#100

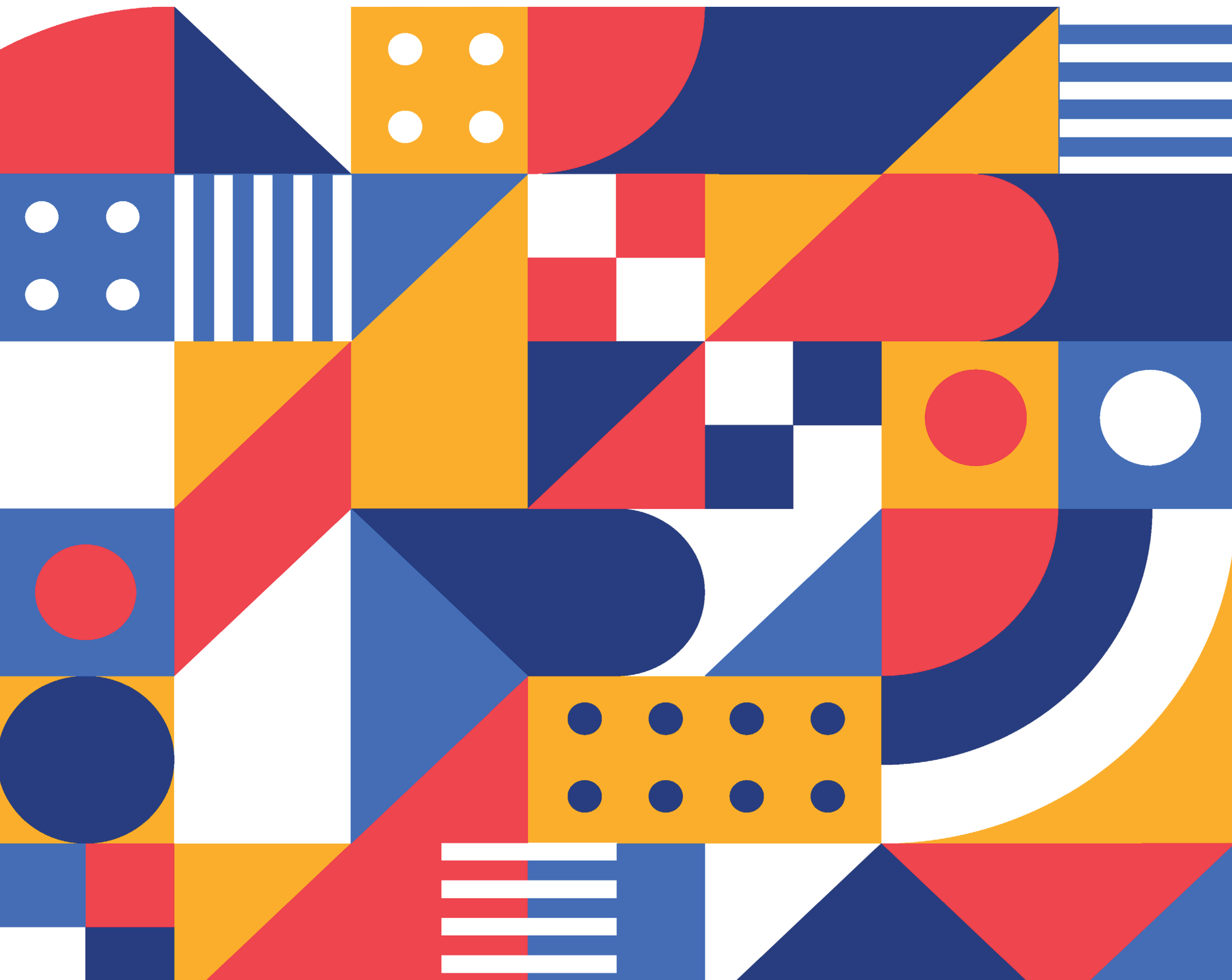
SERIE MATEMÁTICAS

Elsa Puente Vázquez

Propiedades generales de funciones elípticas

VÍNCULOS MATEMÁTICOS

AÑO 2007



Propiedades Generales de Funciones Elípticas

Elsa Puente Vázquez

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM. Marzo, 2013

Nº 100

Impreso en la Coordinación de Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM

Propiedades Generales de Funciones Elípticas

Elsa Puente Vázquez

Universidad Nacional Autónoma de México

Entre los diversos poderes, escogí el saber ...

-Historia del Rey Transparente (Rosa Montero)-

Prefacio

A grandes rasgos, las funciones elípticas son funciones de variable compleja que, en cierto sentido, generalizan a las funciones trigonométricas usuales. En [18], [20] y [15] el lector podrá encontrar información interesante sobre la historia de las funciones elípticas, pero aquí me limito a decir que, a lo largo del siglo XIX, surgió y se desarrolló la llamada *Teoría Clásica de Funciones Elípticas* en los trabajos de Adrien-Marie Legendre (1752-1833), Johann C. F. Gauss (1777-1855), Niels H. Abel (1802-1829), Carl G. J. Jacobi (1804-1851), Évariste Galois (1811-1832) y Karl T. W. Weierstrass (1815-1897), entre otros (ver, por ejemplo, [13], [1] y [7]). En dicha teoría aparece una combinación de temas que eran fundamentales para las Matemáticas de esa época: Teoría de Funciones de Variable Compleja, Geometría y Aritmética.

Estas notas representan una versión corregida y aumentada de la tesina que presenté, en el 2004, para obtener el grado de Maestra en Ciencias Matemáticas por parte de la Universidad Nacional Autónoma de México. ¿ Por qué elegí como tema de dicha tesina a las funciones elípticas ? Por lo siguiente:

•Hace muchos, muchos, años (ver [16]) me encontré frente a frente con el grupo modular

$$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}) := \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})/\{ \pm \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \}$$

Email address: `elsa@matcuer.unam.mx` (Elsa Puente Vázquez)

el cual aparece al analizar al espacio de móduli de superficies de Riemann compactas de género $g = 1$, mejor conocidas como *toros* (ver §2 y §4 de estas notas).

•La función modular $J : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida como

$$\tau \quad \longmapsto \quad \frac{g_2^3(\tau)}{g_2^3(\tau) - 27g_3^2(\tau)}$$

donde $\mathbb{H} := \{\, \tau \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Im}(\tau) \,\}$ y $g_2, g_3 : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ son funciones analíticas en $\mathbb{H}$, se construye de modo que distingue a las distintas clases de equivalencia conforme de *toros* (ver [5]). Esto es,

$$J(\tau) = J(\tau') \quad \text{si y sólo si} \quad \tau' = f(\tau) \text{ para alguna } f \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$$

Las funciones g_2 y g_3 también aparecen en la ecuación diferencial que relaciona a la función pe de Weierstrass y su derivada, a las cuales se les denota por $\wp$ y $\wp'$, respectivamente (ver [2], [11] y §4 de estas notas). Tanto $\wp$ como $\wp'$ son ejemplos de funciones elípticas y, por esta razón, me interesé en estudiar de manera más formal a dicha clase de funciones.

Estas notas sólo pretenden introducir al lector al, desde mi punto de vista, maravilloso tema de las funciones elípticas. Este trabajo está muy alejado de abarcar la totalidad de dicho tema, pero es una amable invitación a que el lector interesado busque más información en las referencias bibliográficas (las cuales son fáciles de conseguir) que aparecen al final de estas notas y en aquellas que, a su vez, se mencionan en dichas referencias.

Asumimos que el lector conoce el material visto en los primeros cursos de Variable Compleja, Topología y Álgebra Moderna. Estas notas están divididas en 6 secciones, la última de las cuales es un Apéndice que contiene los resultados sobre convergencia de sucesiones y series de funciones meromorfas que se han utilizado en §3 y §4. Se incluyen las demostraciones de, prácticamente, todos los resultados que se enuncian en las primeras 5 secciones. Brevemente, el contenido de este trabajo es el siguiente: En §1 y §2 se encuentran las definiciones y resultados sobre funciones doblemente periódicas y retículas que necesitaremos en lo subsecuente. En §3 se presenta una recopilación de las propiedades generales de las funciones elípticas, las cuales utilizaremos intensivamente en §4, en donde discutimos algunos aspectos de la Teoría de Funciones Elípticas formulada por K. Weierstrass. En §5 nos enfocamos por completo a enunciar y demostrar una caracterización, en términos de las función $\wp$ de Weierstrass (y su derivada $\wp'$), de todas las funciones elípticas respecto a una retícula dada.

Para concluir este Prefacio, me gustaría mencionar que, recientemente, tuve la oportunidad de asistir a un excelente minicurso sobre Dinámica de Funciones Elípticas, el cual fue impartido por la Dra. Mónica Moreno Rocha del Centro de Investigación en Matemáticas. Al lector interesado en los aspectos de la dinámica holomorfa de funciones elípticas, le recomiendo ampliamente que contacte a la Dra. Moreno (mmoreno@cimat.mx) para obtener más información.

1. Funciones doblemente periódicas

El primer concepto relevante que necesitamos entender es el de *función doblemente periódica*, lo cual haremos en esta sección. En todo lo que sigue, denotaremos por $\overline{\mathbb{C}}$ a la *esfera de Riemann* (o plano complejo extendido) $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, y por $\mathbb{C}^*$ al *cilindro* (o plano complejo perforado) $\mathbb{C} - \{0\}$.

Definición 1.1. *Sean $f : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$ una función definida en $\mathbb{C}$ y $\omega \in \mathbb{C}$. Decimos que ω es un* periodo *de f si y sólo si $f(z+\omega) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.*

Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ cualquier función definida en $\mathbb{C}$. Definimos

$$\Omega_f := \{\, \omega \in \mathbb{C} \mid \omega \text{ es un periodo de } f \,\}$$

Dado que $f(z+0) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$, tenemos que $0 \in \Omega_f$. Es decir, el conjunto Ω_f siempre es distinto del conjunto vacío. Las funciones definidas en $\mathbb{C}$ que tienen, además, algún periodo distinto de cero, reciben un nombre especial.

Definición 1.2. *Decimos que una función $f : \mathbb{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ definida en $\mathbb{C}$ es una* función periódica *si y sólo si existe $\omega \in \mathbb{C}^*$ tal que $\omega \in \Omega_f$.*

Por ejemplo, $2\pi \in \mathbb{C}^*$ es periodo de las funciones $z \longmapsto cos(z)$ y $z \longmapsto sen(z)$. Otro ejemplo importante de una función periódica es $z \longmapsto exp(z)$, la cual tiene como periodo a $i2\pi \in \mathbb{C}^*$. Por tanto, si $\omega \in \mathbb{C}^*$, entonces la función

$$z \longmapsto exp\left(\frac{i2\pi z}{\omega}\right)$$

es periódica con ω como un periodo.

Lema 1.3. *Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ una función definida en $\mathbb{C}$. Entonces, f es una función constante si y sólo si $\Omega_f = \mathbb{C}$.*

Demostración: Supongamos que f es una función constante. Entonces, existe $c \in \overline{\mathbb{C}}$ tal que $f(z) = c = f(z + \omega)$ para todo $z, \omega \in \mathbb{C}$. Por tanto, $\mathbb{C} \subseteq \Omega_f$ y tenemos que $\Omega_f = \mathbb{C}$. Recíprocamente, si $\Omega_f = \mathbb{C}$, entonces $f(z) = f(z+0) = f(0)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Denotando $a := f(0) \in \overline{\mathbb{C}}$, obtenemos que f es la función constante a. □

Recordamos que, bajo la suma usual de números complejos y con la topología usual, $\mathbb{C}$ forma un grupo topológico abeliano. El siguiente resultado proporciona una caracterización muy útil de los conjuntos de la forma Ω_f.

Lema 1.4. *Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ una función definida en $\mathbb{C}$. Entonces, se cumple lo siguiente:*

(1) Ω_f es un subgrupo aditivo de $\mathbb{C}$.

(2) Si f es meromorfa y no constante, entonces Ω_f es un subgrupo aditivo discreto de $\mathbb{C}$.

Demostración: Dada una función f definida en $\mathbb{C}$ con imagen contenida en $\overline{\mathbb{C}}$, sabemos que $0 \in \Omega_f$. Sean $\omega, \eta \in \Omega_f$. Para cada $z \in \mathbb{C}$, obtenemos que

$$f(z + (\omega + \eta)) = f((z + \omega) + \eta) = f(z + \omega) = f(z) \quad \text{y que}$$

$$f(z - \omega) = f((z - \omega) + \omega) = f(z + (\omega - \omega)) = f(z)$$

Por lo tanto, Ω_f es cerrado bajo la suma y bajo la toma de inversos aditivos en $\mathbb{C}$, y hemos probado (1). Supongamos que f es meromorfa y no constante, y que $\Omega_f \subseteq \mathbb{C}$ no es discreto. Entonces, existe $\omega \in \Omega_f$ tal que ω es punto de acumulación de Ω_f. En consecuencia, existe una sucesión no constante

$\{\, \omega_n \mid n \in \mathbb{N} \,\} \subset \Omega_f$ que converge a ω y, de hecho, podemos elegir a esta sucesión de modo que $\omega_n \neq \omega$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$f(\omega_n) = f(\omega_n + \omega) = f(\omega)$$

Si $f(\omega) = \infty$, entonces f tiene una sucesión convergente de polos en $\mathbb{C}$, lo cual contradice que f es meromorfa. Por lo tanto, $f(\omega) \neq \infty$. Definimos $F : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$ como

$$F(z) = f(z) - f(\omega)$$

para cada $z \in \mathbb{C}$. Entonces, F es meromorfa y $\{\, \omega_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ es una sucesión convergente de ceros de F en $\mathbb{C}$. Esto implica que F es idénticamente cero. Es decir, f es la función constante $c := f(\omega)$, lo cual es una contradicción. Concluimos que Ω_f es discreto en $\mathbb{C}$, y hemos probado (2). $\square$

El siguiente resultado proporciona una clasificación completa de todos los subgrupos aditivos discretos de $\mathbb{C}$. La primera demostración de este resultado, de la cual se tenga un registro escrito, la proporcionó Jacobi en [10] (ver [2], [11] y [15]).

