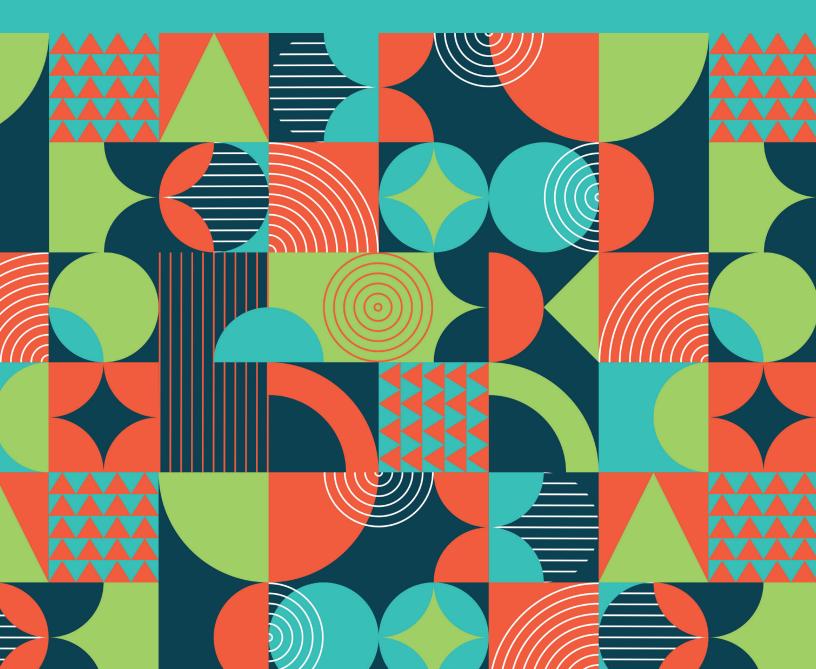
Ma. de la Luza Gasca, Laura Irene E. E y Brisa Jímenez M.

El problema de asignación de canales

Modelos y aplicaciones

AÑO 2004





Facultad de Ciencias Vínculos matemáticos



El problema de asignación de canales.

Modelos y aplicaciones

María de Luz Gasca Soto* Laura Irene Echeveste Escobar Brisa Jiménez Matus

Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias, UNAM

Nº 96, 2012

Profesora del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM Impreso en la Coordinación de Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM

EL PROBLEMA DE ASIGNACION DE CANALES.

Modelos y Aplicaciones.

María de Luz Gasca Soto Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM.

Laura Irene Echeveste Escobar Brisa Jiménez Matus

25 de enero de 2011

Índice general

1.	Inti	coducción.	e e
A	sign	ación de Canales	6
2.	El I	Problema de Asignación de Canales	į
	2.1.	Sistema General para las Comunicaciones Móviles	7
	2.2.	Planificación Automática de Frecuencias	1
	2.3.	Modelos Matemáticos	12
3.	Cole	oración de Gráficas	15
	3.1.	Problema del número cromático	19
	3.2.	Cotas del número cromático de una gráfica.	23
	3.3.	Multicoloración de gráficas	29
	3.4.	Cotas generales para el número multicromático	31
4.	Mod	delación con Teoría de Gráficas	37
	4.1.	Modelación del Problema	38
	4.2.	Etiquetación	39
	4.3.	Reducción a etiquetas con valores enteros	40
	4.4.	Trayectorias y ciclos	40
	4.5.	Gráficas k -Coloreables	42
	4.6.	Complejidad de la $\mathcal{L}(2,1)$ -etiquetación de G	44
5.	0		47
	5.1.	Asignación para gráficas k-coloreables	47
	5.2.	Asignación para gráficas etiquetadas	50
	5.3.		55
	5.4.	Asignación para ciclos impares	58
	5.5.	Asignación para gráficas 3-coloreables	62
	5.6.		66

	A1 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1,	36 38				
Te	fonía Celular 7	0				
	elefonía Celular Antecedentes Elementos Básicos de la Telefonía Celular Modelos y Aplicaciones 8	'5 '9				
8. 7	odelación con Programación Matemática 9 Formulación y Clasificación 9 Representación de la Gráfica Extendida 9 Modelos con Programación Matemática 9 Max-FAP y MB-FAP 9 MO-FAP 10 MS-FAP 10 MI-FAP 11 Variantes de la formulación 11 e Philadelphia Problem 11 El Problema 11 Una Solución 11 La Solución 12	3 4 6 8 4 6 0 5 7 8 9				
$\mathbf{A}\mathbf{p}$	ndices 123	3				
A. Telecomunicaciones						
B. Sistema GSM						
C. Algoritmos						
D. I	ogramación Matemática 163	3				
Bib	grafía 172	D				

Prefacio

Este material es la recopilación de la investigación, sobre todo bibliográfica, realizada especialmente para sus respectivas tesis de licenciatura de Laura I. Echeveste Escobar [15] y Brisa Jiménes Matus [32] de quienes tuve el privilegio de ser su directora de tesis.

Nuestro objetivo es que este material sea parte de un seminario ya sea en Matemáticas o en Ciencias de la Computación. En semestres anteriores en el Seminario de Análisis Combinatorio, al final del curso he incluido una Introducción al Problema de Asignación de canales y tuve la oportunidad de profundizar más el tema en un Seminario de Computación Teórica.

El Problema de Asignación de Canales involucra varias disciplinas tales como Ciencias de la Computación, Investigación de Operaciones, Ingeniería y en general las Matemáticas

En Ciencias de la Computación involucra áreas específicas como Análisis y diseño de Algoritmos, Complejidad, Heurísticas; Geometría Computacional, Graficación, entre otras. En Investigación de Operaciones están presentes áreas como Teoría de Redes, Programación Matemática (en especial Programación Entera y Dinámica), Teoría de Juegos. En la Ingeniería, el área más importante que se ve involucrada es Telecomunicaciones, ya que la aplicación más importante del Problema de Asignación de Canales es la Telefonía Celular. En Matemáticas el área enriquecida por este problema, es sin duda la Combinatoria, en particular, la Teoría de Gráficas. Cabe mencionar que el Problema de Asignación de canales es modelado como un problema de coloración en Gráficas.

Quiero extender mi agradecimiento al M. en C. Juan A. Vega Garfias [53], quien me facilitó material de su tesis, que incluimos como parte del Capítulo 2 y el Apéndice A de Telecomunicaciones.

Dra. María de Luz Gasca Soto Profesor Asociado, C, T.C. Departamento de Matemáticas

Capítulo 1

Introducción.

El objetivo principal de este trabajo es, primero, plantear el Problema de asignación de canales, con un enfoque de Teoría de Gráficas; después, éste es enfocado a la Telefonía Celular; finalmente, se revisa el famoso Problema de la Ciudad de Filadelfia, presentando su solución.

En términos generales, el Problema de Asignación de Canales consiste en asignar canales que puedan reutilizarse en áreas suficientemente separadas, evitando interferencias y sin perder la calidad del servicio, se desea usar el menor número de canales.

Inicialmente el problema de la asignación de canales es modelado como un Problema de coloración de gráficas y los algoritmos de coloración se usan para intentar resolverlo. Otro enfoque se obtiene al considerar diversas restricciones, tanto técnicas como legales, donde los canales deben ser asignados de manera que la interferencia sea la menor posible. Este problema puede ser considerado como un problema de coloración con restricciones adicionales.

Además, debido al incremento en el uso de servicios de comunicación inalámbrica, así como a la correspondiente escasez y alto costo del espectro de ancho de banda, se ha vuelto de suma importancia, para los operadores de redes celulares, maximizar la eficiencia del espectro.

Tal eficiencia puede ser alcanzada mediante el **reuso de canales**, es decir, el uso simultáneo de una misma parte del espectro de radio por canales de comunicación en diferentes puntos de la red. El reuso es restringido por niveles de ruido, resultado de la interferencia entre dichos canales.

Una antena cubre un área de terreno en la cual puede atender llamadas; a esta área se le conoce como celda. Este problema podemos modelarlo con una gráfica G=(V,A), donde los nodos en la gráfica corresponden a cada celda y las aristas representan la interferencia entre celdas vecinas. Asumimos que existe una demanda fija para cada celda y que una asignación de canales para las celdas debe ser encontrada.

Así, debido a la gran demanda del servicio de telefonía celular, las compañias se han visto en la necesidad de optimizar sus recursos. Uno de estos recursos, es el espectro

radio-eléctrico; por otro lado, adquirir una concesión de este espectro resulta muy caro y el número de frecuencias es limitado. Esta situación, motivo el uso de las técnicas de la Investigación de operaciones y la utilización del término reuso de frecuencias da alternativas de solución al problema de asignación de frecuencias, directamente relacionado con del de asignación de canales.

Este trabajo está dividido en dos partes: En la primera parte, describimos el Problema de Asignación de Canales, PAC, y lo modelamos con Teoría de Gráficas. En la segunda parte, presentamos el problema de la Telefonía Celular, la aplicación más importante del PAC y planteamos su modelación con Programación Matamática. Finalmente, introducimos el Problema de la Ciudad de Filadelfia y presentamos diversas soluciones del mismo.

Ahora bien, la primera parte está dividida en tres capítulos.

En el Capítulo 2, presentamos el problema de asignación de canales, definiendo tanto conceptos básicos como problemas y teorías sobre el mismo. En el Capítulo 3, damos una introducción a los problemas de Coloración y multicoloración en Gráficas, además, presentamos cotas para los respectivos números cromáticos.

En el Capítulo 4, proporcionamos las bases teóricas para modelar el PAC usando la Teoría de Gráficas. Introducimos el concepto de Etiquetación y presentamos resultados asociados a ésta para diferentes familias de gráficas. Determinamos, además, la complejidad del problema de etiquetación, que resulta ser NP-Completo. En el Capítulo 5, se presentan y ejemplifican algunos algoritmos para el PAC aplicados a diversas familias de gráficas.

La segunda parte, Telefonía Celular, consiste de tres capítulos:

En el Capítulo 6, presentamos los elementos básicos de la Telefonía Celular y replanteamos el problema general. En el Capítulo 7, planteamos, y ejemplificamos, varios modelos del problema con Programación Matemática, en particular con Programación Entera.

Al final, Capítulo 8, presentamos una aplicación específica de la Telefonía Celular: el Problema de la Ciudad de Filadelfia, el cual ha sido usado para probar los algoritmos que pretenden solucionar el PAC.

Por último, incluimos tres anexos donde complementamos la parte teórica. Tales son: A. Telecomunicaciones; B. El sistema GSM; C. Algoritmos; y D. Programación Matemática.

Asignación de Canales

Capítulo 2

El Problema de Asignación de Canales

Hoy en día existe en el mundo una creciente demanda para muchos servicios relacionados con el espectro de radio, como una forma de comunicación.

Sin duda alguna, el avance de la ciencia y de la tecnología es una razón fundamental del rápido desarrollo de nuevos servicios inalámbricos de comunicación, como las redes de telefonía celular (digital). La aparición de los sistemas celulares, al permitir una capacidad más grande de usuarios, ha sentado las bases para que la telefonía móvil¹ se convierta en una aplicación de consumo a la que puedan tener acceso, no solamente las personas que necesitan específicamente este tipo de aplicación, sino también otras que lo consideran una comodidad más de las proporcionadas por los avances tecnológicos.

En efecto, las terminales (por ejemplo, teléfonos celulares) son cada vez más pequeñas, baratas y con mayor autonomía. Así mismo, los sistemas ofrecen cada día más servicios, de tal forma que se están alcanzando altos índices de crecimiento y, a mediano plazo, se considera que pueda llegar a convertirse en una alternativa real a la telefonía convencional (fija). Sin embargo, esto ha dado como resultado la escasez del recurso más importante: las frecuencias en el espectro de radio. Como con todos los recursos limitados, el alto costo del ancho de banda del espectro hace ineludible una administración rigurosa del uso de tales frecuencias.

El reuso de canales o frecuencias² en una red de comunicación inalámbrica puede ofrecer un considerable ahorro e incremento de la capacidad de usuarios; no obstante, su aceptación podría causar interferencia entre las señales de comunicación. Este panorama exige una cuidadosa planeación en la asignación de canales, de tal forma que los niveles inaceptables de interferencia sean evitados, además de minimizar los costos.

La telefonía móvil consiste en ofrecer modo un acceso (vía radio) a un usuario, de tal forma que pueda realizar y recibir llamadas dentro del radio de cobertura del sistema.

²Existe una sutil diferencia técnica entre canal y frecuencia; sin embargo, es usual manejar ambos términos indistintamente.

El problema, por lo tanto, surge al distribuir las frecuencias en la red de una "manera razonable". Esta es la forma básica del Problema de Asignación de Canales, CAP³, también llamado Problema de Asignación de Frecuencias, FAP⁴. La literatura al respecto ha crecido súbitamente en los últimos años, debido principalmente a la implementación de redes de telefonía inalámbrica y proyectos de comunicación vía satélite. Incluso el renovado interés en otras aplicaciones como las estaciones de televisión y problemas de comunicación militar, ha inspirado nueva investigación. El Problema de Asignación de Canales apareció por primera vez en 1960, y la mayoría de las contribuciones al CAP —hasta principios de 1980— aprovecharon las heurísticas basadas en problemas de coloración de gráficas.

Los sistemas de telefonía celular desarrollados hasta 1993 tenían en común el uso de una interface radioanalógica y no existía la posibilidad de seguimiento (roaming) internacional⁵. Con estos problemas a la vista, junto con la posibilidad de que los sistemas existentes agotaran su capacidad en poco tiempo; se inició en Europa, a principios de la década de 1980, el estudio para la implementación de un sistema digital. En 1982, la Conferencia Europea Postal y de Telecomunicaciones, CEPT⁶. estableció el Grupo Especial Móvil, abreviado GSM⁷. La tarea de este grupo fue desarrollar la especificación de una red de comunicaciones móviles con seguimiento internacional dentro de los países europeos firmantes. Hacia 1987, fue evidente que el nuevo sistema (segunda generación) sería digital (opuesto a los sistemas analógicos de la primera generación) y, usaría el acceso múltiple por división del tiempo sobre la interface de radio. En 1989 todas las responsabilidades de la CEPT que había tenido hasta ese momento, se traspasan al Instituto de Estándares en Telecomunicaciones Europeo, ETSI⁸.

La primera red piloto GSM fue exhibida en la feria Telecom 91, organizada por la ITU. A finales de 1992, las redes GSM entraron en vigor en Dinamarca, Finlandia, Francia, Alemania, Italia, Portugal y Suecia. Para 1993, el primer millón de suscriptores fue registrado. El Cuadro 2.1 muestra el número total de suscriptores y países con redes GSM instaladas en la década pasada. A finales de octubre del año 2000, habían 376 redes GSM operando alrededor del mundo con más de 396 millones de suscriptores. Tan sólo en Europa, incluyendo Rusia, contaban con 141 redes GSM 900 y GSM 1800 con casi 255 millones de suscriptores en total. En los últimos años los estándares para la tercera generación de sistemas de telefonía celular están siendo desarrollados. El Sistema de Telecomunicación Móvil Universal, UMTS⁹ es uno de ellos. Actualmente, existen 700 millones de clientes GSM en 175 países alrededor del mundo.

³Siglas del inglés, Channel Assignment Problem.

⁴Siglas del inglés, Frequency Assignment Problem.

⁵Habilitación para comunicarse cuando se está en una región diferente al registrado.

⁶Siglas del francés, Conférence Européenne des Postes et Télécommunications.

⁷Siglas del francés, *Groupe Spéciale Mobile*

⁸Siglás del inglés, European Telecommunications Standards Institute.

⁹Siglas del inglés, Universal Mobile Telecommunications System.

año	redes	suscriptores	países
1992	13	250,000	7
1993	32	1,000,000	18
1994	69	4,000,000	43
1995	117	12,000,000	69
1996	167	30,000,000	94
1997	178	73,000,000	107
1998	320	135,000,000	118
1999	355	255,000,000	130
2000	376	397,000,000	142

Cuadro 2.1: Crecimiento de GSM

2.1. Sistema General para las Comunicaciones Móviles

Es importante señalar que, en paralelo con la red GSM, se han definido otros dos sistemas de telefonía móvil digital, uno en Estados Unidos y otro en Japón, JDC¹⁰. Sin embargo, GSM es más avanzado que los otros, por lo cual se está imponiendo en varios países. Como consecuencia de ello, el significado de sus siglas ha cambiado, convirtiéndose en el Sistema General para las comunicaciones Móviles. La red GSM es un sistema multiservicio de radio celular capaz de transmitir tanto voz como datos y con numerosas características suplementarias. El tipo de servicio provisto depende del contenido de la suscripción, capacidad de la red y del equipo portátil del suscriptor.

Estación Móvil

Una estación móvil, MS¹¹, que consiste de un equipo físico¹², como radio transceptor, visualizador, procesadores digitales de señales y una tarjeta inteligente llamada módulo de identidad del suscriptor, SIM¹³. Un enlace de radio conecta una estación móvil a la infraestructura de la red GSM. Una estación móvil encendida sólo puede estar en modo desocupado o en dedicado. En modo desocupado, la estación móvil sintoniza los canales de control, pero no tiene un canal de su propiedad. En modo dedicado, un canal bidireccional es asignado a la terminal móvil permitiéndole intercambiar información con, y a través de, la red GSM.

¹⁰Siglas del inglés, Japanese Digital Cellular System.

¹¹Siglas del inglés, Mobile Station.

¹²Artefacto portátil del suscriptor.

¹³Siglas del inglés, Subscriber Identity Module.

Un equipo terminal¹⁴ podría estar en movimiento mientras se encuentra en modo dedicado. Dependiendo de la distancia a la estación base en servicio y de las condiciones de propagación, el enlace de radio puede degradarse por debajo de la calidad requerida. Entonces el canal bidireccional tiene que ser abandonado o mantenido por otra celda. El cambio de celda para el servicio en modo dedicado es nombrado transferencia de llamada (hand-over o hand-off). Durante una transferencia, la red tiene que rerutear el canal de comunicación sin que el usuario lo note. Las decisiones, cuándo realizar una transferencia y a cuál celda, son tomadas en la infraestructura de la red, pero con el soporte de los móviles.

Subsistemas

De acuerdo con las estaciones móviles, las tres componentes básicas del sistema GSM son: a) Subsistema de la Estación Base; b) Subsistema de Conmutación y red; c) Subsistema de Soporte y Mantenimiento.

El Subsistema de la Estación Base, BSS¹⁵, comprende estaciones base transceptoras¹⁶ y controladores de estaciones base. Una Estación Base Transceptora, BTS¹⁷, es el equivalente de una terminal móvil de radiocomunicaciones, en ambos casos se cuenta con aparatos de transmisión y recepción, incluyendo antenas y todo lo necesario para el procesamiento de señales.

El sitio en el cual un BTS es instalado está organizado en sectores (son uno o tres sectores, generalmente) y, una antena es operada en cada sector. Si existen tres sectores en un sitio, entonces las antenas tienen un ángulo de 120° entre ellas. Si existe un sector exclusivamente en el sitio, entonces la antena es omni-direccional y suele colocarse en el centro del área de cobertura. Cada sector define una celda. La capacidad de una celda es determinada por la cantidad de unidades elementales de transmisión/recepción, llamadas TRX, instaladas para el sector.

Por un precepto convenido, el primer TRX de un sector provee una capacidad para seis llamadas en paralelo y cada TRX adicional de 7 a 8 llamadas más. La capacidad reducida del primer TRX y algunos más, es debida a la condición de transmitir la organización de la celda e información de protocolo. Un máximo de doce TRX pueden ser instalados para un sector de una estación BTS.

Una área de localización es un grupo de celdas, donde cada celda incide exactamente en una área de localización. Su identidad es radiada por cada celda a través de un canal de difusión, de tal forma que una estación móvil siempre puede informarse en que área de localización se encuentra en cada momento. En caso de que una estación móvil

¹⁴Los términos: estación móvil, terminal móvil y equipo terminal serán usados indistintamente.

¹⁵Siglas del inglés, Base Station Subsystem.

¹⁶El término transceptor se refiere a un artefacto de radio transmisión-recepción.
¹⁷Siglas del inglés, Base Transceiver Station.

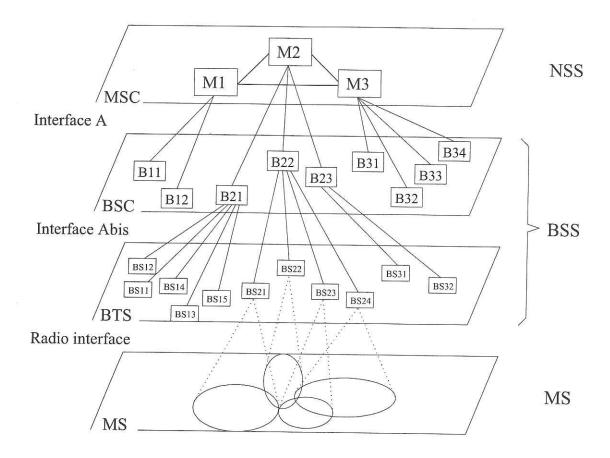


Figura 2.1: Arquitectura de GSM

sea desplazada y el área de localización varíe, un mesaje es enviado y el cambio es registrado por la red. A este proceso se le denomina actualización de la localización.

Cada estación BTS está conectada a un Controlador de Estaciones Base, BSC¹⁸, donde un BSC opera típicamente varias BTS en paralelo. Un controlador BSC está encargado de la asignación y liberación de los canales de radio, además de las transferencias de llamadas. Todas las celdas en una área de localización tienen que ser controladas por el mismo BSC; no obstante, un controlador BSC puede servir a más de una área de localización.

El Subsistema de Conmutación y Red, NSS^{19} , maneja la comunicación con los usuarios de la red GSM. Cada controlador BSC está conectado a un centro de Conmutación de Servicios Móviles, MSC^{20} , y el núcleo de la red interconecta a los centros MSC.

¹⁸Siglas del inglés, Base Station Controller.

¹⁹Siglas del inglés, Network and Switching Subsystem.

²⁰Siglas del inglés, Mobile service Switching Center.

El Subsistema de Soporte y Mantenimiento, OSS²¹, centralizado y remoto, proporcionará los medios necesarios para poder llevar a cabo una gestión eficiente de la red, tanto de la parte de conmutación como la de la radio. En la Figura 2.1 se exponen los subsistemas descritos: MS, SS y NSS. La interface entre los centros MSC y los controladores BSC es llamada interface A; entre los BSC y las estaciones BTS es conocida como interface A-bis; finalmente, entre las BTS y las MS es la radio-interface.

Construcción de la Red

Se han presentado los principales susbsistemas de la red GSM; una pregunta que surge de manera natural es: ¿Cómo instalar una red GSM de tal forma que brinde los servicios deseados? Una diversidad de decisiones tienen que ser asumidas.

A continuación damos algunos ejemplos enfatizando la Optimización Combinatoria: ¿Dónde instalar las estaciones BTS? ¿Cómo ajustar las antenas y qué frecuencias usar? ¿Cómo conectar las estaciones BTS a los controladores BSC? ¿Dónde colocar los centros MSC? y ¿Cómo conectar los centros MSC entre sí y a los controladores BSC?

Estas preguntas básicas deben ser resueltas previamente al despliegue o expansión de la red. Todas ellas poseen un impacto en la generación de ingresos, puesto que cada decisión afecta el costo de desarrollo y operación de la red, aparte de la calidad del servicio que pueda ser ofrecido.

La raíz de la planeación de una red es la demanda de clientes. Esta demanda puede ser observada o estimada. De una u otra forma, la demanda por telecomunicación móvil tiene que ser realizada de manera precisa con la distribución geográfica en términos de Erlang, una medida de telecomunicación. Esta distribución esencialmente establece la medida de la necesidad por telecomunicaciones móviles dependientes de la localización.

Asignación de Canales

La Asignación de Canales, Asignación de Frecuencias y Planificación de Frecuencias son sinónimos del siguiente problema:

Una vez que los sitios para las estaciones BTS son elegidos y el diseño del sector es decidido, el número de TRX a ser operado por sector tiene que ser fijado. Esto se logra por medio de la fórmula de Erlang-B, tomando la demanda a soportar y la máxima probabilidad tolerable de bloqueo (0.02 o similar) como entrada.

El resultado es una lista de la demanda de TRX por cada celda. Ahora, cada TRX tiene que recibir un canal. Esta demanda debe ser satisfecha por una asignación de frecuencias.

²¹Siglas del inglés, Operation and maintenance SubSystem.

2.2. Planificación Automática de Frecuencias

Como se estableció anteriormente, la planificación de frecuencias es un punto clave para proveer gran capacidad y calidad de servicio, por medio del aprovechamiento completo del espectro de radio disponible en la red GSM. La generación automática de una buena planificación de frecuencias para una red GSM es una tarea delicada. Los tres bloques básicos de construcción son:

- a) Un modelo conciso;
- b) los datos relevantes y
- c) las técnicas eficientes de optimización.

A continuación exponemos los parámetros más importantes para la asignación de frecuencias. Estos parámetros deben estar presentes en el modelo matemático.

Como se explicó en la anteriormente, cada sector de un sitio define a una celda y, los canales utilizables en la asignación los llamaremos el espectro de canales disponible. Debido a las restricciones técnicas y regulatorias, algunos canales en el espectro podrían no estar disponibles en cada celda; tales frecuencias son llamadas canales localmente bloqueados, que pueden ser especificados para cada celda.

Algunas veces una restricción se aplica a un par de TRX sobre la proximidad de sus canales. Esto es conocido como requerimiento de separación, y su propósito es garantizar que los TRX puedan transmitir y recibir apropiadamente o soportar los preparativos de las transferencias de llamadas, *hand-over*, entre celdas o evitar un nivel inaceptable de interferencia. Los requerimientos de separación y los canales localmente bloqueados dan origen a las restricciones fuertes. Ninguna de ellas puede ser violada por cualquier asignación de canales.

En el sistema GSM, la interferencia significativa entre transmisores solamente podría ocurrir si canales iguales o adyacentes son usados. Correspondientemente, hablamos de interferencia co-canal²² e interferencia canal-adyacente²³.

Las relaciones de interferencia también llamadas restricciones débiles, no tienen que ser simétricas; es decir, si una celda A interfiere con una celda B, B no necesariamente interfiere con la celda A. Si una interferencia mutua tiene lugar, los índices de interferencia podrían ser distintos.

Si la interferencia es muy intensa, el procesamiento de llamadas podría no ser posible. Entonces ésta debe ser descartada por medio de requerimientos de separación con valores mínimos de uno o dos. Un valor de uno excluye la interferencia co-canal, porque los pares de TRX involucrados no usarían el mismo canal. Una separación (mínima) de dos eliminaría ambas interferencias.

²²La interferencia co-canal ocurre cuando dos TRX transmiten sobre el mismo canal.

 $^{^{23}}$ La interferencia canal-adyacente se da cuando dos TRX operan sobre canales adyacentes, un TRX opera sobre el canal i, y los otros sobre el canal i+1 ó i-1.

Todos estos datos tienen que ser representados adecuadamente para sentar las bases de la planificación automática de frecuencias. Por consiguiente, nuestro objetivo es encontrar asignaciones de frecuencias que incurran en el menor monto posible de interferencia total²⁴.

2.3. Modelos Matemáticos

En esta sección transformamos una versión informal del Problema de Asignación de Canales en un modelo matemático. El problema ahora es el siguiente.

Dada una lista de las demandas de TRX por cada celda, un rango de canales para todo el sistema, una lista de canales disponibles para cada antena, además de la separación mínima, interferencia co-canal y matrices de interferencia canal-adyacente.

Asignar a cada TRX un canal del espectro que no esté bloqueado localmente, de tal forma que todos los requerimientos de separación sean satisfechos y tal que la interferencia total sea minimizada.

Un aspecto final a considerar es el tráfico bidireccional o mecanismo de duplicación (excepto para radiodifusión y televisión), en el cual se necesitan dos canales, uno para cada dirección. Por ejemplo, un teléfono celular posee un mecanismo de duplicación, lo cual significa que una frecuencia (en una dirección) es usada para hablar y una segunda para escuchar, en una llamada ambos usuarios pueden hablar a la vez.

En los modelos considerados de la literatura, el segundo canal es casi siempre ignorado, con una notable excepción en aplicaciones militares. Las razones para despreciar este aspecto del CAP depende de la aplicación. En la mayoría de éstas, dos bandas de N canales están disponibles; una con los canales $\{1,\ldots,N\}$ y la otra con los canales $\{s+1,\ldots,s+N\}$, donde $s\gg N$. La selección de s previene cualquier interferencia entre ambas bandas.

Espectro de Canales

Un espectro de radio (o ancho de banda) dado, puede ser dividido en un conjunto de canales de radio sin interferencia. Todos los canales pueden ser usados simultáneamente mientras se mantiene una recepción aceptable de la señal de radio²⁵. Dependiendo del modo de acceso múltiple utilizado por los usuarios móviles, los sistemas celulares pueden en general ser clasificados en sistemas canalizados y no-canalizados. En un sistema canalizado el acceso múltiple es el *TDMA*, *FDMA* o una combinación de ambos. El

²⁴La interferencia total se define como la suma de todas las interferencias sobre cada par de TRX.
²⁵En la práctica, cada canal puede generar interferencia en los canales adyacentes; sin embargo, tal efecto puede ser reducido por una separación adecuada entre los canales adyacentes.

término canal se refiere a un espacio de tiempo en TDMA, un espacio de frecuencia en FDMA y una combinación de ambos en TDMA/FDMA, como en los sistemas GSM.

La situación característica en la asignación de frecuencias para una red GSM es como sigue: una compañía de telefonía móvil (el operador de red) dispone de una banda de frecuencias $[f_{min}, f_{max}]$ en una región geográfica particular; por ejemplo, un país. La banda es particionada en un conjunto de canales, todos ellos con el mismo ancho de banda Δ .

Los canales disponibles son denotados habitualmente por los enteros 0, 1, ..., N, donde $N = (f_{max} - f_{min})/\Delta$. Al espectro de canales lo denotamos por F, en este caso $F = \{0, 1, ..., N\}$.

