\\
&\quad \{\ (5,25),(7,12),(2,7),(127,20422),\ldots\}\\
R_5 &= \ \text{Si consideramos, por ejemplo, } c=3,\ \text{entonces}\\
&\quad \{(15,15),(15,16),(15,17),(9,9),(9,10),(9,11),\ldots\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_6 &= \{\ (2,2),(2,4),(2,6),\dots,(3,3),(3,6),(3,9),\dots\} \\
R_7 &= \{\ \text{Cualquier pareja donde } a < b \text{ cumple con esto}\} \\
&\quad \cup \overline{R_8} \text{ donde } R_8 = \{\ (a,b)\ ;\ a \text{ es múltiplo de } b\}
\end{aligned}
$$

1.2.1. Propiedades de relaciones

Consideremos a los siguientes conjuntos de parejas tomadas de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, pensando en ellas como relaciones (con un número finito de elementos):

$$
\begin{aligned}
R_1 =&\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,1),(4,4)\} \\
R_2 =&\{(1,1),(1,2),(2,1)\} \\
R_3 =&\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4)\} \\
R_4 =&\{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\} \\
R_5 =&\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\} \\
R_6 =&\{(3,4)\}
\end{aligned}
$$

Veamos ahora distintas propiedades que se puedan presentar; asimismo examinaremos los conjuntos dados arriba para ver cuáles de ellos cumplen cada una de las propiedades.

Reflexiva: $\forall a \in A,\ \big((a,a) \in R\big)$. Todo elemento está relacionado consigo mismo.

- R_1 no es reflexiva. $A = \{1,2,3,4\}$ y la pareja $(3,3) \notin R_1$, aunque $3 \in A$.
- Para R_2 tenemos $A = \{1,2\}$, pero $(2,2) \notin R_2$, por lo que tampoco es reflexiva.
- R_3 se define en $A = \{1,2,3,4\}$ y aunque no tiene todas las posibles parejas formadas con estos elementos, sí cumple con ser reflexiva, ya que las parejas $(1,1),(2,2),(3,3)$ y $(4,4)$ están en R_3.
- R_4 se define en $A = \{1,2,3,4\}$ pero no es reflexiva porque no contiene a ninguna pareja (a,a).
- R_5 está definida en $A = \{1,2,3,4\}$ y cumple con ser reflexiva.
- R_6 está definida en $A = \{3,4\}$ y no es reflexiva.

Simétrica: $(a,b) \in R \leftrightarrow (b,a) \in R$. Para toda pareja, su inverso está en la relación.

- R_1 no es simétrica pues está la pareja $(3,4)$ pero no la $(4,3)$.
- R_2 sí es simétrica, pues tenemos la pareja $(2,1)$ y $(1,2)$. La pareja $(1,1)$ es igual a su inverso, por lo con que su inverso esté en la relación.
- R_3 sí es simétrica pues para cada pareja (a,b) se encuentra en la relación la pareja (b,a) –$(1,4)$ y $(4,1)$; $(1,2)$ y $(2,1)$ y las parejas de la forma (a,a)–.
- R_4 no es simétrica. Es más, para ninguna pareja (a,b), (b,a) está en la relación.
- R_5 tampoco es simétrica y sucede lo mismo que en R_4.
- R_6 no es simétrica pues la pareja $(4,3) \notin R_6$.

Antisimétrica: $(a,b) \in R \bigwedge (b,a) \in R \rightarrow a = b$. Si ambas parejas (a,b) y (b,a) están en la relación es porque a y b son el mismo elemento.

- R_1 no es antisimétrica, pues para las parejas $(1,2)$ y $(2,1) \in R_1$ pero $2 \neq 1$.
- R_2 tampoco es antisimétrica por la misma razón que R_1.
- R_3 tampoco es antisimétrica por la misma razón que R_1.
- R_4 es antisimétrica *por vacuidad*. Como para ninguna pareja tenemos la simétrica y falso implica cualquier cosa, entonces R_4 es antisimétrica.
- R_5 es antisimétrica por la misma razón que R_4.
- R_6 es antisimétrica por la misma razón que R_4.

Transitiva: $(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \rightarrow (a,c) \in R$.

- R_1 no es transitiva. Tenemos a las parejas $(3,4)$ y $(4,1)$ y no a la pareja $(3,1)$, por ejemplo.
- R_2 no es transitiva, pues si tomamos a las parejas $(2,1)$ y $(1,2)$, la pareja $(2,2)$ que resulta de la transitividad, no está en la relación.
- R_3 es transitiva, pues para aquellas parejas (a,b) y (b,c), que cumplen con que el segundo elemento de la primera pareja sea igual al primero de la segunda, la pareja (a,c) está en la relación. Por ejemplo: $(1,4),(4,1)$ y $(1,1) \in R_3$; $(1,4),(4,4)$ y $(1,4) \in R_3$.
- R_4 es transitiva. Las parejas que podemos probar para la transitividad son aquellas donde el segundo elemento de la primera coincida con el primer elemento de la segunda. Por ejemplo, $(3,1)$ y $(1,2)$ y la pareja $(3,2) \in R_4$; $(3,2)$ y $(2,1)$ y tenemos a $(3,1) \in R_4$; $(4,3)$y $(3,2)$ y tenemos a $(4,2) \in R_4$. Dejamos como ejercicio verificar que se cumple para todas las posibles parejas con estas características en R_4.
- R_5 es transitiva. Dejamos como ejercicio corroborar esta afirmación.
- R_6 es transitiva, dado que sólo hay una pareja y se cumple por vacuidad.

1.2.2. Operaciones con relaciones binarias

Sean $R_1 \subseteq A \times B$, $R_1 = \{(a,b); P_1(a,b)\}$ y $R_2 \subseteq C \times D$, y $R_2 = \{(c,d); P_2(c,d)\}$.

Unión: Como en conjuntos, la unión de R_1 y R_2 está definida en $(A \times B) \bigcup (C \times D)$ y consiste de:

$$R_1 \bigcup R_2 = \{(x,y); (x,y) \in R_1 \bigvee (x,y) \in R_2\}$$

Intersección: Dado que las relaciones son conjuntos de parejas, en $R_1 \bigcap R_2$ estarán todas aquellas parejas que estén en ambas relaciones. Para facilitar las cosas y sin pérdida de generalidad podemos suponer que $R_1 \bigcap R_2$ está definida en $(A \times B) \bigcup (C \times D)$ y consiste de:

$$R_1 \bigcap R_2 = \{(x,y); (x,y) \in R_1 \bigwedge (x,y) \in R_2\}$$

Diferencia: $R_1 \backslash R_2$: quitamos de R_1 lo correspondiente a R_2. $R_1 \backslash R_2$ está definida en $(A \times B) \bigcup (C \times D)$ y consiste de:

$$R_1 \backslash R_2 = \{(x, y); (x, y) \in R_1 \wedge (x, y) \notin R_2\}$$

O exclusivo: $R_1 \oplus R_2$ (*exclusive or*) se define sobre $(A \times B) \bigcup (C \times D)$ y consiste de todas las parejas que están en alguna de las dos relaciones pero no en ambas:

$$R_1 \oplus R_2 = \{(x, y); ((x, y) \in R_1 \vee (x, y) \in R_2) \wedge \neg((x, y) \in R_1 \wedge (x, y) \in R_2))\}$$

Composición[2]**:** $R_1 \circ R_2$, dados $(a, b) \in R_1$ y $(b, c) \in R_2$, $(a, c) \in R_1 \circ R_2$. Está definida en $A \times B$.

$$R_1 \circ R_2 = \{(x, y); (x, z) \in R_1 \wedge (z, y) \in R_2\}$$

Potencia : Definimos la potencia de una relación de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} R^0 &= \varnothing \\ R^1 &= R \\ R^{n+1} &= R^n \circ R \end{aligned}$$

Esta definición recursiva indica que apliquemos la "composición" a los elementos de R^n con R para obtener la nueva relación.

Es importante notar que en todas estas operaciones nunca se afectan las relaciones originales sino que se produce una nueva relación, un nuevo conjunto de parejas, que puede o no coincidir con alguna de las relaciones originales. A este tipo de aplicación de operadores se le conoce como *funcional.*

Veamos algunos ejemplos con estas operaciones, aunque obviaremos las que corresponden a la unión e intersección, por comportarse éstas exactamente como lo hacen con conjuntos arbitrarios. Usaremos las relaciones que se encuentran en la sección 1.2.1, a menos que indiquemos explícitamente cuáles son las relaciones con las que se va a operar.

Ejemplo 1.16. Sean R_2 y R_3 los de la sección 1.2.1. Calcular $R_2 \oplus R_3$.

Solución: $R_2 \oplus R_3$ está definida en $(A \times B) \bigcup (C \times D)$ y consiste de todas las parejas de R_2 y todas las parejas de R_3, pero excluyendo aquellas que están en ambas:

$$\begin{aligned} R_2 \oplus R_3 = &\{\cancel{(1,1)}, \cancel{(1,2)}, \cancel{(2,1)}\} \oplus \\ &\oplus \{\cancel{(1,1)}, \cancel{(1,2)}, (1,4), \cancel{(2,1)}, (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\} \\ = &\{(1,4), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\} \end{aligned}$$

Ejemplo 1.17.

Sean $R_1 = \{(1,1), (1,4), (2,3), (3,1), (3,4)\}$ y $R_2 = \{(1,0), (2,0), (3,1), (3,2), (4,1)\}$. Calcular $R = R_1 \circ R_2$.

[2]Se parece a la transitividad, excepto que la composición es una operación que crea una nueva relación que contiene únicamente al resultado de la operación, mientras que la transitividad es una propiedad de los elementos de la relación. Ninguna de las dos altera las relaciones con las que trabaja.

Solución: Como dijimos antes, se trata de construir una nueva relación con aquellas parejas en las que coincida el segundo elemento de las parejas en R_1 con el primero en las parejas de R_2:

- Las parejas $(1,1) \in R_1, (1,0) \in R_2$, por lo que la pareja $(1,0) \in R_1 \circ R_2$. No hay ninguna otra pareja que tenga a 1 como primer elemento en R_2.
- La pareja $(1,4) \in R_1$ junto con la pareja $(4,1) \in R_2$ agregan a R la pareja $(1,1)$.
- La pareja $(2,3) \in R_1$ con las parejas $(3,1)$ y $(3,2) \in R_2$ agregan a R las parejas $(2,1)$ y $(2,2)$.
- La pareja $(3,1) \in R_1$ con la pareja $(1,0) \in R_2$ agrega a R la pareja $(3,0)$.
- La pareja $(3,4) \in R_1$ con la pareja $(4,1) \in R_2$ agregan a R la pareja $(3,1)$.
- Ya no hay mas parejas que agregar pues ya agotamos a R_1.

De esto, R queda como sigue:

$$R = R_1 \circ R_2 = \{(1,0),(1,1),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1)\}.$$

Ejemplo 1.18. Sea $R = \{(1,1),(2,1),(3,2),(4,3)\}$. Encontrar $R^2, R^3, \ldots$.

Solución :

$\boldsymbol{R^2}$: $R^2 = R \circ R = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,2)\}$.

$\boldsymbol{R^3}$: $R^3 = R^2 \circ R = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1)\}$.

$\boldsymbol{R^4}$: $R^4 = R^3 \circ R = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1)\}$.

Noten que en este punto, $R^3 = R^4$. A esto es a lo que llamamos un *punto fijo*; ya no tiene caso calcular $R^5, R^6, \ldots$, pues si $R^i = R^j, i \geqslant 3, j > i$, vamos a obtener el mismo resultado, pues ambos lados del operador son iguales.

Teorema 1.1 *R es transitiva si y sólo si $R^n \subseteq R$ para $n = 2, 3, \ldots$.*

Demostración.

⇒: Por demostrar: R es transitiva, entonces $R^n \subseteq R$ para $n = 2, 3, \ldots$.

Demostraremos este teorema por inducción sobre n.

Base $P(2)$:

Supongamos que R es transitiva. Esto quiere decir que para todo par de parejas (a,b) y $(b,c) \in R$ (que coinciden el segundo elemento de la primera y el primer elemento de la segunda), $(a,c) \in R$.

Al calcular $R \circ R$, agregamos a R^2 el elemento (a,c) cuando (a,b) y $(b,c) \in R$. Pero esta pareja ya está en R por ser esta relación transitiva, por lo que $R^2 \subseteq R$. R podría tener parejas "aisladas" que no presenten transitividad, pero estas parejas no están en R^2 por lo que $R^2 \subseteq R$.