Teorema 1.5. *Sea Ω un subgrupo aditivo discreto de $\mathbb{C}$. Entonces, se cumple una y sólo una de las siguientes afirmaciones:*

(1) $\Omega = \{\, 0 \,\}$.

(2) $\Omega = \mathbb{Z}\omega := \{\, n\omega \mid n \in \mathbb{Z} \,\}$ *para algún* $\omega \in \mathbb{C}^*$.

(3) $\Omega = \mathbb{Z}\omega \oplus \mathbb{Z}\eta := \{\, n\omega + m\eta \mid n, m \in \mathbb{Z} \,\}$ *para algunos* $\omega, \eta \in \mathbb{C}^*$ *linealmente independientes sobre* $\mathbb{R}$ *(esto es,* $\frac{\omega}{\eta} \notin \mathbb{R}$*).*

Demostración: Es claro que $\{\, 0 \,\}$, $\mathbb{Z}\omega$ con $\omega \in \mathbb{C}^*$, y $\mathbb{Z}\omega \oplus \mathbb{Z}\eta$ con $\omega, \eta \in \mathbb{C}^*$ linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$, son subgrupos aditivos discretos de $\mathbb{C}$, y que son distintos por pares. Para cada $\xi \in \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{R}$ con $0 < r$, denotaremos

$$D(\xi, r) := \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z - \xi| < r \,\}$$

Sea Ω cualquier subgrupo aditivo discreto de $\mathbb{C}$. Sabemos que $0 \in \Omega$. Si $\Omega = \{\, 0 \,\}$, entonces tenemos la afirmación (1). Supongamos, entonces, que Ω contiene elementos distintos de 0. Dado que $\Omega \subset \mathbb{C}$ es discreto, sabemos que existe $0 < \epsilon$ tal que $\sigma \notin D(0, \epsilon)$ para todo $\sigma \in \Omega - \{\, 0 \,\}$. Sean $\sigma, \sigma' \in \Omega - \{\, 0 \,\}$

tales que $\sigma \neq \sigma'$. Dado que Ω es un subgrupo aditivo de $\mathbb{C}$, tenemos que $\sigma' - \sigma \in \Omega - \{0\}$. Por lo tanto, $\sigma' - \sigma$ no pertenece a $D(0, \epsilon)$. En consecuencia, se cumple que

$$D\left(\sigma, \frac{\epsilon}{2}\right) \cap D\left(\sigma', \frac{\epsilon}{2}\right) = \varnothing$$

para todo $\sigma, \sigma' \in \Omega$ distintos. Sin embargo, podemos elegir $0 < \rho$ tal que

$$D\left(\sigma, \frac{\epsilon}{2}\right) \subset D(0, \rho)$$

para algún $\sigma \in \Omega - \{0\}$. Dado que el área de $D(0, \rho)$ es $\pi\rho^2 < \infty$, sabemos que el conjunto

$$B := \left\{ \sigma \in \Omega - \{0\} \mid D\left(\sigma, \frac{\epsilon}{2}\right) \subset D(0, \rho) \right\}$$

es finito. Por lo tanto, existe $\omega \in B \subset \mathbb{C}^*$ tal que $|\omega| < |\sigma|$ para todo $\sigma \in B$ con $\sigma \neq \pm\omega$. Dado que $\omega \in \Omega - \{0\}$, tenemos que $\mathbb{Z}\omega := \{ n\omega \mid n \in \mathbb{Z} \}$ es un subgrupo aditivo no trivial de Ω. Sea $L := \{ s\omega \mid s \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{C}$ la línea real generada por ω. Entonces, $\mathbb{Z}\omega \subseteq \Omega \cap L$. Dado que L no es un subconjunto discreto de $\mathbb{C}$, tenemos que $\Omega \neq L$. Existen dos posibilidades:

(I) $\Omega \subset L$. Supongamos que $\Omega \neq \mathbb{Z}\omega$. Entonces, existe $\sigma \in \Omega$ tal que $\sigma \neq n\omega$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Dado que $\sigma \in L$, tenemos que existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $\sigma = s\omega$. Por tanto, $s \notin \mathbb{Z}$ y sabemos que existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $m < s < m + 1$. En consecuencia,

$$0 < |\sigma - m\omega| = |(s - m)\omega| < |\omega|$$

Dado que $m\omega, \sigma \in \Omega$ y que Ω es un subgrupo aditivo de $\mathbb{C}$, tenemos que $\sigma - m\omega \in \Omega$, lo cual contradice nuestra elección de $\omega \in B \subset \mathbb{C}^*$. Concluimos que $\Omega = \mathbb{Z}\omega$ y, por tanto, tenemos la afirmación (2).

(II) $\Omega \not\subseteq L$. Utilizando un procedimiento análogo al que seguimos para elegir a ω, podemos elegir $\eta \in \Omega$ tal que $\eta \notin L$ y tal que $|\eta| < |\sigma|$ para todo $\sigma \in \Omega$ con $\sigma \neq \pm\eta$ y $\sigma \notin L$. Dado que $\eta \notin L$, tenemos que $\eta \neq s\omega$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Por tanto, $\omega, \eta \in \mathbb{C}^*$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$. Es decir, $\{ \omega, \eta \}$ es una base para $\mathbb{C}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Dado que $\omega, \eta \in \Omega$, obtenemos que $\mathbb{Z}\omega \oplus \mathbb{Z}\eta := \{ n\omega + m\eta \mid n, m \in \mathbb{Z} \}$ es un subgrupo no trivial de Ω.

Supongamos que $\Omega \neq \mathbb{Z}\omega \oplus \mathbb{Z}\eta$. Entonces, existe $\sigma \in \Omega$ tal que $\sigma \neq n\omega + m\eta$ para todo $n, m \in \mathbb{Z}$. Dado que $\sigma \in \mathbb{C}$, sabemos que existen $s, t \in \mathbb{R}$ no ambos enteros y tales que $\sigma = s\omega + t\eta$. Dado que $\sigma, \omega, \eta \in \Omega$, podemos sumar a σ un elemento adecuado $n\omega + m\eta$ de $\mathbb{Z}\omega \oplus \mathbb{Z}\eta$ para obtener

$$\sigma' = s'\omega + t'\eta \in \Omega \quad \text{donde} \quad s', t' \in \mathbb{R} \quad \text{son tales que} \quad |s'|, |t'| \leq \frac{1}{2}$$

(a) Si $t' = 0$, entonces $\sigma' = s'\omega \in L$. Tenemos que $|\sigma'| = |s'\omega| < |\omega|$. Por la minimalidad de $|\omega|$, obtenemos que $\sigma' = 0 \in \mathbb{Z}\omega \oplus \mathbb{Z}\eta$. En consecuencia, $\sigma \in \mathbb{Z}\omega \oplus \mathbb{Z}\eta$, lo cual contradice nuestra elección de σ. Concluimos que $t' \neq 0$.

(b) Si $s' = 0$, entonces $\sigma' = t'\eta$. Tenemos que $\sigma' \notin L$ y que $|\sigma'| = |t'\eta| < |\eta|$. Por la minimalidad de $|\eta|$, obtenemos que $\sigma' = 0 \in \mathbb{Z}\omega \oplus \mathbb{Z}\eta$. En consecuencia, $\sigma \in \mathbb{Z}\omega \oplus \mathbb{Z}\eta$, lo cual contradice nuestra elección de σ. Concluimos que $s' \neq 0$.

Por (a) y (b), obtenemos que $s'\omega, t'\eta \neq 0$ y, por tanto, son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$. Entonces, $\sigma' \notin L$ y tenemos que

$$|\sigma'| < |s'||\omega| + |t'||\eta| < (|s'| + |t'|)|\eta| \leq |\eta|$$

lo cual contradice nuestra elección de η. Concluimos que $\Omega = \mathbb{Z}\omega \oplus \mathbb{Z}\eta$, con lo cual tenemos la afirmación (3). $\square$

Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ una función definida en $\mathbb{C}$. Si $\Omega_f = \mathbb{Z}\omega$ para algún $\omega \in \mathbb{C}^*$, entonces Ω_f es isomorfo (como grupo abeliano discreto) a $\mathbb{Z}$. Si $\Omega_f = \mathbb{Z}\omega \oplus \mathbb{Z}\eta$ para algunos $\omega, \eta \in \mathbb{C}^*$ linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$, entonces Ω_f es isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Definición 1.6. *Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ una función no constante definida en $\mathbb{C}$.*

(a) Decimos que f es una función **simplemente periódica** *si y sólo si $\Omega_f \cong \mathbb{Z}$.*

(b) Decimos que f es una función **doblemente periódica** *si y sólo si $\Omega_f \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.*

Observación 1.7. *Si $g : \mathbb{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ es una función constante definida en $\mathbb{C}$, entonces sabemos que $\Omega_g = \mathbb{C}$. En particular, $n\omega + m\eta \in \Omega_g$ para todo $n, m \in \mathbb{Z}$ y para todo $\omega, \eta \in \mathbb{C}^*$ linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$. Es en este sentido que pensamos en g como una función simplemente y doblemente periódica (ver §3 y §5 de estas notas).*

Recomendamos la lectura de [2] y [11] para un estudio detallado de las funciones simplemente periódicas. En todo lo que sigue, estaremos interesados únicamente en las funciones doblemente periódicas.

2. Retículas

Dado que nos interesa estudiar funciones doblemente periódicas, en esta sección discutiremos algunos aspectos sobre conjuntos de la forma Ω_f donde f es una función (no constante) doblemente periódica. Es decir, sobre conjuntos de la forma $\Omega = \mathbb{Z}\omega \oplus \mathbb{Z}\eta$ donde $\omega, \eta \in \mathbb{C}^*$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$. Sabemos que estos conjuntos de periodos son isomorfos (como subgrupos aditivos discretos de $\mathbb{C}$) a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y, por tanto, son conjuntos numerables.

Definición 2.1. *Sean $\omega, \eta \in \mathbb{C}^*$ linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$. Decimos que el subgrupo aditivo discreto $\mathbb{Z}\omega \oplus \mathbb{Z}\eta$ es una **retícula** o un **módulo discreto** en $\mathbb{C}$.*

Dada una retícula $\Omega = \mathbb{Z}\omega \oplus \mathbb{Z}\eta$, sabemos que $\{\omega, \eta\}$ es una base para $\mathbb{C}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Además, dado $\varsigma \in \Omega$, sabemos que ς se escribe de manera única como combinación lineal, con coeficientes enteros, de ω y η.

Definición 2.2. *Sea $\Omega = \mathbb{Z}\omega \oplus \mathbb{Z}\eta$ una retícula. Entonces, decimos que Ω está **generada por** ω y η. Equivalentemente, decimos que $\{\omega, \eta\}$ es una **base** para Ω. Denotamos este hecho por $\Omega = \Omega(\omega, \eta)$.*

El siguiente resultado proporciona una caracterización completa de todas las parejas de elementos de una retícula Ω que forman una base para la misma.

Teorema 2.3. *Sea $\Omega = \Omega(\omega, \eta)$ una retícula. Sean $\omega' = a\omega + b\eta$ y $\eta' = c\omega + d\eta$ dos elementos de Ω. Entonces, $\{\omega', \eta'\}$ es una base para Ω si y sólo si se cumple que $ad - bc = \pm 1$.*

Demostración: Definimos $A := \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Entonces, $A \in \mathcal{M}(2,\mathbb{Z})$, $\det(A) = ad - bc$ y $\binom{\omega'}{\eta'} = A\binom{\omega}{\eta}$.

Supongamos que $\{\,\omega', \eta'\,\}$ es una base para Ω. Dado que $\omega, \eta \in \Omega$, sabemos que existe $B \in \mathcal{M}(2,\mathbb{Z})$ tal que $\binom{\omega}{\eta} = B\binom{\omega'}{\eta'}$. En consecuencia,

$$\begin{pmatrix} \omega \\ \eta \end{pmatrix} = BA \begin{pmatrix} \omega \\ \eta \end{pmatrix}$$

Dado que $\{\,\omega, \eta\,\}$ es una base para $\mathbb{C}$ como espacio vectorial real, la igualdad anterior implica que $BA \in \mathcal{M}(2,\mathbb{Z})$ induce a la transformación identidad en $\mathbb{C}$. Por lo tanto, $\det(B)\det(A) = \det(BA) = 1$. Dado que los coeficientes tanto de B como de A son números enteros, necesariamente ocurre que $ad - bc = \det(A) = \det(B) = \pm 1$.