Modelación

Las aproximaciones sugeridas en la literatura para tratar al CAP, pueden ser divididas en tres categorías: esquemas de Asignación Fija de Canales, FCA^{26} , esquemas de Asignación Dinámica de Canales, DCA^{27} , y esquemas de Asignación Híbrida de Canales, HCA^{28} .

Los esquemas DCA se desempeñan mejor que los FCA bajo tráfico ligero y no uniforme. Sin embargo, bajo carga pesada y uniforme, los esquemas FCA superan a los DCA. A parte de esto, los esquemas FCA dan una cota sobre el desempeño de los esquemas DCA. De hecho, en caso de que los esquemas DCA permitan una reorganización completa de la asignación, un problema FCA tiene que ser resuelto (en cada lapso la situación cambia). En este trabajo, nos concentramos en la asignación fija de canales.

Esquemas FCA. En los esquemas FCA, el área de servicio es fraccionada en un número de celdas; un número de canales es asignado a cada celda de acuerdo a algún patrón de reuso, dependiendo de la calidad deseada de la señal. Además, el conjunto de canales libres (o disponibles) de uso exclusivo es asignado de forma permanente. Cabe señalar que solamente nos dirigimos hacia los esquemas FCA.

Esquemas DCA. Debido al corto tiempo y variaciones de espacio de tráfico en los sistemas celulares, los esquemas FCA no son aptos para alcanzar una eficiencia alta. En contraste al FCA, no existe una relación fija entre canales y celdas en DCA. Todos los canales son guardados en un fondo central y, son asignados dinámicamente a las celdas cuando las llamadas nuevas entran al sistema. Cuando la llamada ha sido completada, su canal retorna al fondo central.

²⁶Siglas del inglés, Fixed Channel Assignment.

Siglas del inglés, Dynamic Channel Assignment.
 Siglas del inglés, Hybrid Channel Assignment.

La idea principal de todos los esquemas DCA es la de evaluar el costo del uso de cada canal candidato y, seleccionar aquel con costo mínimo de tal manera que ciertas restricciones de interferencia sean cumplidas. La elección de la función de costos hace la diferencia entre los esquemas DCA. La función de costos podría depender de la probabilidad de bloqueo en la vecindad de la celda, la frecuencia de uso, distancia de reuso, distribución de ocupación de canal bajo condiciones de tráfico actual, medidas del canal por parte de los móviles o el promedio de la probabilidad de bloqueo del sistema.

Esquemas HCA. Los esquemas HCA son una mezcla de las técnicas FCA y DCA. En HCA, el número total de canales disponibles para servir es dividido en conjuntos fijos y dinámicos. El conjunto fijo contiene un número de canales nominales que son asignados a las celdas como en los esquemas FCA y en todos los casos, tienen preferencia de uso en sus respectivas celdas. El segundo conjunto es compartido por todos los usuarios en el sistema con una ascendente flexibilidad. Cuando una llamada requiere ser atendida por una celda y todos sus canales nominales están ocupados, un canal del conjunto dinámico es asignado para servir la llamada, entonces el procedimiento de asignación del canal sigue alguna de las estrategias DCA.

Más adelante, Capítulo 4, describimos cómo modelar, en el contexto del problema de coloración de gráficas, el Problema de Asignación de Canales. Asumimos que una demanda fija de canales es dada para cada celda y que una asignación de canales a las celdas debe ser encontrada.

En modelo hacemos uso de una gráfica simple, donde sus vértices representan las celdas de la red y sus aristas comprenden las adyacencias entre tales celdas.

Capítulo 3

Coloración de Gráficas

Presentamos el problema clásico de coloración de gráficas: encontrar el mínimo número de colores para colorear los vértices de una gráfica, de manera que vértices adyacentes tengan colores distintos.

Exponemos algunos resultados teóricos, que si bien no son restrictivos, nos permiten establecer cotas. Posteriormente, se desarrolla un modelo para colorear una gráfica con más de un color por vértice, y así tratar con el requerimiento de varios canales por vértice o varias frecuencias por área.

Definición 1 n-Coloración. Sean G = (V, A) una gráfica y $\mathfrak{C} = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ un conjunto de colores. Una coloración de los vértices de G, es una función $f : V(G) \to \mathfrak{C}$. Si n colores son utilizados, entonces nos referiremos a la coloración como una n-coloración.

Definición 2 $Coloración \ v\'alida$. Una coloración para los vértices de G es v'alida si cualesquiera dos vértices adyacentes tienen asignado un color distinto.

La coloración válida de una gráfica induce una partición en el conjunto de vértices; a cada conjunto de la partición le llamamos clase de color. Diremos que una gráfica es n-coloreable si admite una n-coloración válida.

Por ejemplo, la gráfica en la Figura 3.1 representa una 9—coloración válida, donde el número en cada uno de los vértices representa la clase de color a la que pertenece el vértice; representaremos cada color con un número entero.

Decimos que un conjunto de vértices $S \subseteq V(G)$ es **independiente** si no hay aristas en G, con ambos extremos en S. Cada clase de color de una coloración válida es un conjunto independiente.

Definición 3 Número cromático. El mínimo número de colores asignados a los vértices de una gráfica G para obtener una coloración válida se le llama número cromático de G, y se denota por $\chi(G)$.

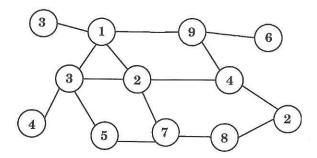


Figura 3.1: Una 9-coloración válida.

Observemos que la coloración de la gráfica en la Figura 3.1 usa nueve colores; sin embargo, como se observa en la Figura 3.2, son suficientes tres colores para obtener una coloración válida. Observemos que la gráfica tiene un triángulo el cual no puede ser coloreado con menos de tres colores. Por lo tanto, el número cromático resulta ser $\chi(G)=3$.

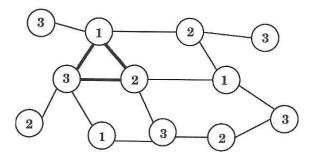


Figura 3.2: Una Coloración válida y mínima.

Resultado 1 Es fácil observar que:

- 1. La gráfica completa de n vértices se colorea con n colores: $\chi(K_n) = n$.
- 2. Para toda gráfica bipartita: $\chi(G)=2$
- 3. Para todo ciclo de longitud par se requieren dos colores: $\chi(\mathcal{C}_n) = 2$; Para los ciclos de longitud impar se necesitan tres colores: $\chi(\mathcal{C}_n) = 3$.

Dada una gráfica G=(V,A) su número cromático siempre es menor o igual al número de vértices. Además, una gráfica que contiene un clan de orden r, es decir, una subgráfica K_r , tiene un número cromático mayor o igual a r. Estas cotas pueden ajustarse en función del grado de los vértices de G.

Teorema 1 Toda gráfica G=(V,A) con grado máximo Δ es a lo más $(\Delta+1)$ -coloreable, es decir $\chi(G)\leq 1+\Delta(G)$.

Revisemos un par de ejemplos, antes de dar la demostración del teorema. La gráfica G=(V,A) en la Figura 3.3, tiene como grado $\Delta=\Delta(G)=5$ y orden n=6. Los vértices a y b tienen grado $\delta(a)=\delta(b)=5$, es decir, son los de mayor grado en la gráfica.

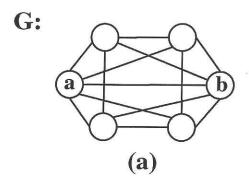


Figura 3.3: Gráfica G, con grado máximo $\Delta=5$

El Teorema 1 señala que serán suficientes 6 colores para colorear G. En este caso el orden también es 6, entonces basta con asignar un color a cada vértice de los $(\Delta + 1)$ colores disponibles, tal como se ve en la Figura 3.4.

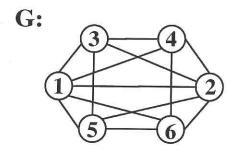


Figura 3.4: Ejemplo de la coloración de una gráfica.

Como segundo ejemplo, consideremos la gráfica G=(V,A) de la Figura 3.5(a), el grado de G es $\Delta(G)=\Delta=5$ y v es el vértice de mayor grado en la gráfica. De acuerdo al Teorema 1, tenemos 6 colores disponibles para colorear G.

En primer término, podemos asignar el color 1 al vértice v y ya que cualquier $u \in V(G)$ tiene grado $\delta(u) \leq 5$, podemos distribuir los otros 5 colores disponibles entre todos los vértices adyacentes a v, tal como se muestra en la Figura 3.5(b).

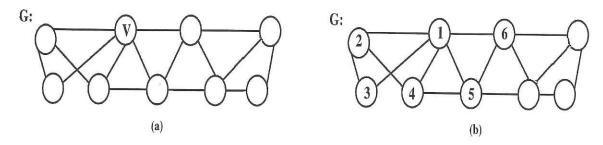


Figura 3.5: Asignación de colores en una gráfica.

Finalmente, nos fijamos en los vértices que aún no han sido coloreados y le asignamos un color que no tenga alguno de sus vecinos. En la Figura 3.6 podemos ver la gráfica G, completamente coloreada con seis colores, o sea $\Delta(G)+1$.

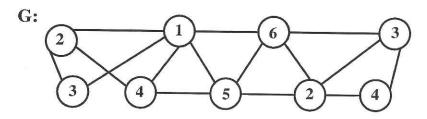


Figura 3.6: Coloración de G.

Demostración del Teorema 1:

Por inducción sobre el número de vértices de G.

Para $n=\Delta+1$. Este es el caso más sencillo, ya que a cada vértice le asignamos un color diferente de los $\Delta+1$ disponibles.

Hipótesis de inducción. Toda gráfica G de orden n-1 y grado máximo Δ es $(\Delta+1)$ -coloreable.

Sean G una gráfica de orden n y $v \in V(G)$ y sea $G_1 = G - v$. G_1 es de orden n-1 y a lo más de grado máximo Δ . Por Hipótesis de Inducción G_1 tiene una $(\Delta+1)$ —coloreable. Por otra parte v es adyacente como máximo a Δ vértices, por lo tanto podemos asignarle un color, que no tengan sus vecinos, de los $\Delta+1$ colores disponibles, de manera que obtenemos para G una $(\Delta+1)$ —coloración válida.

Esta cota puede mejorarse, cuando G es conexa, no completa y de grado máximo $\Delta(G) \geq 3$. En este caso, G es Δ -coloreable. Por ejemplo, consideremos las gráficas en la Figura 3.7, donde el número en cada vértice representa el color asignado.

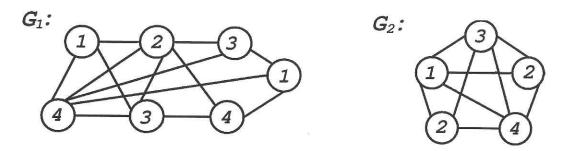


Figura 3.7: Cotas y coloraciones

Observemos, en la Figura 3.7, que G_1 y G_2 son gráficas que contienen un clan K_4 , por lo que $\chi(G) \geq 4$, además $\Delta(G_1) = 5$ y $\Delta(G_2) = 4$. Ya que hemos dado una 4-coloración, tenemos que su número cromático es $\chi(G_1) = 4$ y $\chi(G_2) = 4$, con lo que existe una mejora a la cota del Teorema 1.

Deducimos entonces que estas cotas no son restrictivas en general; por ejemplo el grado máximo de la gráfica bipartita completa $K_{n,m}$ es $\Delta(G) = \max\{n, m\}$, que puede ser arbitrariamente grande, sin embargo su número cromático siempre es 2.

Analicemos un poco más el problema de determinar el número cromático $\chi(G)$.

3.1. Problema del número cromático

Describimos el problema del número cromático para gráficas y demostramos que es NP-completo. Este problema es fundamental para el desarrollo de estas notas.

Problema: Dada una gráfica G = (V, A) determinar el mínimo número de colores necesarios y suficientes para alcanzar una coloración válida de la gráfica G. Es decir, se pretende determinar $\chi(G)$.

Transformamos este problema de optimización al siguiente de decisión:

Problema PNC: Dada una gráfica G = (V, A) y un entero positivo b, ¿Existe una coloración válida para G con a lo más b colores?

De esta manera, el planteamiento formal del problema PNC queda como:

Ejemplar: Sean G = (V, A) una gráfica de orden n y b un entero, tal que $2 \le b \le n$.

Pregunta: ¿Es $\chi(G) \leq b$?

Listado 1 Número Cromático

```
// Algoritmo no deterministico para el Problema
// del Numero Cromatico de un grafica G=(V,A); |A|=n, |V|=m.
// Precondicion: 2 <= b <= n <= m.

NumCromatico(G: graph, b:integer){
    // Fase I:
        Sea C={1, 2, ...,m} una gama de colores.
        Asignar aleatoriamente a cada vertice en V(G) un color de C.
        // Fase II:
        if not ColoracionValida(G){
            write(Coloracion no valida); halt;
        }
        else
        if ( ColoresUsados(G) > b) {
            write(Coloracion no valida); halt;
        }
        else write(Coloracion valida con a lo mas b colores)
}
```

Demostraremos que el problema \mathbf{PNC} es NP-completo mediante una transformación del problema 3SAT a \mathbf{PNC} . El problema 3SAT consiste en determinar si una expresión lógica en su forma normal conjuntiva se satisface, teniendo como restricción que cada cláusula tiene tres variables.

Teorema 2 El problema PNC es NP-completo.

 $\boldsymbol{Demostraci\'on:}$ Debemos demostrar primero que el problema esta en NP y después que es NP-Hard.

P.D PNC está en NP.

En el Listado 1, presentamos un algoritmo no determínistico para este problema y en el Listado 2 están los procesos auxiliares. Es fácil ver que, la construcción (Fase I) y la verificación (Fase II) pueden realizarse en tiempo polinomial, por lo cual el algoritmo descrito es no determinístico polinomial para el problema PNC. Por lo tanto, PNC está en NP.

P.D PNC es NP-Hard. Para demostrar esto requerimos una transformación con un problema NP-completo conocido. A continuación, describimos detalladamente la transformación $3\text{-SAT} \propto \text{PNC}$.

Realizamos la transformación de ejemplares de la siguiente forma: Sea E_s un ejemplar del 3-SAT con k cláusulas C_1, C_2, \ldots, C_k , cada una de las cuales contiene a lo más tres literales y en total se tienen n variables $x_1, x_2, \ldots x_n$. Construiremos en tiempo polinomial una gráfica G que tiene una (n+1)-coloración, si y sólo si las cláusulas se satisfacen.

Listado 2 Número Cromático, procesos

```
ColoracionValida(G: graph): boolean;{
// revisa que vertices adyacentes tengan color diferente
var a: edge  // a=(vi, vf)
    vale: boolean;  // indica que la coloracion es valida

vale = true;
while vale do{
    for each a=(vi, vf) in A(G) do
        if vi.color = vf.color then{
            vale = false; halt; // rompe el ciclo
        }
    }
return vale
}
ColoresUsados(G:graph): integer;{
// cuenta, y regresa, cuantos colores se usaron de C para
// colorear los vertices de G.
}
```

Si $n \leq 4$ será necesario verificar a lo más 16 asignaciones posibles de valores de verdad para las variables, para determinar si las cláusulas se satisfacen. Esto es factible hacerlo, incluso manualmente. Asumimos entonces que n>4.

Construimos la gráfica G con orden 3n+k. Primero definimos los vértices como:

$$V(G) = \{x_1, x_2, \dots x_n\} \cup \{\bar{x_1}, \bar{x_2}, \dots \bar{x_n}\} \cup \{y_1, y_2, \dots y_n\} \cup \{c_1, c_2, \dots, c_k\},\$$

donde $\bar{x_i}$ es la negación de x_i y cada c_i corresponde a la cláusula C_i . Definimos el conjunto de aristas de la manera siguiente:

- Para cada i, $1 \le i \le n$, (x_i, \bar{x}_i) es una arista de G.
- Cada vértice y_i , $1 \le i \le n$, está unido a los vértices y_j , $x_j y \bar{x_j}$, para $j \ne i y$ $1 \le j \le n$.
- El vértice x_i , $1 \le i \le n$, está unido al vértice c_j , $1 \le j \le k$, siempre que x_i no sea una de las literales en la cláusula C_j
- Ahora, unimos cada vértice $\bar{x_i}$, a cada c_j , si $\bar{x_i}$ no aparece en C_j , para $1 \le i \le n$ y $i \le j \le k$.

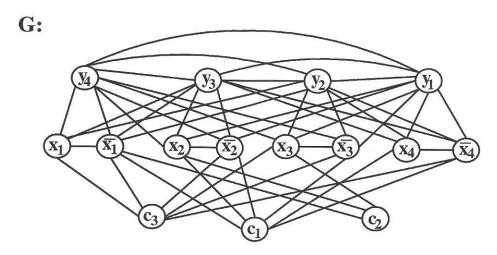


Figura 3.8: Una gráfica para transformar un ejemplar 3-SAT en uno de PNC.

Ilustramos, en la Figura 3.8, esta construcción para la gráfica G de orden 15, con $n=4,\ k=3,\ C_1=\{x_1,x_3\},\ C_2=\{x_1,\bar{x_2},\bar{x_3}\},\ C_3=\{x_2,x_4\}.$

Ahora demostraremos que la gráfica G tiene una (n+1)-coloracion válida si y sólo si las cláusulas se satisfacen. Ya que la subgráfica inducida por $y_1, y_2, \ldots y_n$ es completa, al menos se necesitan n colores para colorear los vértices de G. Sin pérdida de generalidad, asumimos que y_i tiene asignado el color i para cada $1 \le i \le n$.

El vértice y_i es adyacente a cada par de vértices x_j , $\bar{x_j}$ con $j \neq i$, luego si el color i se usa para colorear algún vértice en el conjunto $S = \{x_1, x_2, \dots x_n\} \cup \{\bar{x_1}, \bar{x_2}, \dots \bar{x_n}\}$ entonces puede usar el color de x_i o el de $\bar{x_i}$, pero no ambos, porque son adyacentes.

Por tanto, necesitamos otro color para colorear todos los vértices de S, es decir requerimos del color n+1. De aquí que $\chi(G) \geq n+1$.

Ahora bien, si tenemos la gráfica coloreada con n+1 colores, entonces para la i-ésima variable, $1 \le i \le n$, usamos el color i o el color (n+1): si x_i se colorea con el color i, a su complemento se le da el color (n+1) y viceversa.

Supongamos que $\chi(G)=n+1$. Mostraremos que en este caso las cláusulas se satisfacen. Consideremos una (n+1)-coloración de G. Podemos asumir que y_i tiene el color i, donde $1 \le i \le n$. Ya que cada C_i contiene a lo más 3 literales y n>4, se sigue que el vértice c_j es adyacente con x_l y \bar{x}_l para alguna l, $1 \le l \le n$.

Dado que x_l o \bar{x}_l deben recibir el color n+1, tenemos que c_j no puede ser coloreado con n+1 para cada $j, 1 \leq j \leq n$. Entonces, cada c_j debe ser coloreado con uno de los colores $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Asignemos el valor de verdad F al vértice x_i o $\bar{x_1}$ que es coloreado con el color n+1; mientras al otro vértice del par le asignamos el valor de verdad V. Entonces cada c_j debe ser coloreado con el mismo color dado a alguna literal que esté en C_j y que tenga un valor de verdad V. Con esta asignación de valores de verdad a $x_1, x_2, \ldots x_n$, las cláusulas se satisfacen.

Supongamos ahora que las cláusulas se satisfacen. Para cada c_i seleccionamos una literal $z_{i,j}$ de C_i , donde $z_{i,j}$ es $x_{i,j}$ o $x_{i,j}$, tal que el valor de verdad para $z_{i,j}$ es V. Coloreamos c_i y $z_{i,j}$ con el color i_j , y coloreamos a $z_{i,j}$ con el color n+1. Si cada par x_i , \bar{x}_i permace sin colorear, entonces se pone el color i a x_i y el color i a x_j .

Finalmente, hemos construido una (n+1)-coloración válida de G, esto es $\chi(G) = n+1$.

Ya que G tiene a los más $\binom{n}{2} + 2n^2 - n + k(2n-1)$ aristas, la transformación se realiza en tiempo polinomial.

Ahora podemos asegurar que determinar el número cromático de una gráfica es un problema NP-completo; ya que no siempre resultará fácil calcularlo, veamos como establecer cotas para aproximarnos al número óptimo de colores usados.

3.2. Cotas del número cromático de una gráfica.

Sea G=(V,A) una gráfica bipartita de orden n. Sabemos que existe una partición de V(G) en dos subconjuntos V_1 y V_2 , donde $V_1 \neq \emptyset$ y $V_2 \neq \emptyset$. Sean n_1 y n_2 los órdenes de V_1 y V_2 respectivamente, por definición $n=n_1+n_2$. De esta forma, una gráfica bipartita completa tiene un número de aristas igual a $n_1(n-n_1)$ donde $1 \leq n_1 \leq (n-1)$. El valor de n_1 que maximiza el número de aristas resultante es $n_1=n/2$ si n es par y $n_1=(n-1)/2$ si n es impar. En este caso, si definimos $M_{max}(n,2)$ como el número máximo de aristas que puede tener una gráfica bipartita de orden n, tenemos que:

$$M_{max}(n,2) = \begin{cases} \left(\frac{n}{2}\right)^2 & \text{si } n \text{ es par} \\ \left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right) & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$
(3.1)

De esta manera, deducimos que toda gráfica de orden n con un número de aristas superior a $(n/2)^2$ no es bipartita. Esta condición puede traducirse en términos de la densidad de la gráfica de modo que para toda gráfica G de orden n y densidad ρ se tiene que G no es bipartita si:

$$\rho \cdot \frac{n(n-1)}{2} > \left(\frac{n}{2}\right)^2 \iff \rho \cdot \frac{n(n-1)}{2} > \frac{n \cdot n}{2 \cdot 2}$$

$$\iff \rho \cdot (n-1) > \frac{n}{2} \iff \rho > \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{n-1}$$

Es decir G no es bipartita si su densidad ρ es tal que:

$$\rho > \frac{n}{2(n-1)} .$$

Así, en el caso en que el orden de la gráfica sea arbitrariamente grande, cualquier gráfica con una densidad superior a $\frac{1}{2}$ no es bipartita.

Generalizando la expresión anterior, definimos $M_{max}(n,k)$ como el número máximo de aristas que puede tener una gráfica k-coloreable o k-partita de orden n. Considérese una gráfica G = (V, A), k-coloreable de orden n. En este caso es posible partir V(G) en k subconjuntos disjuntos de vértices V_i de orden n_i , de tal manera que:

$$\sum_{i=0}^{k-1} n_i = n \quad \text{y} \quad n_i \ge 1, \quad \forall i.$$

A continuación calculamos el número de aristas de una gráfica k-partita completa en el que cada uno de los subconjuntos disjuntos V_i tiene n_i vértices. Para ello, en vez de sumar restaremos aristas.

Una gráfica k-partita y completa de orden n contiene las n(n-1)/2 aristas de K_n menos todas las aristas correspondientes a vértices de un mismo subconjunto V_i . De esta forma, el número total de aristas de una gráfica completa k-partita de orden n es:

$$A(n,k) = \frac{n(n-1)}{2} - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{n_i(n_i-1)}{2}$$

Ahora buscamos los valores n_i que maximizan esta función. Dado que el primer término de la ecuación sólo depende de n, se minimizará el segundo término. Obtenemos el siguiente planteamiento:

minimizar
$$\sum_{i=0}^{k-1} n_i (n_i - 1)/2$$
 sujeto a
$$\sum_{i=0}^{k-1} n_i = n$$

$$n_i \in \mathbb{Z}$$

$$n_i \geq 1 \ \forall i \ .$$
 (3.2)

La partición V_i de vértices que optimiza las expresiones anteriores debe ser tal que todas las particiones V_i tengan el mismo orden o a lo sumo, órdenes separados por una unidad. De este modo, los n_i óptimos son:

$$n_{i} = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \quad 0 \leq i \leq (k - 1 - n \mod k)$$

$$n_{i} = \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil \quad (k - n \mod k) \leq i \leq k - 1$$

$$(3.3)$$

Ejemplo 1 Definir la gráfica 7-partita G = (V, A) de orden 100 de tamaño máximo.

Dado que el cociente 100/7 = 14 y el residuo es 2, deberían separarse los vértices de G en dos subconjuntos de orden 15 y cinco de orden 14. Esta es la única partición de G tal que ningún par de subconjuntos V_i tiene tamaños de diferencia mayor a 1.

Una vez conocida la partición óptima puede calcularse el número $M_{max}(n,k)$ de aristas de una gráfica k-partita de orden n. Con el objeto de simplificar las operaciones denominamos como C al cociente de la división n/k y R al residuo, es decir, $C = \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ y $R = n \mod k$. Entonces,

$$M_{max}(n,k) = \frac{n(n-1)}{2} - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{n_i(n_i-1)}{2}$$

$$= \frac{n(n-1)}{2} - \frac{1}{2}(k-R)C(C-1) - \frac{1}{2}R(C+1)C$$

$$= \frac{n(n-1)}{2} - \frac{1}{2}C(k(C-1) + 2R)$$

Aunque la demostración sólo tiene sentido para $n/k \notin \mathbb{Z}$, el resultado es el mismo cuando la división es entera, en este caso R=0 y desaparece el tercer sumando de la expresión. Considerando los valores de C y R se obtiene la expresión:

$$M_{max}(n,k) = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \left(k \left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - 1 \right) + 2(n \mod k) \right)$$
 (3.4)

Sustituyendo en esta expresión el valor de k como k=2 se vuelve a los valores calculados en la Ecuación 3.1.

Teorema 3 Sea G = (V, A) una gráfica de orden n y tamaño M. Si existe un entero positivo k tal que M cumple la siguiente relación:

$$M > \frac{n(n-1)}{2} - \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \left(k \left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - 1 \right) + 2(n \mod k) \right)$$

entonces el número cromático de G es $\chi(G) > k$.

A partir de la Ecuación 3.4 puede demostrarse que toda gráfica k-partita de orden n y tamaño M, tal que:

$$M = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \left(k \left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - 1 \right) + 2(n \bmod k) \right)$$

es una gráfica k-partita completa. En este caso, dada una k-coloración de la gráfica, ningún conjunto de vértices del mismo color puede superar en más de una unidad la cardinalidad de otro conjunto.

Ejemplo 2 Sea G = (V, A) una gráfica de orden 100. Deseamos colorear a G con 5 colores.

En este caso $M_{max}(100,5) = 4000$ y de este modo si el tamaño de G es mayor que 4000, entonces G no es 5-coloreable. En términos de la densidad se obtiene que para valores superiores a 0.81 no existen gráficas 5-coloreables de orden 100.

El Teorema 3 puede expresarse en función de la densidad ρ de la gráfica. Según la definición de la densidad el tamaño de una gráfica puede escribirse como:

$$M = \rho \cdot \frac{n(n-1)}{2} \tag{3.5}$$

Por otro lado, hemos visto que si el tamaño de una gráfica G es superior a $M_{max}(n,k)$ entonces G no es k-coloreable de modo que $\chi(G)>k$. Sustituyendo la Ecuación 3.5 en las expresiones del Teorema 3 podemos obtener el valor de la densidad a partir del cual una gráfica de orden n no puede ser k-coloreable.

$$\rho \frac{n(n-1)}{2} > \frac{n(n-1)}{2} - \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \left(k \left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - 1 \right) + 2(n \mod k) \right)$$

$$\implies n(n-1)(1-\rho) < \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \left(k \left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - 1 \right) + 2(n \mod k) \right)$$
(3.6)

Apliquemos las siguientes desigualdades:

$$\frac{n}{k} - 1 < \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \le \frac{n}{k} \tag{3.7}$$

$$0 \le n \mod k \le (k-1) \tag{3.8}$$

En este caso puede escribirse:

$$\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \left(k \left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - 1 \right) + 2(n \bmod k) \right) > \left(\frac{n}{k} - 1 \right) k \left(\frac{n}{k} - 2 \right)$$

De este modo, si se retoma la expresión 3.6 tenemos que una gráfica que cumpla la siguiente desigualdad:

$$n(n-1)(1-\rho) \le \left(\frac{n}{k}-1\right)k\left(\frac{n}{k}-2\right)$$

tendrá un número cromático mayor a k. Despejando la densidad se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 4 Sea G=(V,A) una gráfica de orden n y densidad ρ . Si existe un entero positivo k tal que

$$\rho \geq 1 - \frac{k}{n(n-1)} \left(\frac{n}{k} - 1 \right) \left(\frac{n}{k} - 2 \right), \tag{3.9}$$

entonces el número cromático de G es mayor o igual a k.

Por ejemplo, toda gráfica G de orden 200 y densidad superior a 0.68 tiene número cromático $\chi(G) > 3$.

Podríamos haber calculado la Ecuación 3.4 en otros términos, obteniendo en este caso cotas de la densidad, distintas de la Ecuación 3.9. De este modo, si en vez de restar las posibles aristas entre elementos de los mismos subconjuntos V_i , se hubiesen sumado las aristas entre vértices del mismo color, las expresiones habrían cambiado formalmente.