H.I. Supongamos $R^n \subseteq R$.

P.I. Veamos qué pasa con $R^{n+1} = R^n \circ R$.

Como $R^n \subseteq R$ y por cómo se construye R^{n+1}, para toda pareja $(a,b) \in R^n$ y

$(b, c) \in R$, $(a, c) \in R^{n+1}$. Como $R^n \subseteq R$, las parejas tomadas de R^n están todas en R –lo mismo pasa, por supuesto, con las parejas tomadas de R–. Como R es transitiva, la pareja (a, c) también está en R.

$$\therefore \forall n \big(\text{Si } R \text{ es transitiva, entonces } R^{n+1} \subseteq R\big)$$

$\Leftarrow$: Supongamos ahora que $\forall n, R^n \subseteq R$. Por demostrar que entonces R es transitiva. Haremos la demostración por inducción en n.

Base: $P(2)$: si $R^2 \subseteq R$ entonces R es transitiva.
Como R^2 está definida como el conjunto de parejas (a, c) tales que (a, b) y $(b, c) \in R$, y como $R^2 \subseteq R$, tenemos que la pareja $(a, c) \in R$, por lo que R es transitiva.

H.I. $P(n)$: Si $R^n \subseteq R$ entonces R es transitiva.

P.I.: Veamos qué pasa si $R^{n+1} \subseteq R$. Como los elementos de R^{n+1} son parejas de la forma (a, c) donde $(a, b) \in R^n$ y $(b, c) \in R$; y como $R^{n+1} \subseteq R$, tenemos que $(a, c) \in R$. Además. como $R^n \subseteq R$ y R es transitiva, tenemos que tanto (a, b) como $(b, c) \in R$.

$$\therefore \forall n (\text{ Si } R^n \subseteq R, \text{ entonces } R \text{ es transitiva})$$

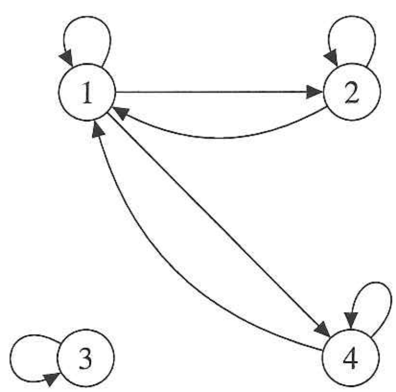
$\square$

También se puede determinar si una relación binaria cumple o no alguna de las propiedades observando su representación como gráfica dirigida o matriz booleana.

Reflexividad: En el caso de la gráfica dirigida, para que la relación sea reflexiva cada nodo debe tener un bucle. Por ejemplo, dada la gráfica para

$$R_3 = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\},$$

la gráfica queda como se muestra a continuación.



Dado que todos los elementos tienen bucle, sabemos que esta relación es reflexiva.

Para el caso de la matriz booleana, la relación es reflexiva si tiene unos en la diagonal.

La matriz correspondiente a la relación anterior la damos a continuación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como esta matriz tiene, en efecto, unos en la diagonal, la relación es reflexiva, como ya vimos con la gráfica.

Ejercicios

1.2.1.- Sea A el conjunto de todas las páginas web en existencia. Definimos las siguientes relaciones sobre A:

(a) aR_1b si todo el que ha visitado la página web a también ha visitado la página web b.

(b) aR_2b si existe una página web que contiene ligas (*link*) tanto a la página web a como a la página web b.

(c) aR_3b si no existe ninguna liga en común en las páginas web a y b.

(d) aR_4b si hay al menos una liga en común en la página web a y la página web b.

Determina, para cada una de estas relaciones, si cumplen o no con la propiedad de ser reflexiva, simétrica, antisimétrica y/o transitiva.

1.2.2.- Sea A el conjunto de todas las personas. Definimos las siguientes relaciones sobre A:

(a) aRb si a es más alto que b.

(b) aRb si a y b nacieron el mismo día.

(c) aRb si a y b se llaman igual.

(d) aRb si a y b tienen un abuelo en común.

Determina, para cada una de estas relaciones, si cumplen o no con la propiedad de ser reflexiva, simétrica, antisimétrica y/o transitiva.

1.2.3.- Para las siguientes relaciones, argumenta si cumplen o no con las propiedades de reflexividad, simetría, antisimetría y transitividad.

(a) Sea R una relación definida en los números reales

$$xRy \qquad \text{si y sólo si } x \leqslant y.$$

(b) Sean $A = \{a, b, c, d\}$ y
$R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (d, d)\}$.

(c) Sea $A = \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ y R la relación definida por
$(a, b)\, R\, (c, d)$ si y sólo si $a + d = b + c$

(d) Sea $B = \{falso, verdadero\}$ y $A = B \times B$. Sean $a\, R\, b$ si y sólo si $(a \rightarrow b) \bigwedge (a \rightarrow \neg b)$ es verdadero.

1.2.4.- Dadas las siguientes relaciones:

(a) $R_1 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (d, d)\}$, con $A = \{a, b, c, d\}$ y $R \subseteq A \times A$..

(b) $R_2 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4)\}$, con $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $R \subseteq A \times A$.

(c) $R_3 = \{(2, 4), (3, 9), (4, 16), (4, 2), (9, 3), (16, 4)\}$, con $A = \{1, 2, 3, 4, 9, 16\}$ y $R \subseteq A \times A$.

(d) $R_4 = \{(a, b), (b, d), (c, f), (d, h), (a, a), (c, c), (b, a)\}$, con $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ y $R \subseteq A \times A$.

Da el resultado de las siguientes operaciones entre ellas:

(a) $R_1 \bigcap R_4$
(b) $R_2 \backslash R_3$
(c) $R_1 \oplus R_4$
(d) $R_1 \circ R_4$
(e) R_2^3

1.2.5.- ¿Puede una relación en un conjunto no ser ni reflexiva n i antirreflexiva? Justifica.

1.2.6.- Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y R la relación que contiene a las parejas $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(3, 1)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$, $(4, 2)$, $(4, 5)$, $(5, 1)$, $(5, 2)$ y $(5, 4)$.

Encuentra: (a) R^2. (b) R^3. (c) R^4. (d) R^5.

1.2.7.- Tenemos las siguientes relaciones sobre los números reales:

(a) $R_1 = \{(a, b)\,;\, a > b\}$.
(b) $R_2 = \{(a, b)\,;\, a \geqslant b\}$.
(c) $R_3 = \{(a, b)\,;\, a < b\}$.
(d) $R_4 = \{(a, b)\,;\, a \leqslant b\}$.
(e) $R_5 = \{(a, b)\,;\, a = b\}$.
(f) $R_6 = \{(a, b)\,;\, a! = b\}$.

Encuentra:

(a) $R_1 \bigcup R_3$.
(b) $R_1 \bigcup R_5$.
(c) $R_3 \bigcup R_4$.
(d) $R_3 \bigcup R_6$.
(e) $R_2 \bigcap R_4$.
(f) $R_3 \bigcap R_5$.
(g) $R_3 \bigcap R_6$.
(h) $R_4 \bigcap R_6$.

1.2.8.- Con las relaciones del ejercicio 1.2.7, encuentra:

(a) $R_1 \backslash R_2$.
(b) $R_2 \backslash R_1$.
(c) $R_3 \backslash R_6$.
(d) $R_6 \backslash R_3$.
(e) $R_1 \oplus R_3$.
(f) $R_2 \oplus R_4$.
(g) $R_2 \oplus R_6$.
(h) $R_3 \oplus R_5$.

1.2.9.- Con las relaciones del ejercicio 1.2.7, encuentra:

(a) $R_1 \circ R_1$.
(b) $R_1 \circ R_3$.
(c) $R_1 \circ R_5$.
(d) $R_2 \circ R_3$.
(e) $R_2 \circ R_1$.
(f) $R_3 \circ R_5$.
(g) $R_5 \circ R_3$.
(h) $R_4 \circ R_6$.

1.2.10.- Sea $A = \mathbb{N}$ y aR_1b si a divide a b (esto es, al dividir b entre a el residuo es cero) y aR_2b si a es múltiplo de b (esto es, al dividir a entre b el residuo es cero). Encuentra:

(a) $R_1 \bigcup R_2$.
(b) $R_1 \backslash R_2$.
(c) $R_1 \oplus R_2$.
(d) $R_1 \bigcap R_2$.
(e) $R_2 \backslash R_1$.

1.2.11.- Lista las 16 relaciones binarias diferentes sobre el conjunto $\{f, t\}$.

1.2.12.- ¿Cuáles de las 16 relaciones binarias diferentes sobre el conjunto $\{f, t\}$ contienen a (f, t)?

1.2.13.- Sea $A = \{a, b, c, d\}$.

(a) ¿Cuántas relaciones diferentes hay sobre A?
(b) ¿Cuántas de esas relaciones contienen a (a, a).
(c) ¿Cuáles de ellas son reflexivas?
(d) ¿Cuáles de ellas son simétricas?
(e) ¿Cuáles de ellas son antisimétricas?
(f) ¿Cuáles de ellas son transitivas?

1.2.14.- Sea R una relación reflexiva sobre un conjunto A. Muestra que R^n es reflexiva para toda $n \in \mathbb{N}$.

1.2.15.- Supone que la relación R sobre un conjunto A no es reflexiva. ¿Qué puedes decir respecto a si R^2 tampoco es reflexiva? Justifica.

1.3. Relaciones *n*-arias

Las relaciones n–arias son aquellas que tienen tuplas con n elementos, esto es R es n–aria si $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$. Nuevamente, el orden es muy importante y los conjuntos A_i pueden o no coincidir para dos o más índices.

Ejemplo 1.19. A continuación listamos varias relaciones n–arias.

- $suma(a,b,c) \in R$ si $a,b,c \in \mathbb{Z}; a+b=c$. Tres enteros están en la relación R si la suma de los dos primeros es igual al tercero. Por ejemplo, $(-5,5,0),(3,4,7),(4,3,7)$ son algunas de las tripletas de esta relación. En ésta no tiene mucho sentido preguntar si cumplen con reflexividad, simetría, antisimetría o transitividad ya que no es una relación binaria. Es una relación de índice 3 o terciaria.
- $menor(a,b,c)$. Una triada (a,b,c) está en la relación si cumple $a < b < c$ y $a,b,c \in \mathbb{R}$. Por ejemplo, $(5.0, 7.0, 7.00001) \in menor$.
- $R = \{(x,y,z); x,y,z \in \mathbb{R}$ y $y = (x-z)/2$. Ejemplos de tripletas que están en esta relación son $(9,2,5),(17,6,5),(2435,0.5,2434)$.

Definición 1.5. Sea $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$. Entonces $A_1, A_2, \ldots, A_n$ corresponden a los *dominios* de la relación y n es el *grado* (índice, aridad) de la relación..

Todas las relaciones que hemos definido hasta ahora se dan entre números, pero esto no tiene por qué ser así. Los conjuntos sobre los que se toma el producto cartesiano pueden ser de lo más variados, exigiéndose únicamente, como la definición dice, que el elemento i–ésimo de la n–eada sea del conjunto A_i sobre el que se está tomando el producto cartesiano.

1.3.1. Bases de datos relacionales

Una *base de datos* es un conjunto de información organizada de cierta manera, que permita acceso, inserción, remoción y búsqueda de elementos particulares de forma eficiente y correcta.

Una *base de datos relacional* se define como una relación n–aria sobre $A_1, A_2, \ldots, A_n$, generalmente conjuntos distintos entre sí. Se acostumbra mostrar la base de datos como una tabla, donde cada columna tiene el nombre del dominio y cada renglón contiene a un elemento de la relación, con los valores correspondientes para $A_1, A_2, \ldots, A_n$, por lo que muchas veces se usa directamente este apelativo (*tabla*) para referirse a una base de datos relacional.

A cada renglón de la tabla de la relación se le conoce como *registro* y a cada columna como *atributo*, pensando en que cumple con una cierta limitación que se dio sobre cada conjunto A_i. Al producto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ se le llama la *intención* de la base de datos, mientras que a la tabla se le llama la *extensión* de la base de datos.

Una *llave primaria* se refiere a alguno de los dominios A_i, cuando el valor de este atributo determina unívocamente al registro. En otras palabras, un dominio A_i corresponde a una llave primaria cuando no hay dos elementos de la relación que tengan el mismo valor en este dominio.

Una *llave compuesta* es aquella que está definida para dos o más atributos que juntos identifican unívocamente a cada registro.