Recíprocamente, supongamos que $ad - bc = \pm 1$. Entonces, A es una matriz invertible y, por tanto, $\{\,\omega', \eta'\,\} = A\left(\{\,\omega, \eta\,\}\right)$ es una base para $\mathbb{C}$ como espacio vectorial real. En particular, $\omega', \eta' \in \mathbb{C}^*$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$. Sea $\varsigma = n\omega + m\eta \in \Omega$. Dado que, dependiendo del signo de $ad - bc$, tenemos que

$$\begin{pmatrix} \omega \\ \eta \end{pmatrix} = \pm \left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right) \begin{pmatrix} \omega' \\ \eta' \end{pmatrix}$$

obtenemos que $\varsigma = n'\omega' + m'\eta'$, donde $n' = \pm(nd - mc)$ y $m' = \pm(ma - nb)$ están determinados de manera única por $a, b, c, d, n, m \in \mathbb{Z}$. Concluimos que $\{\,\omega', \eta'\,\}$ es una base para Ω. $\square$

A las transformaciones lineales $A : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ donde $A \in \mathcal{M}(2,\mathbb{Z})$ es tal que $\det(A) = \pm 1$ se acostumbra llamarlas **transformaciones unimodulares**. Las transformaciones unimodulares cuyo determinante es igual a 1 forman un grupo bajo el producto usual de matrices (equivalentemente, bajo la composición usual de funciones), el cual se denota por $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. Al grupo

$$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}) := \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})/\{\ \pm \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\ \}$$

se le conoce como el **grupo modular** (ver [5], [14], [8], [2] y [15]).

Definición 2.4. *Sean $\Omega = \Omega(\omega, \eta)$ una retícula y $z, z' \in \mathbb{C}$. Decimos que z y z' son* **congruentes módulo** Ω *si y sólo si $z' - z \in \Omega$. Denotamos este hecho* *por $z \equiv z'$ (mód Ω).*

Por ejemplo, dados una retícula $\Omega = \Omega(\omega, \eta)$ y $z \in \mathbb{C}$, tenemos que $z \equiv -z$ (mód Ω) si y sólo si $z = \frac{n\omega+m\eta}{2} = n\frac{\omega}{2} + m\frac{\eta}{2}$ para algunos $n, m \in \mathbb{Z}$ (utilizaremos este hecho en §4).

Sea $\Omega = \Omega(\omega, \eta)$ una retícula. Entonces, la congruencia módulo Ω define una relación de equivalencia en $\mathbb{C}$. Para cada $z \in \mathbb{C}$, denotamos por $[z]$ a la clase de equivalencia (o de congruencia) de z. Es decir,

$$[z] = \{\, z + (n\omega + m\eta) \mid n, m \in \mathbb{Z} \,\} = z + \Omega$$

Consideremos al conjunto de clases de equivalencia

$$\mathbb{T}_\Omega := \mathbb{C}/\Omega = \{\, [z] \mid z \in \mathbb{C} \,\}$$

Bajo la suma usual de clases de equivalencia, $\mathbb{T}_\Omega$ forma un grupo abeliano. Definimos $\pi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{T}_\Omega$ como $z \longmapsto [z]$. La función π (a la cual se acostumbra llamar **proyección canónica**) nos permite inducir una topología en $\mathbb{T}_\Omega$, declarando que $U \subseteq \mathbb{T}_\Omega$ es abierto si y sólo si $\pi^{-1}(U)$ es abierto en $\mathbb{C}$ (con la topología usual). La intención al dotar a $\mathbb{T}_\Omega$ con esta topología, es forzar a que π sea una función continua y abierta y, por tanto, que $\mathbb{T}_\Omega$ sea un espacio de Hausdorff. Además, se puede probar (ver [6]) que $\mathbb{T}_\Omega$ es una superficie de Riemann compacta de género $g = 1$ (a la cual se acostumbra llamar **toro**) y que $\pi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{T}_\Omega$ es una aplicación cubriente no ramificada y con una cantidad numerable de hojas.

Más adelante, discutiremos otros aspectos de las superficies de la forma $\mathbb{T}_\Omega$. Para concluir esta sección, damos la siguiente definición, la cual será de gran utilidad en la siguiente sección cuando demostremos algunas propiedades generales de las llamadas *funciones elípticas.*

Definición 2.5. *Sean Ω una retícula y $P \subset \mathbb{C}$ un conjunto no vacío, cerrado y conexo. Decimos que P es una* **región fundamental** *para Ω si y sólo si se cumple lo siguiente:*

(1) Para todo $z \in \mathbb{C}$ existe, al menos, un punto $\xi \in P$ tal que $z \equiv \xi$ (mód Ω).

(2) Para cualesquiera ξ y ξ' en el interior de P y distintos, **no** *ocurre que $\xi \equiv \xi'$ (mód Ω).*

Por ejemplo, si $\Omega = \Omega(\omega, \eta)$ es una retícula, entonces la región acotada de $\mathbb{C}$ cuya frontera es el cuadrilátero con vértices en $0, \omega, \omega + \eta$ y η, es una región fundamental para Ω. Observamos que si P es una región fundamental para Ω y si $b \in \mathbb{C}$, entonces el conjunto

$$P_b := P + b = \{\, \xi + b \mid \xi \in P \,\}$$

también es una región fundamental para Ω (ver [11]). Utilizaremos este hecho cuando sea conveniente evitar o incluir ciertos puntos en la frontera topológica de una región fundamental dada.

3. Funciones elípticas

Una vez que tenemos a nuestra disposición los conceptos de *función doblemente periódica* y el de *retícula*, en esta sección estamos en condiciones de iniciar la discusión de aquello que da título a estas notas: las propiedades generales de funciones elípticas.

Sean Ω una retícula y $f : \mathbb{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ una función definida en $\mathbb{C}$ tal que $\Omega \subseteq \Omega_f$. Entonces, para todo $z \in \mathbb{C}$, se cumple que $f(z + \varsigma) = f(z)$ para cada $\varsigma \in \Omega$. En este caso, decimos que f es **doblemente periódica respecto a** Ω (comparar con la Definición 1.6 y la Observación 1.7).

Definición 3.1. *Sean Ω una retícula y $f : \mathbb{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ una función definida en $\mathbb{C}$. Decimos que f es* ***elíptica respecto a*** *Ω si y sólo si f es meromorfa y doblemente periódica respecto a Ω.*

Observación 3.2. *Como consecuencia inmediata de la definición anterior, tenemos que toda función constante (definida en $\mathbb{C}$) es elíptica respecto a cualquier retícula.*

Para cada retícula $\Omega \subset \mathbb{C}$, definimos

$$\mathbb{E}(\Omega) := \{\, f : \mathbb{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}} \mid f \text{ es elíptica respecto a } \Omega \,\}$$

Sea Ω una retícula. Consideremos a $f \in \mathbb{E}(\Omega)$, al conjunto $\mathbb{T}_\Omega$ de clases de congruencia módulo Ω y a $P \subset \mathbb{C}$ una región fundamental para Ω. Si $a \in \mathbb{C}$ y $z \in [a]$, entonces existe $\varsigma \in \Omega$ tal que $z = a + \varsigma$. Por tanto,

$f(z) = f(a+\varsigma) = f(a)$. Es decir, f es constante en cada clase de congruencia módulo Ω. En consecuencia,

$$f(P) = \{\, f(\xi) \mid \xi \in P \,\} = \{\, f(a) \mid [a] \in \mathbb{T}_\Omega \,\} = f(\mathbb{T}_\Omega)$$

$$\text{y} \quad f(\mathbb{C}) = \{\, f(z) \mid z \in \mathbb{C} \,\} = \{\, f(a) \mid [a] \in \mathbb{T}_\Omega \,\} = f(\mathbb{T}_\Omega)$$

Por lo tanto, podemos considerar a toda función $f \in \mathbb{E}(\Omega)$ como una función **holomorfa** definida en el toro $\mathbb{T}_\Omega$. Recíprocamente, toda función holomorfa g definida en $\mathbb{T}_\Omega$ se puede pensar como un elemento de $\mathbb{E}(\Omega)$ (ver [6]). Si $f \in \mathbb{E}(\Omega)$ es no constante y $c \in \overline{\mathbb{C}}$, entonces el conjunto

$$\{\, [a] \in \mathbb{T}_\Omega \mid f([a]) = c \,\}$$

es finito y consiste sólo de puntos aislados (recuerde la manera en la que inducimos una topología en $\mathbb{T}_\Omega$ en la sección anterior). Además, cada una de las soluciones de la ecuación $f([a]) = c$ tiene multiplicidad finita. Esta breve discusión nos permite dar la siguiente

Definición 3.3. *Sean Ω una retícula y $f \in \mathbb{E}(\Omega)$. A la suma de las multiplicidades de todas las soluciones en $\mathbb{T}_\Omega$ de la ecuación $f([a]) = \infty$ se le llama el **orden** de f **respecto a** Ω, y lo denotamos por $ord(f)$.*

En virtud de la Observación 3.2, un problema muy importante e interesante es el de construir explícitamente funciones elípticas **no** constantes. Para resolver dicho problema, consideraremos primero algunas propiedades básicas que debe cumplir toda función elíptica.

Lema 3.4. *Sean Ω una retícula y $f \in \mathbb{E}(\Omega)$. Entonces, f es constante si y sólo si $ord(f) = 0$.*

Demostración: Sabemos que $f : \mathbb{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ es una función meromorfa (definida en $\mathbb{C}$). Si f es constante, entonces f no tiene polos en $\mathbb{C}$. Esto implica que $ord(f) = 0$.

Recíprocamente, si $ord(f) = 0$, entonces f no tiene polos en $\mathbb{C}$. Por lo tanto, f es una función entera. Dado que $\mathbb{T}_\Omega$ es compacto y dado que $f(\mathbb{C}) = f(\mathbb{T}_\Omega)$, obtenemos que f está acotada en $\mathbb{C}$. Por el Teorema de Liouville, concluimos que f es una función constante. $\square$

Observación 3.5. *Recordemos que si $f : \mathbb{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ es una función meromorfa definida en $\mathbb{C}$, y si $a \in \mathbb{C}$ es un polo de f de orden k, entonces existen $U \subseteq \mathbb{C}$*

vecindad abierta de a y constantes $c_j \in \mathbb{C}$, con $-k \leq j \in \mathbb{Z}$, tales que $c_{-k} \neq 0$ y $f(z) = \sum_{j=-k}^{\infty} c_j(z-a)^j$ para todo $z \in U$. En estas circunstancias, decimos que

$$\sum_{j=-k}^{-1} c_j(z-a)^j$$

*es la **parte principal** de f en a (ver, por ejemplo, §4.5 de [2] o §1.3 de [11]).*

Corolario 3.6. *Sean Ω una retícula y $f, g \in \mathbb{E}(\Omega)$. Suponga que f y g tienen polos en los mismos puntos de $\mathbb{C}$ y con las mismas partes principales en dichos puntos. Entonces, existe una constante $c \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = g(z) + c$ para todo $z \in \mathbb{C}$.*

Demostración: Definimos $h : \mathbb{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ como $h(z) = f(z) - g(z)$ para cada $z \in \mathbb{C}$. Entonces, $h \in \mathbb{E}(\Omega)$ y h es entera. Por el Lema 3.4, existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $h(z) = c$ para todo $z \in \mathbb{C}$. En consecuencia, $f(z) = g(z) + c$ para todo $z \in \mathbb{C}$. $\square$

En pocas palabras, el Corolario 3.6 nos dice que, salvo constantes (complejas) aditivas, las funciones elípticas están determinadas por sus partes principales.

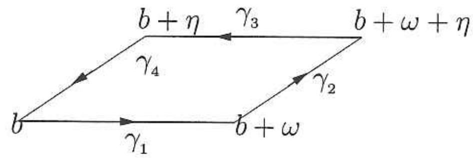
Corolario 3.7. *Sean Ω una retícula y $f, g \in \mathbb{E}(\Omega)$. Suponga que f y g tienen ceros y polos en los mismos puntos de $\mathbb{C}$ y con las mismas multiplicidades. Entonces, existe una constante $b \in \mathbb{C}^*$ tal que $f(z) = bg(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.*

Demostración: Si g es idénticamente cero, entonces f es idénticamente cero también. Por tanto, para todo $b \in \mathbb{C}^*$, tenemos que $f(z) = bg(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Supongamos, entonces, que g no es la constante cero. Por tanto, f tampoco se anula idénticamente y consideramos a la función $\phi : \mathbb{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ definida como $\phi(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Entonces, $\phi \in \mathbb{E}(\Omega)$ y $ord(\phi) = 0$. Por el Lema 3.4, obtenemos que ϕ es la función constante b, para algún $b \in \mathbb{C}$. Dado que $f(z) = bg(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$, y que f no es la función constante cero, concluimos que $b \in \mathbb{C}^*$. $\square$

Dado que toda función elíptica es meromorfa, una cuestión importante es la de conocer el valor de la suma de los residuos de dicha función. El siguiente resultado resuelve, de una manera muy agradable, dicha cuestión.