Exponemos a continuación la expresión inicial de dos nuevos cálculos de $M_{max}(n,k)$; sólo hemos efectuado las sumas de manera distinta, como resultado de simplificar la expresión y la cota final calculada. Empleamos otra vez las variables C y R y las desigualdades 3.7 y 3.8. Ahora obtenemos:

$$M_{max}(n,k) = \frac{R(C+1)}{2}[(R-1)(C+1) + C(k+R)]$$

$$+ \frac{(k-R)C}{2}[R(C+1) + (k-R-1)C],$$

$$M_{max}(n,k) = \frac{1}{2}[C(k-1)(2R+kC) + R(R-1)].$$
(3.10)
$$Si \rho(G) \ge (2k+n-2)\frac{k-1}{k(n-1)} + \frac{(k-1)(k-2)}{n(n-1)} \quad \text{entonces} \quad \chi(G) > k$$

También pueden obtenerse las siguientes expresiones.

$$M_{max}(n,k) = \frac{1}{2}[(n-C)(k-R)C + (n-C-1)R(C+1)]$$

$$M_{max}(n,k) = \frac{1}{2}[Ck(n-C) + R(n-2C-1)].$$
(3.11)
$$Si \quad \rho(G) \ge \frac{n}{n-1}\frac{k-1}{k} + \frac{k-1}{n} + \frac{1}{n-1} \quad \text{entonces } \chi(G) > k$$

Considerando que n = kC + R puede comprobarse que las 3 expresiones obtenidas para $M_{max}(n,k)$ son equivalentes. De esta manera resultan tres cotas distintas de la densidad de una gráfica k- coloreable de orden n. Puede demostrarse que la cota 3.11 es menos restrictiva que la cota 3.9. Por otro lado, para valores k = 2 y $n \ge 5$ la cota 3.10 es la más restrictiva de las tres. En este caso, la expresión de la Proposición 4 puede ser sustituida por la expresión 3.10. En el resto de los casos la primera cota es la más ajustada; además podemos calcular cotas más restrictivas a partir de las expresiones $M_{max}(n,k)$, [41].

3.3. Multicoloración de gráficas

Hemos mencionado que el problema de la asignación de frecuencias puede ser tratado en términos de la teoría de gráficas como un problema de coloración, y de esta forma resolverlo mediante el empleo de técnicas algorítmicas. Por otra parte, en las redes celulares de telefonía móvil es habitual trabajar con más de una frecuencia por celda debido a los requerimientos de tráfico. Esto implica, en términos de la teoría de gráficas, colorear con más de un color (frecuencia) cada vértice de la gráfica resultante.

En estos casos se ha llevado a cabo, en primer término, una adaptación del problema, asignando a cada celda una serie de vértices, tantos como frecuencias tiene asignadas la celda, con el objeto de resolver el problema como si se tratara de una coloración simple. Las adyacencias de los vértices en la gráfica construida se describen así en función de las interferencias entre celdas, de modo que dos vértices son adyacentes si pertenecen a celdas interferentes, siendo el peso de la arista que los une igual a la distancia que deben guardar las frecuencias asignadas en cada celda.

En esta sección desarrollamos un modelo teórico que, combinado con técnicas algorítmicas, permite colorear una gráfica con más de un color por vértice sin necesidad de transformar la gráfica. Por simplicidad, presentamos las técnicas en el caso más sencillo, donde todos los vértices requieren un número de colores igual a 2. Los resultados y métodos descritos son extrapolables para un número mayor de colores e incluso para el caso genérico en que cada vértice lleve asociado un número variable de colores.

Definición 4 Multicoloración. Sea una gráfica G = (V, A); se define una r-multi-coloración de <math>G, con k colores, como una asignación de colores a los vértices de G de forma que cada vértice tenga asignados r colores diferentes y dos vértices adyacentes no tengan algún color en común.

Nótese la diferencia entre la notación k-coloración y la expresión r-multicoloración con k colores. La primera es reservada para la coloración simple en que cada vértice tiene asignado un color único, escogido de un conjunto de cardinalidad k, y en la segunda cada vértice tiene asignados r colores distintos escogidos de un conjunto de cardinal k. Recordemos también que los colores son representados con enteros.

Definición 5 Número r-multicromático, $\chi_r(G)$. El número multicromático de una gráfica G, se define como la cardinalidad del mínimo conjunto de colores necesarios para r-multicolorear G.

Proposición 5 Sea G=(V,A) una gráfica. Si $\chi(G)=k\Longrightarrow \chi_r(G)\leq r\cdot k$

Demostración: Podemos r-multicolorear la gráfica ejecutando r veces una coloración con k colores: De 1 a k la primera coloración, de k+1 a 2k la segunda coloración y así sucesivamente.

Por ejemplo, veamos la Figura 3.9. La gráfica G_1 tiene número cromático $\chi(G)=5$. Queremos asignar 2 colores diferentes a cada vértice, por la Proposición 5, sabemos que tendremos que ocupar a lo más 10 colores, esto es $\chi_r(G) \leq r \cdot k$. La gráfica G_2 tiene número crómatico $\chi(G)=3$, al hacer la 3-multicoloración para G_2 comprobamos que es necesario usar $g=3\cdot 3$ colores.

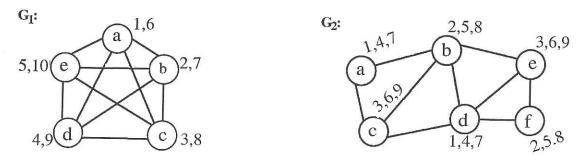


Figura 3.9: Ejemplo de Multicoloraciones con $r \cdot k$ colores.

Es sencillo mostrar la existencia de gráficas para las cuales $\chi_r(G) < r \cdot k$. En general, cualquier ciclo \mathcal{C}_n con n > 3 e impar, que tiene número cromático $\chi(\mathcal{C}_n) = 3$, puede ser 2-multicoloreado con 5 colores. Por ejemplo, el ciclo de orden 5, mostrado en la Figura 3.10 ilustra este caso.

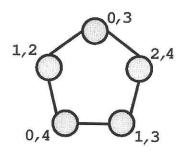


Figura 3.10: Ejemplo de una 2-multicoloración del ciclo \mathcal{C}_5 .

Por otra parte, si se tiene una r-multicoloración con $\chi_r(G)$ colores, se puede conseguir una (r+1)-multicoloración añadiendo a cada vértice un nuevo color, escogido entre $\chi_r(G)$ y $\chi_r(G)+k$ y distribuido según una coloración simple de $\chi(G)=k$ colores. De este modo,

$$\chi(G) = k;
\chi_2(G) \le 2k,
\chi_3(G) \le 3k - \alpha_2,
\chi_3(G) = 2k - \alpha_2,
\chi_3(G) = 3k - \alpha_2 - \alpha_3,
\alpha_2 \in \mathbb{Z}, \quad \alpha_2 \ge 0;
\alpha_3 \in \mathbb{Z}, \quad \alpha_3 \ge 0;$$

y en general,

$$\chi_r(G) \leq \chi_{r-1}(G) + k, \qquad \chi_r(G) = rk - \sum_{i=2}^r \alpha_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{Z}, \quad \alpha_i \geq 0.$$
(3.12)

3.4. Cotas generales para el número multicromático.

Presentamos a continuación algunos resultados simples sobre las cotas del número multicromático de una gráfica G.

Proposición 6 Sea una gráfica G = (V, A) tal que contiene un clan de orden c. En este caso se cumple que,

$$\chi_r(G) \ge r \cdot c. \tag{3.13}$$

Demostración: Inmediata dado que ninguna de las gráficas r coloreadas podrá utilizar menos de c colores distintos en cada caso.

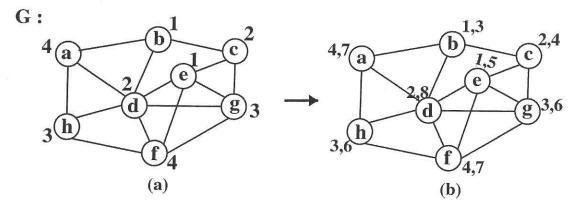


Figura 3.11: Multicoloración de una gráfica G que contiene un clan K_4 .

En la Figura 3.11(a), la gráfica G, tiene un clan K de orden 4, con $V(K) = \{d, e, f, g\}$; hemos dado una 4-coloración válida, por tanto $\chi(G) = 4$. Asignando 2 colores diferentes a cada vértice, tenemos la asignación en la Figura 3.11(b).

Proposición 7 Dada una gráfica G=(V,A) de orden n, tal que s es el orden del conjunto independiente máximo de G; se tiene que

$$\chi_r(G) \ge \left\lceil \frac{r \cdot n}{s} \right\rceil. \tag{3.14}$$

Demostración: Dado un color j cualquiera, éste puede ser asignado como máximo a s vértices diferentes. Por otra parte, si queremos multicolorear G con r colores en cada vértice tendremos un total de $n \cdot r$ colores asignados a lo largo de toda la gráfica, contando las repeticiones. Por lo tanto, se obtiene la cota propuesta.

En la gráfica G_1 , de la Figura 3.12, el orden del conjunto máximo independiente es 4, el orden de G_1 es n=10; digamos que queremos asignar dos colores por vértice, de acuerdo a la Proposición 7:

$$\chi_r(G) \geq \left\lceil \frac{2 \cdot 10}{4} \right\rceil = \left\lceil \frac{20}{4} \right\rceil = 5,$$

observamos que el máximo color usado es 6 y, en efecto, 6 es mayor que 5.

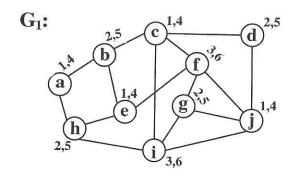


Figura 3.12: Ejemplo de la Multicoloración de la Proposición 7

Proposición 8 Dada una gráfica G=(V,A) conexa y no completa de grado máximo $\Delta, \ \Delta \geq 3,$ se cumple que,

$$\chi_r(G) \leq r \cdot \Delta.$$

Demostración: El Teorema de Brooks[8] asegura que si G es una gráfica conexa no completa y no es un ciclo impar, entonces su número cromático cumple $\chi(G) \leq \Delta(G)$. Entonces dada una gráfica G = (V, A), conexa, no completa y con grado máximo $\Delta \geq 3$, podemos considerar el Teorema de Brooks y la Proposición 5 y obtenemos $\chi_r(G) \leq r \cdot \chi(G) \leq r \cdot \Delta$.

Regresemos a la gráfica G de la Figura 3.12, el grado máximo de G es $\Delta(G)=4$. Entonces, tenemos que $\chi_r(G) \leq 2 \cdot \chi(G) \leq r \cdot 4=8$. Por lo tanto, la asignación propuesta también cumple la Proposición 8.

Proposición 9 Dada una gráfica G=(V,A) de número r-multicromático $\chi_r(G)$ se cumple que,

$$\chi_r(G) \leq \min\{\chi_i(G) + \chi_j(G) \mid i+j=r\} \leq r \cdot \chi(G).$$

Demostración: La primera desigualdad se deduce del hecho de que para obtener una multicoloración con r colores pueden incorporarse dos multicoloraciones con i y j colores por vértice respectivamente, si i+j=r. Para la segunda desigualdad, $\min\{\chi_i(G) + \chi_j(G) \mid i+j=r\} \leq r \cdot \chi(G)$, consideremos que

$$\chi_i(G) = i \cdot \chi(G) - \Sigma \alpha_i$$

por la ecuación 3.12. Entonces:

$$\chi_i(G) + \chi_j(G) = i \cdot \chi(G) + j \cdot \chi(G) - \Sigma \alpha_i - \Sigma \alpha_j$$

$$\Leftrightarrow \chi_i(G) + \chi_j(G) \leq i \cdot \chi(G) + j \cdot \chi(G) = (i+j)\chi(G)$$
como $(i+j) = r$, entonces:

$$\chi_i(G) + \chi_j(G) \leq r \cdot \chi(G)$$
.

Con todo lo anterior, podemos deducir fácilmente:

Resultado 2 El número r-multicromático de una gráfica completa de orden n es $n \cdot r$.

Calculamos, a continuación, el número cromático de algunas familias de gráficas.

Proposición 10 Sea G=(V,A) una gráfica bipartita y $A\neq\emptyset$. Se cumple que:

$$\chi_r(G) = 2r.$$

Demostración: Dada una gráfica bipartita G = (V, A) tal que $A(G) \neq \emptyset$ existe al menos una multicoloración de G con 2r colores, superponiendo r veces la primera coloración con 2 colores, por lo tanto $\chi_r(G) \leq 2r$. Por otra parte, de la Proposición 6 se tiene que $\chi_r(G) \geq 2r$ ya que toda gráfica bipartita no nula contiene un clan de orden 2. De esta forma $\chi_r(G) = 2r$.

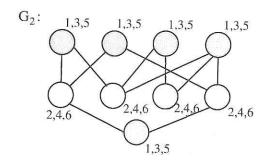


Figura 3.13: La multicoloración de una gráfica bipartita.

Un ejemplo de la proposición anterior, con r=3, es la gráfica G_2 en la Figura 3.13. Podemos observar que la coloración para este tipo de gráficas es muy sencilla, ya que se repite para cada vértice de la partición.

Proposición 11 Sea C_n un ciclo de orden n. Entonces

$$\chi_r(\mathcal{C}_n) = \begin{cases} 2r & \text{si } n \text{ es } par \\ 2r + \left\lceil \frac{2r}{n-1} \right\rceil & \text{si } n \text{ es } impar \end{cases}$$

Demostración: En el caso en que el orden n sea par, el ciclo C_n es bipartito, el número cromático se deduce entonces de la Proposición 10. Por otra parte, para colorear un ciclo con un número impar de vértices se necesitan como mínimo 3 colores. Ahora bien, para 2-multicolorear esta gráfica sólo se necesitan 5 colores, dado que se puede aprovechar uno de los colores c de la primera coloración, suponiendo que c sólo se ha empleado una vez en la primera asignación en un vértice no adyacente y colorear los vértices restantes según el esquema de la primera coloración, con dos nuevos colores como en la Figura 3.14. Este esquema podría repetirse para el tercer y cuarto coloreado, aprovechando siempre el color c de la primera coloración y así sucesivamente hasta que no sea posible reutilizar el color c.

Como el conjunto independiente máximo de C_n tiene orden (n-1)/2, el color c puede repetirse un número de veces igual a (n-1)/2, pudiéndose reutilizar en total (n-1)/2 - 1 ocasiones. De este modo:

$$\chi_1(\mathcal{C}_n) = 3$$
 $\chi_2(\mathcal{C}_n) = 5$ $\chi_3(\mathcal{C}_n) = 7$
hasta $\chi_{\frac{n-1}{2}}(\mathcal{C}_n) = 3 + 2\left(\frac{n-1}{2} - 1\right) = n.$

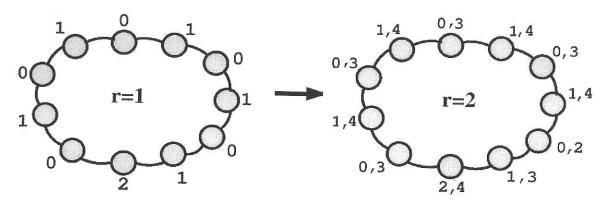


Figura 3.14: Ejemplo de la multicoloración de un ciclo \mathcal{C}_n con n impar.

Queda por determinar el caso cuando r > (n-1)/2. Antes de realizar la demostración, ejemplificamos este caso. La Figura 3.14 ilustra la proposición anterior. Los números representan el color asignado al vértice en cada coloración. Para la siguiente coloración, r=2, se necesitarían entonces 3 nuevos colores, dado que no podría utilizarse de nuevo el color c, ni ninguno de los anteriores, repitiéndose en este punto el mismo proceso anterior. Así en cada incremento de colores, es decir cada vez que pasemos de una r-multicoloración a una (r+1)-multicoloración, se necesitarán dos nuevos colores, excepto cuando se pasa de r donde el incremento es de 3 unidades.

Retomando la demostración, se deduce la siguiente cota para el número multicromático.

$$\chi_r(\mathcal{C}_n) \leq 2r + \left\lceil \frac{r}{(n-1)/2} \right\rceil = 2r + \left\lceil \frac{2r}{n-1} \right\rceil$$

Teniendo en cuenta que para un ciclo C_n impar, el orden del conjunto independiente máximo es s = (n-1)/2, entonces según la Proposición 7 puede obtenerse la siguiente cota inferior del número cromático de C_n con n impar:

$$\chi_r(\mathcal{C}_n) \geq \left\lceil \frac{rn}{(n-1)/2} \right\rceil = \left\lceil \frac{2rn}{n-1} \right\rceil$$

De este modo, combinando las dos cotas obtenidas se tiene que:

$$\left\lceil \frac{2rn}{n-1} \right\rceil \leq \chi_r(\mathcal{C}_n) \leq 2r + \left\lceil \frac{2r}{n-1} \right\rceil.$$

Ahora bien, dado que $r \in \mathbb{Z}$, podemos reescribir:

$$\left\lceil \frac{2rn}{n-1} \right\rceil = \left\lceil \frac{2r(n-1)+2r}{n-1} \right\rceil = \left\lceil 2r + \frac{2r}{n-1} \right\rceil = 2r + \left\lceil \frac{2r}{n-1} \right\rceil.$$

quedando finalmente,

$$\chi_r(\mathcal{C}_n) = 2r + \left\lceil \frac{2r}{n-1} \right\rceil = \left\lceil \frac{2rn}{n-1} \right\rceil.$$
(3.15)

La Figura 3.15 muestra el esquema de multicoloración descrito en la demostración anterior para el caso de un ciclo C_9 . En este caso se cumplen las siguientes desigualdades:

$\chi_1(\mathcal{C}_9) \leq 3$	$\chi_5(\mathcal{C}_9) \leq 12$	$\chi_9(\mathcal{C}_9) \leq 21$
$\chi_2(\mathcal{C}_9) \leq 5$	$\chi_6(\mathcal{C}_9) \leq 14$	
$\chi_3(\mathcal{C}_9) \leq 7$	$\chi_7(\mathcal{C}_9) \leq 16$	
$\chi_4(\mathcal{C}_9) \leq 9$	$\chi_8(\mathcal{C}_9) \leq 18$	

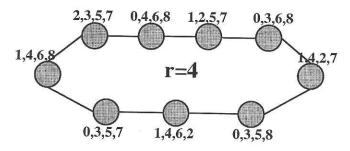


Figura 3.15: Ejemplo de una 4-multicoloración de un ciclo de orden 9.

Capítulo 4

Modelación del Problema usando Teoría de Gráficas

La mayoría de los algoritmos para la asignación de canales revisados en la literatura consideran un modelo estático del problema, pero se ha probado que muchos de estos pueden ser adaptados fácilmente para solucionar el modelo dinámico [29]. Por otro lado, la demanda máxima posible para los canales en la celda y la asignación fija de canales basada en la demanda debe ejecutarse tan bien como en la situación dinámica.

En el modelo de gráfica ya descrito, la demanda es representada mediante un entero positivo w(v) asociado a cada nodo v, de la gráfica. Una asignación de valores enteros a los nodos de una gráfica de manera que cumpla ciertas condiciones o restricciones, es referida como una **etiquetación de la gráfica**. La coloración de una gráfica puede ser vista como un caso especial de etiquetación, que satisface la condición de que las etiquetas de nodos adyacentes deben ser distintas.

El marco de la etiquetación de gráficas otorga la posibilidad de incorporar las restricciones de la separación de canales. Se representa a éstas mediante una secuencia no decreciente de parámetros enteros positivos: $c_0 \geq c_1 \geq \ldots \geq c_k$.

En este modelo suponemos que la distancia de la gráfica relaciona a la distancia entre celdas, requerimos que canales asignados a los nodos a distancia i uno del otro, deben tener una separación de al menos c_i . Así, la restricción c_0 representa la separación entre canales asignados a la misma celda y es referida como restricción co-sitio (co-site constraint). Mientras que las restricciones entre celdas diferentes son llamadas restricciones inter-sitio (inter-site constraints). Frecuentemente, c_0 es grande comparada con las otras restricciones, y el resto, la mayoría de las veces, toman valores pequeños, especialmente 1 o 2. En otros términos, una restricción co-sitio indica que los canales asignados a las celdas correspondientes deben ser distintos. Una restricción inter-sitio 2, llamada restricción de adyacencia de canal, codifica los requerimientos para los canales asignados a un par de celdas e indica que no puede ser contiguo uno con otro en el espectro de radio.

4.1. Modelación del Problema

Asumimos que para cada celda se da una demanda fija de canales. Se requiere encontrar una asignación que asocie exactamente el número de canales solicitados a cada celda.

Definición 6 Gráfica con restricciones. Se define una gráfica con restricciones G, como $G = (V, A, c_0, c_1, \ldots, c_k)$ donde G = (V, A) es una gráfica con parámetros enteros positivos c_0, c_1, \ldots, c_k , que representan las restricciones entre las etiquetas de V(G); además $c_0 \geq c_1 \geq \ldots \geq c_k$.

Estos parámetros representan el espacio del canal pre-establecido para los canales asignados al mismo vértice o a vértices distintos; es decir, c_i representa la restricción que deben satisfacer los vértices a distancia i, o bien c_i representa la diferencia que debe existir entre las etiquetas asignadas a nodos a distancia i. Por consistencia, la restricción entre un par de nodos cuya distancia sea al menos la distancia de reuso se define como cero.

Definición 7 Gráfica con pesos y restricciones. Una gráfica con pesos y restricciones es el par $\mathcal{G} = (\mathbf{G}, \mathbf{w})$, donde \mathbf{G} es una gráfica con restricciones y \mathbf{w} es un vector de pesos positivos para los vértices de la gráfica.

El componente de \mathbf{w} correspondiente al nodo u se denota por w(u), se conoce como el peso del vértice u y representa el número de llamadas que serán atendidas por el vértice. Usaremos w_{max} para denotar máx $\{w(u) \mid v \in V(G)\}$ y w_{min} para denotar el correspondiente peso mínimo mín $\{w(u) \mid v \in V(G)\}$. Además, para cualquier conjunto $S \subseteq V$, usaremos w(S) para denotar la suma de los pesos de todos los vértices en S.

Una definición formal de la asignación de canales puede ser dada en el contexto de nuestro modelo en Teoría de Gráficas.

Definición 8 Asignación de canales. Una asignación de canales para una gráfica con pesos y restricciones $\mathcal{G}=(\mathbf{G},\mathbf{w})$, donde $\mathbf{G}=(V,A,c_o,\ldots,c_k)$, es una asignación f de conjuntos de enteros no negativos (que representan los canales) a los vértices de G, que satisface las siguientes condiciones:

I)
$$| f(u) | = w(u), \forall u \in V.$$

II)
$$i \in f(u)$$
 y $j \in f(v) \Rightarrow |i - j| \ge c_l$ $\forall u, v \in V$ tales que $d_G(u, v) = l$.

El ancho de banda utilizado por una asignación de canales está representado mediante su **amplitud**, span. La amplitud $\sigma(f)$ de una asignación f, en una gráfica con restricciones y pesos, es la diferencia entre los canales mayor y menor asignados por f. La amplitud de una gráfica con restricciones y pesos $\mathcal{G} = (\mathbf{G}, \mathbf{w})$ se denota por $\sigma(G, w)$, y representa la amplitud mínima de cualquier asignación de canales para la gráfica con pesos y restricciones $\mathcal{G} = (\mathbf{G}, \mathbf{w})$.

4.2. Etiquetación

En esta sección revisaremos la etiquetación de gráficas, considerando los vértices a distancia 2. Antecedentes de esta etiquetación es la *T*-coloración de gráficas, material que ha sido ampliamente estudiado en la literatura [11, 12, 44, 45, 48]. Roberts [49] propuso el problema de la asignación eficiente de frecuencias de radio para transmitir a diferentes localidades, usando enteros no negativos para representar las frecuencias.

El material aquí presentado está basado en el artículo de Griggs y Yeh [56], donde proponen un problema análogo para una gráfica G = (V, A) y se busca caracterizar la etiquetación de una gráfica mediante números enteros.

Definición 9 $\mathcal{L}_d(2,1)$ -etiquetación de G. Dado un número real d>0, una $\mathcal{L}_d(2,1)$ -etiquetación de G es una función, evaluada en \mathbb{R}^+ , $f:V(G)\mapsto [0,\infty)$ tal que para cualesquiera vértices u y v, se tiene que:

i) Si
$$d_G(u, v) = 1 \implies |f(u) - f(v)| \ge 2d;$$

ii) Si
$$d_G(u,v) = 2 \Rightarrow |f(u) - f(v)| \geq d$$
.

El número $\lambda(G,d)$ de una $\mathcal{L}_d(2,1)$ -etiquetación de G es el número m más pequeño tal que G=(V,A) tiene una $\mathcal{L}_d(2,1)$ -etiquetación de G donde ninguna etiqueta es mayor que m. Si f es una $\mathcal{L}_d(2,1)$ -etiquetación de G, se denota como $f\in\mathcal{L}_d(2,1)(G)$. Sea G=(V,A) una gráfica y $f\in\mathcal{L}_d(2,1)(G)$. Se define la norma ||f(G)|| como:

$$||f(G)|| = \max\{f(v) \mid v \in V(G)\}$$

Entonces $\lambda(G, d) = \min ||f(G)||$, donde el mínimo se toma entre todas las etiquetaciones $f \in \mathcal{L}_d(2, 1)(G)$.

A continuación ejemplificamos estas definiciones. Consideremos la gráfica G de la Figura 4.1(a). Las Figuras 4.1(b) y 4.1(c) muestran diferentes $\mathcal{L}_1(2,1)$ -etiquetaciones para G. Las etiquetas dadas en las Figuras 4.1(c) y 4.1(d) son óptimas y entonces $\lambda(G,1)=5$. Por otra parte, $||f_0(G)||=10$ y $||f_1(G)||=5$.

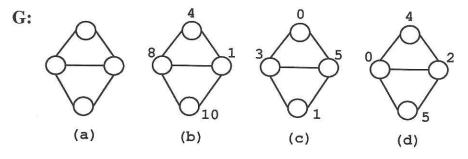


Figura 4.1: $\mathcal{L}_1(2,1)$ -etiquetación.

4.3. Reducción a etiquetas con valores enteros

Primero caracterizaremos a $\lambda(G,d)$ en términos de $\lambda(G,1)$ y posteriormente demostraremos que determinar $\lambda(G,1)$ es suficiente para estudiar el caso cuando la etiquetación es con valores enteros.

Lema 12 Para toda gráfica G = (V, A) y entero d, se cumple que $\lambda(G, d) = d \cdot \lambda(G, 1)$.

Demostración: Demostraremos este lema mediante dos afirmaciones:

1. Se cumple que $\lambda(G,d) \geq d \cdot \lambda(G,1)$.

Sea $f \in \mathcal{L}_d(2,1)(G)$. Definimos $f_1(u) = f(u)/d, \forall u \in V(G)$. Entonces, $f_1 \in \mathcal{L}_d(2,1)(G)$ $\mathcal{L}_1(2,1)(G)$, así $||f(G)||/d = ||f_1(G)|| \geq \lambda(G,1)$. Por lo tanto, $d \cdot \lambda(G,1)$ es una cota inferior para ||f(G)|| y la suposición es verdadera.

2. Se tiene que $\lambda(G,d) \leq d \cdot \lambda(G,1)$.

Sea $f \in \mathcal{L}_1(2,1)(G)$. Definimos $f_1(u) = f(u) \cdot d$, $\forall u \in V(G)$. Por tanto, $f_1 \in \mathcal{L}_d(2,1)(G)$, así $||f(G)|| \cdot d = ||f_1(G)|| \ge \lambda(G,1)$.

Por tanto, podemos concluir que el Lema 12 se satisface.

Lema 13 Sean $x \cdot y \ge 0$, d > 0 y $k \in \mathbb{Z}^+$. Si $|x - y| \ge k \cdot d$, entonces $|x' - y'| \ge k \cdot d$, donde $x' = \lfloor x/d \rfloor d$ y $y' = \lfloor y/d \rfloor d$.

Los lemas anteriores, 12 y 13 implican el siguiente resultado, el cual indica que siempre podemos encontrar una etiquetación con valores enteros, donde es posible obtener el valor mínimo.

Teorema 14 Dada una gráfica G, existe una $f \in \mathcal{L}_1(2,1)(G)$ con valores enteros y $||f(G)|| = \lambda(G,1).$

Para una generalización veamos que $\lambda(G,d)$ se alcanza por alguna f en $\mathcal{L}_d(2,1)(G)$ cuyos valores son todos múltiplos de d. Es decir, $f = d \cdot f'$ donde $f' \in \mathcal{L}_1(2,1)(G)$, evaluada en los enteros, por el Lema 12. Por tanto, es suficiente estudiar el caso donde d=1 y considerar sólo $f \in \mathcal{L}_1(2,1)(G)$ con valores enteros.

Trayectorias y ciclos 4.4.

En esta sección presentamos resultados que caracterizan la $\mathcal{L}(2,1)$ -etiquetación de G cuando la gráfica es una trayectoria o un ciclo. Trabajemos primero la $\mathcal{L}(2,1)$ etiquetación de G en una gráfica sencilla, como una trayectoria.

Proposición 15 Sea P_n una trayectoria de n vértices. Entonces,

(i) $\lambda(P_2) = 2$;

(ii) $\lambda(P_3) = \lambda(P_4) = 3;$ (iii) $\lambda(P_n) = 4 \text{ para } n \ge 5.$

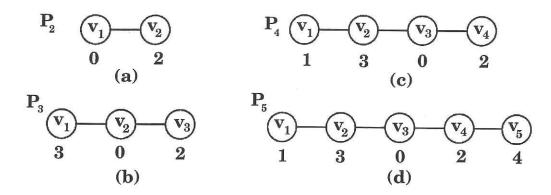


Figura 4.2: Etiquetación de Trayectorias.

Ahora ejemplificamos la Proposición anterior. En cada una de las trayectorias de la Figura 4.2 el número debajo de cada vértice representa el color asignado al vértice con etiqueta v_i .

En la Figura 4.2(a) definimos una etiquetación f válida, usando el par de etiquetas 0 y 2; observemos que la Proposición 15 se cumple para la trayectoria P_2 y se seguiría cumpliendo aún cuando se elijan las etiquetas (1 y 3) ó (0 y 3) aunque si es esta última entonces la amplitud $\sigma(f) = 3$. Por tanto, usamos f con una amplitud mínima.

Para P_3 copiamos la etiquetación propuesta para P_2 y ya que el objetivo es conservar la amplitud mínima, de acuerdo a las restricciones de la $\mathcal{L}(2,1)$ -etiquetación, la siguiente etiqueta disponible es 3. Procedemos de la misma manera para P_4 , considerando que la etiqueta 1 está disponible, tenemos que se cumple que $\lambda(P_3) = \lambda(P_4) = 3$.

Por último, observemos la Figura 4.2(d). Con la etiquetación definida podemos generalizar que para trayectorias P_n cuando $n \geq 5$ es posible establecer etiquetaciones periódicas, ya que P_n tendrá como subgráfica a P_5 la cual ya podemos etiquetar cumpliendo $\lambda(P_5) = 4$.