Ejemplo 1.20. Supongamos una base de datos (o tabla) con la siguiente información:

Tabla 1.1. Base de datos de alumnos

Estudiantes			
Nombre	**Núm. Cta.**	**Carrera**	**Promedio**
Avella	924273894	Matemáticas	9.75
Aguilar	958395179	Actuaría	8.50
Medina	067493208	Actuaría	8.00
Morales	105730762	Física	8.40
Padilla	103726591	C. de la Computación	8.50
Vázquez	966429754	Actuaría	9.75
Zuazua	102582843	Matemáticas	9.50

Consideremos que la relación ya no va a cambiar. La *intención* de la tabla (el dominio de la relación) es el producto cartesiano $Nombre \times Núm.Cta. \times Carrera \times Promedio$, mientras que la extensión es el contenido de la tabla.

En ella vemos que el nombre es único para todos los elementos de la tabla, por lo que podría ser una llave primaria. Asimismo, el número de cuenta es único y podría ser otra llave primaria. Una llave compuesta podría ser la carrera junto con el promedio que también identifican unívocamente a cada registro.

También podemos usar como llave primaria de una base de datos al producto cartesiano de dos o más de los dominios, siempre que este producto garantice que ninguna combinación de valores obtenidos de esta forma aparece duplicado.

Las bases de datos se comportan como un álgebra de relaciones (relacional), y como tal tienen asociadas las siguientes operaciones, que se aplican a cualquier relación n–aria:

Operaciones del álgebra relacional

Además de las relaciones de conjuntos, que ya vimos, el álgebra relacional presenta tres operaciones que no provienen de operaciones de conjuntos y que no usan la composición –ya que ésta sólo está definida para relaciones binarias–.

> **select:** (s_C) Elige los registros que cumplan con la condición C y forman con ella otra relación n-aria, que es un subconjunto de la relación original.

Ejemplo 1.21. Tenemos la relación $suma(a, b, c)$, donde a, b y c están en $suma$ si $a + b = c$, que consiste únicamente de las tripletas $(2, 4, 6)$, $(5, -3, 2)$, $(8, 2, 10)$, $(3, 4, 7)$ y $(8, -2, 6)$.

$$s_{(a_2 \geqslant 0)} = \{(2, 4, 6), (8, 2, 10), (3, 4, 7)\}, \text{ mientras que } s_{(a_3 = 4)} = \varnothing$$

ya que ninguna de las parejas de la relación tiene como tercer componente a 4.

Otra forma de representar una selección es colocando directamente la condición como argumento al select: $select(suma, a_3 = 4)$, que indica *seleccionar de la relación suma a aquellos registros donde el tercer atributo sea* 4.

Ejemplo 1.22. Tomemos la base de datos mostrada en la tabla 1.1.

$$\begin{aligned} select(tabla, promedio \geqslant 9.00) = \{ \; & (\text{Avella}, 924273894, \text{Matemáticas}, 9.75), \\ & (\text{Vázquez}, 966429754, \text{Actuaría}, 9.75), \\ & (\text{Zuazua}, 102582843, \text{Matemáticas}, 9.50) \\ \} \; & \end{aligned}$$

> **Proyección:** ($P_{i_1, i_2, \ldots, i_m}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_m$, $m \leqslant n$). A partir de todas las n-adas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ en la relación original, se obtienen los registros de aridad m, tomando únicamente los atributos a_{i_k}. Esto es, a partir de todas las n–adas de la relación construimos una nueva relación $A_{i_1} \times A_{i_2} \times \ldots \times A_{i_m}$ que contiene el mismo número de n–adas que la relación original, pero la nueva relación tiene aridad m.

Ejemplo 1.23. Sea $R = \{(8, 5, 7, 9), (3, 4, 3, 2), (7, 5, 2, 9), (3, 4, 5, 6)\}$ una relación. Entonces $P_{2,4} = \{(5, 9), (4, 2), (5, 9), (4, 6)\}$, pero como estamos hablando de conjuntos y el primer y tercer elemento de la proyección es el mismo, tenemos

$$P_{2,4} = \{(5, 9), (4, 2), (4, 6)\}.$$

Ejemplo 1.24. Usemos nuevamente la tabla 1.1. En ella, $P_{2,4}$ resulta en la subtabla que se encuentra en la tabla 1.2.

Tabla 1.2. Proyección de la base de datos de alumnos

Tabla: $Estudiantes_{2,4}$	
Núm. Cta.	**Promedio**
924273894	9.75
958395179	8.50
067493208	8.00
105730762	8.40
103726591	8.50
966429754	9.75
102582843	9.50

Join: $(J_p(R,S))$. Tenemos dos relaciones, la primera de ellas con índice m y la segunda con índice n. Se cumple $p \leqslant m,\ p \leqslant n$. Sea $R = \{(a_1,\ldots,a_n); a_i \in A_i,$ $i = 1,\ldots,n\}$ y $S = (b_1,\ldots,b_m); b_j \in B_j, j = 1,\ldots,m\}$. Definimos

$$\begin{aligned} Join_p(R,S) =\{&(a_1,\ldots,a_{m-p},c_1,\ldots,c_p,b_1,\ldots,b_{n-p}) \\ &\mid (a_1,\ldots,a_{m-p},c_1,\ldots,c_p) \in R, \\ &\quad (c_1,\ldots,c_p,b_1,\ldots,b_{n-p}) \in S\}. \end{aligned}$$

En otras palabras, son aquellas tuplas donde los p elementos al final de una tupla en R coinciden, en los valores, con los p elementos del principio de una tupla en S.

Ejemplo 1.25. Sean $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y $S \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dos relaciones definidas como sigue:

$$\begin{aligned} R &= \{(1,2,3,4,5),(5,8,3,4,5),(8,16,24,32,40),(4,6,12,16,20), \\ &\qquad (5,10,15,20,25)\} \\ S &= \{(3,4,5,6,8,10),(3,4,5,25,30,35),(24,32,40,48,56,64), \\ &\qquad (4,6,12,16,20,24),(6,12,18,24,30,36) \end{aligned}$$

Entonces, el número de elementos en cada tupla del conjunto $Join_3(R,S)$ es $5 + (6 - 3) = 8$; a continuación mostramos esta relación.

tupla	**Viene de:** **R**	**S**
$\{\ (1,2,\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{5},6,8,10),$	$(1,2,\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{5})$	$(\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{5},6,8,10)$
$(1,2,\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{5},25,30,35),$	$(1,2,\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{5})$	$(\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{5},25,30,35)$
$(5,8,\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{5},6,8,10),$	$(5,8,\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{5})$	$(\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{5},6,8,10)$
$(5,8,\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{5},25,30,35),$	$(5,8,\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{5})$	$(\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{5},25,30,35)$
$(8,16,\mathbf{24},\mathbf{32},\mathbf{40},48,56,64)$	$(8,16,\mathbf{24},\mathbf{32},\mathbf{40})$	$(\mathbf{24},\mathbf{32},\mathbf{40},48,56,64)$
$\}$		

No hay ninguna otra tupla que pertenezca a $Join_3(R, S)$ ya que ninguna tupla en R termina con los mismos tres números con los que empieza alguna tupla en S.

Aunque hemos utilizado casi exclusivamente productos cartesianos del mismo conjunto, lo más común es que cada relación esté definida en el producto cartesiano de conjuntos distintos, sobre todo si hablamos en el contexto de bases de datos. Siendo así habría que redefinir la operación $Join$, pues no tendría sentido hablar de comparar peras con manzanas. En este caso no nos interesa la posición del atributo sino su dominio. Supongamos que R está definida en $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ –pudiendo o no ser distintos entre sí los conjuntos A_i– y S está definido en $B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_m$ –pudiendo o no ser distintos entre sí los conjuntos B_i–; supongamos asimismo que la cardinalidad del conjunto $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \cap \{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ es p. Consideremos $B' = \{B_{i_1}, B_{i_2}, \ldots, B_{i_{m-p}}\}$ los atributos de S que no están en la intersección de atributos. En este caso $Join(R, S)$ está definido sobre el producto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \times B_{i_1} \times \ldots \times B_{i_{m-p}}$ y consiste de las tuplas que contienen tanto a los atributos de R como a los de S pero que contienen valores iguales en los atributos en los que coinciden.

Ejemplo 1.26. Supongamos que tenemos una relación

$$Salones \subseteq edificio \times núm \times tipo \times capacidad \times equipo$$

donde:

$$\begin{aligned} edificio &= \{O, P, B1, B2, F, A, T, S\} \\ núm &= \mathbb{N} \\ tipo &= \{lab, taller, salón, aula, auditorio\} \\ capacidad &= \mathbb{N} \\ equipo &= \{falso, verdadero\} \end{aligned}$$

Para que estén en la relación tendrán que cumplir condiciones como que el número de salón sólo puede ser uno de los que existen; si el salón es 1 no podrá estar ni en O ni en P; la capacidad también deberá estar limitada y de acuerdo al número de salón. El atributo *equipo* será verdadero cuando el salón cuente con computadoras y $falso$ cuando no. Por ejemplo, en el caso de la Facultad de Ciencias de la UNAM, tres de las tuplas que están en esta relación son

$$(O, 101, salón, 80, falso), (O, 124, salón, 56, falso), (T, 201, taller, 30, verdadero)$$

Supongamos una relación $Cursos$ definida en

$$lice \times clave \times grupo \times creds \times horario \times días \times edificio \times núm \times prof$$

donde

$$\begin{aligned} lice &= \{\text{act, bio, cc, ct, fis, ms, mat}\} \\ clave &= \mathbb{N} \\ grupo &= \mathbb{N} \\ creds &= \mathbb{N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} horario &= \text{tiempos} \\ días &= \{\text{lu, ma, mi, ju, vi, sa}\} \\ edificio &= \{\text{O, P, B1, B2, F, A, T, S}\} \\ num &= \mathbb{N} \\ prof &= \{\text{caracteres}\} \end{aligned}$$

Supongamos que las extensiones respectivas de nuestras relaciones son:

Tabla 1.4.

Cursos								
lice	*clave*	*grupo*	*creds*	*horario*	*días*	*edificio*	*núm*	*prof*
mat	7	4010	10	10 a 11	lu ma mi ju vi	O	106	AMV
bio	7126	5050	12	12 a 15	lu ju	A	25	ABR
bio	7230	5010	12	7 a 10	ma vi	B	10	RRR
act	1167	6120	10	7 a 8	lu ma mi ju vi	O	106	JVA
act	1065	6041	10	8 a 9	lu ma mi ju vi	O	110	MCC
cc	287	7020	10	4 a 5:30	lu mi	T	218	FSC
ct	1040	1010	12	12 a 14	ma ju vi	B	12	OPC
fis	2010	8060	9	4 a 5:30	lu ju	O	130	MLF
act	987	1021	10	19 a 20	lu ma mi ju vi	O	110	AMR
bio	451	5010	9	16 a 19	lu ju	B	10	JMM
fis	322	8040	9	7 a 8:30	lu mi vi	O	130	AZR

Tabla 1.5.

Salones				
edificio	*núm*	*tipo*	*capacidad*	*equipo*
O	106	salón	64	F
O	130	salón	32	F
T	215	taller	30	T
T	8	salón	70	F
A	25	lab	25	F
B	10	lab	25	F

Veamos algunas operaciones sobre estas relaciones. Por ejemplo, si usamos la operación *select(Cursos,creds,10)*, construye una tabla que tiene únicamente a los renglones que tienen 10 en el atributo $creds$, que son 5, y con todas las columnas:

Tabla 1.6.

select(Cursos,creds,10)								
$lice$	$clave$	$grupo$	$creds$	$horario$	$días$	$edificio$	$núm$	$prof$
mat	7	4010	10	10 a 11	lu ma mi ju vi	O	106	AMV
act	1167	6120	10	7 a 8	lu ma mi ju vi	O	106	JVA
act	1065	6041	10	8 a 9	lu ma mi ju vi	O	110	MCC
cc	287	7020	10	4 a 5:30	lu mi	T	218	FSC
act	987	1021	10	19 a 20	lu ma mi ju vi	O	110	AMR

Ejemplo 1.27. La proyección $P_{grupo,días}(Cursos)$ queda de la siguiente manera: se eligen las columnas correspondientes al atributo $grupo$ y al atributo $días$ de la relación $Cursos$, dejando una tabla con dos columnas y los mismos once renglones que la relación original:

Tabla 1.7.