Proposición 3.8. *Sean $\Omega = \Omega(\omega, \eta)$ una retícula y $f \in \mathbb{E}(\Omega)$. Entonces, la suma de los residuos de f es igual a cero.*

Demostración: Sea $b \in \mathbb{C}$ tal que la frontera de la región fundamental (para Ω) P_b dada por



no contiene a ningún polo de f. Entonces, para calcular la suma de los residuos de f en $\mathbb{C}$, basta con calcular la suma de los residuos de f en el interior de P_b. Dado que la frontera ∂P_b es una curva cerrada, rectificable, homóloga a 0 en $\mathbb{C}$, y dado que f es analítica en ∂P_b, el Teorema del Residuo implica que la suma de los residuos de f es igual a

$$\frac{1}{i2\pi}\int_{\partial P_b} f(z)dz = \sum_{j=1}^{4}\left(\int_{\gamma_j} f(z)dz\right)$$

Dado que $-\omega$ y η son periodos de f, obtenemos que (ver figura anterior)

$$\int_{\gamma_3} f(z)dz = -\int_{\gamma_1+\eta} f(z+\eta)d(z+\eta) = -\int_{\gamma_1} f(z)dz$$

$$\text{y que} \quad \int_{\gamma_4} f(z)dz = -\int_{\gamma_2-\omega} f(z-\omega)d(z-\omega) = -\int_{\gamma_2} f(z)dz$$

Por lo tanto, $\frac{1}{i2\pi}\int_{\partial P_b} f(z)dz = 0$ y hemos probado el resultado. □

Una consecuencia muy importante de la Proposición 3.8 es el siguiente

Corolario 3.9. *No existen funciones elípticas de orden uno.*

Demostración: Sea Ω cualquier retícula y supongamos que existe $f \in \mathbb{E}(\Omega)$ tal que $ord(f) = 1$. Entonces, existe una única clase de congruencia de polos de f, digamos $[b] \in \mathbb{T}_\Omega$, y dichos polos son simples. Sea $P \subset \mathbb{C}$ una región fundamental para Ω tal que su frontera ∂P no contiene a ningún polo de f. Esto implica que existen $\xi \in [b]$ tal que $\xi \in P - \partial P$ y $V \subset P$ vecindad abierta de ξ tales que, para todo $z \in V$, se cumple que

$$f(z) = \sum_{j=-1}^{\infty} a_j(z-\xi)^j$$

donde $a_j \in \mathbb{C}$ para todo j, y $a_{-1} \neq 0$. Por lo tanto, la suma de los residuos de f es igual a a_{-1}. Por la Proposición 3.8, obtenemos que $a_{-1} = 0$, lo cual es una contradicción. Concluimos que no existen funciones elípticas de orden uno. $\square$

Sean Ω una retícula y $f \in \mathbb{E}(\Omega)$. Entonces, f es una función meromorfa definida en $\mathbb{C}$ y, por tanto, su derivada f' también lo es. Nos preguntamos, ahora, si dicha derivada es elíptica respecto a Ω. Es decir, nos interesa determinar si f' es doblemente periódica respecto a Ω. El siguiente resultado responde esta cuestión.

Lema 3.10. *Sean Ω una retícula y $f \in \mathbb{E}(\Omega)$. Entonces, se cumple lo siguiente:*

(1) $f' \in \mathbb{E}(\Omega)$.

(2) Los únicos polos de la función $\ell := \frac{f'}{f}$ son los ceros y polos de la función f, y dichos polos son simples.

Demostración: Sabemos que f' es una función meromorfa en $\mathbb{C}$. Para todo $z \in \mathbb{C}$ y $\varsigma \in \Omega$, tenemos que

$$f'(z+\varsigma) = lim_{h\longrightarrow 0}\frac{f((z+\varsigma)+h) - f(z+\varsigma)}{h}$$

$$= lim_{h\longrightarrow 0}\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z)$$

Por lo tanto, f' es doblemente periódica respecto a Ω. Es decir, $f' \in \mathbb{E}(\Omega)$ y hemos probado (1). Sabemos que los polos de f' coinciden con aquellos de f. Dado que los polos de la función $\ell := \frac{f'}{f}$ son los ceros de f y los polos de f', tenemos que los únicos polos de ℓ son los ceros y los polos de f. Verifiquemos que dichos polos son simples. Sea $P \subset \mathbb{C}$ una región fundamental para Ω tal que su frontera ∂P no contiene a ningún cero ni a ningún polo de la función f.

(I) Supongamos que $\xi \in P - \partial P$ es un cero de multiplicidad k de f. Entonces, existe $V \subset P$ vecindad abierta de ξ tal que, para todo $z \in V$, se cumple que

$$\ell(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z-\xi} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

donde $g : V \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función analítica en V y $g(\xi) \neq 0$. Por lo tanto, ξ es un polo simple (con residuo k) de la función ℓ.

(II) Supongamos que $\chi \in P - \partial P$ es un polo de multiplicidad k de f. Entonces, existe $U \subset P$ vecindad abierta de χ tal que, para todo $z \in U$, se cumple que

$$\ell(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-k}{z - \chi} + \frac{h'(z)}{h(z)}$$

donde $h : U \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función analítica en U y $h(\chi) \neq 0$. Por lo tanto, χ es un polo simple (con residuo $-k$) de la función ℓ.

Por (I) y (II), hemos probado (2). $\square$

En el Corolario 3.9 establecimos la no existencia de funciones elípticas de orden uno. Todavía no hemos demostrado la existencia de funciones elípticas no constantes (las cuales, necesariamente, deberán tener orden mayor o igual que 2), pero los siguientes dos resultados nos proporcionan información sobre la manera en la que deben comportarse dichas funciones.

Proposición 3.11. *Sean Ω una retícula y $f \in \mathbb{E}(\Omega)$ no constante. Entonces, f toma cada valor $c \in \overline{\mathbb{C}}$ exactamente $N = ord(f)$ veces.*

Demostración: Sea $c \in \overline{\mathbb{C}}$. Consideremos los tres posibles casos:

(1) Si $c = \infty$, entonces, por definición de N, sabemos que f toma el valor ∞ exactamente N veces.

(2) Si $c = 0$, entonces consideramos a la función $\ell := \frac{f'}{f}$, la cual pertenece a $\mathbb{E}(\Omega)$ por el Lema 3.10. Sea $P \subset \mathbb{C}$ una región fundamental para Ω tal que su frontera ∂P no contiene a ningún cero ni a ningún polo de ℓ. Sea $\{\, \xi_j \mid 1 \leq j \leq s \,\} \subset P - \partial P$ el conjunto de todos los distintos ceros de f en P, cada uno de ellos con correspondiente multiplicidad μ_j. Sea $\{\, \chi_j \mid 1 \leq j \leq r \,\} \subset P - \partial P$ el conjunto de todos los distintos polos de f en P, cada uno de ellos con correspondiente multiplicidad ν_j. Entonces, $N = \sum_{j=1}^{r} \nu_j$. Por el Lema 3.10 y la Proposición 3.8, obtenemos que

$$\sum_{j=1}^{s} \mu_j - \sum_{j=1}^{r} \nu_j = 0$$

Por lo tanto, $N = \sum_{j=1}^{s} \mu_j$, y f toma el valor 0 exactamente N veces.

(3) Si $c \in \mathbb{C}^*$, entonces consideramos a la función $h : \mathbb{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ definida como $h(z) = f(z) - c$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Entonces, $h \in \mathbb{E}(\Omega)$ es no constante y $ord(h) = ord(f) = N$. Por el inciso anterior, obtenemos que h toma el valor 0 exactamente N veces. En consecuencia, f toma el valor c exactamente N veces, y tenemos el resultado. $\square$

Una consecuencia inmediata de la proposición anterior es el

Corolario 3.12. *Sean Ω una retícula y $f \in \mathbb{E}(\Omega)$ no constante. Entonces, f tiene tantos ceros como polos en $\mathbb{C}$.*

Terminamos esta sección utilizando lo que hemos aprendido sobre funciones elípticas, y los resultados contenidos en §6 de estas notas, para demostrar la existencia de funciones elípticas no constantes.

Teorema 3.13. *Sean Ω una retícula y $N \in \mathbb{N}$ con $3 \leq N$. Definimos $F_N : \mathbb{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ como*

$$F_N(z) = \sum_{\varsigma \in \Omega} \frac{1}{(z-\varsigma)^N}$$

Entonces, $F_N \in \mathbb{E}(\Omega)$ y $ord(F_N) = N$.

Demostración: Para cada $\varsigma \in \Omega$, definimos $g_\varsigma : \mathbb{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ como

$$z \longmapsto \frac{1}{(z-\varsigma)^N}$$

Sea $K \subset \mathbb{C}$ compacto y tal que $K \cap \Omega = \varnothing$. Entonces, para cada $\varsigma \in \Omega$, tenemos que g_ς es una función analítica y acotada en K. Dado que K es un conjunto acotado, obtenemos que $2|z| \leq |\varsigma|$ para todo $z \in K$ y, salvo un número finito, para todo $\varsigma \in \Omega$. Definimos

$$A_K := \{ \varsigma \in \Omega \mid 2|z| \leq |\varsigma| \text{ para todo } z \in K \}$$

Entonces, para todo $z \in K$ y para todo $\varsigma \in A_K$, se cumple que

$$\frac{|\varsigma|}{2} \leq |\varsigma| - |z| \leq |z - \varsigma|$$

Esto implica (ver Definición 6.1) que

$$|g_\varsigma|_K = sup\{\, |g_\varsigma(z)| \mid z \in K \,\} \leq \left(\frac{2}{|\varsigma|}\right)^N$$

para todo $\varsigma \in A_K$. Dado que $2 < N$, el Lema 6.7 implica que la serie

$$\sum_{\varsigma \in \Omega} |g_\varsigma|_K$$

converge en $\mathbb{R}$. Por el Criterio M de Weierstrass (ver Teorema 6.5), tenemos que la serie

$$\sum_{\varsigma \in \Omega} g_\varsigma = F_N$$

converge uniformemente en K. Recordando que Ω es un conjunto numerable, el Teorema 6.6 implica que F_N es una función analítica en $\mathbb{C} - \Omega$. Tenemos que los únicos polos de F_N son los puntos $\varsigma \in \Omega$ (es decir, la clase de congruencia $[0] \in \mathbb{T}_\Omega$), y que cada uno de dichos polos tiene multiplicidad N. En consecuencia, F_N es meromorfa en $\mathbb{C}$. Verifiquemos que F_N es doblemente periódica respecto a Ω. Sean $\zeta \in \Omega$ y $z \in \mathbb{C} - \Omega$. El Criterio del rearreglo (ver Teorema 6.4) implica que

$$F_N(z+\zeta) = \sum_{\varsigma \in \Omega} \frac{1}{((z+\zeta)-\varsigma)^N} = \sum_{\varsigma' \in \Omega} \frac{1}{(z-\varsigma')^N} = F_N(z)$$

donde $\varsigma' := \varsigma - \zeta$ para todo $\varsigma \in \Omega$. Si $z, \zeta \in \Omega$, entonces $z + \zeta \in \Omega$ y tenemos que

$$F_N(z+\zeta) = \infty = F_N(z)$$

Por tanto, hemos probado que $F_N(z+\zeta) = F_N(z)$, para todo $z \in \mathbb{C}$ y para todo $\zeta \in \Omega$. En consecuencia, $F_N \in \mathbb{E}(\Omega)$. Dado que la única clase de congruencia formada por polos de F_N es $\Omega = [0] \in \mathbb{T}_\Omega$, y que cada uno de dichos polos tiene multiplicidad N, concluimos que $ord(F_N) = N$. $\square$

4. Funciones elípticas de Weierstrass

Dada una retícula Ω, en la sección anterior probamos que cualquier función $f \in \mathbb{E}(\Omega)$ no constante necesariamente cumple que $2 \leq ord(f)$. El Teorema 3.13 representa un método para construir elementos de $\mathbb{E}(\Omega)$ con orden mayor o igual que 3. Dicho método no se puede aplicar directamente para construir elementos de $\mathbb{E}(\Omega)$ con orden igual a 2 (ver Lema 6.7). Esto no es tan desafortunado como pudiera parecer a primera vista y, como descubriremos a lo largo de esta sección, el construir explícitamente funciones elípticas de orden 2 es sumamente interesante y nos proporciona información muy útil para entender mejor a **todas** las funciones elípticas (ver siguiente sección).

Sea Ω una retícula. Supongamos que $f \in \mathbb{E}(\Omega)$ es tal que $ord(f) = 2$. Por la Proposición 3.8, sabemos entonces que se satisface una y sólo una de las siguientes afirmaciones:

(W) Existe una única clase de congruencia de polos de f en $\mathbb{T}_\Omega$, cada uno de dichos polos es doble y tiene residuo cero.

(J) Existen dos clases de congruencia de polos de f distintas $[a], [b] \in \mathbb{T}_\Omega$, cada una de dichas clases consiste de polos simples y $Res(f; z_a) = -Res(f; z_b)$, para todo $z_a \in [a]$ y $z_b \in [b]$.

En esta sección, mantendremos en un primer plano a la Teoría de Funciones Elípticas propuesta por Karl Weierstrass (ver [22], [23] y [24]), la cual se refiere a la afirmación **(W)**. Hemos elegido este enfoque por considerarlo más accesible, en un primer acercamiento, al estudio sistemático de funciones elípticas. La afirmación **(J)** nos lleva al estudio detallado de funciones elípticas desde el punto de vista desarrollado por Carl Jacobi. Desde 1825, Jacobi estudió de manera sistemática a las llamadas series o funciones Θ, y con ellas fundó su Teoría de Funciones Elípticas en la obra monumental *Fundamenta nova theoriae functionarum ellipticarum* de 1829 (ver [10]). La Teoría de Funciones Elípticas introducida por Jacobi antecede a la de Weierstrass por unos 30 años. Recomendamos la lectura de [21], [19], [3], [12] y [15], en donde se expone la importante y hermosa teoría de Jacobi, así como la relación entre dicha teoría y la de Weierstrass.