Si unimos los vértices primero y último de una trayectoria P_n , $n \geq 3$, entonces tenemos un ciclo C_n . Ahora determinemos su número de etiquetación, tomando en cuenta las etiquetaciones propuestas para las trayectorias.

Proposición 16 Sea C_n un ciclo de longitud n, entonces $\lambda(C_n) = 4$, $\forall n, n \geq 3$.

Demostración: Supongamos que $n \geq 5$. Para toda $n \geq 5$, C_n debe contener una trayectoria P_5 como subgráfica. De aquí que $\lambda(C_n) \geq \lambda(P_5) = 4$, por la Proposición 15.

Ahora demostremos que $\lambda(\mathcal{C}_n) \leq 4, n \geq 5$. Para ello es suficiente demostrar que existe una $\mathcal{L}_d(2,1)$ -etiquetación de G f, tal que $|f(\mathcal{C}_n)|=4$.

Sean v_0, \ldots, v_{n-1} vértices de \mathcal{C}_n tales que $d_G(v_i, v_{i+1}) = 1, 0 \le i \le n-2$ y $(v_0, v_{n-1}) \in A(\mathcal{C}_n)$. Se propone la siguiente etiquetación:

1. Si $n \equiv 0 \mod 3$, entonces definimos

$$f(v_i) = \begin{cases} 0 & \text{Si } i \equiv 0 \mod 3; \\ 2 & \text{Si } i \equiv 1 \mod 3; \\ 4 & \text{Si } i \equiv 2 \mod 3. \end{cases}$$

2. Si $n \equiv 1 \mod 3$, entonces redefinimos la asignación f anterior en v_{n-4}, \ldots, v_{n-1} como:

$$f(v_i) = \begin{cases} 0 & \text{Si } i = n - 4; \\ 3 & \text{Si } i = n - 3; \\ 1 & \text{Si } i = n - 2; \\ 4 & \text{Si } i = n - 1. \end{cases}$$

3. Si $n \equiv 2 \mod 3$, entonces redefinimos la asignación f en v_{n-2} y v_{n-1} dada en 1 como:

$$f(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{Si } i = n - 2; \\ 3 & \text{Si } i = n - 1. \end{cases}$$

La etiquetación propuesta anteriormente se ilustra en las gráficas de la Figura 4.3. En (a) se presenta una asignación para C_6 , es decir, cuando $n \equiv 0 \mod 3$; En (b) se proporciona una asignación para C_{10} , esto es cuando $n \equiv 1 \mod 3$.

Finalmente, en (c) realizamos una asignación para \mathcal{C}_{11} , es decir, cuando $n \equiv 2 \mod 3$. Observese que tienen similitud con una etiquetación periódica de trayectorias, en este caso con P_3 , ajustando sólo la "parte final" del ciclo, de acuerdo a la numeración de los vértices.

4.5. Gráficas *k*-Coloreables.

Ahora revisemos la etiquetación en gráficas con un número cromático $\chi(G)$ específico.

Teorema 17 Sea G=(V,A) una gráfica con $\chi(G)=k$ y $\mid V(G)\mid=v$. Entonces $\lambda(G)\leq v+k-2$.

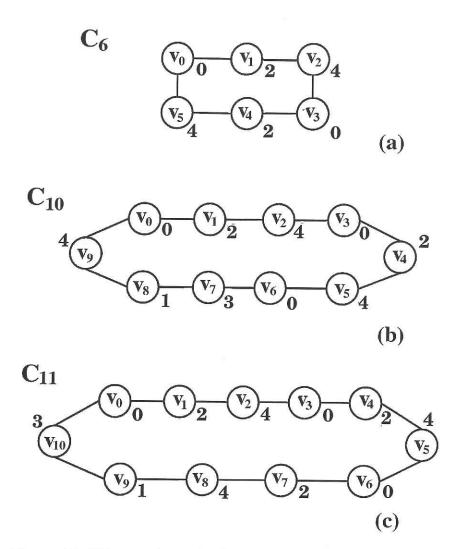


Figura 4.3: Etiquetaciones de C_n , con base en la Proposición 16

Demostración: Dado que $\chi(G) = k$, podemos particionar a G en k conjuntos G_1, \ldots, G_k donde $|V(G_i)| = s_i$ y cada G_i es un conjunto independiente. Sea $V_i = V(G_i) = \{v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{is_i}\}$, donde $1 \leq i \leq k$. Ahora consideremos la etiquetación f definida por $f(v_{1j}) = j - 1$ con $1 \leq j \leq s_1$.

$$f(v_{ij}) = \sum_{t=1}^{i-1} s_t + i + j - 2$$

para $1 \leq j \leq s_i$ y $2 \leq i \leq k$. De aquí, verificamos que f está en $\mathcal{L}(2,1)(G)$.

Por lo tanto, $\lambda(G) \leq ||f(G)|| = s + k - 2$.

Corolario 18 Sea G=(V,A) una gráfica k-partita completa con |V(G)| = s. Entonces $\lambda(G) = s + k - 2$.

Demostración:

- a) Dado que G es una gráfica k-partita, $\chi(G)=k$. Por el Teorema 17, $\lambda(G) \leq s+k-2$.
- b) Por otra parte, la distancia entre cualesquiera dos vértices en G es a lo más 2, entonces las etiquetas deben ser distintas. Además etiquetas consecutivas no pueden ser usadas en vértices de partes diferentes y hay k componentes, entonces: $\lambda(G) \geq s + k 2$. De esta manera $\lambda(G) = v + k 2$.

4.6. Complejidad del problema de la

 $\mathcal{L}(2,1)$ -etiquetación de G.

Como sabemos, el problema de encontrar el número cromático de una gráfica es un problema NP-completo. Dado que el problema de la $\mathcal{L}(2,1)$ -etiquetación de G es similar, veamos si este problema también es NP-completo.

Consideremos el siguiente planteamiento del problema de la $\mathcal{L}(2,1)$ -etiquetación:

Ejemplar: Sea G = (V, A), una gráfica con diámetro 2.

Pregunta: ¿Es $\lambda(G, \cdot) \leq |V|$?

Teorema 19 El problema de la $\mathcal{L}(2,1)$ -etiquetación de G es NP-completo.

Antes de presentar la demostración de este resultado, presentamos un par de lemas que nos faciliten la demostración.

Lema 20 Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- 1. Existe una función inyectiva $f:V(G)\to [0,|V|-1]$ tal que $|f(u)-f(v)|\ge 2$ para toda $(u,v)\in A(G)$.
- 2. G^c contiene una trayectoria Hamiltoniana, es decir, una trayectoria que pasa por todos los vértices de G.

Demostración:

 $(1)\Rightarrow (2)$. Sea f una función inyectiva definida en V(G) que satisface las condiciones en 1. Ya que f es inyectiva, f^{-1} existe. Ordenemos los vértices en V de la siguiente forma: $v_i=f^{-1}(i),\ 0\leq i\leq |V|-1$. Entonces v_i es adyacente a v_{i-1} en G^c para $0\leq i\leq |V|-1$. Así, la trayectoria $\{v_o,v_1,\ldots,v_{|V|-1}\}$ es una trayectoria Hamiltoniana en G^c . $(2)\Rightarrow (1)$ Sea $P=\{v_o,v_1,\ldots,v_{|V|-1}\}$ una trayectoria Hamiltoniana en G^c . Definamos una función $f:V(G)\to [0,|V|-1]$ donde $f(v_i)=i,\ 0\leq i\leq |V|-1$. Dado que P es Hamiltoniana, v_i es único, por tanto f es inyectiva. Sea $(u,v)\in A(G)$. Entonces $f(u)=f(v_i)=i$ y $f(w)=f(v_j)=j$, para alguna i,j con $|i-j|\geq 2$, ya que u no es adyacente a w en G^c . Por lo tanto, f es la función inyectiva que necesitamos.

Lema 21 Sean $G_1=(V_1,A_1)$ una gráfica de diámetro 2 y G=(V,A) una gráfica, tales que: **1.** $V_1=V\cup\{u\}$,

2. $A_1 = A \cup \{ (u, v) \mid \text{ para todo } v \in V \}.$

Entonces existe una función inyectiva $f:V(G)\to [0,|V|-1]$, tal que $|f(u)-f(v)|\geq 2$ para cada $(u,v)\in A(G)$ si y sólo si $\lambda(G_1)\leq |V_1|$.

Demostración: Suponga exite una función inyectiva f, definida sobre V, que satisface la condición anterior. Sea g(v) = f(v), $\forall v \in V$ y $g(u) = |V| + 1 = |V_1|$. También $g \in \mathcal{L}(2,1)(G_1)$ y $|| g(G_1) || = |V| + 1 = |V_1|$. De aquí, $\lambda(G_1) \leq |V_1|$. Por otra parte, supongamos que se cumple $\lambda(G_1) \leq |V_1|$, es decir, existe una función g en $\mathcal{L}(2,1)(G_1)$, tal que: $|| g(G_1) || \leq |V| + 1$. Ahora suponga que $g(u) \neq 0$ o bien $g(u) \neq |V| + 1$. Por las condiciones de $\mathcal{L}(2,1)(G_1)$, no existe $v \in V$ tal que $g(v) \neq g(u) + 1$ o $g(v) \neq g(u) - 1$. Esto nos lleva a usar |V| + 3 números para etiquetar a V_1 . Esto es una contradicción, porque $|| g(G_1) || \leq |V| + 1$ y todas las etiquetas son distintas. Por tanto, g(u) = 0 o bien g(u) = |V| + 1.

Si g(u) = |V| + 1, entonces restringir g a V nos da la función inyectiva f que buscamos. Por otro lado, si g(u) = 0, entonces restringimos g - 2 a V para obtener la función inyectiva f. Con lo que queda demostrado el Lema 21.

Demostración del Teorema 19.

Para demostrar que el problema de la $\mathcal{L}(2,1)$ -etiquetación es NP-completo, revisemos el siguiente problema de decisión.

Ejemplar: Una gráfica G = (V, A)

Pregunta: ¿Existe una función inyectiva $f: V \to [O, |V| - 1]$ tal que $|f(u) - f(v)| \ge 2$ para cualquier $(u, v) \in A(G)$?

Para contestar esta pregunta, requerimos el Lema 20. De acuerdo a este lema, la característica de NP-completo de la etiquetación inyectiva a distancia 2, que denotaremos como IED, surge como consecuencia de la condición de NP-completo del problema de la trayectoria Hamiltoniana, el cual citamos a continuación:

Ejemplar: Sea G = (V, A).

Pregunta: ¿Existe una trayectoria Hamiltoniana en G?

Observemos que la $\mathcal{L}(2,1)$ -etiquetación de G está en NP. Una gráfica G=(V,A) puede transformarse en un ejemplar en tiempo del orden O(|V|+|A|), y puede verificarse en tiempo polinomial que G tiene diámetro 2, esto es una etiquetación f está en $\mathcal{L}(2,1)$ -etiquetación de G y es tal que $||f(G)|| \leq |V|$.

Falta demostrar que el problema de la $\mathcal{L}(2,1)$ -etiquetación es NP-completo; lo haremos mediante la transformación de IED a una $\mathcal{L}(2,1)$ -etiquetación.

Sea G=(V,A) cualquier gráfica en los ejemplares de IED. Construimos una gráfica G'=(V',A') como sigue:

Añadimos un vértice u a V'(G), de manera que sea adyacente a todo vértice en V(G) es decir, G' = (V', A') donde $V' = V \cup \{u\}$ y $A' = A \cup \{(u, v) \mid \text{ para todo } v \in V\}$. Entonces |V'| = |V| + 1 y diam G' = 2.

La condición de NP-completo de la $\mathcal{L}(2,1)$ -etiquetación de G es consecuencia de la NP-completez de IED y del Lema 21.

Con lo que que da demostrado que la $\mathcal{L}(2,1)$ -etiquetación de G es un problema NPcompleto.

Capítulo 5

Algoritmos para la Asignación de Canales

En este capítulo hacemos una revisión de algoritmos para la asignación de canales con restricciones generales. Algunos son adaptaciones de los algoritmos de multicoloración de gráficas, mientras otros están basados en la etiquetación de gráficas. La mayoría del trabajo hecho es para el caso donde sólo se conocen las restricciones co-sitio, c_0 , y a distancia uno, c_1 . Además, al igual que en la multicoloración, una coloración base de una gráfica G=(V,A) con un color por vértice puede ser usada para generar una coloración para un problema de asignación de canales y pesos que tiene a G como gráfica subyacente.

5.1. Algoritmo de Asignación para gráficas k-coloreables.

El Listado 3 presenta una versión del ALGORITMO A. Con este algoritmo, a cada vértice pueden serle asignados sus canales de manera independiente del resto de la red, es decir, éste es un algoritmo completamente distribuido; la única información necesaria para que cada nodo sea capaz de calcular su asignación, es su color base.

A es un algoritmo sencillo para multicolorear gráficas, ya que sólo basta calcular un parámetro, s, que tiene un valor mayor o igual al número cromático de la gráfica y representa el valor que será sumado a la etiquetación inicial para obtener el siguiente color del vértice. Veamos cómo se hace la etiquetación; tomemos como ejemplo el vértice 1 de la gráfica C_5 en la Figura 5.1, por sencillez digamos que $c_0 = c1 = 1$.

La etiquetación inicial de 1 es $f_1(1) = 0$ y el número cromático de C_5 es 3. Por tanto $s = \max\{1, 3 \cdot 1\} = 3$. Digamos que w(1) = 2, de esta manera tenemos que: f(1) = 0, 3.

Listado 3 Algoritmo A de Asignación

```
// Algoritmo para graficas con Numero Cromatico k.

// Precondiciones:

// G=(V,A;c0,c1) grafica con restricciones;

// w Vector de pesos

// f1:V\longrightarrow \{0,1,\ldots,k-1\} una coloracion base que satisface c0 y c1.

AlgoritmoA(G:graph, w:vectorPesos, f1: coloracion){

// Asignacion:

s = max { c0, k*c1 }

for all vertice v en V(G) do

for (i=0; w(v)-1; i++) do

f(v) = f1(v) + i*s
}
```

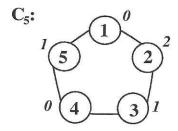


Figura 5.1: Un ciclo C_5 , con restricciones $c_0 = 1$, $c_1 = 1$

Hacemos lo mismo con los otros vértices y resulta la etiquetación en la siguiente tabla, para C_5 . La amplitud de la etiquetación es $\sigma(f) = 5$.

v	1	2	3	4	5	
w(v)	2	2	2	2	2	
$f_1(v)$	0	2	1	0	1	
f(v)	0, 3	2,5	1, 4	0,3	1,4	

Consideremos ahora la gráfica G = (V, A), en la Figura 5.2.

De acuerdo a las Proposiciones 5 y 8, de la sección de multicoloración, si queremos 3-multicolorear la gráfica G ocuparemos al menos 9 colores y como máximo 15 colores. Revisemos la asignación del ALGORITMO A para la gráfica G=(V,A,1,1), el Cuadro 5.1 presenta la información de la etiquetación inicial y restricciones, así como la asignación obtenida. Observemos que la etiquetación anterior se ajusta a las cotas propuestas.

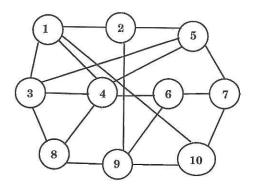


Figura 5.2: Gráfica 3-Coloreable

v	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
w(v)	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
$f_1(v)$	0	1	1	2	0	0	2	0	2	1
f(v)	0, 3,	1,4,	1, 4,	2, 5,	0, 3,	0, 3,	2, 5,	0, 3,	2, 5,	1, 4,
	6	7	7	8	6	6	8	6	8	7

Cuadro 5.1: Etiquetación para G=(V,A,1,1)

Ahora veamos cómo se ejecuta el Algoritmo A cuando las demandas para cada vértice son distintas, modificando también las restricciones. La siguiente tabla contiene la información de la etiquetación inicial y restricciones para la gráfica G=(V,A,3,1), así como la asignación obtenida.

v	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
w(v)	10	9	9	7	7	6	6	4	4	3
$f_1(v)$	0	1	1	2	0	0	2	0	2	1

Cuadro 5.2: Etiquetación inicial para G=(V,A,3,1)

En este caso, no es posible considerar una r-multicoloración general, ya que existen más restricciones y las demandas son diferentes para cada vértice. De cualquier manera podemos establecer cotas; dado que G es una gráfica conexa, no completa, tiene grado $\Delta(G)=5$, con demanda máxima $w_{max}=10$; además contiene un conjunto independiente S de tamaño 4. De acuerdo a las Proposiciones 7 y 8, la multicoloración de la grafica G ocupará al menos 15 colores y como máximo 30. Veamos la etiquetación resultante en el Cuadro 5.3. Para la gráfica 5.2 obtenemos una asignación con amplitud $\sigma(f)=27$, que se ajusta a las cotas.

V	f (v)
1	0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27
2	1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25
3	1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25
4	2, 5, 8, 11, 14, 17, 20
5	0, 3, 6, 9 , 12
6	0, 3, 6, 9 , 12, 15
7	2, 5, 8, 11, 14, 17
8	0, 3, 6, 9
9	2, 5, 8, 11
10	1, 4, 7

Cuadro 5.3: Asignaciones con el ALGORITMO A.

Particularmente, la coloración base usada en el ALGORITMO A puede verse como una etiquetación que satisface la restricción $c_1 = 1$. Podemos formular una versión de este algoritmo basada en una etiquetación de la gráfica.

5.2. Algoritmo de Asignación para gráficas etiquetadas

El método de repetir una asignación de un canal por vértice es denominado como **Asignación Fija**, puesto que cada vértice tiene un conjunto fijo de canales disponibles para su asignación. Un tipo de etiquetación que otorga etiquetas regulares y periódicas para mallas ya fue definida por Jan van den Heuvel *et al.* y es llamada **etiquetación mediante progresión aritmética** [13]

Una etiquetación f de una malla t-dimensional es una etiquetación mediante progresión aritmética si existen enteros no negativos a_1, \ldots, a_t y n tales que para cada vértice v con coordenadas (m_1, \ldots, m_t) , $f(v) = a_1m_1 + \ldots + a_tm_t \mod n$. Al párametro n se le llama la amplitud cíclica, cyclic span, de la etiquetación.

Una etiquetación mediante progresión aritmética es considerada óptima para un conjunto de restricciones, si su amplitud cíclica es lo más pequeña posible.

Dada f una etiquetación mediante progresión aritmética, $\mathbf{f}(\mathbf{m_1}, \mathbf{m_2})$ denota el valor de la etiquetación del vértice con coordenadas (m_1, m_2) . Las etiquetas mediante progresión aritmética son fáciles de definir y con el ALGORITMO A' pueden ser usadas para encontrar algoritmos de asignación de canales. Más aún, su regularidad puede ser útil para diseñar métodos que den mejores asignaciones de canal para pesos no uniformes.

Listado 4 Algoritmo A' de Asignación

```
// Algoritmo basado en una etiquetacion de la grafica.

// Precondiciones:

// G=(V,A;c0,c1,\ldots,ck) grafica con restricciones;

// w Vector de pesos

// f1: V \longrightarrow \{0,1,\ldots,k-1\} etiquetacion base que satisface c0\ldots ck.

AlgoritmoA1(G:graph, w:vectorPesos, f1: coloracion){

// Asignacion:

s = \max\{c0,M\}

for all vertice v en V(G) do

for (i=0;w(v)-1;i++) do

f(v) = f1(v) + i*s
}
```

El Listado 4 presenta una versión del Algoritmo A'. A' también es un algoritmo completamente distribuido, ya que una vez que se conoce la amplitud cíclica, la única información necesaria para cada vértice es el valor de su etiquetación.

El número que se suma a la etiquetación inicial se calcula considerando la amplitud cíclica de la gráfica, por lo que podemos esperar que sea más ajustado que el cálculo en el Algoritmo A.

Consideremos la gráfica de la Figura 5.3, con restricciones $c_0 = 4$, $c_1 = 3$, $c_2 = 3$. Esta gráfica con la etiquetación propuesta tiene un amplitud cíclica M = 16, entonces s = 16. Una vez que conocemos el parámetro s basta con sumar múltiplos de s a la etiquetación inicial; de esta manera tenemos la etiquetación en el Cuadro 5.4, para la gráfica G_1 .

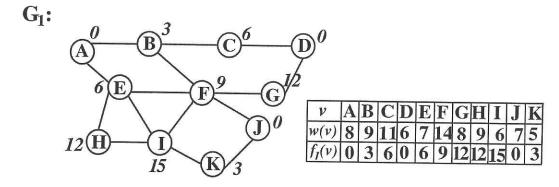


Figura 5.3: Gráfica $G_1 = (V, A, 4, 3, 3)$.

v	f(v)
A	0, 16, 32, 48, 64, 80, 96, 112
В	3, 19, 35, 51, 67, 83, 99, 115, 131
С	6, 22, 38, 54, 70, 86, 102, 118, 134, 150, 166
D	0, 16, 32, 48, 64, 80
E	6, 22, 38, 54, 70, 86, 102
F	9, 25, 41, 57, 73, 89, 105, 121, 137, 153, 169, 185, 201, 217
G	12, 28, 44, 60, 76, 92, 108, 124
H	12, 28, 44, 60, 76, 92, 108, 124, 140
I	15, 31, 47, 63, 79, 95
J	0, 16, 32, 48, 64, 80, 96
K	3, 19, 35, 51, 67

Cuadro 5.4: Asignación de la gráfica G_1 con el ALGORITMO A'.

Trabajaremos ahora con una gráfica G que tenga número mayor de restricciones, siempre y cuando el diámetro de G sea mayor o igual al número de restricciones. Examinemos la gráfica G = (V, A, 5, 3, 2, 2, 1, 1), en la Figura 5.4. G tiene diámetro D = 5, por ello es válido considerar las restricciones hasta c_5 . La mayor etiqueta asignada por f_1 es $f_1(8) = 19$; la amplitud cíclica de G es M = 22; con respecto al primer ejemplo, la amplitud de f_1 es mayor, debido a que existen más restricciones.

Sólo hay que sumar múltiplos de 22 a la etiquetación f(v) hasta cubrir la demanda. Veamos las asignaciones en el Cuadro 5.5.

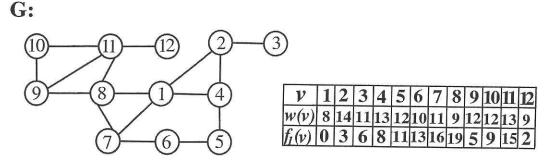


Figura 5.4: Gráfica G = (V, A, 5, 3, 2, 1, 1).

En una gráfica particular tal como un ciclo C_n , es posible considerar hasta $\lfloor n/2 \rfloor$ restricciones, también sabemos que $\chi(C_n)$ es 2 ó 3. Sea el ciclo C_8 , con las restricciones $c_0 = 4, c_1 = 3, c_2 = 3, c_3 = 2, c_4 = 1$, en la Figura 5.5.

v	f(v)
1	0, 22, 44, 66, 88, 110, 132, 154
2	3, 25, 47, 69, 91, 113, 135, 157, 179, 201, 223, 245, 267, 289
3	6, 28, 50, 72, 94, 116, 138, 160, 182, 204, 226
4	8, 30, 52, 74, 96, 118, 140, 162, 184, 206, 228, 250, 272
5	11, 33, 55, 77, 99, 121, 143, 165, 187, 209, 231, 253
6	13, 35, 57, 79, 101, 123, 145, 167, 189, 211
7	16, 38, 60, 82, 104, 126, 148, 170, 192, 214, 236
8	19, 41, 63, 85, 107, 129, 151, 173, 195
9	5, 27, 49, 71, 93, 115, 137, 159, 181, 203, 225, 247
10	9, 31, 53, 75, 97, 119, 141, 163, 185, 207, 229, 251
11	15, 37, 59, 81, 103, 125, 147, 169, 191, 213, 235, 257, 279
12	2, 24, 46, 68, 90, 112, 134, 156, 178

Cuadro 5.5: Asignaciones de G = (V, A, 5, 3, 2, 1, 1).

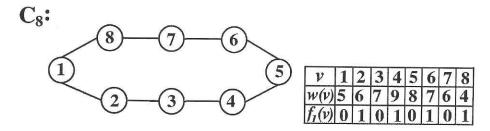


Figura 5.5: Gráfica $C_8 = (V, A, 3, 2)$.

Para esta gráfica la amplitud inicial es $\sigma(\mathcal{C}_8)=20$; para M, la amplitud cíclica, tenemos M=13; finalmente, como se puede ver en el Cuadro 5.6, la amplitud de f es $\sigma(\mathcal{C}_8)=169$.

En este momento cabe preguntar, ¿realmente A' representa una mejora de A? En primer lugar con A' podemos considerar un número mayor de restricciones; pero por otra parte, no es suficiente conocer el número cromático de la gráfica, sino que también es necesario conocer la etiquetación inicial para calcular su amplitud cíclica. Fijémonos entonces en cómo se comportan estos dos algoritmos con la misma gráfica con restricciones.

La gráfica G_2 , en la Figura 5.6 con restricciones $c_0 = 3$ y $c_1 = 2$, con la etiquetación dada, tiene una amplitud cíclica M = 5 y número cromático $\chi(G) = 3$. Por tanto, en la ejecución del ALGORITMO A, s = 6, y en A' s = 5, y dado que A y A' tienen una ejecución similar, es de esperarse que la amplitud de la etiquetación de A' sea menor.

v	$f(\mathbf{v})$
1	0, 13, 26, 39, 52, 65, 78, 91, 104, 117, 130, 143, 156, 169
2	3, 16, 29, 42, 55, 68, 81, 94, 107, 120, 133, 146
3	6, 19, 32, 45, 58, 71, 84, 97, 110, 123, 136, 149, 162
4	9, 22, 35, 48, 61, 74, 87, 100, 113, 126, 139, 152, 165
5	1, 14, 27, 40, 53, 66, 79, 92, 105, 118, 131
6	4, 17, 30, 43, 56, 69, 82, 95
7	7, 20, 33, 46, 59, 72, 85, 98, 111
8	10, 23, 36, 49, 62, 75, 88, 101, 114, 127

Cuadro 5.6: Asignaciones de Algoritmo A' para el ciclo $\mathcal{C}_8.$

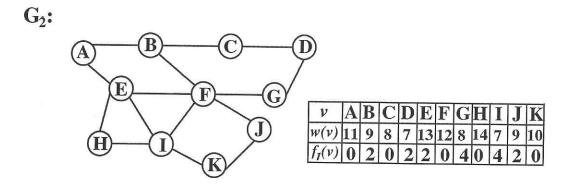


Figura 5.6: Gráfica $G_2 = (V, A, 3, 2)$.

Revisemos ambas etiquetaciones en el Cuadro 5.7. De esta manera, si la amplitud cíclica es menor que máx $\{c_0, \chi(G) \cdot c_1\}$, la asignación que produce el ALGORITMO A' tendrá una amplitud menor.

A y A' son algoritmos generales que podemos emplear en cualquier gráfica con restricciones y pesos, pero existen gráficas que por sus características podemos agrupar en familias, como por ejemplo las trayectorias, los ciclos, o las gráficas bipartitas, y por supuesto que es conveniente contar con algoritmos específicos para una familia de gráficas.

v	A	Α'
A	0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42	0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35
В	2, 8, 14, 20, 26, 32, 38, 44, 50	2, 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42
C	0, 6, 12, 18, 24, 30, 36	0, 5, 10, 15, 20, 25, 30
	42, 48, 54, 60	35, 40, 45, 50
D	2, 8, 14, 20, 26, 32	2, 7, 12, 17, 22, 27
E	2, 8, 14, 20, 26, 32, 38	2, 7, 12, 17, 22, 27, 32
F	0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42,	0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35,
	48, 54, 60, 66, 72, 78	40, 45, 50, 55, 60, 65
G	4, 10, 16, 22, 28, 34, 40, 46	4, 9, 14, 19, 24, 29, 34, 39
Н	0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48	0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40
I	4, 10, 16, 22, 28, 34	4, 9, 14, 19, 24, 29
J	2, 8, 14, 20, 26, 32, 38	2, 7, 12, 17, 22, 27, 32
K	0, 6, 12, 18, 24	0, 5, 10, 15, 20

Cuadro 5.7: Asignación de la gráfica G_2 con A y A'.

5.3. Algoritmo de Asignación para gráficas bipartitas

De la misma manera que el ALGORITMO A, este algoritmo usa una coloración base de los vértices, pero si un vértice tiene una demanda mayor que cualquiera de sus vecinos, entonces éste toma inicialmente alguno de los canales que están separados $2c_1$, lo que permite diseminar los canales de sus vecinos mientras los últimos canales están c_0 alejados.

El Listado 5 presenta una versión del Algoritmo de Asignación para gráficas bipartitas, denominado Algoritmo B.

Para gráficas bipartitas con restricciones c_0 y c_1 el ALGORITMO B nos da una asignación óptima si $c_0 \ge 2c_1$, ya que $\chi(Km,n)=2$.

Consideremos la gráfica bipartita G = (V, A, 2, 1) de la Figura 5.7. El Cuadro 5.8 presenta las demandas de esta gráfica, así como la coloración base.

v	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
w(v)	4	11	4	5	7	3	8	9	3	11	5	8
$f_1(v)$	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0

Cuadro 5.8: Etiquetación inicial para G=(V,A,2,1)

Listado 5 Algoritmo B de Asignación

```
// Algoritmo para graficas bipartitas tales que c1 <= c0 <= 2c1.
// Precondiciones:
   G=(V,A;c0,c1) grafica con restricciones;
// w Vector de pesos
    f1: V \longrightarrow \{0,1\} una coloracion base para V(G).
AlgoritmoB(G:graph, w:vectorPesos, f1: coloracion){
  // Asignacion:
   for all vertice v en V(G) do
     p(v) = max \{ w(u): uv en A o u=v \}
  // Fase 1:
     for (i=0; min\{w(v), p(v)\}-1; i++) do
        f(v) = f1(v)*c1 + 2*i*c1
  // Fase 2:
      if (v(w)>p(v))
        for (i=0; w(v)-p(v)-1; i++) do
            f(v) = f1(v)*c1+ 2*p(v)*c1 + i*c0
}
```



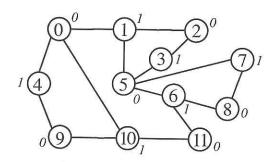


Figura 5.7: Gráfica bipartita G = (V, A, 2, 1).