$P_{grupo,días}(Cursos)$	
$grupo$	$días$
4010	lu ma mi ju vi
5050	lu ju
5010	ma vi
6120	lu ma mi ju vi
6041	lu ma mi ju vi
7020	lu mi
1010	ma ju vi
8060	lu ju
1021	lu ma mi ju vi
5010	lu ju
8040	lu mi vi

Ejemplo 1.28. Por último daremos un ejemplo de la operación $Join$. Esta operación determina cuáles son las columnas a unir, pero hay que decirle si hay alguna condición. Si le solicitamos $Join(Cursos, Salones)$ nos debe regresar aquellos registros en los que las columnas

(atributos) en común tienen el mismo valor. Como columnas tiene la unión de las columnas de las dos relaciones (12 columnas) y como renglones los que coinciden en los atributos comunes (siete renglones) que se muestra a continuación.

Tabla 1.8.

$Join(Cursos, Salones)$											
lice	*clave*	*grupo*	*creds*	*horario*	*días*	*edificio*	*núm*	*prof*	*tipo*	*capacidad*	*equipos*
mat	7	4010	10	10 a 11	lu ma mi ju vi	O	106	AMV	salón	64	F
bio	7230	5010	12	7 a 10	ma vi	B	10	ABR	lab	25	F
bio	7230	5010	12	7 a 10	ma vi	B	10	RRR	lab	25	F
act	1167	6120	10	7 a 8	lu ma mi ju vi	O	106	JVA	salón	64	F
fis	2010	8060	9	4 a 5:30	lu ju	O	130	MLF	salón	32	F
bio	451	5010	9	16 a 19	lu ju	B	10	JMM	lab	25	F
fis	322	8040	9	7 a 8:30	lu mi vi	O	130	AZR	salón	32	F

Ejemplo 1.29. Queremos de las tablas anteriores extraer el grupo, los días y horas a las que está asignado un salón registrado, junto con su capacidad y si tiene o no computadoras. ¿Cuáles son las operaciones a realizar?

Solución: Primero hacemos una proyección en la tabla *Cursos* sacando las columnas que nos interesan, *grupo*, *horario*, *días* y *núm*. Esta operación nos dejaría la siguiente tabla:

Tabla 1.9.

$P_{grupo,horario,días,núm}(Cursos)$			
grupo	*horario*	*días*	*núm*
4010	10 a 11	lu ma mi ju vi	106
5050	12 a 15	lu ju	25
5010	7 a 10	ma vi	10
6120	7 a 8	lu ma mi ju vi	106
6041	8 a 9	lu ma mi ju vi	110
7020	4 a 5:30	lu mi	218
1010	12 a 14	ma ju vi	12
8060	4 a 5:30	lu ju	130
1021	19 a 20	lu ma mi ju vi	110
5010	16 a 19	lu ju	10
8040	7 a 8:30	lu mi vi	130

Elegimos también de la tabla *salones*, mediante proyección, las columnas correspondientes a *núm*, *capacidad* y *equipos*:

Tabla 1.10.

$P_{núm,capacidad,equipos}(Salones)$		
núm	*capacidad*	*equipo*
106	64	F
130	32	F
215	30	T
8	70	F
25	25	F
10	25	F

Para nuestro propósito original podemos hacer un $Join$ de estas dos tablas y nos quedaría la siguiente tabla:

Tabla 1.11.

Tabla: $Join(P_{grupo,horario,días,núm}(Cursos), P_{núm,capacidad,equipos}(Salones))$					
grupo	*horario*	*días*	*núm*	*capacidad*	*equipo*
4010	10 a 11	lu ma mi ju vi	106	64	F
5010	7 a 10	ma vi	10	25	F
5010	7 a 10	ma vi	10	25	F
6120	7 a 8	lu ma mi ju vi	106	64	F
8060	4 a 5:30	lu ju	130	32	F
5010	16 a 19	lu ju	10	25	F
8040	7 a 8:30	lu mi vi	130	32	F

Podemos observar que si bien siguió eligiendo a aquellos que contienen un número de salón válido, muestra menos campos y ya no fueron las tablas completas las que se unieron.

Observaciones:

- Si en el $Join$ no hay atributos en común en las tablas solicitadas, la operación regresará un conjunto vacío.
- Si p= las columnas con el mismo atributo, y n y m el número de columnas de las tablas originales, $Join$ regresa una tabla con $n + m - p$ columnas y, a lo más, el número de renglones de la primera tabla.
- Como tanto la selección como la proyección y el $Join$ regresan tablas (relaciones) se pueden componer directamente o bien darle identificadores a las tablas que se van creando, algo que no hicimos acá.

Regresaremos ahora a las relaciones binarias.

Ejercicios

1.3.1.- Tenemos cuádruplas en una relación de índice 4 que representan los atributos de los libros publicados: (título, ISBN, fecha de publicación, número de páginas). ¿Cuál es una posible llave primaria?

1.3.2.- Tenemos quíntuplas en una relación de índice 5 que contiene (nombre, dirección, RFC, ciudad, estado) de todos los habitantes del país.

(a) ¿Cuál podría ser una llave primaria para esta relación?
(b) ¿Bajo qué condiciones la pareja (nombre,dirección) podría ser una llave compuesta?
(c) ¿Bajo qué condiciones la tripleta (nombre, dirección, ciudad) podrían configurar unas llave compuesta?

1.3.3.- Tenemos la siguiente tabla de los vuelos de compañías aéreas.

Tabla: Vuelos				
Aerolínea	**Núm. Vuelo**	**Puerta**	**Destino**	**Hora**
Viva	122	12	Acapulco	08:10
Aerobus	221	22	Tapachula	08:17
Aerobus	122	11	Mazatlán	08:22
Aerobus	323	12	La Paz	08:30
Viva	212	08	Acapulco	08:47
Aerobus	122	22	Tapachula	09:10
Viva	212	08	Acapulco	09:44

Supongamos que el contenido ya no se va a modificar. Encuentra una llave compuesta de dos atributos que incluya al nombre de la Aerolínea.

1.3.4.- ¿Por qué para definir una llave primaria o compuesta hemos tenido que suponer que la extensión de una base de datos ya no se va a modificar?

1.3.5.- ¿Qué obtienes cuando aplicas la proyección $P_{2,5}$ a la relación

$$R = \{(a,b,c,d,e),(f,g,h,i,j),(a,g,c,i,e)\}?$$

1.3.6.- Supongamos que tenemos una tabla de empleados de una empresa que contiene los atributos N × E × G × C × Em × EM donde

N	Nombre del empleado	C	Número de hijos
E	Edad del empleado	Em	Edad mínima de los hijos
G	Género del empleado	EM	Edad máxima de los hijos

En el caso de edades mínimas y máximas el campo valdrá cero cuando no aplique.

Tenemos una segunda tabla que tiene los atributos $\mathsf{N} \times \mathsf{n} \times \mathsf{eh}$ con un registro por cada hijo de cada empleado, donde,

N	Nombre del empleado	n	Nombre del hijo
eh	Edad del hijo		

¿Qué operación u operaciones debemos realizar para obtener a todos los empleados hombres que tengan hijos menores de 10 años?

1.3.7.- Supongamos las tablas con las inscripciones de los estudiantes a distintos grupos y la asignación de salones a los distintos grupos que se encuentran en la figura 1.1.

(a) ¿Cuál es el resultado de aplicar $P_{1,2}$ a la tabla de inscripciones?
(b) ¿Cuál es el resultado de aplicar $Join_2$ a las tablas inscripciones y asignación de salones en la figura 1.1?
(c) ¿Qué operación u operaciones debemos hacer para obtener los alumnos inscritos en cursos que se llevan a cabo antes de las 11:00?
(d) ¿Qué operación u operaciones debemos realizar para obtener los estudiantes de Actuaría que toman clase en el salón P105?

Figura 1.1. Tablas Inscripciones de estudiantes y asignación de salones

Tabla: Inscripciones

Nombre	Carrera	Curso
Avella	Matemáticas	3045
Avella	Matemáticas	3054
Aguilar	Actuaría	1050
Medina	Actuaría	1128
Medina	Actuaría	1217
Medina	Actuaría	1333
Morales	Física	2543
Padilla	C. de la Comp.	7001
Padilla	C. de la Comp.	7051
Padilla	C. de la Comp.	7047
Vázquez	Actuaría	1231
Vázquez	Actuaría	1132
Zuazua	Matemáticas	3128

Tabla: Asignación de salones

Carrera	Curso	Salón	Hora
Actuaría	1333	P105	8:00
C. de la Comp.	7001	O127	8:00
Matemáticas	3054	T001	10:00
Actuaría	1128	P105	9:00
Matemáticas	3045	O122	11:00
Física	2223	O214	7:00
C. de la Comp.	7051	T212	10:00
Actuaría	1231	P105	16:00
Actuaría	1132	O127	18:00
Matemáticas	3128	T001	15:00
Física	2543	P105	14:00
Actuaría	1217	O122	12:00

1.3.8.- Tenemos las siguientes tablas de una bodega:

Tabla: Partes necesarias			
Proveedor	**# Parte**	**Proyecto**	**# Nec.**
23	1092	1	5
23	1101	3	2
23	9048	4	8
31	4975	3	9
31	3477	2	3
32	6984	4	2
32	9191	2	3
33	1001	1	25

Tabla: Partes en existencia			
# Parte	**Proyecto**	**Cant.**	**Cód. color**
1001	1	14	8
1092	1	2	2
1101	3	1	1
3477	2	25	2
4975	3	6	2
6984	4	10	1
9048	4	12	2
9191	2	80	4

(a) Construye la tabla que se obtiene de aplicar $Join_2$ a estas tablas.

(b) ¿Qué operación u operaciones debemos realizar para que tengamos una lista de aquellos proyectos a los que les faltan partes en existencia y a qué proveedor solicitarlas?

(c) ¿Qué operación u operaciones debemos realizar para saber cuántos y cuáles proyectos pueden ser completados con las partes que hay en existencia?

1.3.9.- Muestra que si C_1 y C_2 son condiciones que los elementos de una relación n-aria deben satisfacer, entonces $s_{C_1 \wedge C_2}(R) = s_{C_1}(s_{C_2}(R))$.

1.3.10.- Muestra que si C_1 y C_2 son condiciones que los elementos de una relación n-aria deben satisfacer, entonces $s_{C_1}(s_{C_2}(R)) = s_{C_2}(s_{C_1}(R))$.

1.3.11.- Muestra que si C es una condición que todos los elementos de las relaciones n-arias R y S deben satisfacer, entonces $s_C(R\backslash S) = s_C(R)\backslash s_C(S)$.

1.3.12.- Muestra que si C es una condición que los elementos de las relaciones n-arias R y S pueden satisfacer, entonces $s_C(R \bigcup S) = s_C(R) \bigcup s_C(S)$.

1.4. Relaciones de equivalencia

Definición 1.6. Una *relación de equivalencia* es una relación binaria en la que se cumplen las propiedades de reflexividad, simetría y transitividad.

Revisemos nuevamente algunos de los ejemplos que hemos dado para determinar cuáles de ellos conforman una relación de equivalencia. Empezaremos por la sección 1.2.1, para los que ya determinamos cuáles son las propiedades que cumplen –recurrir a esta sección para ver de qué relaciones se trata–.

- R_1 y R_2 no son relaciones de equivalencia, pues la primera no cumple ninguna de las propiedades y la segunda es reflexiva y transitiva pero no simétrica.
- R_3 es una relación de equivalencia pues cumple con ser reflexiva, simétrica y transitiva.
- R_4 y R_6 no son reflexivas (tampoco simétricas o transitivas) por lo que no son una relación de equivalencia.
- R_5 es reflexiva y transitiva pero no es simétrica, por lo que tampoco es una relación de equivalencia.

Estos ejemplos nos dan explícitamente la relación, por lo que simplemente hay que revisar cuáles son las parejas que se encuentran en ella. Definamos si una relación es o no de equivalencia cuando se da en términos de los predicados que deben cumplir.

Ejemplo 1.30. Determinar si la relación $R_1 = \{(a, b) \,;\, a, b \in \mathbb{Z}, a < b\}$ es o no una relación de equivalencia.

Solución:

- **Reflexividad:** No la cumple pues ningún número es *estrictamente* menor que sí mismo.
- **Simetría:**Tampoco la cumple pues si $a < b$ entonces b no puede ser *estrictamente* menor que a.
- **Transitividad:** Esta propiedad sí la tiene pues si $a < b$ y $b < c$ sabemos que $a < c$.

En realidad deberíamos haber parado con la primera propiedad, ya que con una propiedad que no cumpla es suficiente, pero seguimos adelante para dar una exposición más completa

Ejemplo 1.31. Determinar si la relación $R_2 = \{(a, b) \,;\, a, b \in \mathbb{Z}, a \leqslant b\}$ es o no una relación de equivalencia.