En todo lo que sigue, para cada retícula Ω, denotamos $\Omega^* := \Omega - \{0\}$.

Definición 4.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ una retícula. Definimos $\wp_\Omega : \mathbb{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ como*

$$z \longmapsto \frac{1}{z^2} + \sum_{\varsigma \in \Omega^*} \left(\frac{1}{(z-\varsigma)^2} - \frac{1}{\varsigma^2} \right)$$

La función $\wp_\Omega$ se conoce como función pe de Weierstrass asociada a Ω.

Nuestro primer objetivo será demostrar que, para cada retícula Ω, se cumple que $\wp_\Omega \in \mathbb{E}(\Omega)$, que $ord(\wp_\Omega) = 2$, y que cada uno de los polos de $\wp_\Omega$ es doble con residuo igual a cero.

Proposición 4.2. *Sea Ω una retícula. Entonces, se cumple lo siguiente:*

(1) La función $\wp_\Omega$ es meromorfa en $\mathbb{C}$.

(2) Los únicos polos de $\wp_\Omega$ son los puntos $\varsigma \in \Omega$. Cada uno de dichos polos es doble y tiene residuo cero.

Demostración: Para cada $\varsigma \in \Omega^*$, definimos $\mathbf{g}_\varsigma : \mathbb{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ como

$$z \quad \longmapsto \quad \frac{1}{(z-\varsigma)^2} - \frac{1}{\varsigma^2}$$

Entonces, para cada $\varsigma \in \Omega^*$, tenemos que $\mathbf{g}_\varsigma$ es una función meromorfa en $\mathbb{C}$, que $\mathbf{g}_\varsigma(0) = 0$, que $\mathbf{g}_\varsigma(z) = \infty$ si y sólo si $z = \varsigma$, y que dicho polo es doble con residuo cero.

Sea $K \subset \mathbb{C}$ compacto tal que $K \cap \Omega^* = \varnothing$. Entonces, se cumple lo siguiente:

(a) Existe $0 < M$ tal que $|z| < M$, para todo $z \in K$.

(b) Para todo $z \in K$ y, excepto un número finito, para cada $\varsigma \in \Omega^*$ tenemos que $2|z| \leq |\varsigma|$.

Sea $\varsigma \in \Omega^*$ tal que satisface (b). Para cada $z \in K$, tenemos que

$$\frac{|\varsigma|}{2} \leq |z-\varsigma| \quad \text{ y que } \quad |2\varsigma - z| < 2|\varsigma| + \frac{|\varsigma|}{2} = \frac{5|\varsigma|}{2}$$

Por tanto, si $\varsigma \in \Omega^*$ y satisface (b), entonces

$$|\mathbf{g}_\varsigma(z)| = \frac{|z||2\varsigma - z|}{|z-\varsigma|^2|\varsigma|^2} \leq \frac{10M}{|\varsigma|^3}$$

El Lema 6.7 implica que la serie

$$\sum_{\varsigma \in \Omega^*} |\mathbf{g}_\varsigma|_K$$

converge en $\mathbb{R}$. El Criterio M de Weierstrass implica que la serie

$$\sum_{\varsigma\in\Omega^*} \mathbf{g}_\varsigma$$

converge uniformemente en K y, por el Teorema 6.6, tenemos que esta serie converge en $\mathbb{C}$ a una función meromorfa. Sea $\mathbf{F} : \mathbb{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ dicha función límite. Entonces, sabemos que $\mathbf{F}(0) = 0$, que los únicos polos de $\mathbf{F}$ en $\mathbb{C}$ son los puntos $\varsigma \in \Omega^*$, y que cada uno de dichos polos es doble y tiene residuo cero. Dado que, para cada $z \in \mathbb{C}$, se cumple que

$$\wp_\Omega(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\varsigma\in\Omega^*} \mathbf{g}_\varsigma(z) = \frac{1}{z^2} + \mathbf{F}(z)$$

concluimos que $\wp_\Omega$ es meromorfa en $\mathbb{C}$, que los únicos polos de esta función son los puntos en $\Omega^* \cup \{0\} = \Omega$, que cada uno de dichos polos es doble y tiene residuo cero. $\square$

Invitamos al lector a comparar la demostración anterior con aquella del Teorema 3.13. El siguiente resultado es el eslabón que nos falta para poder concluir que $\wp_\Omega \in \mathbb{E}(\Omega)$ para toda retícula Ω.

Lema 4.3. *Sea Ω una retícula. Entonces, la función $\wp_\Omega$ es par.*

Demostración: Sea $z \in \mathbb{C}$. De la demostración de la Proposición 4.2, sabemos que

$$\wp_\Omega(-z) = \frac{1}{(-z)^2} + \mathbf{F}(-z)$$

Por el Criterio del rearreglo, obtenemos que

$$\mathbf{F}(-z) = \sum_{\varsigma\in\Omega^*} \left(\frac{1}{(z+\varsigma)^2} - \frac{1}{\varsigma^2}\right) = \sum_{\varsigma'\in\Omega^*} \left(\frac{1}{(z-\varsigma')^2} - \frac{1}{(\varsigma')^2}\right) = \mathbf{F}(z)$$

donde $\varsigma' = -\varsigma$ para cada $\varsigma \in \Omega^*$. Es decir, $\mathbf{F}$ es una función par. En consecuencia,

$$\wp_\Omega(-z) = \frac{1}{(-z)^2} + \mathbf{F}(-z) = \frac{1}{(z)^2} + \mathbf{F}(z) = \wp_\Omega(z)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, y tenemos que $\wp_\Omega$ es una función par. $\square$

Proposición 4.4. *Sea Ω una retícula. Entonces, la función $\wp_\Omega$ es doblemente periódica respecto a Ω.*

Demostración: Sea $z \in \mathbb{C}$. Sabemos que

$$\wp_\Omega(z) = \frac{1}{z^2} + \mathbf{F}(z)$$

El Teorema 6.6 implica que podemos derivar término a término, respecto a z, a la serie de funciones que define a $\mathbf{F}$ para obtener que

$$\mathbf{F}'(z) = \sum_{\varsigma \in \Omega^*} \frac{-2}{(z-\varsigma)^3}$$

En consecuencia, para todo $z \in \mathbb{C}$ tenemos que

$$\wp'_\Omega(z) = \frac{-2}{z^3} + \sum_{\varsigma \in \Omega^*} \frac{-2}{(z-\varsigma)^3} = -2F_3(z)$$

donde $F_3 : \mathbb{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ es la función elíptica respecto a Ω, de orden 3, que construimos con el Teorema 3.13. Por otra parte, sea $\varsigma_0 \in \Omega$ fijo. Definimos $f : \mathbb{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ como

$$z \longmapsto \wp_\Omega(z+\varsigma_0) - \wp_\Omega(z)$$

Entonces, f es una función meromorfa en $\mathbb{C}$. Para cada $z \in \mathbb{C}$, tenemos que

$$f'(z) = 2(F_3(z) - F_3(z+\varsigma_0)) = 0$$

pues $F_3 \in \mathbb{E}(\Omega)$ y $\varsigma_0 \in \Omega$. Por lo tanto, f es constante en $\mathbb{C}$. El Lema 4.3 implica que

$$f\left(\frac{-\varsigma_0}{2}\right) = \wp_\Omega\left(\frac{\varsigma_0}{2}\right) - \wp_\Omega\left(\frac{-\varsigma_0}{2}\right) = 0$$

Por lo tanto, para todo $z \in \mathbb{C}$ y para todo $\varsigma \in \Omega$, se cumple que

$$\wp_\Omega(z+\varsigma) = \wp_\Omega(z)$$

Es decir, la función $\wp_\Omega$ es doblemente periódica respecto a Ω. $\square$

Como una consecuencia de todo lo que hemos aprendido hasta ahora, tenemos el importante

Corolario 4.5. *Para toda retícula $\Omega \subset \mathbb{C}$, se cumple lo siguiente:*

(1) $\wp_\Omega \in \mathbb{E}(\Omega)$, $ord(\wp_\Omega) = 2$ *y* $\wp_\Omega$ *es una función par.*

(2) $\wp'_\Omega \in \mathbb{E}(\Omega)$, $ord(\wp'_\Omega) = 3$ *y* $\wp'_\Omega$ *es una función impar.*

Demostración: Las proposiciones 4.2 y 4.4, y el Lema 4.3 establecen (1). Por el Lema 3.10, tenemos que $\wp'_\Omega \in \mathbb{E}(\Omega)$. En la demostración de la Proposición 4.4 establecimos que $\wp'_\Omega = -2F_3$. Por tanto, $ord(\wp'_\Omega) = 3$. Sea $z \in \mathbb{C}$. Entonces, por el Criterio del rearreglo, obtenemos que

$$\wp'_\Omega(-z) = -2F_3(-z) = -2\sum_{\varsigma\in\Omega} \frac{1}{-(z+\varsigma)^3} = 2\sum_{\varsigma'\in\Omega} \frac{1}{(z-\varsigma')^3} = 2F_3(z) = -\wp_\Omega(z)$$

donde $\varsigma' = -\varsigma$ para cada $\varsigma \in \Omega$. Es decir, $\wp'_\Omega$ es una función impar, y hemos establecido (2). □

En lo que resta de esta sección, nos interesa discutir algunas propiedades más tanto de una retícula $\Omega \in \mathbb{C}$, como de la función $\wp_\Omega$ y su derivada.

Definición 4.6. *Sean Ω una retícula y $k \in \mathbb{N}$. La k-ésima serie homogénea de Eisenstein para Ω se define como*

$$G_k(\Omega) := \sum_{\varsigma\in\Omega^*} \frac{1}{\varsigma^k}$$

Lema 4.7. *Sean Ω una retícula y $k \in \mathbb{N}$ impar. Entonces, $G_k(\Omega) = 0$.*

Demostración: Sabemos que $k = 2m+1$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Sea $\varsigma \in \Omega^*$. Entonces, $-\varsigma \in \Omega^*$ y tenemos que

$$\frac{1}{(-\varsigma)^k} = \frac{1}{(-\varsigma)^{2m}(-\varsigma)} = \frac{-1}{\varsigma^k}$$

Por tanto,

$$G_k(\Omega) = \sum_{\varsigma\in\Omega^*} \frac{1}{\varsigma^k} = \sum_{\varsigma\in\Omega^*} \left(\frac{1}{\varsigma^k} + \frac{1}{(-\varsigma)^k}\right) = 0$$

□

Observación 4.8. *Dada una retícula Ω, los lemas 4.7 y 6.7 implican que $G_k(\Omega)$ es una serie absolutamente convergente para todo $k \in \mathbb{N}$ con $3 \leq k$. Se puede probar (ver [2] y [11]) que, para todo $z \in \mathbb{C}$, se cumple que*

$$\wp_\Omega(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=2}^{\infty}(2k-1)G_{2k}(\Omega)z^{2k-2} \qquad y \ que$$

$$\left(\wp'_\Omega(z)\right)^2 = 4\left(\wp_\Omega(z)\right)^3 - g_2\wp_\Omega(z) - g_3$$

donde $g_2 = 60G_4(\Omega)$ y $g_3 = 140G_6(\Omega)$. A la ecuación diferencial de primer orden

$$(\wp'_\Omega)^2 = 4\wp_\Omega^3 - g_2\wp_\Omega - g_3$$

se le conoce como la ecuación diferencial para $\wp_\Omega$ y $\wp'_\Omega$.

Al lector interesado en un estudio detallado de las series de Eisenstein, le recomendamos la lectura de [19].

Dado cualquier polinomio cúbico $p \in \mathbb{C}[z]$ de la forma

$$z \quad \longmapsto \quad 4z^3 - c_2 z - c_3$$

tal que sus tres raíces son distintas, existe una retícula $\Omega \subset \mathbb{C}$ tal que $c_2 = 60G_4(\Omega)$ y $c_3 = 140G_6(\Omega)$ (ver [11]). Un poco más adelante (ver Teorema 4.13), enunciamos y demostramos el resultado recíproco. Para llegar a esto, necesitaremos los siguientes cuatro resultados.