El Cuadro 5.3 presenta la asignación obtenida con el Algoritmo A' al aplicarlo a la gráfica G de la Figura 5.7.

Como un segundo ejemplo, consideremos la gráfica bipartita $G_3 = (V, A, 4, 2)$ dada en la Figura 5.8; El Cuadro 5.10 presenta la demanda y coloración base para G_3 .

¿Cómo afectan las restricciones de B? Las condiciones que debe cumplir una gráfica bipartita para aplicar B, son específicas, observemos la etiquetación que resulta cuando ignoramos la restricción $c_0 \leq 2c_1$, en el Cuadro 5.11.

V	f (v)	V	f (v)
0	0, 2, 4, 6	6	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15
1	$1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots, 21$	7	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17
2	0, 2, 4, 6	8	0, 2, 4
3	1, 3, 5, 7, 9	9	0, 2, 4, 6, 8, 10,, 20
4	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13	10	1, 3, 5, 7, 9
5	0, 2, 4	11	0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14

Cuadro 5.9: Asignaciones de la gráfica 5.7 con el ALGORITMO A'.

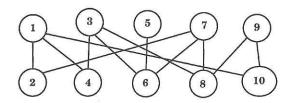


Figura 5.8: Gráfica bipartita 3, $G_3 = (V, A, 4, 2)$.

v	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
w(v)	9	7	7	8	8	7	5	5	4	3
f(v)	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
p(v)	9	9	8	9	8	8	7	7	5	9

Cuadro 5.10: Asignación inicial para la gráfica $G_3 = (V, A, 4, 2)$.

Inmediatamente apreciamos que en la asignación hecha, los canales se interfieren, esto es porque en el Algoritmo B se asume que la restricción se cumple y no se efectúa ningún cálculo con respecto a las restricciones. En primera instancia podríamos decir que el Algoritmo B es demasiado específico, aunque en realidad esta condición permite tener cotas más justas, ya que para cualquier otra gráficas contamos con los Algoritmos A y A'.

V	В
1	2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38, 42, 46, 50, 54, 58
2	0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36
3	2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30
4	0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28
5	2, 6, 10, 14, 18, 22, 26
6	0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28
7	2, 6, 10, 14, 18
8	2, 6, 10, 14
9	0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40
10	2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34
11	0, 4, 8, 12, 16, 20

Cuadro 5.11: Algoritmo B con parámetros no recomendados.

5.4. Algoritmo de Asignación para ciclos impares

La asignacion de canales en ciclos impares fue estudiada por Griggs y Yeh [56], y parte de dicho estudio se revisó en la sección anterior. Los autores dan la etiquetación para restricciones $c_1, c_2 = 2, 1$ de amplitud 4 y amplitud cíclica 6.

Sea C_n un ciclo con n vértices y restricciones c_o y c_1 , donde n es impar con n > 3, además se tiene a \mathbf{w} como el vector de demandas.

Este algoritmo está basado en una etiquetación dada para la gráfica que satisface la restricción c_1 . Esta etiquetación tiene una amplitud cíclica $c_R = \frac{2 \cdot n \cdot c_1}{(n-1)}$, entonces se define $s = \max\{c_0, c_R\}$. Los vértices son enumerados de 1 a n, en orden cíclico, donde el vértice v_1 es el de mayor peso en el ciclo. También se define m con m > 1 como el entero impar más pequeño tal que $s \ge \frac{2 \cdot m}{(m-1)} \cdot c_1$

El algoritmo comienza asignando 0 al primer nodo, después añade c_1 módulo c_R al canal previamente asignado y lo asigna al siguiente nodo en el ciclo.

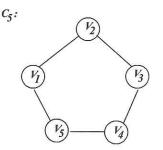
Esto cambia a una asignación alternativa que se usa repetidamente, como en el ALGORITMO A'.

El Listado 6 muestra esquemáticamente el ALGORITMO C. Nótese que este algoritmo no puede ser implementado, en primera instancia, de una manera distribuida, ya que cada nodo debe conocer todos los pesos, para calcular m y determinar su valor de asignación inicial.

Listado 6 Algoritmo C de Asignación

```
ht
// Algoritmo para ciclos impares
// Precondiciones:
// G=(V,A;c0,c1) grafica con restricciones,
    n es el num. de vertices, n>=3, n es impar,
       los vertices estan numerados en el orden del ciclo;
// w Vector de pesos
AlgoritmoC(G:graph, w:vectorPesos){
  // Asignacion:
      cR = (2*n*c1)/(n-1);
       s = max\{ c0, cR \}
      Sea m>1, el menor impar tal que s >=(2*m/(m-1))*c1
   for all vertice vi en V(G) do
      for (j=0; w(vi); j++) do
        f(vi) = b(vi) + j*s
  // La etiquetacion b: V \longrightarrow [0,s-1]
  // se define como:
     cases:
       if (1 <= i <= m):
         b = (i-1)*c1 \mod s;
        // i es par
       if ((i > m) \&\& (i \mod 2) = 0):
        b = 0;
        // i es impar
       if ((i > m) \&\& (i \mod 2)=1):
        b = (m-1)*c1 \mod s;
}
```

Veamos algunos ejemplos. La Figura 5.9 presenta un ciclo de orden 5, C_5 , y tabla con la demanda y coloración base para éste, así como la asignación obtenida al aplicar el algoritmo al ciclo C_5 .



V	V_I	ν_2	V ₃	V_4	V_5
w(V)	4	2	3	2	3
f (V)	0	1	0	1	2
f(V)	0,3,6,9	1,4	0,3	1,4,7	2,5,8

Figura 5.9: $C_5 = (V, A, 2, 1)$

Cambiemos ahora los parámetros para el ciclo de orden 5, C_5 . Tomemos ahora $c_0=3$ y $c_1=2$. La siguiente Tabla, muestra los datos para C_5 , así como la etiquetación inicial:

v	v1	v2	v3	v4	v5
w(v)	4	2	3	2	3
$f_1(v)$	0	2	4	1	3

Cuadro 5.12: Etiquetación inicial para $C_5 = (V, A, 3, 2)$

Por las características de esta gráfica, es posible aplicar cualquiera de los algoritmos que se han revisado hasta ahora. En el Cuadro 5.13 mostramos las diferentes etiquetaciones de los algoritmos A, A' y C.

v	А	Α'	С
v1	0, 6, 12, 18	0, 5, 10, 15	0, 5, 10, 15
v2	2, 8	2, 7	2, 7
v3	4, 10, 16	4, 9, 14	4, 9, 14
v4	1, 7	1, 6	1, 6
v5	3, 9, 15	3, 8, 13	3, 8, 13

Cuadro 5.13: Asignaciones para la gráfica $C_5 = (V, A, 3, 2)$.

Aquí, las asignaciones obtenidas por A' y C son una mejora a la realizado por el A; aunque C sea especializado en ciclos, el A', debido a su generalidad, puede ser aplicado para este tipo de gráficas, con una ejecución eficiente y de amplitud mínima.

v	v1	v2	v3	v4	v5	v6	v7	v8	v9
w(v)	13	10	10	7	9	11	5	8	9
$f_1(v)$	0	2	0	2	0	2	0	2	4

Cuadro 5.14: Etiquetación inicial para $C_9 = (V, A, 4, 2)$

Revisemos un ciclo C_9 , con orden y demandas mayores en el Cuadro 5.14 y la asignación correspondiente en los Cuadros 5.15 y 5.16.

v	C
v1	0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60
v2	2, 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42, 47
v3	4, 9, 14, 19, 24, 29, 34, 39, 44, 49
v4	1, 6, 11, 16, 21, 26, 31
v5	3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43
v6	0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50
v7	3, 8, 13, 18, 23
v8	0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35
v9	3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43

Cuadro 5.15: Asignaciones de la gráfica 5.14 con el ALGORITMO C.

v	A	A'
v1	0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72,	0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40,
	80, 88, 96	45, 50, 55, 60
v2	2, 10, 18, 26, 34, 42, 50, 58, 66, 74	2, 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42, 47
v3	0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72	0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45
v4	, , , , , , , , , , , , , , , , , , , ,	2, 7, 12, 17, 22, 27, 32
v5	0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64	0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40
v6	2, 10, 18, 26, 34, 42, 50, 58, 66, 74, 82	2, 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42, 47, 52
v7	0, 8, 16, 24, 32 0, 5, 10, 15, 20	0, 5, 10, 15, 20
v8	2, 10, 18, 26, 34, 42, 50, 58	2, 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37
v9	4, 12, 20, 28, 36, 44, 52, 60, 68	4, 9, 14, 19, 24, 29, 34, 39, 44

Cuadro 5.16: Asignaciones de la gráfica 5.14 con diferentes algoritmos.

5.5. Algoritmo de Asignación para gráficas 3-coloreables

En este algoritmo el espectro se divide en tres partes, cada una contiene un número determinado de canales, con una separación entre canales consecutivos.

El Algoritmo E está dividido de tres fases:

La Fase 0 consiste en fijar los valores iniciales para las variables usadas.

La Fase 1 determina los conjuntos de canales, organizándolos por colores: rojo, azul y verde.

La Fase 2 realiza la asignación de canales.

El Listado 7 presenta una versión el algoritmo.

A continuación describimos estas fases.

A diferencia de los algoritmos anteriores, E ocupa dos parámetros, s y T, para calcular los canales en cada conjunto; además para el valor de s consideramos el máximo entre c_1 y $c_0/2$, mientras que en los anteriores era el máximo entre estas restricciones. Para calcular T necesitamos saber todos los pesos en la gráfica, para determinar w_{max} , y que sea múltiplo de 6 facilita los cálculos, dado que la gráfica y los colores que tiene asignados son múltiplos de 3. Sea $f:V\to\{0,1,2\}$ una coloración base para G. Se denota una base de colores 0,1,2 como rojo, azul y verde, respectivamente.

El conjunto de canales rojo se divide en dos subconjuntos R_1 y R_2 , los cuales están dados por:

$$R_1 = \{0, 2s, \cdots, (T/3 - 2)s\}$$

$$R_2 = \{(T/3 + 1)s + c_0, (T/3 + 3)s + c_0, \cdots, (2T/3 - 1)s + c_0, \}$$

El conjunto de canales azules se divide en dos subconjuntos B_1 y B_2 , los cuales están dados por:

$$B_1 = \{ (T/3)s + c_0, (T/3 + 2)s + c_0, \cdots, (2T/3 - 2)s + c_0 \}$$

$$B_2 = \{ (2T/3 + 1)s + 2c_0, (2T/3 + 3)s + 2c_0, \cdots, (T - 1)s + 2c_0, \}$$

El conjunto de canales verdes se divide en dos subconjuntos G_1 y G_2 , los cuales están dados por:

$$G_1 = \{(2T/3)s + 2c_0, (2T/3 + 2)s + 2c_0, \cdots, (T-2)s + 2c_0, \}$$

$$G_2 = \{s, 3s, \cdots, (T/3 - 1)s\}$$

A cada vértice v se le asigna w(v) canales por cada clase cromática, donde debe agotarse el primer conjunto antes de iniciar con el segundo, además se deben usar primero los canales con menor valor.

Se puede observar que el espectro es dividido en tres partes, cada una posee T/3 canales o frecuencias, con una separación de s entre canales consecutivos. La primera parte del espectro consiste en la alternación de los canales de R_1 y G_2 , la segunda alterna los canales de B_1 y B_2 , y la tercera alterna los canales de G_1 y G_2 .

Listado 7 Algoritmo E de Asignación

```
// Algoritmo para graficas 3-coloreables
// Precondiciones:
// G=(V,A;c0,c1) grafica con restricciones;
// w Vector de pesos
// f: V \longrightarrow {0,1,2} coloracion base para G
AlgoritmoE(G:graph, w:vectorPesos){
 // Fase 0:
       s = max\{ c0/2, c1 \}
      T >= 3*wMax, T multiplo de 6;
      Denotar a los colores base 0,1,2 como
       Rojo, Azul y Verde, respectivamente
 // Fase 1:
    // Los canales Rojos consisten de los conjuntos:
       R1 = \{0, 2*s, \dots, (T/3-2)*s\};
       R2 = \{(T/3+1)*s+c0, (T/3+3)*s+c0, \dots, (2T/3-1)*s+c0\}
    // Los canales Azules consisten de los conjuntos:
       B1 = {(T/3)*s+c0, (T/3+2)*s+c0, ..., (2T/3-2)*s+c0}
       B2 = \{(2T/3+1)*s+2*c0, (2T/3+3)*s+2*c0, \dots, (T-1)*s+2*c0\}
     // Los canales Verdes consisten de los conjuntos:
       G1 = \{(2T/3)*s+2*c0, (2T/3+2)*s+2*c0, \dots, (T-2)*s+2*c0\}
       G2 = \{0, 3*s, \dots, (T/3-1)*s\};
// Fase 1: Asignacion.
   for all vertice v en V(G) do
      Asignar w(v) canales de su clase de color,
        el primer conjunto es agotado antes de usar el segundo
        y siempre se usan los canales con menor valor.
```

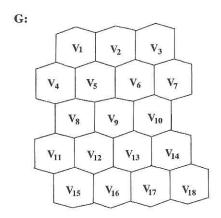


Figura 5.10: Gráfica G = (V, A, 3, 2).

Revisemos un ejemplo: la gráfica G en la Figura 5.10 es 3-coloreable y tiene restricciones $c_0 = 3$ y $c_1 = 2$. Las demandas para cada vértice y la asignación inicial se dan en el Cuadro 5.17.

v	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
w(v)	5	8	12	6	13	12	11	7	9
$f_1(v)$	0	1	2	1	2	0	1	0	1
v	v_{10}	v_{11}	v_{12}	v_{13}	v_{14}	v_{15}	v_{16}	v_{17}	v_{18}
w(v)	13	8	4	12	10	3	2	6	5
$f_1(v)$	2	1	2	0	1	0	-1	2	0

Cuadro 5.17: Asignacion inicial, usada en el Algoritmo E.

Tenemos que $c_0 = 3$, $c_1 = 2$ y $w_{max} = 13$, entonces $3 \cdot 13 = 39$, luego T = 42 y s = 2. Aplicando la Fase 1 obtenemos los siguientes conjuntos:

$$R_{1} = \{0, 2 \cdot 2, \dots, (42/3 - 2) \cdot 2\} = \{0, 4, 8, \dots, 24\}$$

$$R_{2} = \{(42/3 + 1) \cdot 2 + 3, (42/3 + 3) \cdot 2 + 3, \dots, (2 \cdot 42/3 + 1) \cdot 2 + 3\}$$

$$= \{33, 37, 41, \dots, 57\}$$

$$B_{1} = \{(42/3) \cdot 2 + 3, (42/3 + 2) \cdot 2 + 3, \dots, (42 - 1) \cdot 2 + 2 \cdot 3\} = \{31, 35, \dots, 55\}$$

$$B_{2} = \{(42/3 + 1) \cdot 2 + 2 \cdot 3, (42/3 + 3) \cdot 2 + 2 \cdot 3, \dots (42 - 1) \cdot 2 + 2 \cdot 3\} = \{64, 68, \dots, 88\}$$

$$G_{1} = \{(42/3) \cdot 2 + 6, (42/3 + 2) \cdot 2 + 6, \dots, (42) \cdot 2 + 6\} = \{62, 66, 70, \dots, 86\}$$

$$G_{2} = \{2, 3 \cdot 2, \dots, (42/3 - 1) \cdot 2\} = \{2, 6, 10, \dots, 26\}$$

Finalmente, realizamos la asignación; obteniendo el Cuadro 5.18.

v	f (v)
v_1	0,4,8,12,16
v_2	31,35,39,43,47,51,55,64
v_3	2,6,10,14,18,62,66,70,74,78,82,86
v_4	31,35,39,43,47,51
v_5	2,6,10,14,18,22,62,66,70,74,78,82,86
v_6	0,4,8,12,16,20,24,33,37,41,45,49
v_7	31,35,39,43,47,51,55,64,68,72,76
v_8	0,4,8,12,16,20,24
v_9	31,35,39,43,47,51,55,64
v_{10}	2,6,10,14,18,22,62,66,70,74,78,82,86
v_{11}	31,35,39,43,47,51,55,64
v_{12}	62,66
v_{13}	0,4,8,12,16,20,24,33,37,41,45,49
v_{14}	31,35,39,43,47,51,55,64,68
v_{15}	0,4,8
v_{16}	31,35
v_{17}	62,66,70,74,78,82
v_{18}	0,4,8,12,16

Cuadro 5.18: Asignaciones con el Algoritmo E.

Revisando con detalle los conjuntos obtenidos observamos una característica importante. Denotemos con números en negritas los canales rojos, en itálicas los canales azules y dejemos sin cambio los canales verdes. Observemos que los canales tienen una separación de 4 entre cada uno; por otra parte, si vemos el conjunto completo de canales asignados, podemos apreciar que están separados en, al menos, 2 unidades, es decir tienen una distancia c_1 entre ellos y además quedan alternados los canales de cada color, para nuestro ejemplo tenemos que:

0, 2, **4**, 6, **8**, 10, **12**, 14, **16**, 18, **20**, 22, **24**, 31, **33**, 35, **37**, 39, **41**, 43, **45**, 47, **49**, 51, **53**, 55, **57**, 62, 64, 66, 68, 70, 72, 74, 76, 78, 80, 82, 84, 86, 88.

De esta manera es fácil ver que, aunque aparentemente en cada par de conjuntos los canales entre el primero y segundo tienen una distancia considerable, en realidad estos canales no se eliminan, la mayoría es elemento en alguna otra clase de color. Y dado que primero agotamos el primer conjunto y el parámetro T esta calculado en base a las restricciones, podemos garantizar que en cada conjunto hay un número de colores suficiente para ser asignado y que la amplitud de la asignación es justa.

5.6. Algoritmos distribuidos para gráficas Hexagonales

Una buena asignación de canales es esencial para la transmisión y recepción de voz, datos y otras redes de comunicación celular basados en el Acceso Múltiple por División de frecuencias, FDMA¹.

La mayoría de los estudios se han concentrado en el problema estático de encontrar una asignación de canales global para una cierta red y parámetros estáticos predeterminados. Aquí se considera una red celular como un sistema dinámico, donde las decisiones de asignación de canales se hacen localmente, es decir, no se planean globalmente, y además deben ser continuamente actualizadas para ajustar parámetros cambiables. Una red celular se trata como una red distribuida donde cada base es un servidor y los algoritmos de asignación, aquí revisados, son tratados como si se ejecutaran de manera simultánea en cada base.

Asimismo los algoritmos pueden ser ajustados para el problema de asignación en línea; la demanda para canales está sujeta a cambiar y los servidores deben adaptarse a estos cambios, haciendo modificaciones mínimas a la asignación existente.

En este trabajo, los algoritmos para la asignación de canales distribuidos se dan para redes celulares con un trazo hexagonal regular. Las restricciones de interferencia también se modelan mediante una gráfica con restricciones y pesos (\mathbf{G}, \mathbf{w}) , donde G = (V, A) es una gráfica; c_0, \ldots, c_k es el conjunto de restricciones que imponen la separación que debe existir en el espectro de radio y \mathbf{w} es el vector de pesos positivos para los vértices de G.

Algoritmos para la asignación de canales en línea (online), son descritos, entre otros en [27, 46, 16]. Janssen y colaboradores [28], estudian asignaciones para asignar canales de manera distribuida para redes celulares hexagonales con la única restricción de que canales asignados a la misma celda o a celdas adyacentes deben ser distintos.

5.7. Gráficas Hexagonales.

Una clase de gráficas con particular importancia en el contexto de la asignación de canales son las gráficas hexagonales. Una gráfica hexagonal es una subgráfica inducida de una malla triangular. La malla triangular es considerada como una gráfica cuyos vértices son los puntos de la malla y las aristas existen precisamente entre puntos vecinos.

Las gráficas hexagonales son nombradas así porque pueden usarse para representar una red celular con celdas hexagonales regulares. Ya que el decremento de una señal de radio es proporcional a la distancia desde donde se transmite, el área de cobertura

¹Del inglés, Frequency Division Multiple Access

tendrá una forma circular. Las celdas hexagonales tienen la ventaja de aproximarse a esta forma y son fácilmente armables. Aunque en la práctica las limitaciones impuestas por el terreno fuerzan a la red celular a desviarse del ideal. La Figura 5.11 muestra un ejemplo de una gráfica hexagonal y su red celular subyacente.

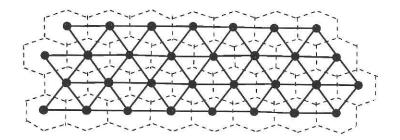


Figura 5.11: Ejemplo de gráfica hexagonal.

Si las señales son trasmitidas por frecuencias muy cercanas, éstas generalmente tendrán niveles de interferencia mayores que en otro caso. De aquí el requerimiento común en las redes celulares: canales asignados a celdas que geográficamente están cerca deben de estar suficientemente alejadas en el espectro de radio.

La Figura 5.12 muestra una asignación aritmética tomando las restricciones $c_0=2,\ c_1=5\mod 9.$

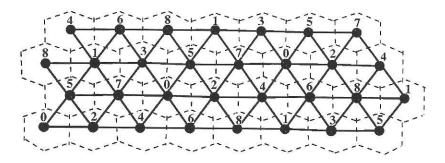


Figura 5.12: Asignación Aritmética en una gráfica hexagonal.

Asumimos que la malla es generada por los vectores $\mathbf{x}=(1,0)$ y $\mathbf{y}=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ y se usan las coordenadas en la malla para identificar los vértices de las gráficas. Más exactamente, el vértice (i,j) denotará el vértice correspondiente al punto de la malla $i\mathbf{x}+j\mathbf{y}$.

5.8. Algoritmos en línea distribuidos.

Los algoritmos descritos a continuación son distribuidos y determinísticos. Cada vértice es considerado como un servidor independiente y el Algoritmo está ejecutándose simultáneamente en estos servidores. Cada servidor calcula local y determinísticamente su propia asignación, basado sólo en una pequeña cantidad de información preprocesada, no dependiente de los pesos, e información local del estado de la red. Es decir, un servidor en un nodo sabe el peso de dicho nodo y puede conseguir información acerca del peso de los nodos que están a menos de una cierta distancia de él.

Un algoritmo de asignación de canal distribuido es k-local si cada servidor calcula su asignación conociendo sólo la información preprocesada y el peso de todos los vértices a distancia k o menos.

El concepto de localidad toma un sentido especial en el contexto de algoritmos de asignación de canal en línea. Ahora la entrada del algoritmo es una gráfica con restricciones y una secuencia w_t de vectores de peso. Con cada ejemplar de tiempo t, cada vértice v es presentado independientemente con su nuevo peso $w_t(v)$.

Si $w_t(v) < w_{t-1}(v)$ entonces ciertas llamadas en la celda correspondiente son omitidas. Si $w_t(v) > w_{t-1}(v)$, entonces deben ser asignados de manera que las restricciones de interferencia entre los nuevos y viejos canales asignados se cumplan.

A continuación describimos dos algoritmos de asignación de canal estáticos en línea distribuidos para una gráfica hexagonal con restricciones G = (V, A, a, a, b) donde $a \ge b > 0$. El primer algoritmo está basado en una asignación inicial la cual será óptima si todos los pesos son iguales, combinado con una fase de préstamo para considerar las diferencias de peso. El segundo algoritmo tiene una primera fase de asignación para las restricciones a = 1, b = 0, combinada con una segunda parte para encontrar una asignación con parámetros generales $a \ y \ b$. Su desempeño y localidad dependerán de la fase que se use.

Algoritmo de Préstamo Aritmético (AB).

Primero describimos un algoritmo válido cuando $a \geq 2b$. Este algoritmo está basado en una asignación inicial f de los vértices derivados de las coordenadas en la malla triangular. Precisamente: $f(i,j) = ia + j(3a+b) \mod N$, donde N = 5a + 3b. La etiquetación se ejemplifica en la Figura 5.13. Etiquetaciones de este tipo fueron tratadas por J. van de Heuvel [13].

Nótese que f tiene la propiedad de $N \ge a$, $a \le f(i,j) \le N-a$ para todos los vecinos de (0,0) y $b \le f(i,j) \le N-b$ para todos los vértices a distancia 2 de (0,0).

Ya que f(0,2)=a-b esto sólo es cierto si $a \geq b$. Por tanto, f genera una

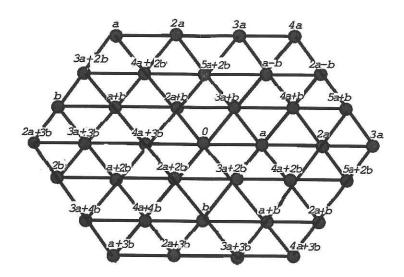


Figura 5.13: La Asignación Aritmética usada en el Algoritmo AB

asignación de canales para G, se designa a cada vértice (i, j) solamente canales del conjunto $\{f(i, j) + kN \mid k \in \mathbb{N}\}.$

Ahora para cualquier par de canales γ_1,γ_2 asignados a los vértices (i,j) e (i',j') a distancia 2 tenemos que

$$|\gamma_1 - \gamma_2| \equiv f(i', j') - f(i, j) \equiv f(i' - i, j' - j) \mod N$$

Ya que (i'-i,j'-j) tiene en la gráfica una distancia de 2 a (0,0), se sigue que $|\gamma_1+\gamma_2|\geq b$. Un argumento similar es válido para vértices a distancia 1.

También en el caso que $b \le f(i,j) \le N-b$ incluso para vértices (i,j) a distancia 3 de (0,0). Así cualquier asignación de canales derivada de f tiene la propiedad de que vértices a distancia 3 también tienen separación de al menos b.

Como información local cada vértice v=(i,j) sabe su valor bajo f(i,j), es capaz de identificar a sus vecinos y su posición con respecto a sí mismo, y recibir información acerca de su peso. Específicamente, v es capaz de identificar los vecinos (i+1,j) e (i+1,j-1) y calcular el peso máximo en un clan entre sus vecinos. Es decir, v puede calcular T(v), donde:

$$T(v) = \max \left\{ \sum_{u \in K} w(u) \mid K \text{ es un clan, } d(u, v) \le 1 \ \forall u \in K \right\}$$

El ALGORITMO AB comienza asignando canales de acuerdo a f, seguido por 2 "fases de pedir prestado", donde los vértices con alta demanda piden prestados los canales no usados de sus vecinos.

La asignación de canales a cada vértice v(i,j) se realiza en 3 fases:

- **Fase 1.** El vértice v recibe los canales f(i,j) + kN, $0 \le k \le \min\{w(v), T(v)/3\}$.
- Fase 2. Si v tiene un peso mayor que T(v)/3, es decir $w(v) = T(v)/3 + \alpha$, $\alpha > 0$, entonces v trata de pedir prestados canales a su vecino x = (i+1,j). Estrictamente, si $w(v) < T(v)/3 + \alpha$, entonces v recibe los canales:

 $f(i+1,j) + kN, \ w(v) \le k < \min\{w(v) + \alpha, T(v)/3\}.$

Sea $\beta = \max\{0, T(v)/3 - w(x)\}$ el número máximo de canales que v recibe en esta fase.

Fase 3. Si, después de la última fase, v aún no tiene su demanda cumplida, es decir, si $\alpha > \beta$, entonces v pide prestados los canales sobrantes de sus vecinos: $f(i+1,j-1) + kN, \quad T(v)/3 - \alpha + \beta \leq k < T(v)/3.$

Observemos la asignación aritmética para una gráfica hexagonal; veamos la asignación en la Figura 5.14, considerando a=2 y b=1.

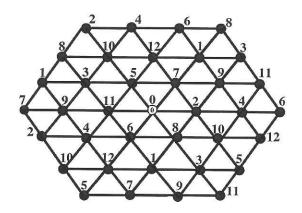


Figura 5.14: Ejemplo de una asignación donde a=2 y b=1.

En la Figura 5.15, representamos los pesos de la gráfica anterior. Revisemos cómo se hace la asignación para un vértice de G, por ejemplo el vértice (0,0) de la gráfica 5.14. En la Figura 5.16 podemos ver al vértice 0 y sus vecinos a distancia 1.

Para este vértice tenemos que: T(0) = 13 + 11 + 6 = 30, con N = 5a + 3b = 13. Por tanto la asignación de 0 queda como sigue:

Fase 1: En total son asignados $\min\{w(0), T(0)3\}$, es decir 10 canales: 0, 13, 26, 39, 52, 65, 78, 101, 114 y 127.

Fase 2: $\alpha = 3$, $\beta = 0$, por tanto el vértice no recibe canales en esta fase.

Fase 3: En esta fase f(i+1, j-1) = 6 y k = 7, 8, 9; finalmente, se asignan los canales: 97, 110 y 123. Con lo que se satisface la demanda.

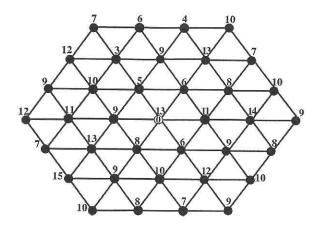


Figura 5.15: Gráfica G=(V,A,3,2) con pesos.

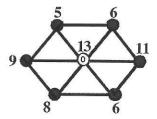


Figura 5.16: Vértice (0,0) y sus vecinos.

Telefonía Celular

Capítulo 6

Telefonía Celular

En este capítulo presentamos, de manera global, una introducción a la Telefonía Celular. Iniciamos con una sección de antecedentes y continuamos con terminologia técnica sobre la Telefonía Celular y su relación con la Asignación de Canales, aquí denominada Asignación de Frecuencias.