Solución:

- **Reflexividad:** Todo número es menor o igual a sí mismo (en particular igual).
- **Simetría:** No la cumple. Por ejemplo $7 \leqslant 9$ pero $9 \nleqslant 7$.
- **Transitividad:** Esta propiedad sí la tiene pues si $a \leqslant b$ y $b \leqslant c$ sabemos que $a \leqslant c$.

De donde esta relación no es una relación de equivalencia.

Ejemplo 1.32. Determinar si la relación $R_3 = \{(a, b) \,;\, a, b \in \mathbb{Z}, a = b\}$ es o no una relación de equivalencia.

Solución:

- **Reflexividad:** Es claro que todo número igual a sí mismo, por lo que la pareja $(a, a) \in R_3$.
- **Simetría:** También es una relación simétrica, pues si $a = b$ sabemos que $b = a$ y por lo tanto ambas parejas $(a, b), (b, a) \in R_3$.

- **Transitividad:** Esta propiedad también la tiene R_3, pues si $a = b$ y $b = c$ sabemos que $a = c$.

R_3 es una relación de equivalencia, lo que no resulta raro pues de cierta manera inspira el nombre de esta relación.

Ejemplo 1.33. Determinar si la relación $R_4 = \{(a, b)\,;\, a, b, c \in \mathbb{Z},\ (a \bmod c) = (b \bmod c)\}$ es o no una relación de equivalencia.

Solución:

Podemos notar que en este caso estamos apelando a una constante c independiente de la pareja, la misma para todas las parejas, aunque cada constante c distinta nos definiría una relación de equivalencia distinta. Recordemos también que $a \bmod c$ es el residuo entero de dividir a entre c y que siempre debe ser menor a c.

- **Reflexividad:** Por supuesto que el residuo entero de dividir a un número entre c no cambia para el mismo número.
- **Simetría:** También es una relación simétrica, pues si $a \bmod c = b \bmod c$, como la igualdad es simétrica, tendremos también $b \bmod c = a \bmod c$, por lo que ambas parejas, $(a, b), (b, a) \in R_4$.
- **Transitividad:** Esta propiedad también se presenta en R_4.
  Supongamos $a \bmod c = b \bmod c$. Esto quiere decir que $\exists 0 \leqslant k < c$ tal que se cumple $a \bmod c = k$ y $b \bmod c = k$; si $b \bmod c = d \bmod c$ entonces $d \bmod c = k$ también. Por lo tanto, $a \bmod c = d \bmod c$; resumiendo, si $(a, b), (b, d) \in R_4$ entonces $(a, d) \in R_4$.

R_4 es una relación de equivalencia, de suma importancia y que se utiliza mucho. También hay que notar que para toda a hay una infinidad de b que están relacionados con a.

Ejemplo 1.34. Determinar si la relación $R_5 = \{(a, b)\,;\, a, b \in \mathbb{Z}, c > 1, a \div c = b \div c, (a \div c) < b\}$, con c fija, es o no una relación de equivalencia.

Solución:

Recordemos que la operación $\div$ se refiere al cociente entero de una división. Por un lado estamos solicitando que el cociente sea el mismo, pero también que éste sea menor que el segundo elemento de la pareja.

- **Reflexividad:** Tenemos que $a \div c = a \div c < a$, lo cual se cumple, ya que $c > 1$. Por lo que R_5 es reflexiva.
- **Simetría:** Como $c > 1$, $a \div c < a$ y $b \div c < b$. Si $(a, b) \in R_5$ quiere decir que $a \div c = \div c < b$. Para que $(b, a) \in R_5$, se requiere que $b \div c = a \div c < a$. Por la observación hecha al principio, si se cumple para (a, b) también se cumple para (b, a), por lo que la relación es reflexiva.

- **Transitividad:** Esta propiedad también se presenta en R_5. Como están relacionadas por dar un resultado igual, y por la observación hecha al principio de la propiedad anterior, la transitividad se cumple trivialmente.

$\therefore$ R_5 es una relación de equivalencia.

Ejemplo 1.35. Determinar si la relación $R_6 = \{(a,b)\,;\, a,b \in \mathbb{Z}, a$ divide a b $(a \mid b)\}$ es o no una relación de equivalencia.

Solución:

Recordemos la definición de $a\,;\,b$, que nos dice que esto es verdadero si y sólo si $b = ka$ para alguna $k > 0, k \in \mathbb{Z}$.

- **Reflexividad:** Por supuesto que $a\,;\,a$ pues $a = (1)a$.
- **Simetría:** La relación no es simétrica, es antisimétrica:
  Si $a\,;\,b$ entonces $b = ka, k > 0, k \in \mathbb{Z}$. Si $b\,;\,a$ entonces tenemos $a = mb, m > 0, m \in \mathbb{Z}$. Pero de esto, sustituyendo tenemos que $b = ka = kmb = (km)b$, con $km > 0, km \in \mathbb{Z}$. Pero esto sólo es posible si $km = 1$, lo que daría antisimetría.
- **Transitividad:** Esta propiedad se presenta en R_6. pues si $a\,;\,b$ quiere decir que $b = ka, k > 0, k \in \mathbb{Z}$. Si $b\,;\,c$ entonces $c = mb, m > 0, m \in \mathbb{Z}$. Sustituyendo tenemos $c = m(b) = m(ka) = (mk)a, (mk) = k' > 0, k' \in \mathbb{Z}$. De esto $a\,;\,c$.

$\therefore$ R_6 no es una relación de equivalencia.

Ejemplo 1.36. Determinar si la relación $R_7 = \{(a,b)\,;\, a,b \in \mathbb{Z}, a$ **no** es múltiplo de $b\}$ es o no una relación de equivalencia.

Solución:

Un número a es múltiplo de un número b si $a = kb, k > 0, k \in \mathbb{Z}$. Noten que se parece mucho a la relación "divide a" pues habla del residuo, aunque en este caso pide que el residuo sea distinto de 0.

Cuando decimos que un número **no** es múltiplo de otro, esto lo podemos expresar diciendo que cumple alguna de las siguiente condiciones:

- $b \nmid a$. b no divide a a.
- $a \mod b \neq 0 \wedge a \geqslant b$. Al dividir al primero entre el segundo el residuo no es 0, pero el primero debe ser mayor o igual al segundo.
- $a < b$. Si el primero es menor que el segundo no puede ser múltiplo del segundo.

Podemos verificar ahora las propiedades para que una relación sea de equivalencia.

- **Reflexividad:** Esta propiedad no la tiene ninguna $a \in \mathbb{Z}$, pues todo entero es múltiplo de sí mismo con el factor 1.

- **Simetría:** La relación no es simétrica. Supongamos $(a, b) \in R_7$, de donde se cumple alguna de las tres condiciones que dimos. En particular si $a < b$, por ejemplo $(4, 8) \in R_7$ pero $(8, 4) \notin R_7$, ya que 8 es múltiplo de 4.
- **Transitividad:** Tampoco es transitiva y para mostrarlo usaremos un contraejemplo: Sea $a = 8, b = 10, c = 4$. Las parejas $(a, b) \in R_7$ pues 8 no es múltiplo de 10 y 10 no es múltiplo de 4. Sin embargo $(8, 4) \notin R_7$, pues 8 es múltiplo de 4.

$\therefore$ R_7 no es una relación de equivalencia.

Ejemplo 1.37. Sea $A \neq \varnothing$ un conjunto arbitrario de personas. La relación R en A se define como aRb si y sólo si a y b tienen la misma edad (en años). Demuestra que R es una relación de equivalencia.

Solución:

Debemos ver que R cumple las propiedades para ser una relación de equivalencia:

- **Reflexividad:** Obviamente toda persona tiene la misma edad que ella misma, por lo que $\forall a \in a, aRa$.
- **Simetría:** Si a tiene la misma edad que b, entonces b tiene la misma edad que a, $\forall a, b \in A, aRb \leftrightarrow bRa$.
- **Transitividad:** Es claro que si a tiene la misma edad que b y b tiene la misma edad que c, entonces a y c tienen la misma edad: $\forall a, b, c \in A, aRb \wedge bRc \rightarrow aRc$.

$\therefore$ R es una relación de equivalencia.

1.4.1. Clases de equivalencia

Definición 1.7. Una *partición* de un conjunto S es una colección de subconjuntos $S_1, S_2, \ldots, S_k$ que cumplen con:

$$i.\ S = \bigcup_{i=1}^{n} S_i \qquad\qquad ii.\ S_i \cap S_j = \varnothing \text{ para } i \neq j$$

La primera regla nos dice que el conjunto S se obtiene de unir a todos los subconjuntos, o sea que cada elemento de S está en algún subconjunto. La segunda regla nos dice que ningún elemento puede estar en más de un subconjunto.

Cuando tenemos una relación de equivalencia en un conjunto, la relación *induce* una partición en el conjunto, donde quedan en un mismo subconjunto aquellos elementos que son equivalentes. A cada uno de estos subconjuntos es a lo que llamamos *clase de equivalencia.*

Si queremos representar a alguna de la clases de equivalencia, lo hacemos con lo que se conoce como *un representante* y se denota con $[a]$, lo que quiere decir que todos los elementos presentes en esta clase son equivalentes al elemento a.

De las relaciones de equivalencia que acabamos de revisar, tratemos de definir cuántas o cuáles clases de equivalencia inducen y qué forma tienen.

Ejemplo 1.38. Determina las clases de equivalencia para $R_3 = \{(a,b)\,;\, a,b \in \mathbb{Z}, a = b\}$ del ejemplo 32.

Solución:

En el caso de los enteros cada elemento está en su propia clase, ya que no hay ningún elemento que sea igual a otro. Por lo tanto el número de clases es infinito y cada clase contiene a un único elemento.

Si tomáramos $a, b \in \mathbb{Q}$, los racionales, entonces tendríamos a un número infinito de elementos en cada clase de equivalencia, pues un racional puede ser igual a otro teniendo distintos numerador y denominador y representar al mismo valor.

Ejemplo 1.39. Describe las clases de equivalencia para $R_4 = \{(a,b)\,;\, a,b \in \mathbb{Z}, a \bmod c = b \bmod c\}$ en el ejemplo 33.

Solución:

Hay c distintos valores para $n \bmod c$ $(0, 1, \ldots, c-1)$, por lo que, dada una c particular, **todos** los enteros se van a acomodar en alguna de estas clases. Ningún entero puede estar en más de una clase, pues al dividirlo entre c no puede dar residuos enteros distintos. De esto $S_i \cap S_j = \varnothing, 0 \leqslant i < c, 0 \leqslant j < c, i \neq j$.

Adicionalmente, como cada entero está en una de las clases de equivalencia,

$$\mathbb{Z} = \bigcup_{i=o}^{c-1} [i].$$

Ejemplo 1.40. Consideremos la relación de equivalencia del ejemplo 33. Describe las clases de equivalencia para esta relación.

Solución:

Dados $a, b \in \mathbb{Z}$ y $c > 1$, tenemos que para que $a \div c = b \div c$, b tiene que cumplir $a \leqslant b \leqslant a + c - 1$, pues es en estos casos en que el cociente entero va a ser el mismo con $a \div c$ que con $b \div c$. Sin embargo, también hay que cumplir la condición $a \div c < b$. Si $a \leqslant 0$ entonces forzosamente $b \leqslant 0$ para que se mantenga el signo del cociente entero. Dada $c > 1$ tenemos una clase de equivalencia para cada a que sea múltiplo de c y en esa misma clase están $a+1, a+2, \ldots a+c-1$. Por lo anterior, hay tantas clases de equivalencia como enteros, una por cada múltiplo de c.

Ejemplo 1.41. Consideremos la relación de equivalencia del ejemplo 37. Describe las clases de equivalencia para esta relación.

Solución:

Cada clase de equivalencia está dada por un entero $e \geqslant 0$ que corresponde a la edad, en años, que pueda tener una persona. Podemos pensar en una edad máxima de 150 años, por lo que tendríamos 151 clases de equivalencia, $[0], [1], [2], \ldots, [149], [150]$.

Ejemplo 1.42. Consideremos nuevamente $A \neq \varnothing$ un conjunto arbitrario de personas y la relación R definida de la siguiente manera: $R = \{(a, b)\ ;\ a, b \in A, a \text{ y } b \text{ nacieron en el mismo país}\}$. Describe las clases de equivalencia y cuántas de ellas puede haber.