Lema 4.9. *Sean $\Omega = \Omega(\omega_1, \omega_2) = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ una retícula y $\omega_3 := \omega_1 + \omega_2$. Entonces, los únicos ceros de la función $\wp'_\Omega$ en $\mathbb{T}_\Omega$ son $\left[\frac{\omega_j}{2}\right]$ para $j = 1, 2, 3$, y cada uno de dichos ceros es simple.*

Demostración: Sea $\varsigma \in \Omega$. Sabemos que $\frac{\varsigma}{2} \equiv \frac{-\varsigma}{2}$ (mód Ω). Por tanto, $\wp'_\Omega\left(\frac{\varsigma}{2}\right) = \wp'_\Omega\left(\frac{-\varsigma}{2}\right)$. Dado que $\wp'_\Omega$ es una función impar, tenemos que

$$\wp'_\Omega\left(\frac{\varsigma}{2}\right) = \wp'_\Omega\left(\frac{-\varsigma}{2}\right) = -\wp'_\Omega\left(\frac{\varsigma}{2}\right)$$

En consecuencia, o bien $\wp'_\Omega\left(\frac{\varsigma}{2}\right) = 0$ o $\wp'_\Omega\left(\frac{\varsigma}{2}\right) = \infty$ para todo $\varsigma \in \Omega$. Dado que $\Omega = [0]$ es el único polo de $\wp'_\Omega$ en $\mathbb{T}_\Omega$ y que, para $j = 1, 2, 3$, tenemos que $\frac{\omega_j}{2}$ no es congruente con 0 módulo Ω, obtenemos que $\wp'_\Omega\left(\frac{\omega_j}{2}\right) = 0$. Como

$ord(\wp'_\Omega) = 3$ y dado que $\left[\frac{\omega_1}{2}\right]$, $\left[\frac{\omega_2}{2}\right]$ y $\left[\frac{\omega_3}{2}\right]$ son conjuntos ajenos por pares, tenemos el resultado. $\square$

Lema 4.10. *Sean* $\Omega = \Omega(\omega_1, \omega_2)$ *una retícula y* $\omega_3 := \omega_1 + \omega_2$. *Para* $j = 1, 2, 3$, *definimos* $e_j := \wp_\Omega\left(\frac{\omega_j}{2}\right)$. *Entonces,* $e_1, e_2, e_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ *son mutuamente distintos.*

Demostración: Para $j = 1, 2, 3$, sabemos que $\frac{\omega_j}{2} \notin \Omega$ y, por tanto, $e_j \neq \infty$. Para cada $j = 1, 2, 3$, definimos $f_j : \mathbb{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ como

$$z \longmapsto \wp_\Omega(z) - e_j$$

Entonces, $f_j \in \mathbb{E}(\Omega)$ y $ord(f_j) = ord(\wp_\Omega) = 2$. Esto implica que el conjunto

$$\{\, [z] \in \mathbb{T}_\Omega \mid f_j([z]) = 0 \,\}$$

o bien consiste de un único punto y dicho cero es doble, o consiste de dos puntos distintos y cada uno de dichos ceros es simple. Para cada $j = 1, 2, 3$, tenemos que $f_j\left(\left[\frac{\omega_j}{2}\right]\right) = 0$. Dado que $f'_j = \wp'_\Omega$, el Lema 4.9 implica que $f'_j\left(\left[\frac{\omega_j}{2}\right]\right) = 0$. Por tanto, $\left[\frac{\omega_j}{2}\right] \in \mathbb{T}_\Omega$ es un cero doble de f_j y, por consiguiente, es el único cero en $\mathbb{T}_\Omega$ de f_j.

Por otra parte, sabemos que $\left[\frac{\omega_1}{2}\right], \left[\frac{\omega_2}{2}\right], \left[\frac{\omega_3}{2}\right] \in \mathbb{T}_\Omega$ son conjuntos ajenos por pares. Dado que

$$f_j\left(\left[\frac{\omega_k}{2}\right]\right) = e_k - e_j$$

para todo $j, k \in \{\, 1, 2, 3 \,\}$, concluimos que $e_j \neq e_k$ siempre que $j \neq k$. $\square$

Lema 4.11. *Sean* $\Omega = \Omega(\omega_1, \omega_2)$ *una retícula y* $\omega_3 := \omega_1 + \omega_2$. *Suponga que* $z \in \mathbb{C}$ *es tal que* z *no es congruente con* $0, \frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}$ *ni con* $\frac{\omega_3}{2}$ *módulo* Ω. *Entonces,* z *no es congruente con* $-z$ *módulo* Ω.

Demostración: Supongamos que existe $z \in \mathbb{C}$ tal que z no es congruente con $0, \frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}$ ni con $\frac{\omega_3}{2}$, pero se cumple que $z \equiv -z$ (mód Ω). Entonces, sabemos que existen $n, m \in \mathbb{Z}$ tales que $z = \frac{n\omega_1 + m\omega_2}{2}$. Consideremos los siguientes cuatro posibles casos:

(a) Si $n, m \in \mathbb{Z}$ son ambos pares, entonces $z \in \Omega = [0]$, lo cual es una contradicción.

(b) Si $n, m \in \mathbb{Z}$ son ambos impares, entonces $z \equiv \frac{\omega_3}{2}$ (mód Ω), lo cual es una contradicción.

(c) Si n es par, entonces (por (a)) tenemos que m es impar. Obtenemos que $z \equiv \frac{\omega_2}{2}$ (mód Ω), lo cual es una contradicción.

(d) Si n es impar, entonces (por (b)) tenemos que m es par. Obtenemos que $z \equiv \frac{\omega_1}{2}$ (mód Ω), lo cual es una contradicción.

Por (a) – (d), concluimos que z no es congruente con $-z$ módulo Ω. □

Dados una retícula Ω y $c \in \overline{\mathbb{C}}$, estamos en condiciones de discutir al conjunto $\{ [z] \in \mathbb{T}_\Omega \mid \wp_\Omega([z]) = c \}$, lo cual hacemos a continuación.

Proposición 4.12. *Sean $\Omega = \Omega(\omega_1, \omega_2)$ una retícula, $\omega_3 := \omega_1 + \omega_2$ y $c \in \overline{\mathbb{C}}$. Para $j = 1, 2, 3$, denotamos $e_j := \wp_\Omega\left(\frac{\omega_j}{2}\right)$. Entonces, se cumple lo siguiente:*

(1) Si $c \in \{ e_1, e_2, e_3, \infty \}$, entonces la ecuación $\wp_\Omega([z]) = c$ tiene una única solución en $\mathbb{T}_\Omega$, la cual es doble.

(2) Si $c \neq e_1, e_2, e_3, \infty$, entonces la ecuación $\wp_\Omega([z]) = c$ tiene dos soluciones simples en $\mathbb{T}_\Omega$.

Demostración: Sea $c \in \overline{\mathbb{C}}$. Si $c = \infty$, entonces la Proposición 4.2 implica que $\Omega = [0]$ es la única solución en $\mathbb{T}_\Omega$ de la ecuación $\wp_\Omega([z]) = \infty$, que dicho polo es doble y que tiene residuo cero. Para $c = e_j$ con $j = 1, 2, 3$, el Lema 4.10 implica que $\left[\frac{\omega_j}{2}\right]$ es la única solución en $\mathbb{T}_\Omega$ de la ecuación $\wp_\Omega([z]) = e_j$. Dado que $ord(\wp_\Omega) = 2$, tenemos que dicha solución es doble, y hemos probado (1). Si $c \neq e_1, e_2, e_3, \infty$, entonces definimos $\Phi : \mathbb{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ como

$$z \longmapsto \wp_\Omega(z) - c$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Tenemos que $\Phi \in \mathbb{E}(\Omega)$, que $ord(\Phi) = ord(\wp_\Omega) = 2$ y que Φ es una función par. Por tanto, la Proposición 3.11 implica que existe $a \in \mathbb{C}^*$ tal que $\Phi(\pm a) = 0$. Si $\pm a \in \left[\frac{\omega_j}{2}\right]$ para alguna $j \in \{ 1, 2, 3 \}$, entonces $c = e_j$, lo cual es una contradicción. En consecuencia, tenemos que $\pm a \notin \left[\frac{\omega_j}{2}\right]$ para $j = 1, 2, 3$. El Lema 4.9 implica que $\Phi'(\pm a) = \wp'_\Omega(\pm a) \neq 0$. Es decir, $\pm a$ es un cero simple de la función Φ. Dado que $c \neq e_1, e_2, e_3, \infty$, el Lema 4.11 implica que a no es congruente con $-a$ módulo Ω. Dado que $ord(\Phi) = 2$, obtenemos que $[a]$ y $[-a]$ son las únicas soluciones en $\mathbb{T}_\Omega$ de la ecuación $\wp_\Omega([z]) = c$ y son soluciones simples, con lo cual hemos probado (2). $\square$

Teorema 4.13. *Sean $\Omega = \Omega(\omega_1, \omega_2)$ una retícula, $\omega_3 := \omega_1 + \omega_2$, $g_2 := 60G_4(\Omega)$ y $g_3 := 140G_6(\Omega)$, donde $G_4(\Omega), G_6(\Omega) \in \mathbb{C}$ son, respectivamente, la cuarta y la sexta series homogéneas de Eisenstein para Ω. Entonces, el polinomio cúbico $\mathbf{p}_\Omega \in \mathbb{C}[z]$ definido como*

$$z \longmapsto 4z^3 - g_2 z - g_3$$

tiene tres raíces distintas en $\mathbb{C}$.

Demostración: Por la Observación 4.8, sabemos que

$$\left(\wp'_\Omega([z])\right)^2 = 4\left(\wp_\Omega([z])\right)^3 - g_2\wp_\Omega([z]) - g_3$$

para todo $[z] \in \mathbb{T}_\Omega$. El Lema 4.9 implica que

$$\mathbf{p}_\Omega(e_j) = \mathbf{p}_\Omega\left(\wp_\Omega\left(\left[\frac{\omega_j}{2}\right]\right)\right) = \left(\wp'_\Omega\left(\left[\frac{\omega_j}{2}\right]\right)\right)^2 = 0$$

para $j = 1, 2, 3$. Por el Lema 4.10, obtenemos que e_1, e_2 y e_3 son las tres raíces distintas de $\mathbf{p}_\Omega$ en $\mathbb{C}$. $\square$

4.1. Curvas Elípticas

No tenían miedo, sólo estaban asustados de su propio valor.

-Memorial del convento (José Saramago)-

Después de tanto ajetreo, queremos invitar al lector a que se relaje un poco antes de entrar de lleno a la última sección de estas notas. Lo que le proponemos es recurrir a todo lo que hemos aprendido, hasta ahora, sobre funciones elípticas y que miremos a los *toros* con otros ojos.

Consideremos a $\mathbb{C}$ con la topología usual. Definamos $A := \{U \subseteq \mathbb{C} \mid U \text{ es abierto}\}$ y $A_\infty := \{V \cup \{\infty\} \mid V = \mathbb{C} - K \text{ para algún } K \subset \mathbb{C} \text{ compacto}\}$.

Inducimos una topología en $\overline{\mathbb{C}}$ declarando a cada elemento de la familia $\mathfrak{A} := A \cup A_\infty$ como abierto, y dotamos a $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ con la topología producto. Sean

Ω una retícula, $g_2 := 60G_4(\Omega)$ y $g_3 := 140G_6(\Omega)$. Consideremos al polinomio cúbico $\mathbf{p}_\Omega(z) = 4z^3 - g_2 z - g_3$ y definamos

$$\mathbf{E}_\Omega := \{\, (X,Y) \in \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \mid Y^2 = \mathbf{p}_\Omega(X) \,\}$$

Dotamos a $\mathbf{E}_\Omega$ con la topología que hereda como subconjunto de $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$. Por la Observación 4.8, sabemos que $\left(\wp_\Omega([z]), \wp'_\Omega([z])\right) \in \mathbf{E}_\Omega$ para todo $[z] \in \mathbb{T}_\Omega$. El siguiente resultado nos dice un poco más sobre la relación entre $\mathbf{E}_\Omega$ y el toro $\mathbb{T}_\Omega$.

Teorema 4.14. *Sean $\Omega = \Omega(\omega_1, \omega_2)$ una retícula y $\omega_3 := \omega_1 + \omega_2$. Definimos $H : \mathbb{T}_\Omega \longrightarrow \mathbf{E}_\Omega$ como*

$$[z] \quad \longmapsto \quad \left(\wp_\Omega([z]), \wp'_\Omega([z])\right)$$

Entonces, H es un homeomorfismo.

Demostración: Dado que $\wp_\Omega, \wp'_\Omega \in \mathbb{E}\,(\Omega)$, sabemos que ambas funciones son constantes en cada clase de congruencia módulo Ω. Por lo tanto, H es una función bien definida (es decir, su valor no depende de la elección que hagamos del representante de cada clase de congruencia módulo Ω). Sea $(X,Y) \in \mathbf{E}_\Omega$. Tenemos tres posibles casos:

(1) Si $(X,Y) = (\infty, \infty)$, entonces sabemos que $H([0]) = (X,Y)$ y que $H([z]) \neq (X,Y)$ para todo $[z] \in \mathbb{T}_\Omega - \{\, [0] \,\}$.

(2) Si $(X,Y) = (e_j, 0) = \left(\wp_\Omega\left(\frac{\omega_j}{2}\right), 0\right)$ para algún $j \in \{\, 1,2,3 \,\}$, entonces el Lema 4.9 y la Proposición 4.12 implican que $H\left(\left[\frac{\omega_j}{2}\right]\right) = (e_j, 0)$ y que $H([z]) \neq (e_j, 0)$ para todo $[z] \in \mathbb{T}_\Omega - \left\{\, \left[\frac{\omega_j}{2}\right] \,\right\}$.