Nos concentraremos en las redes terrestres de telefonía celular, una aplicación que ha revolucionado el negocio de la telefonía en años recientes. También en la aplicación especial del problema de la asignación de frecuencias el cual no tiene un modelo matemático universal. Nos enfocaremos en el estándar GSM¹, Sistema General de la Comunicación Móvil, el cual ha estado en uso desde 1992. GSM es la base de la mayoría de las redes de telefonía celular. Este sistema es empleado en cientos de ciudades y sirve a millones de clientes.

6.1. Antecedentes

La comunicación inalámbrica tiene sus raíces desde la invención de la radio. A continuación se da una cronología² sobre ésta:

- 1876 El teléfono fue inventado por Alexander Graham Bell.
- 1880's Invención del radio por Nikolai Tesla.
- 1894 Se presenta formalmente el radio por Guglielmo Marconi
- 1973 Martin Cooper introdujo en EEUU el primer radio teléfono, trabajaba en Motorola y es considerado padre de la telefonía celular.
- 1979 En Tokio, Japón, aparecen los primeros sistemas comerciales de celulares por la compañía NTT.
- 1981 Los países Nórdicos introducen el sistema de telefonía celular.

¹El modelo se revisa en el Apéndice B

²Los datos cronológicos pueden ser encontrados en eveliux.com y Noticiasdot.com

- 1983 Chicago es la primera ciudad en EEUU donde se introduce el servicio de telefonía celular.
- 1987 En EEUU ya existían 312 redes celulares operando en 205 ciudades.
- 1989 En México se convoca, a empresas de telecomunicaciones, a presentar solicitudes para ofrecer el servicio de telefonía celular en nueve regiones del país.
- [1990 Se inicia en México el servicio comercial de telefonía celular.
- 1992 En México, el número de suscriptores del servicio asciende a 314,000.
- 1998 Los suscriptores, en México, se han incrementado en un 34% en relación a 1992.
- 2005 A nivel mundial, el número de usuarios se incrementó a 931 millones.
- 2007 Se estima que el el número de usuarios ascenderá a 1600 millones en todo el mundo.

Era de esperarse que un día las tecnologías del teléfono y del radio iban a ser combinadas para crear un mismo aparato: el teléfono celular.

En la época predecesora a los teléfonos celulares, la gente que realmente necesitaba comunicación móvil tenía que confiar en el uso de radio-teléfonos en sus autos. En el sistema radio-telefónico tradicional, existía sólo una antena central para cada ciudad, y probablemente 25 frecuencias disponibles en la torre de transmisión. En este tipo servicio la estación realiza las funciones transmitir y repetir la señal. Para las transmisiones se utilizan potencias extremadamente grandes creándose una gran zona de cobertura. Sin embargo, si durante una conversación el usuario se sale de la zona de cobertura, la conversación se interrumpe ya que este sistema no tiene la capacidad de conmutación. En este tipo de comunicación cada usuario tiene asignado un canal de radio con una frecuencia fija para accesar a la red, lo cual hace ineficiente el uso del espectro radioeléctrico, ya que si uno de los usuarios con frecuencias asignados en algún momento no los usa, las frecuencias estarían desocupadas creándose así un gasto innecesario de estos.

A diferencia del servicio radio-telefónico, un sistema celular se forma al dividir el territorio al que se pretende brindar servicio, en áreas más pequeñas llamadas celdas, las cuales son atendidas por una estación base que restringe la cobertura a la celda, la Figura 6.1 muestra la división de un territorio en celdas. Este concepto de sistema celular fue descubierto por investigadores de los laboratorios de teléfonos Bell en 1947 cuando subdividieron un área relativamente grande en secciones pequeñas (celdas) y donde pudieran usar el concepto de reuso de frecuencias para incrementar la capacidad de un canal.

Con lo anterior la telefonía celular empezó a tener auge en varios países como una alternativa a la telefonía convencional inalámbrica. Debido a que esta tecnología fue muy bien aceptada empezaron a darse los primeros problemas de saturación en el servicio.

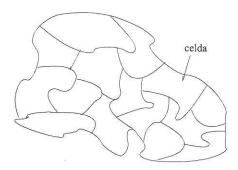


Figura 6.1: División de un territorio en celdas

Esta evolución en los sistemas de telefonía celular ha hecho que las compañías de telefonos celulares tengan como objetivos:

- Aumentar la calidad de los servicios ofrecidos.
- Aumentar, reusando frecuencias, la utilización del espectro radioeléctrico.
- Minimizar la interferencia.
- Gran capacidad de suscriptores.
- Compatibilidad nacional.
- Capacidad extendida.
- Adaptación a la densidad del tráfico.
- Servicio a vehículos y portátiles.
- Servicio telefónico regular y servicios especiales.
- Calidad de servicio.
- Soportar gastos, es decir, que sea económico y accesible.

Consecuencias de la movilidad Para cumplir con estos objetivos se han desarrollado una gran variedad de estrategias las cuales se pueden clasificar en fijas o dinámicas. Dependiendo del tipo de estrategia que se utilice serán las características del sistema, particularmente, la forma en que se gestionan las llamadas cuando un usuario pasa de una celda a otra.

Se dice que un sistema es de asignación fija de frecuencias si cumple que:

- 1. Se asigna un conjunto predeterminado de frecuencias a la celda.
- 2. Las llamadas producidas dentro de la celda sólo pueden ser servidas por frecuencias inutilizados dentro de esa celda en particular.
- 3. Todas las frecuencias de la celda están ocupadas, la llamada se bloquea y el usuario no recibe el servicio. Puede darse el caso que la celda vecina preste frecuencias, siempre y cuando no se interfiera en ninguna de las llamadas en progreso de la celda donadora, esto es regulado por el Centro de Conmutación Móvil, CCM.

Una asignación de frecuencias se dice que es dinámica si:

- 1. Las frecuencias no se colocan en las celdas de manera permanente.
- 2. Cada vez que se produce un requerimiento de llamada, la estación base servidora pide un canal al CCM y éste coloca un canal en la celda que lo solicitó siguiendo un algoritmo que tiene en cuenta diversos factores como son el préstamos de frecuencia de canal, la distancia de reutilización y otras funciones de costo.
- 3. Requiere que el CCM tenga una gran cantidad de cómputo en tiempo real.

En el proyecto GSM se indica:

Dado que el número de usuarios es mucho menor que el número total de usuarios potenciales, las frecuencias bidireccionales sólo se asignan si se necesitan. Esta es la principal diferencia con la telefonía estándar, donde cada terminal está continuamente unido a un conmutador haya o no haya llamada en proceso.³

Consecuencias de la movilidad

A diferencia de sistema celular dinámico, el sistema celular fijo tiene problemas cuando el usuario se mueve de su región. Una red puede enviar una llamada a un usuario fijo simplemente conociendo su dirección de red (su número telefónico) dado que el conmutador local no cambia. Sin embargo, en un sistema celular la celda a donde se va a establecer el contacto cambia cuando el usuario se mueve. En este tipo de casos, primero se localiza al usuario móvil y después el sistema determina la celda en la que éste está actualmente. Generalmente las compañías de teléfonos celulares utilizan tres métodos de localización.

- Método 1: La estación móvil indica los cambios de celdas en la red y al recibirse una llamada se envía un mensaje de búsqueda en la celda donde está el móvil.
- Método 2: Se envía un mensaje a todas las celdas de la red cuando llega una llamada, evitándose así la necesidad de que el móvil esté continuamente avisando a la red de su posición.
- Método 3: Cuando una estación móvil cambia de celda se pueden dar dos casos: la estación móvil no envía información a la red o la estación móvil informa a la red el cambio de ubicación. Este método es el resultado de combinar los dos primeros métodos y, de ser necesario, utiliza convenientemente alguno de ellos.

 $^{^3\}mathrm{Proyecto}$ GSM, 'Estudio y Simulación con Matlab de la interfaz de radio de GSM', p.3.

6.2. Elementos Básicos de la Telefonía Celular

Las palabras frecuencias de reuso y división de celdas resumen las características esenciales del concepto celular. El concepto de frecuencia de reuso no sólo se aplica para la telefonía celular, actualmente se utiliza también en la televisión y en la mayoría de los servicios de radio.

Frecuencia de reuso

La idea de usar la frecuencia de reuso en el servicio de telefonía celular en un área geográfica reducida a escala nos da la idea de concepto celular. En lugar de cubrir un área con altas antenas para cubrir grandes regiones (áreas) se pueden cubrir pequeñas regiones con antenas de bajo poder. Estas regiones son las que llamaremos celdas. Una celda de esta manera significa el área en la cual un transmisor particular ocupa un buen lugar para brindar el servicio de telefonía. En la Figura 6.2 se muestra un mapa celular de una región. En principio, el espacio de transmisores no necesita ser regular y las celdas no tienen una forma especial. Las celdas con diferente etiqueta podrían ser servidas por conjuntos diferentes de frecuencias de frecuencias para evitar así los problemas de interferencia. Una celda por lo tanto tiene un significado adicional que es el área en la cual un conjunto particular de frecuencias van a ser usados para las llamadas de teléfonos móviles. Las celdas lo suficientemente apartadas pueden usar la misma frecuencia como es el caso de la celda A con la H, que usan α y la celda C con la J, que utilizan γ .

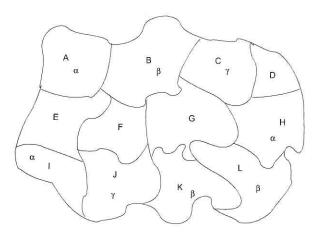


Figura 6.2: Mapa celular y Reuso de Frecuencias

División de celdas

Cuando en cierta región (celda) la demanda se incrementa existe la necesidad de dividir dicha región en subregiones para que se pueda brindar un buen servicio, en estas subregiones se puede usar el concepto de frecuencia de reuso. La Figura 6.3 muestra el caso en que la región ${\sf G}$ se divide en otras subregiones y donde se quiere reutilizar cierta frecuencia, digamos α , en las celdas ${\sf G2}$ y ${\sf G3}$.

Las técnicas de frecuencia de reuso y división de celdas permiten un sistema celular que conoce la importancia de servir a un gran número de clientes usando una pequeña banda de espectro radioeléctrico.

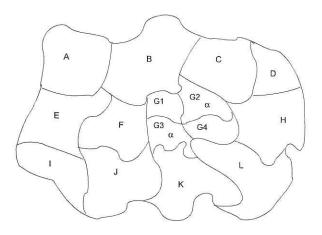


Figura 6.3: Subdivisión de una región

Propiedades geométricas de las celdas

El propósito principal de la telefonía celular es delimitar las áreas en los cuales las frecuencias específicas o celdas específicas sean usadas de manera exclusiva.

Si se tuviera un número infinito de sitios de transmisión y asignación de frecuencias se podría trabajar con la división celular amorfa pero como influyen factores de demanda continua se forza a que se muevan los sitios y las frecuencias establecidos, es por esto que se trata de llevar a una forma geométrica que es mucho más manejable.

No está de más mencionar que la ausencia de orden y estructura geométrica podría provocar un uso ineficiente del espectro radioeléctrico lo que conllevaría a gastos innecesarios. Dado que la transmisión de ondas cubre zonas circulares, la primera forma en que se visualizaron las celdas fue en forma de círculos pero analizando bien esta representación es impráctica ya que quedan espacios ambiguos como se puede ver en la Figura 6.4.

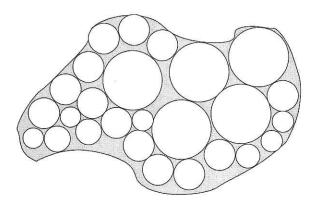


Figura 6.4: Representación de las celdas con círculos

Los polígonos regulares se aproximan al círculo, así que buscaron representar las celdas con este tipo de polígonos de tal manera que el plano se tapizara. Los candidatos fueron: triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos. La Figura 6.5 muestra las mallas formadas por la unión de triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos.

Por razones económicas se decidió utilizar los hexágonos ya que es posible poner una antena en el centro de estos polígonos y así cubrir una mayor área con el menor número de antenas, además como se pudo ver el número de celdas requeridas es menor que el de los otros tipos de celdas. Una ventaja adicional es que se puede hacer uso de otras herramientas para colocar las antenas, como es el caso de análisis vectorial.

Se tiene, además, que el dual de una malla hexagonal es una malla triangular, por lo cual se podría trabajar con ellas indistintamente.

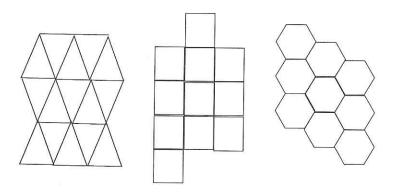


Figura 6.5: Mallas de polígonos regulares

Interferencias y Capacidad del Sistema

El principal factor que limita el desarrollo de los sistemas celulares es la interferencia. Dos celdas se superponen en sus fronteras por lo que sí usan el mismo canal en esta zona, la interferencia ocurre. Los cálculos del nivel de interferencia es una tarea díficil. Calcular el nivel de interferencia depende de no solamente de las frecuencias, sino también del clima. Existen métodos teóricos y fórmulas con los cuales la interferencia puede ser cuantificada. La mayoría de las compañías de teléfonos móviles basan sus análisis de interferencia en modelos matemáticos tomando en cuenta poderosos trasmisores, la distancia entre estos, así como también factores que desvanecen y filtran la calidad de la voz. Los datos para estos modelos normalmente se obtienen de bases de datos que contienen información de ubicación y forma de los terrenos y construcciones, así como también de vegetación de las regiones.

Las principales características de la interferencia son:

- Provoca que los usuarios escuchen las conversaciones de otras llamadas.
- Induce a llamadas perdidas o bloqueadas.
- Es más fuerte en áreas urbanas a causa del ruido de radio frecuencia y al gran número de estaciones base y de estaciones móviles.
- Es responsable de formar cuellos de botella en el servicio y de las llamadas entrecortadas.

Tipos de interferencia

Dado que una antena puede atender varias llamadas y una antena se ubica en una celda es necesario definir interferencia a distancia cero, se define la interferencia co-canal.

Interferencia co-canal. Las celdas en las cuales se utiliza la misma frecuencia se llaman celdas co-canal y la interferencia producida en éstas es llamada interferencia co-canal. La interferencia co-canal no puede combatir incrementando la potencia de portadora de un transmisor ya que si se hiciera este incremento aumentaría la interferencia en las celdas co-canal vecinas. Para que la interferencia co-canal disminuya las celdas co-canal deben de estar lo suficientemente separadas de tal manera que se de un suficiente aislamiento.

Interferencia entre frecuencias adyacentes. Este tipo de interferencia se produce debido a la imperfección de los filtros en los receptores que permiten que una frecuencia cercana invada a la banda pasante.

Espectro del sistema

La disponibilidad de las frecuencias del espectro radioeléctrico es regulada por los gobiernos nacionales, y la Unión Internacional de Comunicaciones, ITU⁴. La manera en que normalmente GSM planea la asignación de frecuencias se describe a continuación:

Una compañía de teléfonos (el operador) ha adquirido el uso de un cierto espectro de frecuencias o espectro radioeléctrico $[f_{min}, f_{max}]$ en una región geográfica particular, por ejemplo, una ciudad. La banda de frecuencia es particionada dentro de un conjunto de frecuencias, todos estos con el mismo ancho de banda Δ , dependiendo de la tecnología utilizada. Las frecuencias disponibles se denotan por 1, 2, ..., N, con $N = \frac{(f_{max} - f_{min})}{\Lambda}$.

Por ejemplo, un operador de una red de teléfono móvil maneja aproximadamente 100 frecuencias. En cada canal disponible, uno puede comunicarse de un transmisor a un receptor. Para tráfico bidireccional se requiere de un segundo canal. En realidad, si un operador adquiere un espectro $[f_{min}, f_{max}]$ automáticamente obtiene un espectro en pares de igual anchura para la comunicación bidireccional. Uno de estos espectros es usado de un móvil a la estación base (up-link), el otro de la estación base al móvil (down-link) en la comunicación.

BTSs, TRXs y Celdas

Un operador para brindar un buen servicio a sus clientes tiene que resolver un gran número de problemas nada triviales. En un paso inicial la distribución geográfica de la demanda de comunicación para el período de planeación es estimada, es decir, se requiere de una infraestructura de comunicación que al ser instalada sea capaz de servir la demanda anticipada.

El dispositivo que mantiene la comunicación de radio con los teléfonos móviles de los clientes es llamado Estación Base de Transmisores, BTS⁵. En esta estación se tiene un radio de transmisión y un equipo de recepción, incluyendo antenas y todas las señales necesarias para procesar.

Una antena de BTS puede ser omni-direccional o sectorizada. La estación base típica usada actualmente opera tres antenas, cada una con un ángulo abierto de 120 grados. Cada antena define una celda. Estas celdas son las unidades básicas de la planeación y que es por la cual los sistemas de teléfonos móviles son también llamados sistemas de telefonía celular.

La capacidad de una celda es definida por el número de unidades de transmisión/recepción, llamadas TRXs, instaladas en su antena.

⁴Siglas en inglés de International Telecommunication Union

⁵BTS, siglas en inglés de Base Transceiver Stations

La primera TRX maneja la señal y ofrece la capacidad hasta seis llamadas, por división de tiempo. Una TRXs adicional puede típicamente manejar 7 u 8 llamadas, dependiendo de la señal adicional. No más de 12 TRXs pueden ser instaladas en una antena, es decir, la máxima capacidad de una celda está en el rango de 80 llamadas. Cuando hay mucho tráfico (por ejemplo, aeropuertos, centros de negocio de grandes ciudades) las celdas tienen que ser subdivididas dentro de varias celdas.

BSCs, MSCs, y la Red Central

Un siguiente paso en la planeación de frecuencias, el operador tiene que localizar e instalar la llamada en la Estación de Controladores Base, BSCs⁶. Cada BTS tiene que ser conectado (en general vía cable) tal como un BSC, mientras un BSC opera varios BTSs en paralelo.

Cada BSC es conectado al Centro de Servicio Móvil de Switcheo, MSC⁷. Los MSCs son conectados unos con otros a través de la llamada Red Central, la cual tiene que llevar el tráfico de columna. La planeación para la localización de BSCs y MSCs, la designación de la topología de la red núcleo, la optimización de las capacidades de enlace, ruteo, manejo fallido, etcétera, constituye la mayor tarea que un operador tiene que manejar. Con lo anterior notamos que la planeación de la red de telecomunicación es totalmente una tarea compleja.

Asignación de Canal, Ceder

Hemos visto que los TRXs son los dispositivos que manejan la comunicación de radio con los teléfonos móviles de los clientes.

Un teléfono móvil emite señales que permiten a la red ubicar donde está localizado éste en cualquier momento, el teléfono móvil es asignado a uno de los TRXs de la celda. Si el teléfono se mueve (por ejemplo, en un carro) la comunicación con su actual TRX puede llegar a ser pobre. El sistema monitorea la calidad de la recepción y puede decidir usar un TRX desde otra celda. Entonces se realiza un intercambio de celda y se cede un TRX.

Interferencia

Cuando dos celdas se superponen y usan el mismo canal, la interferencia ocurre en el área de la intersección de la celda. Además, las antenas pueden causar interferencia lejana a través de los límites de sus celdas. Calcular el nivel de interferencia depende no solamente de las frecuencias, la fuerza de las frecuencias para tener mejor calidad

⁶BSCs, siglas en inglés de Base Estation Controllers

⁷MSC, siglas en inglés de *Mobile Service Switching Center*

en la recepción y transmisión de información, sino también de la forma del ambiente, por lo cual puede haber una propagación de ondas de gran influencia. Hay un número de métodos teóricos y fórmulas con los cuales la interferencia puede ser cuantificada. La mayoría de las compañías de teléfonos móviles basan sus análisis de interferencia en algunos modelos matemáticos tomando en cuenta poderosos transmisores, la distancia entre estos, así como también factores que desvanecen y filtran la calidad de la voz. Los datos para estos modelos típicamente vienen de bases de datos desde terrenos y construcciones como también de vegetación. Tal como los datos están combinados con experiencias prácticas y medidas extensivas. El resultado es un modelo de predicción de interferencia el cual es llamado interferencia co-canal, el cual ocurre cuando dos TRXs transmiten en el mismo canal y esto es cuantificado. Puede también ser interferencia de frecuencias-adyacentes cuando dos TRXs operan sobre frecuencias que son adyacentes; es decir, un TRX opera sobre un canal i, el otro canal en (i+1) ó (i-1).

La realidad es todavía más complicada que lo dicho en el bosquejo. Varios TRXs, no solamente dos, operan sobre las mismas frecuencias adyacentes y pueden interferir en cada uno al mismo tiempo. Entonces, ¿qué es realmente la interferencia entre dos celdas? Puede ser que dos celdas puedan interferir solamente 10 % de su área pero con un alto ruido o que ellas interfieran en un 50 % de su área con un ruido bajo. ¿La interferencia es alta pero la mayoría del tráfico no es esperado? ¿Cómo puede un valor de interferencia reflejar una diferencia en la conducta de la interferencia? No existe una respuesta concisa.

Los planeadores tienen que investigar tales casos en detalle y lo han asumido con un compromiso razonable. El resultado, en general, es un número, el valor de la interferencia, usualmente normalizado entre 0 y 1. Este número podría caracterizar la interferencia entre dos TRXs; en términos del modelo o de las suposiciones tecnológicas usadas por el operador.

Frecuencias separadas y bloqueadas

Si dos o más TRXs son instalados en la misma ubicación (o sitio) hay restricciones de cómo se pueden cerrar sus frecuencias. Por ejemplo, si un TRX opera un canal i, un TRX al mismo tiempo no es permitido para operar sobre frecuencias i-2,...,i+2. Tal como una restricción es llamada co-sitio de separación. Los requerimientos pueden ser muy cerrados si dos TRX no están solamente en un co-sitio, pero también sirven a la misma celda. Los requerimientos de separación pueden aplicarse también a TRXs que están muy próximas.

Además, regulaciones gubernamentales, acuerdos con operadores de regiones vecinas, requerimientos para fuerzas militares, etcétera, un operador no puede tener permiso para usar todo el espectro de frecuencias en cada locación. Esto significa que, para cada TRX, puede haber un conjunto llamado frecuencias bloqueadas.

Un primer modelo matemático: La gráfica de interferencia

Hemos visto en el Capítulo 4 un modelo con Teoria de Gráficas. Ahora nos referiremos a las siguientes consideraciones.

Una asignación factible de frecuencias para TRX claramente satisface todas las restricciones de separación. Las frecuencias bloqueadas también podrían no ser usados. ¿Qué podría uno hacer en relación a la interferencia?

Un camino sobre una representación matemática de todas las restricciones técnicas, consiste en introducir la gráfica de interferencia G=(V,E). La gráfica G tiene un vértice para cada TRX, dos vértices están unidos por una arista si la interferencia ocurre cuando los TRXs asociados operan con el mismo canal o sobre frecuencias adyacentes o si una restricción de separación se aplica a dos TRXs. Para cada arista $vw \in E$, dos valores de interferencia, denotados por $c^{co}(vw)$ y $c^{ad}(vw)$, están asociados; el número $c^{co}(vw)$ es la interferencia co-canal que ocurre cuando TRXs v y w operan en el mismo canal, mientras que $c^{ad}(vw)$ denota el valor de interferencia aumenta cuando v y w operan sobre frecuencias adyacentes. En general, se cumple que $c^{co}(vw) \geq c^{ad}(vw)$. Si una restricción de separación aplica a los vértices v y w, entonces se permite asignar un número grande a las restricciones $c^{co}(vw)$ y $c^{ad}(vw)$.

6.3. Modelos y Aplicaciones

Los modelos discutidos en la literatura generalmente difieren en la selección de frecuencias para las antenas. El conjunto de frecuencias disponible difiere entre aplicaciones distintas, al igual que en las opciones para tratar la interferencia.

Modelación del Problema de Asignación de Frecuencias

Como mencionamos antes⁸ el espectro radioeléctrico es regulado por los gobiernos y la ITU. Las frecuencias disponibles son denotadas por $F = \{1, \dots, N\}$. Si más de una banda de frecuencia está disponible, cada banda tiene su propio conjunto de frecuencias numeradas. En el caso de que existan dos bandas de frecuencias, éstas pueden ser numeradas por $F = \{1, ..., N_1, N_2 + 1, ..., N_3\}$, usualmente N_1 es menor que N_2 de tal forma que las dos bandas no tienen influencia entre ellas.

Para una antena en particular no todas las frecuencias de F pueden estar disponibles. Por ejemplo, si una antena está muy cerca de la frontera de un país, o de las divisiones entre las ciudades ésta puede estar restringida en la disponibilidad de frecuencias. Por lo tanto, las frecuencias disponibles para una antena v forman un subconjunto F(v) de F.

⁸Subsubsección Espectro del sistema. Sección 6.2

La interferencia de frecuencias es medida en relación a la cantidad de ruido, o interferencia de radio, en la recepción final de la conexión. Generalmente el ruido se origina por otras señales de radiodifusión en la interferencia de frecuencias. En general, el nivel de la interferencia decrece considerablemente con la distancia entre frecuencias.

Las señales de ruido dependen no solamente de la selección de la frecuencia, sino también de la fuerza de la señal, la dirección en que es transmitida, el estado del ambiente, y las condiciones del tiempo.

Ası, es difícil obtener predicciones exactas de la señal de ruido que será recibida. Una primera simplificación es ignorar el ambiente y asumir una antena omni-direccional. Consideremos dos señales, una original y alguna otra señal transmitida en el mismo canal de frecuencia. Entonces la interferencia de la segunda señal en el receptor de la primera señal son calculadas con la siguiente fórmula: $P/d\gamma$, donde P es el poder de la interferencia transmitida, d es la distancia de disturbio del receptor, γ es un factor de desvanecimiento que depende de la frecuencia usada con valores entre 2 y 4. •

Por ejemplo, los 1800 MHz de banda de frecuencia se desvanece más rápido que la banda de frecuencia de 900 MHz ambas usadas en redes GSM. Si la segunda señal es transmitida en una frecuencia a una distancia de $n \ge 1$ unidades de la señal original, entonces es tomado en cuenta el siguiente factor adicional $-15(1 + \log_2 n)$ dB.

Puede haber más de un origen en el que se transmite la misma frecuencia y esto contribuye al total de ruido experimentado por el receptor. El hecho de que múltiples señales puedan perturbar la calidad de la comunicación es ignorado en la mayoría de los modelos donde sólo se mide la interferencia entre cada par de antenas. Por lo anterior tenemos una relación binaria: sólo dos conexiones o dos antenas están involucradas.

En la telefonía móvil y la radio/TV difusión, los receptores están separados dentro de cierta área. La aproximación normal de señales fuertes para todas las ubicaciones dentro del área es la siguiente:

- i) Una malla cuadriculada de tamaño predeterminada es diseñada para sobreponerse en el área. Los cuadrados de la malla son denominados píxeles.
- ii) Para cada píxel, los niveles de las señales recibidas generados por el transmisor, son determinados con modelos de propagación de microondas.
- iii) Para un transmisor A, y un transmisor interferente B, el ruido generado por B en cada píxel del área de servicio de A agrega un valor, el cual representa la interferencia de B sobre A.

Modelos de predicciones más simples fueron usados anteriormente. Se utilizó una malla de hexágonos como aproximación estándar, aquí los transmisores eran ubicados en el centro de cada hexágono. El caso mejor conocido como Filadelfia⁹ tiene esta estructura y el cual fue visto en el Capítulo anterior.

⁹En el Capítulo 8 se presentará este problema

En el modelo básico de las mallas hexagonales la interferencia de las celdas está caracterizada por un co-canal de reuso a distancia d. La no interferencia ocurre si y sólo si los centros de dos celdas tienen una distancia mutua mayor o igual a d. En el caso en el que las distancias entre estas dos celdas sea menor que d, no se permite la asignación de la misma frecuencia para ambas celdas. Este caso básico de co-frecuencias es generalizado por el reemplazo de la distancia de reuso d por una serie de valores no crecientes $d_0, ..., d_k$ y sus correspondientes conjuntos prohibidos $T^0 \subseteq ... \subseteq T^k$. Por lo cual se obtiene la siguiente relación:

$$T_{uw} = T^{j-1}$$
 donde $d^j \le d_{vw} < d^{j-1}, j \in \{1, ..., k\}$

Aquí, d_{vw} es la distancia entre los centros de las celdas v y w, T_{uw} denota el conjunto de diferencias prohibidas entre las frecuencias asignadas a las celdas v y w, es decir, $|f_v - f_w| \notin T_{uw}$. Hemos trabajado, en lugar de d_{vw} con el valor c_i tal que i indicaba que todos los vértices a distancia i sus frecuencias tenían que estar separados en al menos el valor de c_i para que no existiera interferencia entre los ellos.

Un aspecto importante es el tráfico cuando se consideran dos-direcciones. Excepto por la radio y la TV todo el tráfico de radiodifusión es bidireccional, y uno necesita dos frecuencias, uno para cada dirección. Por lo general, en la literatura el segundo canal es siempre ignorado, con la notable excepción en las aplicaciones militares. En las mayoría de las aplicaciones dos bandas de N frecuencias están disponibles: uno con las frecuencias $\{1, ..., N\}$, y otro con las frecuencias $\{s+1, ..., s+N\}$ donde $s \gg N$.

De esta manera, la conexión contraria usa un canal el cual es cambiado s frecuencias arriba. La selección de s previene cualquier interferencia en las frecuencias anteriores con las frecuencias siguientes. Además, la simetría de la solución de las frecuencias anteriores, con las frecuencias siguientes (s frecuencias más), van al mismo patrón de interferencia que de las frecuencias anteriores. Si estas condiciones no se satisfacen, las dos-direcciones de tráfico poseen un problema, hace que la interferencia no necesite ser simétrica.

A continuación se da un ejemplo donde se muestra que las condiciones mencionadas anteriormente no son suficientes para la interferencia simétrica. Considere la posición geográfica de los transmisores en la Figura 6.6 Suponga que la pareja transmisora (a,b) transmite frecuencias f de a a b y (f+s) de b a a, y otra pareja transmisora (c,d) transmite frecuencias g de c a d y (g+s) de d a c donde f y g interfieren, y (f+s) y (g+s) interfieren. Ahora la fuerza de la señal de g a a es mucho más alta que la fuerza de la señal de (g+s) a b, entonces los receptores tienen diferentes distancias a c y d. Pero este aspecto no es tomado en cuenta.