Solución:

Cada país corresponde a una clase de equivalencia; por ejemplo [México], [Francia], [Italia], por mencionar algunas. El número de clases de equivalencia es, como máximo, el número de países en el mundo, aunque como A es un conjunto arbitrario podrían no haber representantes de todas las posibles clases de equivalencia.

Ejemplo 1.43.

Sea R una relación definida en $\mathbb{R}$, $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\ ;\ (x = 0 = y) \bigvee (xy > 0)\}$. Se deja como ejercicio demostrar que R es una relación de equivalencia. ¿Cuáles son las clases de equivalencia definidas por esta relación?

Solución:

La estrategia que vamos a seguir en este caso es la siguiente:

(a) Elegir $a \in \mathbb{R}$ y definir quién está en esta clase de equivalencia ($[a]$).

(b) Elegir $b \in \mathbb{R}, b \notin [a]$ y definir $[b]$.

(c) Elegir $c \in \mathbb{R}, c \notin [a] \bigcup [b]$ y definir $[c]$.

(d) Proseguir de esta forma hasta que no se puedan encontrar elementos que no estén todavía en ninguna de las clases ya determinadas.

- Primero elegimos arbitrariamente $a = 1.0$. Como no cumple la primera condición, a está relacionado con toda $y > 0$, de donde $[1.0] = \{y \in \mathbb{R}\ ;\ y > 0\} = \mathbb{R}^+$.
- Seleccionamos ahora $b \notin [1]$, por ejemplo $b = -1.0$. Como se requiere que el producto sea positivo, b está relacionada con toda $y \in \mathbb{R}$ con $y < 0$, de donde $[-1.0] = \{y \in \mathbb{R}\ ;\ y < 0\}$.
- Con esto ya tenemos a $\mathbb{R}^+$ y $\mathbb{R}^-$. El único elemento que nos falta es $a = 0.0$. Pero en esta clase sólo está $y = 0$, de donde $[0.0] = \{0.0\}$, lo que se conoce como un conjunto unitario.

Ejercicios

1.4.1.- Sea $A = \mathbb{R}$, el conjunto de números reales, y definimos $R = \{(x, y); x^2 = y^2\}$. Demuestra que R es una relación de equivalencia.

1.4.2.- Sea R una relación definida en $\mathbb{R}$, $R = \{(x, y)\,;\, x, y \in \mathbb{R}, (x = 0 = y) \vee (xy > 0)\}$. Demuestra que R es una relación de equivalencia.

Nota: Como la definición tiene dos casos, la demostración deberá hacerse tomando en cuenta cada uno de los casos.

1.4.3.- Sea R una relación definida en $\mathbb{R}$, $R = \{(x, y)\,;\, x, y \in \mathbb{R},\ \lfloor 2x \rfloor = \lfloor 2y \rfloor\}$[3].

(a) Verifica que R sea una relación de equivalencia.
(b) Determina las clases de equivalencia de $1/4$ y $1/2$.
(c) Describe la partición de $\mathbb{R}$ en clases de equivalencia.

1.4.4.- Sea S una relación definida en $\mathbb{R}$, $S = \{(x, y)\,;\, x, y \in \mathbb{R}, \lfloor 3x \rfloor = \lfloor 3y \rfloor\}$. Determina la partición de $\mathbb{R}$ en las clases de equivalencia de S.

1.4.5.- Demuestra que I_A y U_A (como se definieron en 1.3 y 1.4) son relaciones de equivalencia.

1.4.6.- ¿Cómo son las clases de equivalencia de I_A? ¿Y las de U_A?

1.4.7.- Definimos la relación *congruencia módulo n*, denotada por $a \equiv_n b$, donde a está relacionado con b si el residuo entero al dividir a entre n es el mismo que el residuo entero al dividir b entre n (($a \bmod n$) = ($b \bmod n$)). Este residuo (o *módulo* como se conoce generalmente) puede tomar $n - 1$ valores distintos, de 0 a $n - 1$ (a esta relación se le conoce como $\mathbb{Z}_n$). Demuestra que para una n fija, la relación de congruencia es una relación de equivalencia.

1.4.8.- Muestra que la suma y la multiplicación con $“Z˙n$ está bien definida; esto es, demuestra que

$$\begin{array}{llcl} \text{si} & [\,a\,] = [\,a'\,] & \text{y} & [\,a\,] = [\,a'\,] \\ \text{entonces} & [\,a+b\,] = [\,a'+b'\,] & \text{y} & [\,ab\,] = [\,a'b'\,] \end{array}$$

1.4.9.- Elabora las tablas de suma y multiplicación para $n = 3, 4, 5$ y 7.

1.4.10.- Supongamos que tenemos un lenguaje de programación donde sólo se consideran los primeros k caracteres para distinguir identificadores. De esta manera, si $k = 4$ por ejemplo, el identificador casaChica es el mismo que casaGrande. Supongamos s y t cadenas, donde se distinguen mayúsculas y minúsculas, de tamaño arbitrario y denotemos con $|x|$ el tamaño de una cadena x. Sea sRt la relación que toma a s y t como el mismo identificador si:

- $|s| \geqslant k$, $|t| \geqslant k$ y los primeros k caracteres coinciden, o bien
- $s = t$.

Demuestra que R es una relación de equivalencia para una k fija..

1.4.11.- Tomemos la relación de equivalencia entre las palabras del español y decimos que xRw si y sólo si $|x| = |w|$. ¿Es esta una relación de equivalencia? Justifica.

[3] $\lfloor x \rfloor$ corresponde al entero mayor $i \in \mathbb{Z}$, tal que $i \leqslant x$ y para toda $j \in \mathbb{Z}$ tal que $j < x$, entonces $j \leqslant i$.

1.4.12.- Define tres relaciones de equivalencia entre los estudiantes de tu curso de Estructuras Discretas.

1.4.13.- Sea R la relación en el conjunto de todas las *URL* (o direcciones en el web) si y sólo si la página web en x es la misma que la página web en y. Muestra que R es una relación de equivalencia.

1.4.14.- ¿Cuáles de las siguientes colecciones de subconjuntos son particiones del conjunto de cadenas de tamaño 8?

a) El conjunto de cadenas de bits que empiezan con 1, el de las que empiezan con 00 y el de las que empiezan con 01.
b) El conjunto de cadenas de bits que tienen como subcadena a 00, el conjunto de cadenas de bits que tienen como subcadena a 01, el conjunto de cadenas de bits que tienen como subcadena a 10 y el conjunto de cadenas de bits que tienen como subcadena a 11.
c) El conjunto de cadenas de bits que terminan con 00, el conjunto de cadenas de bits que terminan con 01, el conjunto de cadenas de bits que terminan con 10, el conjunto de cadenas de bits que terminan con 11.
d) El conjunto de cadenas de bits que terminan con 111, el conjunto de cadenas de bits que terminan con 011 y el conjunto de cadenas de bits que terminan con 00.
e) El conjunto de cadenas de bits que tienen $3k$ unos,e donde $k \geqslant 0$, el conjunto de cadenas de bits que tienen $3k + 1$ unos y el conjunto de cadenas de bits que tienen $3k + 2$ unos.

1.4.15.- Una partición P_1 es un *refinamiento* de la partición P_2 si cada conjunto en P_1 es subconjunto de algún conjunto en P_2. Muestra que la partición formada por las clases de congruencia módulo 6 es un refinamiento de la partición formada por las clases de congruencia módulo 3.

1.4.16.- Sea R_8 la relación de equivalencia entre identificadores de un lenguaje de programación como la definimos en el ejercicio 1.4.10, con $k = 8$. Supongamos que con el paso del tiempo las clases de equivalencia se definen con $k = 31$ (R_{31}). Demuestra que R_8 es un refinamiento de R_{31}.

1.5. Relaciones de orden

Muchos conjuntos presentan un orden natural entre sus elementos, como es el caso de las letras del alfabeto, el orden impuesto por los códigos de los caracteres en un sistema o lenguaje de programación (los códigos ASCII o UTF8 por ejemplo), los números naturales ($\mathbb{Z}$), enteros ($\mathbb{N}$) y reales ($\mathbb{R}$), las palabras en un diccionario o los nombres en un directorio telefónico (estas últimas dependen del orden dado a los caracteres). Las relaciones de orden se representan, en general, como una pareja con el conjunto al que se aplica la relación y la relación particular; $(\mathbb{N}, \leqslant)$, $(\mathbb{Z}, \leqslant)$, $(\mathbb{R}. \leqslant)$, $(Alfabeto, \leqslant)$ son algunos de estos casos.

Decimos que una relación es *de orden* si la relación cumple con ser reflexiva, antisimétrica y transitiva. Es de *orden total* si $\forall a, b \in A, (a, b) \in R$. Si hay parejas que no aparecen en la relación, decimos que R es una relación de *orden parcial*[4].

Denotamos a una relación de orden sobre un conjunto A con (A, rel), donde rel es la comparación que se hace entre los elementos. Posibles valores para rel son $\leqslant, \subseteq$ o podemos denotarla de manera general como $\preceq$.

Ejemplo 1.44. Supongamos $A = \{s\,;\, s$ es una cadena de ceros y unos de tamaño $5\}$. Denotamos como $s[i]$ al dígito binario en la posición i, contadas de izquierda a derecha empezando en 1. Denotamos con $a[i \ldots j]$, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 5$ como la subcadena que va de la posición i a la posición j inclusives; si $j < i$ entonces la cadena no incluye a ningún símbolo. Definimos la relación $(A, \preceq)$ de la siguiente manera. $s \preceq t$ si:

(a) $s = t$.

(b) $s[1 \ldots j] = t[1 \ldots j]$ y $s[j+1] < t[j+1]$, $1 \leqslant j < 5$.

donde $a < b, a, b \in \{0, 1\}$, si $a = 0$ y $b = 1$.

Notemos que A es un conjunto finito; en particular tiene 2^5 elementos, que van del 00000 al 11111 con un orden total definido entre ellos. Para demostrarlo, veamos que cumple las tres propiedades mencionadas.

Reflexiva: Como $s \preceq t$ si $s = t$, por el inciso a todo elemento está en la relación de orden consigo mismo.

Antisimétrica: Supongamos $s \preceq t$ y $t \preceq s$. La primera opción es que se cumpla el inciso a, $s = t$ y se cumple la antisimetría.

Por contrapositivo, supongamos $s \neq t$. Entonces, para alguna $j < 5$, $s[1 \ldots j] = t[1 \ldots j]$ y $s[j+1] < t[j+1]$. Pero como también $t \preceq s$, tenemos $t[j+1] < s[j+1]$ –tiene que ser la misma j por la primera parte de la definición–, lo cual no puede suceder. Así que no puede ser $s \neq t$.

Transitividad: Supongamos $s \preceq t$ y $t \preceq u$. Si $s = t$ entonces $s \preceq u$ y se cumple la transitividad. Lo mismo sucede si $t = u$.

Supongamos entonces que $s \neq t$ y $s \neq u$. Como $s \neq t$ y $s \preceq t$, para alguna $j < 5$, $s[1 \ldots j] = t[1 \ldots j]$ y $s[j+1] < t[j+1]$. Como $t \preceq u$ para alguna $k < 5$, $t[1 \ldots k] = u[1 \ldots k]$ y $t[k] < u[k]$. Sea $i = mín(j, k)$. Entonces

$$s[1 \ldots i] = t[1 \ldots i] = u[1 \ldots i].$$

Si $j \geqslant i$, $s[i+1] = t[i+1]$, pero $t[i+1] < u[i+1]$, de donde $s[i+1] < u[i+1]$. Si $k \geqslant i$, $s[1 \ldots i] = t[\ldots i] = u[1 \ldots i]$. También tenemos $s[i+1] = t[i+1]$ y $t[i+1] < u[i+1]$, por lo que $s[i+1] < u[i+1]$, de donde $s \preceq u$, que es lo que queríamos demostrar.

[4]En inglés *posets* de Partially Ordered Sets

Definición 1.8. Sea $(A, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Decimos que $a, b \in A$ son *comparables* si $a \preceq b$ o bien $b \preceq a$. Si no es así, decimos que a y b son *incomparables*.

1.5.1. Relaciones de orden parcial

Revisemos algunos ejemplos de órdenes parciales junto con las gráficas que las representan.

Ejemplo 1.45. Pensemos en la construcción de una casa y consideremos $A = \{\text{Actividades a realizar}\}$. Por ejemplo, tenemos la siguiente lista de actividades, junto con cuáles pasos deben estar terminados antes de empezar esta actividad.