(3) Si $(X,Y) \notin \{\, (\infty,\infty), (e_1,0), (e_2,0), (e_3,0) \,\}$, entonces, dado que $X \neq \infty, e_1, e_2, e_3$, la Proposición 4.12 implica que existe

$$[a] \in \mathbb{T}_\Omega - \left\{\, [0], \left[\frac{\omega_1}{2}\right], \left[\frac{\omega_2}{2}\right], \left[\frac{\omega_3}{2}\right] \,\right\}$$

tal que $[a]$ y $[-a]$ son las únicas soluciones distintas en $\mathbb{T}_\Omega$ de la ecuación $\wp_\Omega([z]) = X$. Supongamos que $\wp'_\Omega([-a]) = \wp'_\Omega([a])$. Dado que $\wp'_\Omega$ es una función impar, tenemos que $\wp'_\Omega([a]) = -\wp'_\Omega([a])$. Entonces, o bien

$\wp'_\Omega([a]) = 0$ o $\wp'_\Omega([a]) = \infty$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\wp'_\Omega([-a]) \neq \wp'_\Omega([a])$. Por otro lado, dado que $Y \neq 0, \infty$ y que

$$\left(\wp'_\Omega([\pm a])\right)^2 = \mathbf{p}_\Omega\left(\wp_\Omega([\pm a])\right) = \mathbf{p}_\Omega(X) = Y^2$$

obtenemos que $\wp'_\Omega([a]) = Y$ o $\wp'_\Omega([-a]) = Y$. En consecuencia:

• $H([a]) = (X, Y)$ y $H([z]) \neq (X, Y)$ para todo $[z] \in \mathbb{T}_\Omega - \{\, [a] \,\}$, o

• $H([-a]) = (X, Y)$ y $H([z]) \neq (X, Y)$ para todo $[z] \in \mathbb{T}_\Omega - \{\, [-a] \,\}$.

Por tanto, tenemos que H es una biyección. Dado que $\wp_\Omega$ y $\wp'_\Omega$ son funciones holomorfas y no constantes en $\mathbb{T}_\Omega$, entonces son continuas y abiertas en $\mathbb{T}_\Omega$. Concluimos que H es un homeomorfismo. □

Para cada retícula Ω, el toro $\mathbf{E}_\Omega$ es un ejemplo de las llamadas curvas elípticas. Referimos al lector a [15] para un estudio detallado y muy agradable de las curvas elípticas.

5. El campo de funciones elípticas $\mathbb{E}(\Omega)$

Como avisamos al principio de la sección anterior, el haber construido a la función $\wp_\Omega$, para una retícula Ω, nos proporciona información muy útil para entender mejor a **todos** los elementos de $\mathbb{E}(\Omega)$. En esta sección, precisaremos esta afirmación al discutir al *campo de funciones elípticas* respecto a una retícula.

Para cada $c \in \mathbb{C}$, definimos $f_c : \mathbb{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ como

$$z \longmapsto c$$

Es decir, f_c es la función constante c definida en $\mathbb{C}$. En lo que sigue, denotaremos a f_0 y a f_1 por $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}$, respectivamente. Consideremos al conjunto

$$\mathbf{C} := \{\, f_c \mid c \in \mathbb{C} \,\}$$

Tenemos que $\mathbf{C}$ forma un campo bajo la suma y el producto usuales de funciones. Además, la función $\Psi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ dada por

$$c \longmapsto f_c$$

define un isomorfismo de campos. Para toda retícula Ω, sabemos que $\mathbf{C} \subset \mathbb{E}(\Omega)$ y, por esta razón, consideramos a $\mathbb{C}$ como un subconjunto de $\mathbb{E}(\Omega)$. El siguiente resultado establece que podemos decir mucho más sobre la estructura algebraica del conjunto $\mathbb{E}(\Omega)$.

Proposición 5.1. *Sea Ω una retícula. Entonces, el conjunto $\mathbb{E}(\Omega)$ forma un campo bajo la suma y el producto usuales de funciones.*

Demostración: Sabemos que la suma y el producto usuales de funciones son operaciones conmutativas y asociativas, y que el producto se distribuye sobre la suma. También sabemos que $\mathbb{E}(\Omega)$ es cerrado bajo dichas operaciones. Tenemos que $\mathbf{0}, \mathbf{1} \in \mathbb{E}(\Omega)$ son, respectivamente, el elemento neutro aditivo y el elemento neutro para el producto. Para $f \in \mathbb{E}(\Omega)$, denotamos por $-f$ y por $\frac{1}{f}$ a las funciones, definidas en $\mathbb{C}$ y con valores en $\overline{\mathbb{C}}$, dadas por

$$z \longmapsto -(f(z)) \quad \text{y} \quad z \longmapsto \frac{1}{f(z)}$$

respectivamente. Sea $f \in \mathbb{E}(\Omega)$. Dado que $-f \in \mathbb{E}(\Omega)$ y que $f+(-f) = \mathbf{0} = (-f)+f$, tenemos que $\mathbb{E}(\Omega)$ es cerrado bajo la toma de inversos aditivos. Sea $g \in \mathbb{E}(\Omega) - \{\mathbf{0}\}$. Entonces, $\frac{\mathbf{1}}{g}$ es una función meromorfa en $\mathbb{C}$. Tenemos que

$$\frac{\mathbf{1}}{g}(z+\varsigma) = \frac{1}{g(z+\varsigma)} = \frac{1}{g(z)}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ y para todo $\varsigma \in \Omega$. Por tanto, $\frac{\mathbf{1}}{g} \in \mathbb{E}(\Omega)$. Sea $a \in \mathbb{C}$ un cero (respectivamente, un polo) de multiplicidad k de g. Entonces, a es un polo (respectivamente, un cero) de multiplicidad k de $\frac{\mathbf{1}}{g}$. Por tanto,

$$\left(\frac{\mathbf{1}}{g}\right) g = \mathbf{1} = g\left(\frac{\mathbf{1}}{g}\right)$$

y tenemos que $\mathbb{E}(\Omega)$ es cerrado bajo la toma de inversos para el producto. Por todo lo anterior, concluimos que $\mathbb{E}(\Omega)$ forma un campo bajo la suma y el producto usuales de funciones. $\square$

Observación 5.2. *Sea Ω una retícula. Dado que $\mathbb{C} \subset \mathbb{E}(\Omega)$, la Proposición 5.1 establece que $\mathbb{E}(\Omega)$ es un campo de extensión de $\mathbb{C}$ y, por tanto, tiene característica cero. A $\mathbb{E}(\Omega)$ se le denomina el* **campo de funciones elípticas respecto a Ω**.

Sea Ω una retícula. Para proseguir nuestra discusión sobre el campo $\mathbb{E}(\Omega)$, nos interesa describir a dos subcampos de $\mathbb{E}(\Omega)$ que resultan ser particularmente importantes (ver Teorema 5.7). Definimos

$$\mathbb{E}_p(\Omega) := \{ f \in \mathbb{E}(\Omega) \mid f \text{ es una función par} \}$$

Dado que $\wp_\Omega \in \mathbb{E}_p(\Omega)$, tenemos que $\mathbb{E}_p(\Omega) \neq \varnothing$. Sabemos que $f_c \in \mathbb{E}_p(\Omega)$ para todo $c \in \mathbb{C}$ (en particular, $\mathbf{0}, \mathbf{1} \in \mathbb{E}_p(\Omega)$), y que $\mathbb{E}_p(\Omega)$ es cerrado bajo la suma y el producto usuales de funciones. También tenemos que $-f, \frac{\mathbf{1}}{g} \in \mathbb{E}_p(\Omega)$ para todo $f \in \mathbb{E}_p(\Omega)$ y para todo $g \in \mathbb{E}_p(\Omega) - \{ \mathbf{0} \}$. En consecuencia, $\mathbb{E}_p(\Omega)$ es un subcampo de $\mathbb{E}(\Omega)$. Por otro lado, dado que $\wp_\Omega \in \mathbb{E}_p(\Omega)$ y que $\mathbb{C} \subset \mathbb{E}_p(\Omega)$, tenemos que

$$\mathbb{C}(\wp_\Omega) := \left\{ \frac{P(\wp_\Omega)}{Q(\wp_\Omega)} \mid P, Q \in \mathbb{C}[x] \text{ y } Q \text{ no es el polinomio cero} \right\}$$

es un subconjunto de $\mathbb{E}_p(\Omega)$. Tenemos que $\mathbb{C} \subset \mathbb{C}(\wp_\Omega)$ (los polinomios constantes) y que $\mathbb{C}(\wp_\Omega)$ es cerrado bajo la suma y el producto usuales de funciones.

Si $\frac{P(\wp_\Omega)}{Q(\wp_\Omega)} \in \mathbb{C}(\wp_\Omega)$, entonces

$$-\frac{P(\wp_\Omega)}{Q(\wp_\Omega)} = \frac{-P(\wp_\Omega)}{Q(\wp_\Omega)} = \frac{P(\wp_\Omega)}{-Q(\wp_\Omega)} \in \mathbb{C}(\wp_\Omega)$$

Si, además, P no es el polinomio cero, entonces

$$\frac{\mathbf{1}}{\left(\frac{P(\wp_\Omega)}{Q(\wp_\Omega)}\right)} = \frac{Q(\wp_\Omega)}{P(\wp_\Omega)} \in \mathbb{C}(\wp_\Omega)$$

En consecuencia, tenemos que $\mathbb{C}(\wp_\Omega)$ es un subcampo de $\mathbb{E}_p(\Omega)$.

Observación 5.3. *Dada una retícula Ω, tenemos que $\mathbb{C}(\wp_\Omega)$ es el menor campo que contiene a todas las funciones constantes $\mathbb{C} \simeq \mathbf{C}$ y a la función*

$\wp_\Omega$. *Este campo se conoce como el* campo de funciones racionales de $\wp_\Omega$ con coeficientes complejos.

Proposición 5.4. *Sea $\Omega = \Omega(\omega_1, \omega_2)$ una retícula. Entonces, se cumple que $\mathbb{E}_p(\Omega) = \mathbb{C}(\wp_\Omega)$.*

Demostración: Sabemos que $\mathbb{C}(\wp_\Omega) \subset \mathbb{E}_p(\Omega)$. Sea $f \in \mathbb{E}_p(\Omega)$. Si f es una función constante, entonces $f \in \mathbb{C}(\wp_\Omega)$. Supongamos, entonces, que f no es constante. Entonces, $f' \neq \mathbf{0}$ y, por el Lema 3.10, tenemos que $f' \in \mathbb{E}(\Omega)$. Denotamos $N := ord(f)$ y $M := ord(f')$. Por el Corolario 3.9, tenemos que $2 \leq N, M$. Por la Proposición 3.11 tenemos que, contando multiplicidades, existen exactamente M clases de congruencia $[z_1], [z_2], ..., [z_M] \in \mathbb{T}_\Omega$ tales que $f'([z_j]) = 0$ para $j = 1, 2, ..., M$.

Sea $c \in \mathbb{C}$. De nuevo, por la Proposición 3.11, sabemos que, contando multiplicidades, la ecuación $f([z]) = c$ tiene exactamente N soluciones en $\mathbb{T}_\Omega$. Dado que una tal solución $[z]$ es múltiple sólo si $f'([z]) = 0$, tenemos que, excepto para un número finito de valores de $c \in \mathbb{C}$, todas las soluciones en $\mathbb{T}_\Omega$ de la ecuación $f([z]) = c$ son simples. En consecuencia, podemos elegir $c, d \in \mathbb{C}$ distintos y tales que:

(1) Todas las soluciones en $\mathbb{T}_\Omega$ de las ecuaciones $f([z]) = c$ y $f([z]) = d$ son simples.

(2) Ninguna de las soluciones en $\mathbb{C}$ de las ecuaciones $f(z) = c$ y $f(z) = d$ es congruente con $0, \frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}$ o $\frac{\omega_3}{2} := \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ módulo Ω.

Dado que $f \in \mathbb{E}_p(\Omega)$, sabemos que $f(z) = c$ implica que $f(-z) = c$ también. Por (2) y el Lema 4.11, tenemos que una tal solución $z \in \mathbb{C}$ no es congruente con $-z$ módulo Ω. En consecuencia, N es par y existen $a_1, ..., a_{\frac{N}{2}} \in \mathbb{C}$ tales que $\{ [\pm a_j] \mid 1 \leq j \leq \frac{N}{2} \}$ es el conjunto de todas las soluciones distintas en $\mathbb{T}_\Omega$ de la ecuación $f([z]) = c$. Con un razonamiento análogo, obtenemos que existen $b_1, ..., b_{\frac{N}{2}} \in \mathbb{C}$ tales que $\{ [\pm b_j] \mid 1 \leq j \leq \frac{N}{2} \}$ es el conjunto de todas las soluciones distintas en $\mathbb{T}_\Omega$ de la ecuación $f([z]) = d$.

Dado que $c \neq d$, para todo $1 \leq j \leq \frac{N}{2}$, tenemos que $[a_j] \cap [\pm b_j] = \varnothing$ y que $[-a_j] \cap [\pm b_j] = \varnothing$. Definimos $g : \mathbb{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ como

$$z \quad \longmapsto \quad \frac{f(z) - c}{f(z) - d}$$

Entonces, $g \in \mathbb{E}(\Omega)$. Además, $\{ [\pm a_j] \mid 1 \leq j \leq \frac{N}{2} \}$ es el conjunto de todos los ceros distintos de g en $\mathbb{T}_\Omega$, los cuales son simples, y $\{ [\pm b_j] \mid 1 \leq j \leq \frac{N}{2} \}$ es el conjunto de todos los polos distintos de g en $\mathbb{T}_\Omega$, los cuales son simples también (en particular, $ord(g) = ord(f) = N$). Definimos $h : \mathbb{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ como

$$z \longmapsto \prod_{j=1}^{\frac{N}{2}} \frac{\wp_\Omega(z) - \wp_\Omega(a_j)}{\wp_\Omega(z) - \wp_\Omega(b_j)}$$

Entonces $h \in \mathbb{C}(\wp_\Omega)$. Dado que $ord(\wp_\Omega) = 2$ y que $\wp_\Omega \in \mathbb{E}_p(\Omega)$, por (2) obtenemos que:

(1') Para cada $1 \leq j \leq \frac{N}{2}$, se cumple que $[\pm a_j]$ son las únicas soluciones distintas en $\mathbb{T}_\Omega$ de la ecuación $\wp_\Omega([z]) = \wp_\Omega(a_j)$, las cuales son simples.