En las redes de telefonía móvil, la interferencia retrograda no es empleada por otras razones suplementarias: la ubicación de los transmisores (los usuarios móviles) no es estática ya que varía a través del tiempo, lo cual hace casi imposible dar una predicción exacta de la interferencia a la recepción final (estación base).

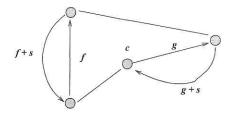


Figura 6.6: Interferencia Simétrica

En particular para las redes de GSM, la técnica de la frecuencia esperada ha sido introducida para reducir la influencia de la interferencia. La frecuencia esperada permite al transmisor cambiar la frecuencia de la señal de acuerdo a la secuencia de la asignación de frecuencias. Para el cambio rápido de la frecuencia de la transmisión, el nivel de interferencia total puede ser reducido.

Telefonía móvil, una aplicación

En esta aplicación uno de los puntos finales de la conexión es una antena fija y el otro punto final es un teléfono móvil. Cada antena cubre una cierta área, donde esta puede tomar señales de teléfonos móviles. Cada antena cubre una región específica (celda) y puede servir a varias unidades móviles simultáneamente.

En particular, en $TDMA^{10}$, cada frecuencia seleccionada puede ser usada para servir a n diferentes unidades móviles; además, varias frecuencias pueden ser asignadas a la misma antena para el uso de transmisores múltiples/unidades receptoras, TRXs, así que el número de diferentes unidades móviles que son servidas puede ser muy grande. Más antenas son entonces montadas en el mismo soporte físico (sitio) para cubrir un número de regiones adyacentes.

Las frecuencias asignadas a cada antena podrían satisfacer requerimientos que dependen de:

- Disponibilidad, especialmente en los bordes de las ciudades;
- Nivel de interferencia;
- Requerimientos tecnológicos;
- Tamaño del área con interferencia inaceptable.

Restricción de separación co-celdas.

Las frecuencias asignadas a una misma antena v podrían diferir en por lo menos $\delta(u, v)$ unidades, generalmente en este tipo de aplicaciones se toma $\delta(u, v) = 3$. En Teoría de Gráficas se definió como c_0 .

¹⁰TDMA, siglas del Inglés Time Division Multiple Acces

Restricción de separación co-sitio.

Si u y v son antenas co-sitio, para este tipo de aplicación entonces se toma $\delta(u,v)=2$. Con Teoría de Gráficas se definía la distancia i entre estos vértices y se tenía que mantener una separación c_i entre estos vértices.

Restricción de interferencia.

Se refiere a la interferencia suficiente, a la separación adicional que puede ser requerida entre dos pares de antenas que no estén en el mismo sitio. Generalmente, las parejas u y v podrían tener diferentes frecuencias, es decir, $\delta(u,v)=1$, o frecuencias a distancia de al menos 2.

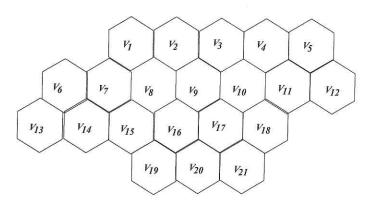


Figura 6.7: Ciudad de Filadelfia representada como una malla de hexágonos

Filadelfia, el reto

El ejemplo más utilizado es el Problema Filadelfia el cual está caracterizado por 21 hexágonos indicando las celdas de una red de teléfono celular de la ciudad de Filadelfia. A este problema se le han dado costos y restricciones teóricas para *provocar* situaciones extremas que dificultan la ejecución de algoritmos.

Este problema es muy importante ya que todo algoritmo de asignación de frecuencias debe ser probado con Filadelfia y los resultados obtenidos comparados con las asignaciones óptimas de éste. En el Capítulo 8 se verá con detalle este problema, la Figura 6.7 muestra a la Ciudad de Filadelfia representada con hexágonos.

Otras aplicaciones

El problema de asignación de frecuencias no solamente es de interés para las compañías de telefonía celular muestra de ello son las aplicaciones que se describen a continuación:

Movilidad Bell.

La empresa telefónica Bell ha hecho uso del problema de asignación de frecuencias para dos áreas urbanas en Canadá y estos ejemplos son descritos en *Frequency assignment benchmarks Canadian urban areas*.

Radio y Televisión.

Estas aplicaciones esencialmente se parecen a los ejemplos de telefonía móvil. La mayor diferencia se encuentra en las distancias de frecuencia usadas.

Aplicaciones militares.

El uso de teléfonos militares en campo (o teléfonos por aire) se pueden ver como problemas dinámicos de asignación de frecuencias, en tiempo y lugar. Estos problemas tienen la propiedad de que cada conexión consiste de dos teléfonos móviles. Por lo tanto, a cada conexión podríamos asignar dos frecuencias a una distancia fija para cada una, uno para cada dirección de comunicación. Por esto, todas las frecuencias son dadas en pares con esta distancia fija entre ellos.

Comunicación satelital.

Un problema de planeación de frecuencias en la comunicación satelital. En esta aplicación, tanto los transmisores como los receptores son terminales terrestres. Se comunican con la ayuda de uno o más satélites. Cada señal es primero transmitida vía un enlace satelital y después transmitido por el satélite vía downnlink a la terminal receptora. Las frecuencias uplink y downlink son separadas a una distancia fija, mucho más grande que el ancho de la banda, lo cual implica que se tengan que asignar frecuencias al uplink. Un conjunto de frecuencias consecutivas tienen que ser asignadas a cada transmisor. Para evitar interferencia, cada frecuencia debe ser usada una sola vez.

Capítulo 7

Modelación del Problema usando Programación Matemática

En este capítulo presentamos el Problema de Asignación de Frecuencias, cuando éstas son Fijas, FCA¹; es decir, modelos estáticos donde los conjuntos de antenas permanecen fijos en el tiempo.

A diferencia de los capÃtulos anteriores el lenguaje utilizado en éste capítulo cambia un poco por lo que se intentará hacer una comparación entre los conceptos vistos para el problema de Asignación de Frecuencias con Teoría de Gráficas y el problema con Programación Matemática.

7.1. Formulación y Clasificación

El problema básico de asignación de frecuencias consiste en restricciones de asignación, usualmente paquetes de restricciones, y una función objetivo. Este tipo de problemas tienen las siguientes características:

Los modelos asignación de frecuencias mencionados generalmente tienen un conjunto de frecuencias predefinidos o frecuencias, denotados por F. Para cada antena o conexión v, un subconjunto $F(v) \subseteq F$ de frecuencias disponibles es especificado, para el cual un subconjunto m(v) de frecuencias deberían ser asignadas a v. Generalmente la multiplicidad es igual a uno.

La multiplicidad en aplicaciones de telefonía móvil significa cuando una antena que representa a una celda puede contener múltiples TRXs. Cada TRX podría ser asignado a una frecuencia. De esta manera, una antena es asignada a tantas frecuencias como TRXs existan. Desde una perspectiva de modelación esto es fácil para reducir las multiplicidades a uno, viendo a cada TRX en una antena como una unidad separada.

¹Siglas del Inglés, Fixed Channel Assignment

De cualquier modo, el tamaño de un problema puede incrementarse substancialmente y los métodos de solución pueden no ser capaces de usar una estructura especial, inducida por el TRXs. Hay que tomar en cuenta que un TRX es una antena que tiene altas restricciones de interferencia.

Algunas veces las frecuencias asignadas a una antena son producto de la unión de conjuntos pertenecientes a una familia de subconjuntos predefinidos en la banda seleccionada. Estos subconjuntos son llamados bloques y una asignación de frecuencias es obtenida al asignar a cada antena uno o más de estos bloques. De esta manera una solución es llamada asignación de bloque.

7.2. Representación de la Gráfica Extendida

Una representación conveniente de la interferencia está dada por una gráfica de interferencia o la gráfica con restricciones G = (V, E), donde:

- Cada antena es representada por un vértice $v \in V$.
- Dos vértices v y w, para los cuales la correspondiente señal puede interferir para al menos un par de frecuencias transmitidas, son conectados por una arista $\{v,w\} \in E$.
- Las múltiples frecuencias son asignadas a antenas individuales que pueden ser representadas por una división de los vértices de la antena dentro de un número de copias requeridas. Claramente, esto puede incrementar el tamaño de la interferencia en la gráfica, y por lo tanto en algunos métodos se prefieren trabajar con la multiplicidad sobre los vértices de la antena directamente.

A esta gráfica extendida se le conoce como la gráfica de interferencia particionada. Hay que mencionar que un lazo en este modelo significa que los requerimientos de distancia de TRXs deben estar sobre la misma antena.

Para cada par de frecuencias $f \in F(v)$ y $g \in F(w)$ se penaliza la elección con una medida que depende del nivel de interferencia. Esta penalización es denotada por $p_{vw}(f,g)$ o p_{vw} f_g . En la mayoría de los modelos esta penalización tiene varias estructuras específicas: esto depende sólo de los vértices v, w y la distancia entre las frecuencias f y g se describe como |f-g|. A los Problemas de Asignación de Frecuencias con esta estructura serán llamados de ahora en adelante como distancia FAPs. Para este tipo de estructuras dos variantes ocurren frecuentemente en la literatura.

En la primera variante, una distancia d_{vw} es introducida tal que se incurre en la penalización p_{vw} si la selección de f y g es tal que $|f-g| < d_{vw}$. Notemos que la selección de penalizaciones altas p_{vw} hace que los requerimientos de la distancia puedan volverse restricciones duras o restricciones difíciles de satisfacer.

En la segunda variante, sólo se incurre en penalizaciones co-canal p_0 , si |f - g| = 0; y un canal adyacente p_1 , si |f - g| = 1, donde $p_0 > p_1 \ge 0$.

En varios estudios las matrices de penalización no son usadas a detalle, pero un cierto valor umbral p_{max} de interferencia es permitido. El valor umbral corresponde a una señal de ruido aceptable. Esto reduce las restricciones de interferencia para prohibir ciertas combinaciones de frecuencias. Más aún el problema se reduce a un Problema Binario de Satisfacción de Restricciones, CSP².

En el caso de que $p_{vw}(f,g)$ sólo dependa de la distancia |f-g| nos lleva a combinar un valor umbral y un conjunto de distancias prohibidas T_{vw} . Roberts [49] menciona que este problema es equivalente al problema de la T-coloración, donde los colores son números y ciertas diferencias entre los números son prohibidas para vértices adyacentes, como se vió anteriormente.

Generalmente, pero no necesariamente, las distancias prohibidas forman un conjunto de números enteros positivos consecutivos $\{0, 1, \dots, d_{vw} - 1\}$. Nos referiremos al problema como Distancia FAP.

La formulación en programación matemática del Problema de Asignación de Frecuencias consiste en un conjunto de variables, restricciones, y una función objetivo. Una elección directa de las variables es usar variables binarias que representen la elección de la frecuencia para un cierto vértice. Para cada vértice v y una frecuencia disponible $f \in F(v)$, se define:

$$x_{vf} = \begin{cases} 1 & \text{Si la frecuencia } f \in F(V) \text{ es asignada al vertice} v \in V; \\ 0 & \text{En otro caso.} \end{cases}$$

Este tipo de variables han sido usadas cuando el problema es planteado como un Programa Lineal Entero. Este problema se puede resolver con métodos de Ramificación y Cortes. La desventaja es el tamaño del conjunto de las variables. Formulaciones más simples se obtienen usando variables f_v para la elección de frecuencias para el vértice $v \in V$. Este tipo de formulación (simple) se dirige a la Programación No Lineal la cual raramente es usada. Más aún, se tiene la desventaja de que no solamente una frecuencia puede ser asignada a un vértice; por lo tanto, la gráfica particionada o dividida es esencial.

Los requerimientos de que m(v) frecuencias sean asignadas al vértice v es modelado con las siguientes restricciones, a las que llamaremos restricciones de multiplicidad:

$$\sum_{f \in F(v)} x_{vf} = m(v) \quad \forall v \in V \tag{7.1}$$

²Siglas en Inglés de Constraint Satisfaction Problem

Las matrices de penalización p_{vf} son usadas en combinación con un valor umbral p_{max} . Para parejas de frecuencias con un excedente de penalización este umbral es prohibido. Esto es modelado por el siguiente paquete de restricciones:

$$x_{vf} + x_{wg} \le 1 \quad \forall \{v, w\} \in E, \ f \in F(v); \ g \in F(w) : p_{vw}(f, g) > p_{max}$$
 (7.2)

Cuando no hay función objetivo a ser optimizada, se obtiene así el llamado Problema de Asignación de Frecuencias Factibles, F-FAP. Aquí, simplemente encontraremos una solución factible para el FAP, es decir, una solución que satisfaga las restricciones 7.1 y 7.2. Como su nombre lo dice el problema con la restricción 7.1 garantiza que cada vértice tenga las frecuencias requeridas y la restricción 7.2 garantiza la no interferencia entre frecuencias.

Si no existe una solución factible para F-FAP, podemos tratar de asignar tantas frecuencias como sea posible o minimizar la probabilidad de que una llamada sea bloqueada. Otros objetivos tratan la optimización de costos operativos minimizando el número de frecuencias usadas o la minimización de la amplitud usada (la frecuencia más alta menos la más baja). Todos estos modelos usan, junto a las restricciones de multiplicidad, paquetes de restricciones. En el caso de las matrices de penalización éstas son usadas directamente, se intenta entonces minimizar el total de la penalización incurrida. En este modelo el paquete de restricciones es reemplazado por una versión que incorpora la penalización para ciertas elecciones de combinaciones de frecuencias.

7.3. Modelos con Programación Matemática

A partir de este momento, a la gráfica extendida la denominaremos Red con pesos y restricciones

$$\mathcal{N}_w = (G, w, \{F(v)\}_{v \in V}, \mathbf{c}, \{p_{uv}\}_{uv \in E})$$

donde:

- G = (V, E), es la gráfica subyacente, para la cual las antenas (celdas) de la red celular están representadas por los vértices de G, y las posibles interferencias debidas al menos a un par de TRX quedan representadas por las aristas de G.
- Existe la arista $\{v, v\} \in E \ \forall v \in V;$
- w es el vector de pesos, $w(v) \in \mathbb{Z}_+ \ \forall v \in V$;
- $\{F(v)\}_{v\in V}$ es la familia de canales disponibles de cada antena, $F=\cup_{v\in V}F(v)$;
- c es el requerimiento de separación;
- $\{p_{uv}\}_{uv\in E}$ es el conjunto de penalizaciones para cada arista de G.

La formulación en programación matemática del FAP consiste de un conjunto de variables, restricciones y una función objetivo.

En las subsecciones restantes discutiremos una variedad de objetivos y estos serán adaptados al modelo de la red con pesos y restricciones \mathcal{N}_w . Si no existen soluciones factibles para el FAP, entonces podemos tratar de asignar tantas frecuencias como sea posible o minimizar la probabilidad de que una llamada sea bloqueada. Otros objetivos están dirigidos para optimizar los costos mediante la minimización del número de canales usados, la minimización del ancho de banda utilizado y la minimización de la interferencia total.

Factibilidad del Problema de Asignación de Canales

En esta primera etapa cuando no se cuenta con un objetivo a ser optimizado, se da lugar a la Factibilidad del Problema de Asignación de Frecuencias, F- FAP^3 . Formalmente, el problema puede ser definido como sigue.

Problema: Sea $\mathcal{N}_w = (G, w, \{F(v)\}_{v \in V}, \mathbf{c}, \{p_{uv}\}_{uv \in E})$ una red con pesos y restricciones, definida anteriormente, determinar si existe una asignación de subconjuntos $f: V \to 2^F$ tal que:

$$\begin{aligned} |f(v)| &= w(v); & f(v) \subseteq F(v); \, \mathbf{y} \\ |i-j| &\geq \mathbf{c}(uv) & \forall uv \in E, \ i \in f(u), \ j \in f(v), \ u \neq v \ \ \text{o} \ \ i \neq j \end{aligned}$$

Una formulación en programación entera para este problema, hace uso de una alternativa directa para las variables de decisión: las variables binarias que representan la elección de un canal para un cierto vértice (antena). Para cada vértice $v \in V$ y cada canal disponible $i \in F(v)$ definimos

$$x_{vi} = \begin{cases} 1 & \text{si el canal } i \in F(v) \text{ es asignado al vértice } v \in V, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El requerimiento de asignar w(v) canales al vértice v es modelado por las siguientes restricciones, denominadas restricciones de multiplicidad,

$$\sum_{i \in F(v)} x_{vi} = w(v) \quad \forall v \in V. \tag{7.3}$$

La división de los niveles de interferencia (aceptables e inaceptables) reduce el problema a combinaciones de canales permitidos y no permitidos. Las combinaciones prohibidas son modeladas por las restricciones sucesivas:

³Siglas del inglés, Feasibility Frequency Assignment Problem.

$$x_{ui} + x_{vj} \leq 1 \quad \forall uv \in E, \ i \in F(u), \ j \in F(v) :$$

$$(|i - j| < \mathbf{c}(uv)) \land ((i \neq j) \lor (u \neq v)). \tag{7.4}$$

Aquí, simplemente queremos encontrar una solución factible al FAP; es decir, una que satisfaga las restricciones (7.3) y (7.4). A este planteamiento se le denota F-FAP.

En las subsecciones restantes, distinguimos cuatro modelos de acuerdo al objetivo para resolver el FAP y, apuntamos que las formulaciones son dadas con respecto a una red con pesos y restricciones \mathcal{N}_w .

7.4.Máximo Servicio y Mínima Asignación de Frecuencias Bloqueadas

Si las soluciones factibles para el programa lineal F-FAP no están disponibles o son difíciles de encontrar, podemos tomar la decisión de buscar una solución parcial que asigne tantos canales como sea posible a cada antena. Este problema es conocido como el FAP de máximo servicio, denotado por Max-FAP. Básicamente, este problema es un F-FAP extendido con el objetivo de asignar tantas frecuencias como sea viable.

Para modelar el Max-FAP incorporamos los números $\eta(v), v \in V$, los cuales designarán el número de canales asignados a cada vértice $v \in V$. Luego el programa lineal resultante es:

$$\max \sum_{v \in V} \eta(v) \tag{7.5}$$

sujeto a:

$$\sum_{i \in F(v)} x_{vi} = \eta(v) \qquad \forall v \in V \tag{7.6}$$

$$\eta(v) \leq w(v) \qquad \forall v \in V \tag{7.7}$$

$$\eta(v) \leq w(v) \quad \forall v \in V$$

$$x_{ui} + x_{vj} \leq 1 \quad \forall uv \in E, \ i \in F(u), j \in F(v):$$

$$(|i-j| < \mathbf{c}(uv)) \wedge ((i \neq j) \vee ((u \neq v))$$
(7.8)

$$x_{vi} \in \{0,1\}$$
 $\forall v \in V, i \in F(v)$ (7.9)
 $\eta(v) \in \mathbb{Z}_{+}$ $\forall v \in V$ (7.10)

$$\eta(v) \in \mathbb{Z}_+ \qquad \forall v \in V$$

$$(7.10)$$

La función objetivo 7.5 garantiza asignar el mayor número de canales. El número de canales asignados a cada antena se indica en las igualdades (7.6). En contraste a la formulación del F-FAP, las restricciones de multiplicidad (7.3) ya no requieren satisfacer la igualdad, como en las restricciones (7.7).

Se observa que las soluciones óptimas al Max-FAP tienden a asignar muy pocos canales a algunos vértices conflictivos, mientras que la mayoría de los vértices restantes obtienen la frecuencia demandada. Tales soluciones no son deseables, ya que esto se traduce en bajo servicio en algunas áreas. Para hacer frente a la problemática, se introduce una cota inferior l(v) sobre el número de canales a ser asignados a cada vértice v, para tener garantizado un servicio mínimo: $l(v) \leq \eta(v) \ \forall v \in V$.

Un camino más realista para hacer frente a este problema es calcular las probabilidades actuales del bloque como una función del número de frecuencias asignadas $\eta(v)$. Esta aproximación ha sido modelada de manera independiente por Mathar-Mattefeld [38] y Chang-Kim [6], quienes usan una combinación de posibilidades cargadas en la función objetivo. Este problema es conocido como el Problema de Asignación de la Frecuencia Mínima Bloqueada.

Otra forma de ver este último problema se describe a continuación. En el caso de que solamente se puedan asignar $\eta(v)$ canales a la antena v de los w(v) canales demandados, podemos calcular la probabilidad de que una solicitud de servicio, llamada telefónica, sea rechazada en la práctica. Esta probabilidad es llamada probabilidad de bloqueo de la celda. El objetivo habitual para la distinción de las asignaciones parciales es la minimización de la probabilidad de bloqueo.

En el Problema de Asignación de Canales con Mínimo Bloqueo, MB-FAP⁴ queremos asignar canales de tal forma que no ocurra interferencia inaceptable, y la probabilidad de bloqueo total de la red sea minimizada. Formalmente, el problema se puede definir como:

Problema: Sea $\mathcal{N}_w = (G, w, \{F(v)\}_{v \in V}, \mathbf{c}, \{p_{uv}\}_{uv \in E})$ una red con pesos y restricciones, como se definió anteriormente, determinar si existe una asignación de subconjuntos $f: V \to 2^F$ tal que:

juntos
$$f: V \to 2^r$$
 tal que:
 $|f(v)| \le w(v);$ $f(v) \subseteq F(v);$
 $|i-j| \ge \mathbf{c}(uv) \quad \forall uv \in E, \ i \in f(u), \ j \in f(v), \ u \ne v \text{ o } i \ne j; \ y,$
 $\sum_{v \in V} b_v(|f(v)|) \le K$

Para dar formato de programación matemática al MB-FAP definimos λ_v como la demanda de tráfico en Erlangs para la celda v y $\eta(v)$ es el número de canales de comunicación requeridos. Entonces la función de bloqueo de la celda v está dada por la fórmula Erlang-B:

$$B(\lambda_v, \eta(v)) = \left(\sum_{k=0}^{\eta(v)} \frac{(\lambda_v)^k}{k!}\right)^{-1} \frac{(\lambda_v)^{\eta(v)}}{\eta(v)!}$$

⁴Siglas del inglés, Minimum Blocking FAP.

Esta fórmula describe la probabilidad de bloqueo para tráfico de voz con distribución exponencial no negativa del tiempo de llegada. $B(\lambda_v, \eta(v))$ es estrictamente decreciente y convexa en $\eta(v)$. Ahora, la función objetivo (no lineal) a minimizar en una formulación de programación entera es:

$$\sum_{v \in V} b_v(\eta(v)) \tag{7.11}$$

donde $b_v(\eta(v)) = w_v \cdot B(\lambda_v, \eta(v))$ es la función ponderada de bloqueo con $w_v = \lambda_v / \sum_{u \in V} \lambda_u$ el factor de peso del tráfico.

Formalmente, el programa MB-FAP es:

$$\min \sum_{v \in V} b_v(\eta(v)) \tag{7.12}$$

sujeto a:

$$\eta(v) = \sum_{i \in F(v)} x_{vi}
\eta(v) \leq w(v) \quad \forall v \in V
x_{ui} + x_{vj} \leq 1 \quad \forall uv \in E, \ i \in F(u), j \in F(v) :
(|i - j| < \mathbf{c}(uv)) \wedge ((i \neq j) \vee ((u \neq v))
x_{vi} \in \{0, 1\} \quad \forall v \in V, \ i \in F(v)$$
(7.13)
$$(7.14)$$

El valor de $\eta(v)$ únicamente es utilizado para simplificar la función objetivo (7.12) que minimiza la probabilidad de bloqueo global. Las restricciones (7.13) modelan la cota superior w(v) sobre el número de canales que deben ser asignados a $v \in V$.

Puesto que la función $B(\lambda_v, \eta(v))$ es estrictamente decreciente y convexa en $\eta(v)$, podemos linealizar la función objetivo incorporando los coeficientes:

$$\alpha_{vm} := B(\lambda_v, m) - B(\lambda_v, m - 1) < 0,$$

y las variables binarias y_{vm} definidas así

$$y_{vm} = \begin{cases} 1 & \text{si al menos } m \leq w(v) \text{ canales son asignados a } v \in V, \\ 0 & \text{de otra forma.} \end{cases}$$

Entonces la función objetivo (7.12) se convierte en

$$\min \sum_{v \in V} w_v \left(1 + \sum_{m=1}^{w(v)} \alpha_{vm} \, y_{vm} \right) \tag{7.16}$$

y las restricciones (7.13) ahora son formuladas como

$$\sum_{m=1}^{w(v)} y_{vm} = \sum_{i \in F(v)} x_{vi}$$

$$\leq w(v) \quad \forall v \in V$$

$$(7.17)$$

Notemos que $y_{vm}=1 \Rightarrow y_{vm-1}=1$; y la función $B(\lambda_v,\eta(v))$ es estrictamente convexa, lo cual implica que α_{vm} crece estrictamente sobre m.

Ejemplo

Cierta compañía de teléfonos necesita establecer las frecuencias que utilizará en seis regiones, la gráfica que representa tales regiones se muestra en la Figura 7.1.

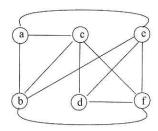


Figura 7.1: Ejemplo para Max-FAP

Las frecuencias para cada vértice se definen:

$$F(a) = \{0, 4, 8, 10, 12\}; F(b) = \{4, 8, 10, 12, 14\}; F(c) = \{0, 2, 6, 8, 12\};$$

$$F(d) = \{3, 7, 9, 10, 11\}; F(e) = \{3, 7, 9, 10, 11\}; F(f) = \{3, 7, 9, 10, 11\};$$

$$F = \{0, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14\}.$$

Los conjuntos de distancias prohibidas para cada par de vértices son:

$$T_{ab} = T_{bc} = T_{ac} = \{0, 1\};$$
 $T_{ad} = T_{be} = T_{cf} = \{0, 2\};$ $T_{de} = T_{df} = T_{ef} = \{1, 2\};$ $T_{bf} = T_{ae} = T_{cd} = \{0\};$ $T_{ww} = \{0, 1\} \ \forall w \in V.$

Planteamiento

Se definen las variables:

$$n(v) = \text{Número de frecuencias asignadas a } v, v \in \{a, b, c, d, e, f\}.$$

 $x_{vf} = 1$, si la frecuencia f es asignada al vértice $v, v \in V, f \in F(v).$
 $x_{vf} = 0$ en otro caso.
 $n(v) \in Z+, v \in \{a, b, c, d, e, f\}.$ $x_{vf} \in \{0, 1\}, v \in \{a, b, c, d, e, f\}; f \in F(v).$

La función objetivo es:

Max
$$z = n(a) + n(b) + n(c) + n(d) + n(e) + n(f)$$

Se definen las variables del tipo $\sum_{f \in F(v)} x_{vf} = n(v) \ \forall v \in V$:

$$\begin{aligned} x_{a0} + x_{a4} + x_{a8} + x_{a10} + x_{a}12 &= n(a); \\ x_{c0} + x_{c2} + x_{c6} + x_{c8} + x_{c12} &= n(c); \\ x_{e3} + x_{e7} + x_{e9} + x_{e10} + x_{e11} &= n(e); \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_{b4} + x_{b8} + x_{b10} + x_{b12} + x_{b14} &= n(b); \\ x_{d3} + x_{d7} + x_{d9} + x_{d10} + x_{d11} &= n(d); \\ x_{f3} + x_{f7} + x_{f9} + x_{f10} + x_{f11} &= n(f). \end{aligned}$$

La primera restricción indica que al vértice a se le van a asignar n(a) frecuencias pero siempre y cuando éstas estén en el conjunto de frecuencias definidas.

Las resticiones del tipo
$$n(v) \le m(v)$$
:
 $n(a) \le 2$; $n(b) \le 2$; $n(c) \le 2$; $n(d) \le 2$; $n(e) \le 2$; $n(f) \le 2$.

Este tipo de restricciones dice que del conjunto de frecuencias que se le puedan asignar a algún vértice no deben sobrepasar la demanda establecida.

Restricciones para los vértices
$$a$$
 y b , $T_{ab} = \{0, 1\}$: $x_{a4} + x_{b4} \le 1$; $x_{a10} + x_{b10} \le 1$; $x_{a8} + x_{b8} \le 1$; $x_{a12} + x_{b12} \le 1$.