Tarea		Tiempo en días	Pasos previos
A	Preparación del terreno	4	–
B	Cimientos	6	A
C	Tuberías y servicios	3	A
D	Columnas	10	B
E	Techo	5	D
F	Ventanas	2	E
G	Plomería	4	C, E
H	Electricidad	3	E
I	Impermeabilización	2	G, H
J	Muros	6	F
K	Enyesado	5	I, J
L	Limpieza y pintura	3	K
M	Pisos y detalles	4	L
N	Inspección	10	I

Definimos la relación de orden parcial de la siguiente manera:

$$R \subseteq A \times A, R = \{(a, b)\,;\ \text{la actividad } a \text{ es la misma que la actividad } b \text{ o precede a la actividad } b\}$$

Podemos ver que R es una relación de orden parcial pues cumple:

(a) *Reflexividad*: Todas las parejas $(a, a) \in R$ pues todas son iguales a sí mismas.

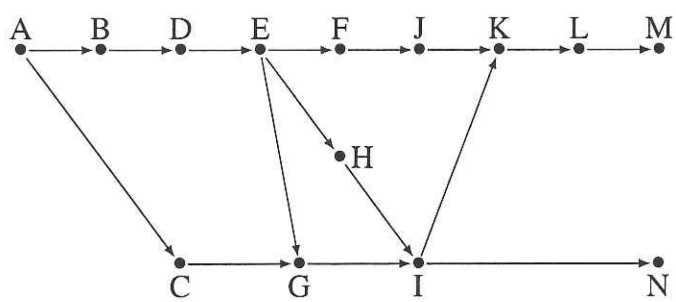
(b) *Antisimetría*: Si las parejas (a, b) y $(b, a) \in R$, como no puede ser que la primera sea necesaria para la segunda y la segunda para la primera, porque la construcción nunca se podría llevar a cabo, se tiene que a y b deben ser la misma tarea.

(c) *Transitividad*: Si la tarea a tiene que realizarse antes que la b, y la b, a su vez, tiene que realizarse antes que la c, la tarea a tiene que realizarse antes que la c.

Independientemente del tiempo que le lleve a cada tarea, podemos escribir la relación en una tabla, donde el renglón indica la tarea necesaria y la columna indica quién la necesita. La tabla queda como sigue:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
A		$\surd$	$\surd$											
B				$\surd$										
C							$\surd$							
D					$\surd$									
E						$\surd$	$\surd$	$\surd$						
F										$\surd$				
G									$\surd$					
H									$\surd$					
I											$\surd$			$\surd$
J											$\surd$			
K												$\surd$		
L													$\surd$	
M														
N														

En este caso podemos ver que la tabla que describe a la relación está poco densa (tiene pocas entradas). Veamos la descripción de la relación con la gráfica correspondiente:



Ejemplo 1.46. La relación de igualdad entre los elementos de cualquier conjunto es una relación de orden parcial, pues es reflexiva (todo elemento es igual a sí mismo), antisimétrica y transitiva.

Ejemplo 1.47. Sea S una colección de conjuntos arbitrarios, donde S_iRS_j si $S_i \subseteq S_j$. Esta relación es un orden parcial. Si ARB y BRA quiere decir que $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, por lo que tienen que ser el mismo conjunto y cumplen la propiedad de antisimetría. Todo conjunto está contenido en sí mismo, por lo que cumple la propiedad de reflexividad. Por último, si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ tenemos $A \subseteq C$ por lo que también cumple la propiedad de transitividad. Es claro que no todos los conjuntos están en la relación, por lo que se trata de un orden parcial.

Ejemplo 1.48. Sea $A = \mathbb{N}$ y definimos $R = \{(a, b)\ ;\ a, b \in \mathbb{N}, a \text{ divide a } b\}$ (denotada por $a \mid b$). Esta es una relación de orden parcial (no toda pareja de naturales está en la relación). Comprobemos que posee las tres propiedades mencionadas, recordando que si $a \mid b$ entonces $b = ka$ para alguna $k \in \mathbb{N}, k > 0$.

(a) *Reflexividad*: $a = 1 \cdot a$ por lo que $\forall a \in \mathbb{N}, a \mid a$.

(b) *Antisimetría:* Supongamos $a \mid b$ y $b \mid a$. Entonces, por la primera pareja, $b = k \cdot a$, $k > 0$. Porque la segunda pareja está presente, $a = m \cdot b$. De esto, $b = k \cdot a = k \cdot (m \cdot b)$; por lo que $b = (km)b$; de donde k y m tienen que ser 1; por lo que $(a \mid b) \wedge (b \mid a) a = b$.

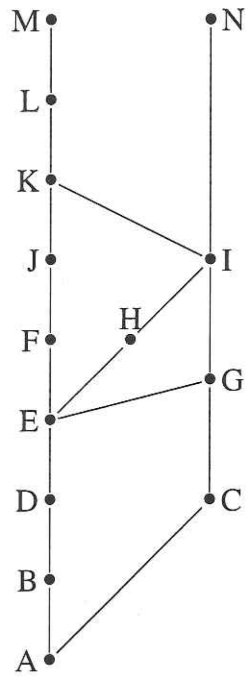
(c) *Transitividad*: Supongamos $a \mid b$ y $b \mid c$. La primera pareja nos dice que $b = k \cdot a$. La segunda pareja nos dice que $c = m \cdot b$ De esto tenemos $c = m(k \cdot a) = (m \cdot k)a$. Como $m > 0$ y $k > 0$, $mk > 0$ y esta es la definición de que $a \mid c$.

1.5.2. Diagramas de Hasse

Los diagramas de Hasse nos sirven para representar gráficamente las relaciones de orden parcial; son similares a la gráfica que mostramos en el ejemplo 45.

Supongamos que tenemos una relación de orden parcial R sobre un un conjunto S. Para construir el diagrama de Hasse representamos a cada elemento de S como un punto en el diagrama. Dibujamos un arco (o flecha) de x a y siempre que xRy y no exista $s \in S$ tal que xRs y sRy (sólo dibujamos las relaciones de orden "directas"). Finalmente organizamos el diagrama de tal manera que cuando una flecha va de x a y, x está en un renglón abajo de aquel en el que está y. Por último, como el orden de la relación está dado visualmente, no requerimos tener dirección en las flechas. El diagrama de Hasse del ejercicio citado se encuentra a continuación y resulta ser una rotación de 90°.

Figura 1.2. Diagrama de Hasse para el orden parcial del ejercicio 45



El orden de la relación es muy claro pues siempre va del nodo que está más bajo al nodo que está más alto. En este tipo de diagramas es muy fácil detectar máximos y mínimos, si es que los hay, pues el máximo es el que está hasta arriba y el mínimo el que está hasta abajo. Noten que no dibujamos aristas totalmente horizontales. Daremos ahora una definición más formal de lo que es el máximo en una relación de orden (parcial o total):

Definición 1.9. $\alpha \in S$ es el *elemento máximo* –o simplemente *máximo*– de S bajo la relación R si $\forall a \in S, aR\alpha$.

Noten de la definición anterior que el máximo puede no existir, ya que podríamos tener, aún con la propiedad de transitividad, que no todos los elementos estén relacionados con uno en particular. En el diagrama de Hasse que elaboramos para la relación del ejercicio 45 ni M ni N son elementos máximos ya que no están relacionados entre sí.

Similarmente definimos el mínimo de un conjunto bajo la relación R.

Definición 1.10. $\beta \in S$ es el *elemento mínimo* –o simplemente el *mínimo*– de S bajo la relación R si $\forall a \in S, \beta Ra$.

En la figura 1.2 podemos observar que A es el mínimo, pues es el que se encuentra más bajo en el diagrama.

Por ejemplo, un conjunto finito de enteros bajo la relación $\leqslant$ tiene mínimo y máximo. Los números naturales tienen mínimo (el 0 o el 1, dependiendo de cómo se considera a los naturales) pero no tiene máximo. Un intervalo cerrado de los números reales también tiene máximo y mínimo, pero si el intervalo es abierto no los tiene.

Una exigencia clara para el máximo y mínimo de un conjunto bajo una relación es que éstos pertenezcan al conjunto.

Tenemos otros dos conceptos relacionados con máximo y mínimo de un conjunto bajo una relación:

Definición 1.11. $\alpha \in S$ bajo la relación R, es un *elemento maximal* –o simplemente *maximal*– si no existe $a \in S$ tal que $\alpha R a$.

En la figura 1.2 tenemos dos elementos maximales, M y N, ya que no hay ningún otro elemento en el conjunto que, bajo esta relación, esté más arriba que M o N.

Definición 1.12. $\beta \in S$ bajo la relación R es un *elemento minimal* –o simplemente *minimal*– si no existe $a \in S$ tal que $aR\beta$.

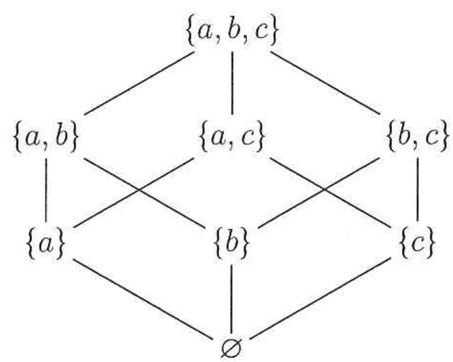
En el caso de la figura 1.2 el único elemento minimal es A, que también es mínimo.

La exigencia para el máximo y mínimo es mayor que para los elementos maximales y minimales. El máximo (mínimo) es único y todos los elementos del conjunto tienen que estar relacionados con él, ya sea directamente (que es la única relación que se dibuja en un Diagrama de Hasse) o utilizando la transitividad, mientras que el maximal (minimal) simplemente exige que no haya ningún elemento con el que el maximal (minimal) esté relacionado.

Veamos algunos ejemplos de diagramas de Hasse para órdenes parciales.

Ejemplo 1.49. Un ejemplo clásico de orden parcial es la relación que existe entre un conjunto y sus subconjuntos dada por la relación $\subseteq$. Sea $S = \{a, b, c\}$. El Diagrama de Hasse para la relación $\subseteq$ se encuentra en la figura 1.3.

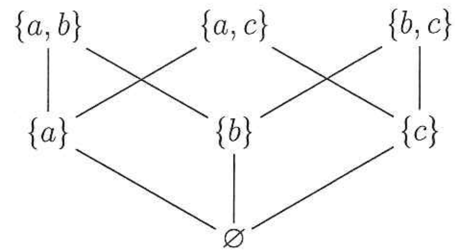
Figura 1.3. Diagrama de Hasse para subconjuntos del conjunto $\{a, b, c\}$



En este ejemplo podemos ver claramente que el elemento máximo es el conjunto mismo, que también es maximal. El mínimo es el conjunto vacío, que también es minimal. Si hay un máximo, ése es minimal y lo mismo con el mínimo. Pero al revés no. Puede haber elementos maximales y no haber máximo y similarmente con los elementos minimales.

Ejemplo 1.50. Podemos hacer un ejercicio similar al del ejemplo anterior, pero la relación va a ser la de subconjuntos propios. El Diagrama de Hasse correspondiente se encuentra en la figura 1.4.

Figura 1.4. Diagrama de Hasse para subconjuntos propios de $\{a, b, c\}$



En este ejemplo tenemos tres maximales, $\{a, b\}, \{a, c\}$ y $\{b, c\}$ ya que ninguno de ellos tiene a nadie arriba. Ninguno de ellos es máximo, ya que no están relacionados entre sí. La relación tiene mínimo, que es $\varnothing$, pues está contenido propiamente en cualquier conjunto. También es minimal, pues no hay ningún otro conjunto contenido propiamente en él.

Regresemos a la pregunta acerca de la construcción de una casa y cuál es el orden en que deben realizarse las tareas para que todo se realice en el menor tiempo posible. Lo que deseamos es, a partir del orden parcial dado, construir un orden total. A este proceso se le conoce como *ordenamiento topológico*. El algoritmo para ordenamiento topológico se encuentra a continuación.

Figura 1.5. Ordenamiento topológico

Objetivo: Producir un orden total a partir de una relación de orden parcial.
Salida: Un orden total T sobre el conjunto S.
Entrada: Un orden parcial R en un conjunto finito S.
Método: Se encuentra en el listado 1.1.

Listado 1.1. Ordenamiento topológico

```
// Inicialización
k=1; Sp=S; s=new array(|S|);
// Elige el siguiente elemento
while (Sp != ∅)
   s[k] = Cualquier elemento minimal de Sp;
   Sp = Sp − s[k]
   k++
// Define T
T={(s[i],s[j]) | i≤j}
```

Si aplicamos el algoritmo de ordenamiento topológico al conjunto de tareas del ejemplo 45, estos son los estados por los que pasa el algoritmo.