(2') Para cada $1 \leq j \leq \frac{N}{2}$, se cumple que $[\pm b_j]$ son las únicas soluciones distintas en $\mathbb{T}_\Omega$ de la ecuación $\wp_\Omega([z]) = \wp_\Omega(b_j)$, las cuales son simples.

En consecuencia, $\{ [\pm a_j] \mid 1 \leq j \leq \frac{N}{2} \}$ y $\{ [\pm b_j] \mid 1 \leq j \leq \frac{N}{2} \}$ son, respectivamente, el conjunto de todos los ceros distintos y de todos los polos distintos de h en $\mathbb{T}_\Omega$, los cuales son simples. Dado que $g, h \in \mathbb{E}(\Omega)$ tienen ceros y polos en los mismos puntos de $\mathbb{C}$ y con las mismas multiplicidades, el Corolario 3.7 implica que existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que $g = \lambda h$. Por tanto,

$$f(z) = \frac{c - d\lambda h(z)}{1 - \lambda h(z)}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ y obtenemos que $f \in \mathbb{C}(\wp_\Omega)$. En consecuencia, $\mathbb{E}_p(\Omega) \subset \mathbb{C}(\wp_\Omega)$ y concluimos que $\mathbb{E}_p(\Omega) = \mathbb{C}(\wp_\Omega)$. $\square$

Sea Ω una retícula. En cuanto a la relación entre $\mathbb{C}(\wp_\Omega)$ y el conjunto de los elementos de $\mathbb{E}(\Omega)$ que son funciones impares, tenemos el siguiente

Corolario 5.5. *Sea Ω una retícula. Si $f \in \mathbb{E}(\Omega)$ es una función impar, entonces existe $R \in \mathbb{C}(\wp_\Omega)$ tal que $f = \wp'_\Omega R$.*

Demostración: Sea $f \in \mathbb{E}(\Omega)$ una función impar. Dado que $\wp'_\Omega \in \mathbb{E}(\Omega)$ también es una función impar, tenemos que $R : \mathbb{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ definida como

$$z \longmapsto \frac{f(z)}{\wp'_\Omega(z)}$$

pertenece a $\mathbb{E}_p(\Omega)$. Entonces, $f = \wp'_\Omega R$ y, por la Proposición 5.4, tenemos que $R \in \mathbb{C}(\wp_\Omega)$. $\square$

Sea Ω una retícula. Para poder dar la caracterización que nos interesa de todos los elementos de $\mathbb{E}(\Omega)$, nos hace falta describir a otro subcampo de $\mathbb{E}(\Omega)$. Dado que $\wp_\Omega, \wp'_\Omega \in \mathbb{E}(\Omega)$, entonces

$$\mathbb{C}\left(\wp_\Omega, \wp'_\Omega\right) := \left\{ \frac{P(\wp_\Omega, \wp'_\Omega)}{Q(\wp_\Omega, \wp'_\Omega)} \mid P, Q \in \mathbb{C}[x,y] \text{ y } Q \text{ no es el polinomio cero} \right\}$$

es un subconjunto de $\mathbb{E}(\Omega)$. Usando un argumento análogo al que utilizamos en el caso de $\mathbb{C}(\wp_\Omega) = \mathbb{E}_p(\Omega)$, obtenemos que $\mathbb{C}\left(\wp_\Omega, \wp'_\Omega\right)$ es un subcampo de $\mathbb{E}(\Omega)$.

Observación 5.6. *Dada una retícula Ω, tenemos que $\mathbb{C}\left(\wp_\Omega, \wp'_\Omega\right)$ es el menor campo que contiene a todas las funciones constantes $\mathbb{C} \simeq \mathbf{C}$ y a las funciones $\wp_\Omega$ y $\wp'_\Omega$. Este campo se denomina el campo de funciones racionales de $\wp_\Omega$ y $\wp'_\Omega$ con coeficientes complejos.*

Concluimos esta sección precisando la afirmación de que, para toda retícula Ω, el haber construido a la función $\wp_\Omega$ (y analizado varias de sus propiedades) nos permite conocer a todos los elementos de $\mathbb{E}(\Omega)$.

Teorema 5.7. *(Caracterización de funciones elípticas) Sean Ω una retícula y $f \in \mathbb{E}(\Omega)$. Entonces, existen $R_1, R_2 \in \mathbb{C}(\wp_\Omega) = \mathbb{E}_p(\Omega)$ tales que $f = R_1 + \wp'_\Omega R_2$. En consecuencia, $\mathbb{E}(\Omega) = \mathbb{C}\left(\wp_\Omega, \wp'_\Omega\right)$.*

Demostración: Sabemos que $\mathbb{C}\left(\wp_\Omega, \wp'_\Omega\right) \subset \mathbb{E}(\Omega)$. Sea $f \in \mathbb{E}(\Omega)$. Definimos $f_+, f_- : \mathbb{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ como

$$f_+(z) = \frac{f(z) + f(-z)}{2} \quad \text{y} \quad f_-(z) = \frac{f(z) - f(-z)}{2}$$

Entonces, $f_+, f_- \in \mathbb{E}(\Omega)$, $f_+ \in \mathbb{E}_p(\Omega)$ y f_- es una función impar. Por la Proposición 5.4 y el Corolario 5.5, sabemos que $R_1 := f_+ \in \mathbb{C}(\wp_\Omega)$ y que existe $R_2 \in \mathbb{C}(\wp_\Omega)$ tal que $f_- = \wp'_\Omega R_2$. Dado que $f = f_+ + f_-$, obtenemos que $f = R_1 + \wp'_\Omega R_2 \in \mathbb{C}\left(\wp_\Omega, \wp'_\Omega\right)$. Por tanto, $\mathbb{E}(\Omega) \subset \mathbb{C}\left(\wp_\Omega, \wp'_\Omega\right)$ y concluimos que $\mathbb{E}(\Omega) = \mathbb{C}\left(\wp_\Omega, \wp'_\Omega\right)$. $\square$

6. Apéndice: Convergencia de sucesiones y series de funciones meromorfas

Este Apéndice contiene las definiciones y los enunciados de los resultados sobre convergencia de sucesiones y series de funciones meromorfas que hemos utilizado en las secciones 3 y 4. Omitimos las demostraciones, las cuales se pueden encontrar, por ejemplo, en [9], [4] y [17].

Definición 6.1. *Sea $D \subseteq \mathbb{C}$ no vacío.*

(a) Dada una función $f : D \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ definida en D, definimos la **norma de f respecto a D** *como $|f|_D := sup\{\, |f(z)| \mid z \in D \,\}$ (observamos que $|f|_D$ puede tomar el valor ∞).*

(b) Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : D \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ una función definida en D. Decimos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ **converge en norma en D**, *si y sólo si para cada $z \in D$ existe una vecindad abierta $z \in U \subset D$ tal que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|_U$ converge en $\mathbb{R}$.*

Definición 6.2. *Sea $D \subseteq \mathbb{C}$ no vacío. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : D \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ una función definida en D.*

(a) Decimos que la sucesión $\{\, f_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ es **uniformemente convergente en D** *a una función $f : D \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ si y sólo si para todo $0 < \epsilon$ existe $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $|f(z) - f_n(z)| < \epsilon$ para todo $N \leq n$ y para todo $z \in D$.*

(b) Decimos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ **converge uniformemente en D** *a una función $f : D \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ si y sólo si la sucesión de sumas parciales $\{\, s_m := \sum_{n=0}^{m} f_n \mid m \in \mathbb{N} \,\}$ es uniformemente convergente en D a la función f.*

En ambos casos, tenemos que la función f está determinada de manera única por las funciones f_n, y decimos que f es la **función límite**.

Definición 6.3. *Sea $D \subseteq \mathbb{C}$ no vacío. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : D \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ una función definida en D. Decimos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$* **converge compactamente en D** *si y sólo si para todo $K \subseteq D$ compacto la sucesión de sumas parciales $\{\, s_{m|K} := \sum_{n=0}^{m} f_{n|K} \mid m \in \mathbb{N} \,\}$ converge uniformemente en K.*

Teorema 6.4. *(Criterio del rearreglo) Sea $D \subseteq \mathbb{C}$ no vacío. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : D \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ una función definida en D. Suponga que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge en norma en D a una función $f : D \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$. Entonces, para toda biyección $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_{\phi(n)}$ también converge en norma en D a la función f.*

Teorema 6.5. *(Criterio M de Weierstrass) Sea $D \subseteq \mathbb{C}$ no vacío. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : D \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ una función definida en D. Suponga que existe una sucesión de números reales no negativos $\{ M_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ tal que $|f_n|_D \leq M_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y tal que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ converge en $\mathbb{R}$. Entonces, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en D.*

Teorema 6.6. *Sea $D \subseteq \mathbb{C}$ no vacío. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : D \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ una función meromorfa (respectivamente, holomorfa) definida en D. Suponga que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge compactamente en D a una función $f : D \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$. Entonces, f es meromorfa (respectivamente, holomorfa) en D y la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f'_n$ converge compactamente en D a la función f'.*

Lema 6.7. *Sean Ω una retícula, $\Omega^* = \Omega - \{ 0 \}$ y $s \in \mathbb{R}$. Entonces, la serie $\sum_{w \in \Omega^*} \frac{1}{|w|^s}$ converge si y sólo si $2 < s$.*

Agradecimientos

Agradezco infinitamente a mis padres (Sol Vázquez Peña y Salvador Puente de la Torre) toda la motivación y ayuda de todo tipo que siempre me han otorgado para realizar causas nobles. Agradezco profundamente a Margareta Boege von Mentz, Javier Páez Cárdenas y Héctor Méndez Lango por su entusiasmo y apoyo constantes para que la enésima versión de estas notas sufriera una revisión profunda, y resurgiera a la luz en este formato, el cual se espera sea más apropiado para compartirlas con los estudiantes (pasados y presentes) de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México (y con todos los demás lectores en cuyas manos lleguen a caer). Finalmente, agradezco enormemente a Manuel Cruz López el que me haya enseñado (desde hace muchos años) a explorar las bibliotecas donde hay muchos libros y artículos sobre Matemáticas, y a divertirme pensando en las maravillas que encuentro en cada una de esas excursiones.

Referencias

[1] Abel N. H., Œuvres completes de N. H. Abel, B. Holmboe (Editor), Grøndahl, Christiania, 1839.

[2] Ahlfors L. V., Complex Analysis, McGraw-Hill Book Co., New York, 1979.

[3] Chandrasekharan K., Elliptic Functions, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[4] Conway J. B., Functions of One Complex Variable, Graduate Texts in Mathematics 11, Springer-Verlag, New York, 1978.

[5] Ford L. R., Automorphic Functions, McGraw-Hill Book Co., New York, 1929.

[6] Forster O., Lectures on Riemann Surfaces, Graduate Texts in Mathematics 81, Springer-Verlag, New York, 1981.

[7] Galois É., Œuvres Mathématiques d'Évariste Galois, Gauthier-Villars, Paris, 1897.

[8] Harvey W. J. (Editor), Discrete Groups and Automorphic Functions, Academic Press Inc., London, 1977.

[9] Hille E., Analytic Function Theory volume II, Blaisdell Publishing Co., 1962.

[10] Jacobi C. G. J., Fundamenta nova theoriae functionarum ellipticarum, Gesammelte Werke Volume 1, Chelsea, New York, 1969, 49-239.

[11] Jones G. A. y Singerman D., Complex Functions: an algebraic and geometric viewpoint, Cambridge University Press, 1987.

[12] Lawden D. F., Elliptic Functions and Applications, Applied Mathematical Sciences volume 80, Springer-Verlag, New York, 1989.

[13] Legendre A., Triaté des fonctions elliptiques et des intégrales Eulériennes, Huzard-Courcier, Paris, 1826.

[14] Lehner J., Discontinuous Groups and Automorphic Functions, Mathematical Surveys of the AMS number VIII, Rhode Island, 1964.

[15] McKean H. y Moll V., Elliptic Curves, Cambridge University Press, 1999.

[16] Puente Vázquez E., Espacios de Teichmüller de grupos fuchsianos, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México, 2002.

[17] Remmert R., Theory of Complex Functions, Graduate Texts in Mathematics 122, Springer-Verlag, New York, 1991.

[18] Rosenlicht M., Liouville's theorem on functions with elementary integrals, Pacific Journal of Mathematics, 24 (1968), 153-161.

[19] Schoeneberg B., Elliptic Modular Functions, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[20] Siegel C. L., Topics in Complex Function Theory volume I, John Wiley and Sons Inc., New York, 1969.

[21] Weierstrass K. T. W., Sur la théorie des fonctions elliptiques, Acta Mathematica 6 (1) (1885), 169-228.

[22] Weierstrass, K. T. W., Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche del elliptischen Funktionen, Springer-Verlag, Berlin, 1892.

[23] Weierstrass K. T. W., Mathematische Werke (V): Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Funktionen, Mayer und Müller, Berlin, 1915.

[24] Weierstrass K. T. W., Mathematische Werke (VI): Vorlesungen über Anwendungen der elliptischen Funktionen, Mayer und Müller, Berlin, 1915.