Listado 1.2. Ejecución del ordenamiento topológico

```
k=1; Sp={{a,b,c},{a,b},{a,c},{b,c},{a},{b},{c},∅};
s[1]=∅
Sp={{a,b,c},{a,b},{a,c},{b,c},{a},{b},{c}}
k=2
s[2]={a}
Sp={{a,b,c},{a,b},{a,c},{b,c},{b},{c}}
k=3
s[3]={c}
Sp={{a,b,c},{a,b},{a,c},{b,c},{b}}
k=4
s[4]={b}
Sp={{a,b,c},{a,b},{a,c},{b,c}}
k=5
s[5]={a,c}
Sp={{a,b,c},{a,b},{b,c}}
k=6
s[6]={a,b}
Sp={{a,b,c},{b,c}}
k=7
s[7]={b,c}
Sp={{a,b,c}}
k=8
s[8]={a,b,c}
Sp=∅
T={∅,{a},{c},{b},{a,c},{a,b},{b,c},{a,b,c}} en este orden
```

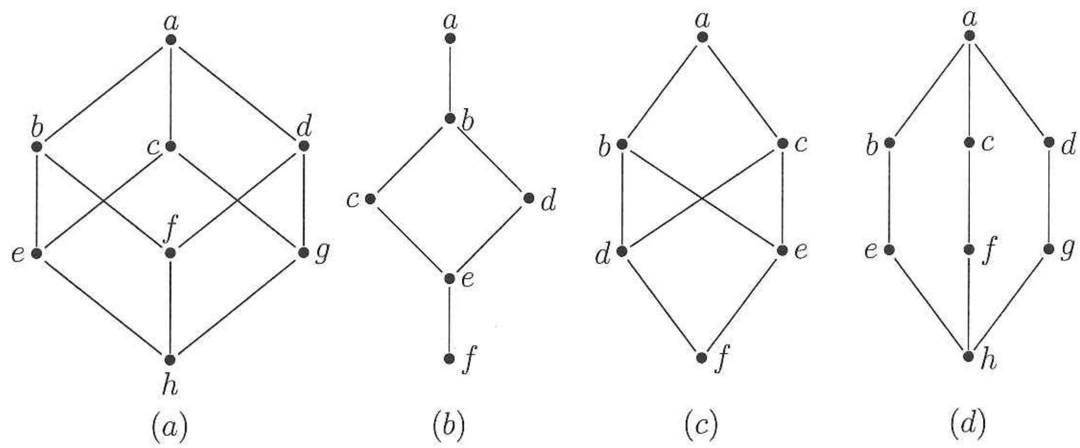
1.5.3. Retículas

Podemos definir en un conjunto parcialmente ordenado el concepto de *mínima cota superior* para una pareja en la relación, que corresponde a una cota superior única que es menor que cualquier otra cota superior. Similarmente podemos definir una *máxima cota inferior* de una pareja en la relación. De cierta manera, tanto la mínima cota superior como la máxima cota inferior son las cotas (respectivamente) más cercanas a ambos elementos de la pareja.

Definición 1.13. Una *retícula*[5] es un conjunto parcialmente ordenado para el cual, para cada pareja en la relación, existe una mínima cota superior y una máxima cota inferior.

[5]En inglés *lattice*

Ejemplo 1.51. De los siguientes diagramas de Hasse, ¿cuáles corresponden a retículas?



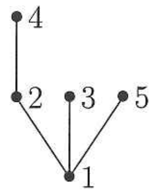
(a) Este conjunto parcialmente ordenado corresponde a una retícula. Cualesquiera dos elementos tienen una mínima cota superior y una máxima cota inferior en el conjunto. Habrán notado que este diagrama corresponde a la relación $\subseteq$ de los subconjuntos de $S = \{a, b, c\}$. La mínima cota superior para cualquier par de ellos corresponde a la unión de los subconjuntos, mientras que la máxima cota inferior corresponde a la intersección de los mismos.

(b) Este diagrama también corresponde a una retícula. Para cualesquiera dos elementos, si están conectados, la mínima cota superior es el máximo de ellos; esto sólo deja a la pareja (c, d) cuya mínima cota superior es b y su máxima cota inferior es e.

(c) En este diagrama de Hasse, si observamos d y e, no tienen una mínima cota superior única, pues c, b y a son cotas superiores para esta pareja, y ninguno de ellos es menor que los otros dos.

(d) Este diagrama de Hasse también corresponde a una retícula, pues como en el caso del diagrama (b), todas las parejas directamente conectadas tienen su mínima cota superior en el mayor de ellos y su máxima cota inferior en el menor de ellos. Para las parejas (b, c), (b, d), (c, d), (e, f), (f, g) y (e, g) la mínima cota superior es a y la máxima cota inferior es h. Para todas estas parejas no existe ningún elemento del conjuntos que sea mayor que ambos elementos o menor que ambos elementos, por lo que estos valores son únicos.

Ejemplo 1.52. Consideremos los conjuntos de enteros $S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $S_2 = \{1, 2, 4, 8, 16\}$ con la relación de divisibilidad –los diagramas de Hasse correspondientes se muestran a continuación–.



La primera relación no corresponde a una retícula porque 2 y 3 no tienen un elemento máximo y tampoco tienen una mínima cota superior. El segundo diagrama sí corresponde a una retícula.

Ejercicios

1.5.1.- Sea $\leqslant$ la relación de orden sobre $A = \{s\,;\, s \text{ es una cadena formada con 4 letras}\}$. $s \leqslant t$, s y $t \in A$, si s va antes o en la misma posición que t, las posiciones dadas por el orden alfabético normal (a lo que se conoce como *orden lexicográfico*).

(a) ¿Es A finito o infinito?
(b) ¿Es un orden total o parcial? Justifica.

1.5.2.- Sea A un conjunto arbitrario de personas y sea E una relación, tal que pRq si la edad de p es menor o igual que la edad de q.

(a) ¿Es A finito o infinito?
(b) ¿Es E un orden total o parcial? Justifica.

1.5.3.- Sea $A \subset \mathbb{N}$ y aRb si $a \mid b$. Supongamos
$$A = \{n \in \mathbb{N}\,;\, n \leqslant 29, n = 2k \vee n = 3k \text{ para alguna } k\}.$$

(a) Lista los elementos de A.
(b) Haz el diagrama de Hasse correspondiente a esta relación.
(c) ¿Es o no una retícula? Justifica.

1.5.4.- Dibuja el diagrama de Hasse para el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$ y la relación $(a, b) \in R$ si $a \mid b$ (a divide a b).

1.5.5.- Sea $S \subseteq A_1 \times A_2$, $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{N}$. Definimos el orden lexicográfico $<$ en S de la siguiente manera: $(a_1, b_1) < (a_2, b_2)$, con $a_1, a_2 \in A_1, b_1, b_2 \in A_2$ si y sólo si $a_1 < a_2$, o bien, si $a_1 = a_2$ entonces $b_1 < b_2$. Podemos agregar la igualdad diciendo que $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ si y sólo si $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$. Demuestra que el orden lexicográfico definido de esta manera es un orden parcial.

1.5.6.- Para el orden lexicográfico definido en el ejercicio anterior, y si $S \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, ¿cuáles son la parejas (a, b) que cumplen con $(a, b) < (4, 2)$?

1.5.7.- Consideremos un conjunto $S = \{a, b, c\}$ y la relación de orden $R = (A, \subseteq)$, donde A consiste de los subconjuntos propios de S.

(a) ¿Es R una relación de orden? Si lo es, ¿total o parcial?
(b) ¿Es una retícula? Justifica.

1.5.8.- Demuestra que si $(A, \preceq)$ es un conjunto parcialmente ordenado que tiene a un elemento máximo α, entonces α es maximal y no existe ningún otro elemento maximal.

1.5.9.- Sea $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ un conjunto y la relación de orden definida como $a \preceq b$ si $a = kb, a, b \in A, k \in \mathbb{N}, k \geqslant 1$, o sea, si a es múltiplo de b.

(a) Demuestra que $(A, \preceq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.
(b) Dibuja el diagrama de Hasse de esta relación.
(c) ¿Tiene esta relación un elemento máximo? Si es así, ¿cuál?
(d) ¿Tiene esta relación un elemento mínimo? Si es así, ¿cuál?
(e) ¿Tiene esta relación elemento(s) maximal(es)? Si es así, ¿cuál(es)?
(f) ¿Tiene esta relación elemento(s) minimal(es)? Si es así, ¿cuál(es)?
(g) ¿Corresponde esta relación a una retícula? Justifica.

1.5.10.- Tomemos el conjunto A consistiendo de las cadenas de tres dígitos binarios, y definimos $s \preceq t$ de la misma manera que en el ejemplo 44. Dibuja el diagrama de Hasse para esta relación de orden.

1.5.11.- Sea $R = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \leqslant)$ donde $(x_1, y_1) \leqslant (x_2, y_2)$ si y sólo si $x_1 \leqslant x_2$ y $y_1 \leqslant y_2$. Demuestra que este es un orden parcial pero no es un orden total.

1.5.12.- Sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos finitos tales que no hay dos conjuntos con el mismo número de elementos, y para dos conjuntos A y B, $A\,R\,B$ si $|A| \leqslant |B|$ (el número de elementos en A, su cardinalidad, es menor o igual que la cardinalidad B).

(a) Demuestra que R es una relación de orden total.
(b) ¿Tiene elemento máximo? Si es así, ¿cuál?
(c) ¿Tiene elemento mínimo? Si es así, ¿cuál?

1.5.13.- Dada una relación R en $A \times B$, la *relación inversa* R^{-1} se define como:

$$yR^{-1}x \quad \text{si y sólo si} \quad xRy.$$

Demuestra que si R es una relación de orden parcial, también lo es R^{-1}.

1.5.14.- ¿Existe un elemento máximo en el conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{Z}^+, |)$? Justifica.

1.5.15.- Un *buen orden* es un orden total en un conjunto A, si y sólo si cualquier subconjunto no vacío de A contiene a un elemento mínimo con respecto a R.

(a) Muestra que todo orden total en un conjunto finito A es un buen orden.
(b) Da un ejemplo de un conjunto infinito con un buen orden.
(c) Muestra que la relación de orden (total) usual $\leqslant$ no constituye un buen orden en $\mathbb{Z}$ o en $\mathbb{R}^+$.

1.5.16.- En un intervalo abierto (x, y) de $\mathbb{R}$,

(a) ¿Tiene elementos máximo y mínimo? Justifica.
(b) ¿Tiene elementos maximal y minimal? Justifica.
(c) Dados dos elementos arbitrarios en el intervalo, ¿existe una cota superior mínima? ¿Existe una cota inferior máxima? Justifica.
(d) Demuestra que si el intervalo es cerrado la respuesta a todas las preguntas anteriores es afirmativa.

Bibliografía

[1] K. Doets and J. van Eijck. *The Haskell Road to Logic, Maths and Programming.* King's Coll. Pub., London, 2004.

[2] John A. Dossey, Albert D. Otto, Lawrence E. Spence, and Charles Vanden Eynden. *Discrete Mathematics.* Pearson/Addison-Wesley, 5-th edition, 2006.

[3] Rowan Garnier and John Taylor. *Discrete Mathematics, Proofs, Structures, and Applications, Third Edition.* CRC Press, A TAYLOR & FRANCIS BOOK, 2010.

[4] Judith L. Gersting. *Mathematical Structures for Computer Science.* Computer Science Press, W.H. Freeman and Company, third edition, 1993.

[5] Winifried Karl Grassman and Jean-Paul Tremblay. *LOGIC AND DISCRETE MATHEMATICS, A Computer Science Perspective.* Prentice-Hall Inc., 1996.

[6] David Gries and Fred B. Schneider. *A Logical Approach to Discrete Mathematics.* Springer-Verlag, 1994.

[7] Jerold W. Grossman. *DISCRETE MATHEMATICS, an introduction to concepts, methods and applications.* Macmillan Publishing Company, 1990.

[8] James L. Hein. *Discrete Structures, Logic, and Computability, Third Edition.* JONES AND BARTLETT PUBLISHERS, 2010.

[9] Thomas Koshy. *Discrete Mathematics with Applications.* Elsevier Academoc Press, 2004.

[10] K.H. Rossen. *Discrete Mathematics and its Applications.* McGraw Hill, 6-th edition, 2006.

Índice