Las restricciones anteriores se refieren a que a los vértices a y b no se le pueden asignar frecuencias iguales o consecutivas, estos es, para ellos dos, a lo más a uno, se le puede asignar la frecuencia que tienen en común o la que sea consecutiva pero no a los dos. Esto aplica igual para las restricciones que se muestran a continuación:

```
Restricciones para los vértices a y c, T_{ac} = \{0, 1\}:
    x_{a8} + x_{c8} \le 1; x_{a0} + x_{c0} \le 1; x_{a12} + x_{c12} \le 1.
Restricciones para los vértices a y d, T_{ad} = \{0, 2\}:
    x_{a8} + x_{d10} \le 1; x_{a10} + x_{d10} \le 1; x_{a12} + x_{d10} < 1.
Restricción para los vértices a y e, T_{ae} = \{0\}: x_{a10} + x_{e10} \le 1
Restricciones para los vértices b y c, T_{bc} = \{0, 1\}:
    x_{b8} + x_{c8} \le 1;
                           x_{b12} + x_{c12} \le 1.
Restricciones para los vértices b y e, T_{be} = \{0, 2\}:
    x_{b8} + x_{e10} \le 1;
                           x_{b10} + x_{e10} \le 1; x_{b12} + x_{e10} \le 1.
Restricción para los vértices b y f, T_{bf} = \{0\}: x_{b10} + x_{f10} \le 1
Restricciones para los vértices c y f, T_{cf} = \{0, 2\}:
    x_{c8} + x_{f10} \le 1; x_{c12} + x_{f10} \le 1.
Restricciones para los vértices d y e, T_{de} = \{1, 2\}:
    x_{d7} + x_{e9} \le 1; x_{d9} + x_{e7} \le 1; x_{d9} + x_{e10} \le 1; x_{d9} + x_{e11} \le 1;
    x_{d10} + x_{e9} \le 1; x_{d10} + x_{e11} \le 1; x_{d11} + x_{e9} \le 1; x_{d11} + x_{e10} \le 1.
```

```
Restricciones para los vértices d y f, T_{df} = \{1,2\}: x_{d7} + xf_9 \le 1; x_{d9} + xf_7 \le 1; x_{d9} + xf_{10} \le 1; x_{d9} + xf_{11} \le 1; x_{d10} + x_{f9} \le 1; x_{d10} + x_{f11} \le 1; x_{d11} + x_{f9} \le 1; x_{d11} + x_{f10} \le 1. Restricciones para los vértices e y f, T_{ef} = \{1,2\}: x_{e7} + x_{f9} \le 1; x_{e9} + x_{f7} \le 1; x_{e9} + x_{f10} \le 1; x_{e9} + x_{f11} \le 1; x_{e10} + x_{f9} \le 1; x_{e10} + x_{f11} \le 1; x_{e11} + x_{f10} \le 1; x_{e11} + x_{f9} \le 1. Restricciones para los vértices v \in V, T_{vv} = \{0,1\}: x_{d9} + x_{d10} \le 1; x_{d10} + x_{d11} \le 1; x_{e9} + x_{e10} \le 1; x_{e10} + x_{e11} \le 1; x_{f9} + x_{f10} \le 1; x_{f10} + x_{f11} \le 1; x_{f10} + x_{f11} \le 1; x_{f10} + x_{f11} \le 1;
```

Solución

$$x_{a0} = x_{a4} = x_{b10} = x_{b12} = x_{b14} = x_{c2} = x_{c6} = x_{c8} = 1$$

 $x_{d3} = x_{d7} = x_{e3} = x_{e7} = x_{e11} = x_{f3} = x_{f11} = 1$
 $x_{a8} = x_{a10} = x_{a12} = x_{b4} = x_{b8} = x_{c0} = x_{c12} = x_{d9} = 0$
 $x_{d10} = x_{d11} = x_{e9} = x_{e10} = x_{f7} = x_{f9} = x_{f10} = 0$
 $n(a) = 1; \quad n(b) = 3; \quad n(c) = 3; \quad n(d) = 2; \quad n(e) = 3; \quad n(f) = 2.$

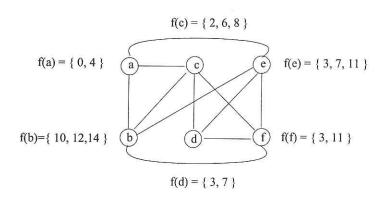


Figura 7.2: Solución del ejemplo para Max-FAP

Por lo que las frecuencias asignadas por región son:

$$f(a) = \{0, 4\};$$
 $f(b) = \{10, 12, 14\};$ $f(c) = \{2, 6, 8\}$
 $f(d) = \{3, 7\};$ $f(e) = \{3, 7, 11\};$ $f(f) = \{3, 11\}.$

En la Figura 7.2 podemos observar que a los vértices a y b se les asignaron las frecuencias 0, 4 y 10, 12, 14 respectivamente. Las frecuencias asignadas al vértice a debían tener al menos una separación de 1, lo cual se respetó en la asignación. De igual manera, la asignación para b, entre las frecuencias asignadas para a y b tenía que haber, una separación de 1, lo cual se respeta en la asignación final.

7.5. Mínimo Orden, MO-FAP

En los años 1970, la minimización del número de canales usados fue un objetivo ampliamente divulgado, porque tales canales debían ser comprados por unidad a un costo muy elevado para ese tiempo. En el Problema de Asignación de Frecuenciass de Mínimo Orden, MO-FAP⁵, tenemos que asignar canales de tal forma que no ocurra interferencia inaceptable y el número de canales (distintos) sea minimizado. El MO-FAP es el primer FAP discutido en la literatura. Si existen soluciones factibles en el F-FAP, entonces podríamos buscar la más barata, un primer intento para hacerlo, penaliza el uso de las frecuencias. Formalmente podemos describir el problema como sigue.

Problema: Sea $\mathcal{N}_w = (G, w, \{F(v)\}_{v \in V}, \mathbf{c}, \{p_{uv}\}_{uv \in E})$ una red con pesos y restricciones, como se definió anteriormente, y dado un entero positivo K, determinar si existe una asignación de subconjuntos $f: V \to 2^F$ tal que:

$$|f(v)| = w(v); f(v) \subseteq F(v); |i - j| \ge \mathbf{c}(uv) \quad \forall uv \in E, \ i \in f(u), \ j \in f(v), \ u \ne v \text{ o } i \ne j; \ y, |\bigcup_{v \in V} f(v)| \le K.$$

En un formato de programación matemática para la función objetivo, requerimos variables adicionales que indiquen cuando un canal es utilizado.

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si el canal } i \in F \text{ es usado,} \\ 0 & \text{de otra forma.} \end{cases}$$

Por consiguiente, la formulación del MO-CAP queda:

$$\min \sum_{i \in F} y_i \tag{7.18}$$

sujeto a:

$$\sum_{i \in F(v)} x_{vi} = w(v) \qquad \forall v \in V \tag{7.19}$$

$$x_{ui} + x_{vj} \le 1$$
 $\forall uv \in E, i \in F(u), j \in F(v)$:

$$(|i-j| < \mathbf{c}(uv)) \land ((i \neq j) \lor ((u \neq v))$$

$$(7.20)$$

$$x_{vi} \leq y_i \qquad \forall v \in V, \ i \in F(v) \tag{7.21}$$

$$x_{vi} \in \{0,1\} \qquad \forall v \in V, \ i \in F(v) \tag{7.22}$$

$$y_i \in \{0,1\} \qquad \forall i \in F \tag{7.23}$$

⁵Siglas del inglés, Minimum Order FAP

La función objetivo (7.18) simplemente suma la utilización de canales disponibles, para determinar el número de frecuencias usadas. Las restricciones (7.19) indican que w(v) canales tienen que ser asignados a cada antena $v \in V$. Las combinaciones prohibidas de canales son modeladas por las restricciones (7.20; así, la distancia MO-FAP se reduce al problema estándard de coloración de vértices si todas las distancias son iguales a 1 y todos los vértices del dominio están en el mismo conjunto de enteros consecutivos. Las restricciones (7.21) especifican que si un canal es usado, éste puede ser asignado al vértice v; aquí forzamos que la variable y sea 1, en el caso de que la correspondiente frecuencia sea usada.

Ejemplo

Tomemos el ejemplo planteado en la sección anterior y que se presenta gráficamente en la Figura 7.1.

Planteamiento

```
Se definen las variables:
```

```
m(v)= Número de frecuencias asignadas a v,v\in\{a,b,c,d,e,f\}. x_{vf}=1 si la frecuencia f es asignada al vértice v,v\in V,\,f\in F(v); x_{vf}=0 en otro caso, cuando f\not\in F(v). y_f=1 si la frecuencia f es usada, f\in F(v); y_f=0 en otro caso, si f\not\in F(v). x_{vf}\in\{0,1\},\,\,v=\{a,b,c,d,e,f\}. y_f\in\{0,1\},\,\,\forall f\in F(v).
```

La función objetivo queda:

Min $z = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9 + y_{10} + y_{11} + y_{12} + y_{13} + y_{14}$ la cual quedará sujeta a la siguiente serie de restricciones:

```
Restricciones del tipo  \sum_{f \in F(v)} x_{vf} = m(v) :   x_{a0} + x_{a4} + x_{a8} + x_{a10} + x_{a12} = 2; \qquad x_{b4} + x_{b8} + x_{b10} + x_{b12} + x_{b14} = 3;   x_{c0} + x_{c2} + x_{c6} + x_{c8} + x_{c12} = 3; \qquad x_{d3} + x_{d7} + x_{d9} + x_{d10} + x_{d11} = 2;   x_{e3} + x_{e7} + x_{e9} + x_{e10} + x_{e11} = 3; \qquad x_{f3} + x_{f7} + x_{f9} + x_{f10} + x_{f11} = 2.
```

Restricciones para los vértices a y b, $T_{ab} = \{0, 1\}$: $x_{a4} + x_{b4} \le 1$; $x_{a10} + x_{b10} \le 1$; $x_{a8} + x_{b8} \le 1$; $x_{a12} + x_{b12} \le 1$.

Al igual que en la sección anterior se manejan las restricciones del tipo: $x_{vf} + x_{wg} \le 1 \quad \forall \{v, w\} \in E, \ f \in F(v), \ g \in F(w) : p_{vw}(f, g) > p_{max}$ las cuales ya no las describimos aquí.

Restricciones del tipo $x_{vf} \leq y_f$, entonces $x_{vf} - y_f \leq 0$: Vértice a:

$$x_{a0} - y_0 \le 0; x_{a4} - y_4 \le 0; x_{a8} - y_8 \le 0; x_{a10} - y_{10} \le 0; x_{a12} - y_{12} \le 0.$$
 Vértice b :

$$x_{b4} - y_4 \le 0$$
; $x_{b8} - y_8 \le 0$; $x_{b10} - y_{10} \le 0$; $x_{b12} - y_{12} \le 0$; $x_{b14} - y_{14} \le 0$. Vértice c :

$$x_{c0} - y_0 \le 0; x_{c2} - y_2 \le 0; x_{c6} - y_6 \le 0; x_{c8} - y_8 \le 0; x_{c12} - y_{12} \le 0.$$
 Vértice d :

$$x_{d3} - y_3 \le 0; x_{d7} - y_7 \le 0; x_{d9} - y_9 \le 0; x_{d10} - y_{10} \le 0; x_{d11} - y_{11} \le 0.$$

Vértice e :

$$x_{e3} - y_3 \le 0; x_{e7} - y_7 \le 0; x_{e9} - y_9 \le 0; x_{e10} - y_{10} \le 0; x_{e11} - y_{11} \le 0.$$
 Vértice f :

$$x_{f3} - y_3 \le 0; x_{f7} - y_7 \le 0; x_{f9} - y_9 \le 0; x_{f10} - y_{10} \le 0; x_{f11} - y_{11} \le 0.$$

$$x_{vf} \in \{0, 1\}, v = \{a, b, c, d, e, f\}; f \in F(v). \quad y_f \in \{0, 1\}, \forall f \in F(v).$$

Solución

$$\begin{array}{l} x_{a0}=x_{a12}=x_{b10}=x_{b14}=x_{b4}=x_{c2}=x_{c6}=x_{c8}\\ =x_{d3}=x_{d7}=x_{e11}=x_{e3}=x_{e7}=x_{f3}=x_{f7}=1;\\ x_{a10}=x_{a4}=x_{a8}=x_{b12}=x_{b8}=x_{c0}=x_{c12}=x_{d10}\\ =x_{d11}=x_{d9}=x_{e10}=x_{e9}=x_{f10}=x_{f11}=x_{f9}=0;\\ y_0=y_{10}=y_{11}=y_{12}=y_{14}=y_2=y_3=y_4=y_6=y_7=y_8=1;\\ y_1=y_{13}=y_5=y_9=0. \end{array}$$

Por lo que las frecuencias asignadas por región son:

$$f(a) = \{0, 12\};$$
 $f(b) = \{4, 10, 14\};$ $f(c) = \{2, 6, 8\};$ $f(d) = \{3, 7\};$ $f(e) = \{3, 7, 11\};$ $f(f) = \{3, 11\}.$

7.6. Amplitud Mínima, MS-FAP

El objetivo de minimizar la *amplitud*⁶ fue popular en la década de 1980, donde los canales eran comprados por ancho de banda. Así que, la amplitud determinaba el costo y por lo tanto fue deseable minimizarla. Esto dió origen al Problema de Asignación de Frecuencias con Mínima Amplitud MS-CFAP⁷.

En la amplitud mínima se propone con el supuesto de pagar por el conjunto repleto de frecuencias entre el más alto y el más bajo usado. Ésta es, la diferencia entre el

 $^{^6}$ La amplitud se define como la diferencia entre los canales máximo y mínimo seleccionados.

⁷Siglas del inglés, Minimum Span FAP

máximo y el mínimo de la frecuencia usada, la amplitud, que es lo que determina el costo y es lo que se quiere minimizar.

El problema MS-FAP queda definido formalmente a continuación.

Problema: Dada una red $\mathcal{N}_w = (G, w, \{F(v)\}_{v \in V}, \mathbf{c}, \{p_{uv}\}_{uv \in E})$ con peso y restricciones, como se definió anteriormente, y dado un entero positivo K, determinar si existe una asignación de subconjuntos $f: V \to 2^F$ tal que:

$$|f(v)| = w(v); f(v) \subseteq F(v); |i - j| \ge \mathbf{c}(uv) \quad \forall uv \in E, \ i \in f(u), \ j \in f(v), \ u \ne v \text{ o } i \ne j; \ \mathbf{y}, \sigma(f) = \max_{v \in V} \bigcup_{v \in V} f(v) - \min_{v \in V} \bigcup_{v \in V} f(v) \le K$$

Para modelar este problema incluimos dos nuevas variables enteras: $z_{\rm mín}$ y $z_{\rm máx}$ que denoten los canales mínimo y máximo utilizados, respectivamente. Para el caso general, una formulación en programación entera del MS-FAP se exhibe

$$\min(z_{\text{máx}} - z_{\text{mín}}) \tag{7.24}$$

sujeto a:

$$\sum_{i \in F(v)} x_{vi} = w(v) \qquad \forall v \in V \tag{7.25}$$

$$x_{ui} + x_{vj} \le 1$$
 $\forall uv \in E, i \in F(u), j \in F(v)$:

$$(|i-j| < \mathbf{c}(uv)) \wedge ((i \neq j) \vee ((u \neq v))$$
 (7.26)

$$x_{vi} \leq y_i \qquad \forall v \in V, \ i \in F(v)$$
 (7.27)

$$z_{max} \geq j \cdot y_j \quad \forall j \in F$$

$$z_{min} \leq J - (J - j) y_j \quad \forall j \in F$$

$$(7.28)$$

$$z_{min} \leq J - (J - j) y_j \qquad \forall j \in F \tag{7.29}$$

$$x_{vi} \in \{0,1\} \qquad \forall v \in V, \ i \in F(v) \tag{7.30}$$

$$y_i \in \{0,1\} \qquad \forall i \in F \tag{7.31}$$

$$z_{\min}, z_{\max} \in \mathbb{Z}_+$$
 (7.32)

donde $J = \max\{j : j \in F\}$ es el máximo canal disponible, también llamado f_{max} .

La función objetivo (7.24) consiste en minimizar la amplitud. Las restricciones (7.28) aseguran que los canales disponibles no superen al máximo canal utilizado, análogamente en (7.29) se garantiza lo propio para el mínimo canal ocupado por la aignación.

En una formulación alterna, se definieron variables binarias en lugar de $z_{\rm m\acute{e}x}$ y z_{\min} . Aparte de las restricciones estándar (7.3) y (7.4) las variables nuevas infirieron restricciones adicionales para imponerles valores correctos.

$$u_i = \begin{cases} 1 & \text{si el canal } i \in F \text{ es el más grande usado,} \\ 0 & \text{de otra forma.} \end{cases}$$

$$l_i = \left\{ egin{array}{ll} 1 & \mbox{si el canal } i \in F \mbox{ es el más pequeño usado,} \\ 0 & \mbox{de otra forma.} \end{array} \right.$$

Con estas variables el MS-FAP queda:

$$\min\left(\sum_{j\in F} j \cdot u_j - \sum_{j\in F} j \cdot l_j\right) \tag{7.33}$$

sujeto a:

$$\sum_{i \in F(v)} x_{vi} = w(v) \qquad \forall v \in V \tag{7.34}$$

$$x_{ui} + x_{vj} \leq 1$$
 $\forall uv \in E, i \in F(u), j \in F(v)$:

$$(|i-j| < \mathbf{c}(uv)) \land ((i \neq j) \lor ((u \neq v)) \tag{7.35}$$

$$\sum_{i \in F} u_i = 1 \tag{7.36}$$

$$\sum_{i \in F} l_i = 1 \tag{7.37}$$

$$x_{vi} + u_j \leq 1 \qquad \forall v \in V, \ i \in F(v) \ j \in F: \ i > j \tag{7.38}$$

$$x_{vi} + u_j \leq 1$$
 $\forall v \in V, i \in F(v) j \in F: i > j$ (7.38)
 $x_{vi} + l_j \leq 1$ $\forall v \in V, i \in F(v) j \in F: i < j$ (7.39)

$$x_{vi} \in \{0,1\} \qquad \forall v \in V, \ i \in F(v) \tag{7.40}$$

$$u_i \in \{0,1\} \qquad \forall i \in F \tag{7.41}$$

$$l_i \in \{0, 1\} \qquad \forall i \in F \tag{7.42}$$

Las restricciones (7.36) y (7.37) garantizan que los canales más grande y más pequeño son únicos. Con las desigualdades (7.38) se prohibe asignar canales mayores al máximo y con las restricciones (7.39) no se permite asignar canales menores al mínimo.

En el MS-FAP algunas veces el conjunto de frecuencias $F = \{1, ..., f_{max}\}$ es asignado para todos los vértices; es decir, $F(v) = \{1, ..., f_{max}\} \ \forall v \in V$. Esto provoca un conjunto de cotas inferiores a 1, esto es: $z_{min}=1$ o $l_{min}=1$. Por lo que, minimizar la amplitud es equivalente a minimizar el máximo de la frecuencia asignada. En otras palabras, f_{max} queda determinada como la mínima frecuencia para la cual el MS-FAP tiene soluciones factibles. Haciendo esto con la Búsqueda Binaria o técnicas relacionadas, los F-FAP o Max-FAP ocurren como subproblemas.

Para el caso $F(v) = \{1, ..., f_{max}\}$ es posible otra formulación, tal se basa en el MO-FAP y agrega la siguiente restricción:

$$y_{f+1} \le y_f \quad \forall f \text{ tal que } f+1 \in F$$

Entonces la minimización de la amplitud es equivalente a: $\sum y_f$.

Esta formulación fue propuesta por Baybars [4] y fue, probablemente, la primera formulación de programación lineal entera para el MS-FAP. Esto está basado en la formulación para gráficas coloreadas introducidas por Christofides [9].

En el caso de la distancia MS-FAP (usa sólo restricciones duras de distancia), un orden lineal de los vértices pueden ser asociados con cada asignación de frecuencias.

En particular, sea σ un orden lineal de los vértices de G. Entonces, la asignación canónica de $\sigma\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es una asignación de frecuencias con la propiedad de que la frecuencia asignada a v_j es la frecuencia más pequeña factible después de que $v_1, v_2, ..., v_{j-1}$ han sido asignados.

Si denotamos por d(v, w) a la mínima distancia requerida entre la frecuencia asignada a v y la asignada a w, entonces la asignación canónica $f_1, ..., f_n$ corresponde al orden lineal $\sigma\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ pueden obtenerse de las siguientes ecuaciones recursivas:

$$\begin{split} f_1 &= 1 \\ f_k &= \min\{f \geq 1: |f - f_r| \geq (v_r, v_k), r = 1, ..., k - 1\}, k = 2, ..., n. \end{split}$$

Nótese que a lo largo de todos los órdenes lineales, existe uno para cada asignación canónica que provee la solución óptima para MS-FAP, desde cada asignación da un incremento en el orden de los vértices análogo al orden de las frecuencias asignadas.

Ejemplo

Retomemos el ejemplo planteado anteriormente para la gráfica de la Figura 7.1.

Planteamiento

```
Se definen las variables
```

 $m(v) = \text{Número de frecuencias asignadas a } v, \ v \in \{a, b, c, d, e, f\}.$

 $x_{vf} = 1$ si la frecuencia f es asignada al vértice $v, v \in V, f \in F(v)$

 $x_{vf} = 0$ si la frecuencia f no es asignada al vértice v.

 $y_f = 1$ si la frecuencia f es usada, $f \in F(v)$;

 $y_f = 0$ si la frecuencia f no es usada, $f \in F(v)$;

 $x_{vf} \in \{0, 1\}, v \in \{a, b, c, d, e, f\}; f \in F(v).$

 $y_f \in 0, 1, \forall f \in F(v).$

 $z_{max}=$ denota la frecuencia más alta usada.

 $z_{min}=$ denota la frecuencia más baja usada.

 $z_{max}, z_{min} \in Z +$

La función objetivo, ahora es: Min $z = z_{max} - z_{min}$, sujeta a la siguiente serie de restricciones:

Restricciones del tipo $\sum_{f \in F(v)} x_{vf} = m(v)$ ya no se mostraran aquí, pues son iguales a las

descritas en el ejemplo de la sección anterior.

Al igual que en la sección anterior se manejan restricciones del tipo: $x_{vf} + x_{wg} \le 1$, $\forall \{v, w\} \in E$, $f \in F(v)$, $g \in F(w) : p_{vw}(f, g) > p_{max}$ por lo que tampoco las describiremos.

Restricciones del tipo $z_{max} \geq f_{vf}$: $z_{max} \ge 8y_8;$ $z_{max} \ge 10y_{10};$ $z_{max} \ge 12y_{12};$ $z_{max} \geq 4y_4$; $z_{max} \ge 14y_{14}; \quad z_{max} \ge 2y_2;$ $z_{max} \geq 6y_6;$ $z_{max} \geq 3y_3$; $z_{max} > 7y_7$; $z_{max} > 9y_9$; $z_{max} > 11y_{11}$. Restricciones del tipo $z_{min} \leq f_{yf} + f_{max} * (1 - y_f), f_{max} = 14$: $z_{min} \leq 0y_0 + (14 - 14)y_0$; $z_{min} \leq 4y4 + (14 - 14)y_4$; $z_{min} \le 8y8 + (14 - 14)y_8;$ $z_{min} \leq 10y_{10} + (14 - 14)y_{10}$; $z_{min} \le 14y_{14} + (14 - 14)y_{14};$ $z_{min} \le 12y_{12} + (14 - 14)y_{12};$

Las restricciones del tipo $x_{vf} \leq y_f$ que equivalen a $x_{vf} - y_f \leq 0$ no se describirán aquí ya que pueden verse en la sección anterior. Solución

 $z_{min} \le 6y_6 + (14 - 14)y_6;$

 $z_{min} \le 7y_7 + (14 - 14) * y_7;$

 $z_{min} \leq 11y_{11} + (14 - 14) * y_{11}$.

```
\begin{array}{l} x_{a12} = x_{a8} = x_{b10} = x_{b14} = x_{b4} = x_{c0} = x_{c2} = x_{c6} \\ = x_{d3} = x_{d7} = x_{e11} = x_{e3} = x_{e7} = x_{f11} = x_{f3} = 1; \\ x_{a0} = x_{a10} = x_{a4} = x_{b12} = x_{b8} = x_{c12} = x_{c8} = x_{d10} \\ = x_{d11} = x_{d9} = x_{e10} = x_{e9} = x_{f10} = x_{f7} = x_{f9} = 0; \\ y_0 = y_{10} = y_{11} = y_{12} = y_{14} = y_2 = y_3 = y_4 = y_6 = y_7 = y_8 = 1; \\ y_1 = y_{13} = y_5 = y_9 = 0; \quad z_{max} = 14 \qquad z_{min} = 0. \end{array}
```

Por lo que las frecuencias asignadas por región son:

$$f(a) = \{8, 12\};$$
 $f(b) = \{4, 10, 14\};$ $f(c) = \{0, 2, 6\};$ $f(d) = \{3, 7\};$ $f(e) = \{3, 7, 11\};$ $f(f) = \{3, 11\}.$

7.7. Mínima Interferencia, MI-FAP

A parte de los planteamientos en los cuales el nivel de máxima interferencia es minimizado, un enfoque es dado para la minimización de la suma total de niveles de interferencia. En el Problema de Asignación de Frecuencias con Mínima Interferencia, MI-FAP⁸, tenemos que asignar canales de un número muy limitado de frecuencias disponibles, de tal forma que la interferencia total sea minimizada.

 $z_{min} \le 2y_2 + (14 - 14)y_2;$

 $z_{min} \leq 3y_3 + (14 - 14)y_3$;

 $z_{min} \leq 9y_9 + (14 - 14)y_9$;

⁸Siglas del inglés, Minimum Interference FAP

Todos los modelos han simplificado los datos de la interferencia en las matrices de penalización, usando la prohibición entre ciertas parejas de frecuencias elegidas. Una forma de usar los datos de penalización completamente consiste en introducir una función objetivo que minimice la suma de las penalizaciones incurridas en las frecuencias seleccionadas.

Formalmente, el problema puede ser definido como sigue.

Problema: Dada $\mathcal{N}_w = (G, w, \{F(v)\}_{v \in V}, \mathbf{c}, \{p_{uv}\}_{uv \in E})$ una red con pesos y restricciones, como se definió antes, y dado un entero positivo K, determinar si existe una asignación de subconjuntos $f:V\to 2^F$ tal que:

$$\sum_{uv} \sum_{i \in f(u), j \in f(v) (u \neq v) \lor (i \neq j)} f(v) \subseteq F(v); \quad \mathbf{y}$$

$$p_{uv}(i, j) \delta(|i - j| < \mathbf{c}(uv)) \le K$$

Aquí, $\delta(A)$ es la función delta de Kronecker la cual es igual a uno en caso de que la condición lógica A sea verdad y cero en otro caso.

Una formulación en programación entera para el MI-FAP puede ser dada por la introducción de nuevas variables binarias z_{uvij} , $\forall uv \in E, i \in F(u), j \in F(v)$ con $|i-j| < \mathbf{c}(uv)$ y $u \neq v$ o $i \neq j$:

$$z_{uvij} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_{ui} = 1 \text{ y } x_{vj} = 1, \\ 0 & \text{de otra forma.} \end{cases}$$

Entonces el MI-FAP queda:

$$\min \sum_{uv \in E} \sum_{i \in f(u), j \in f(v) \ (|i-j| < \mathbf{c}(uv)) \land (u \neq v \lor i \neq j)} p_{uv}(i, j) \, z_{uvij} \tag{7.43}$$

sujeto a:

$$\sum_{i \in F(v)} x_{vi} = w(v) \qquad \forall v \in V \tag{7.44}$$

$$x_{ui} + x_{vj} \leq 1 + z_{uvij} \quad \forall uv \in E, \ i \in F(u), j \in F(v) :$$

$$(|i - j| < \mathbf{c}(uv)) \land ((i \neq j) \lor ((u \neq v))$$

$$x_{ui} \in \{0, 1\} \quad \forall u \in V, i \in F(u)$$

$$(7.45)$$

$$x_{ui} \in \{0,1\} \qquad \forall u \in V, i \in F(u) \tag{7.46}$$

$$z_{uvij} \in \{0,1\}$$
 $\forall uv \in E, i \in F(u), j \in F(v):$ $(|i-j| < \mathbf{c}(uv)) \land ((i \neq j) \lor ((u \neq v))$ (7.47)

Con las igualdades (7.44) se modela el cumplimiento de la demanda de canales en cada antena. Las restricciones (7.45) modelan el hecho de que los canales i y j pueden ser asignados a u y a v si y sólo si z_{uvij} es igual a uno, lo cual implica una penalización adicional en la función objetivo (7.43). Como se asume $p_{uv}(i,j) > 0$, entonces las variables z son iguales a 0 en el caso de que únicamente una de las varibles x en (7.45) se fije con 1. En caso de que $p_{uv}(i,j) < 0$, las restricciones

$$z_{uvij} \in \{0,1\}$$
 $\forall uv \in E, i \in F(u), j \in F(v):$ (7.48)

$$(|i - j| < \mathbf{c}(uv)) \land ((i \neq j) \lor ((u \neq v)) \tag{7.49}$$

tienen que ser agregadas a la formulación.

Otra forma de modelar las restricciones (7.45) es por medio de la inclusión de las variables $z_{uvij} \ \forall \ uv \in E, \ i \in F(u), \ j \in F(v)$ y las restricciones:

$$\sum_{j \in F(v)} z_{uvij} = w(v) x_{ui} \qquad \forall uv \in E, \ i \in F(u)$$
 (7.50)

En caso de que $x_{ui} = 0$, entonces las restricciones (7.50) forzan a que todas las variables z_{uvij} tomen el valor cero. En caso de $x_{ui} = 1$, las restricciones (7.50) garantizan que exactamente w(v) variables z_{uvij} se fijen con 1; las variables z_{uvij} con $x_{vj} = 1$.

En algunos ejemplos del proyecto CALMA, la función objetivo es definida como

$$\operatorname{Min} \sum_{\{uv\}\in E} \sum_{f\in F(v),g\in F(w)} p_{vwfg} \cdot x_{vf} \cdot x_{wg}$$

y es extendida a las penalizaciones de la elección de ciertas frecuencias f para v, denotadas por q_{vf} . Esto genera un término adicional en la función objetivo:

$$\operatorname{Min} \sum_{v \in V, f \in F(v)} q_{vf} \cdot x_{vf} \cdot x_{wg}.$$

Observemos que la función objetivo tiene términos cuadráticos $x_{vf} \cdot x_{wg}$ resultando en una formulacón cuadrática estándar. Para transformar esto en términos lineales se definen las variables $x_{vwfg} = x_{vf} \cdot x_{wg}$ obteniendo:

$$z_{vwfg} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_{vf} = 1 \text{ y } x_{wg} = 1, \\ 0 & \text{e.o.c..} \end{cases}$$

Para asegurar que z_{vwfg} obtenga el valor correcto se agregan las restricciones de la siguiente formulación:

$$x_{vf} + x_{wg} \le 1 + z_{vwfg} \quad \forall \{v, w\} \in E, f \in F(v), g \in F(w)$$
$$z_{vwfg} \le x_{vf} \cdot x_{wg} \quad \forall \{v, w\} \in E, f \in F(v), g \in F(w)$$

El problema con esta transformación lineal es una relajación débil. Para las variables x fraccionales, la correspondiente variable x puede ser pequeña. Afortunadamente, usando las restricciones de multiplicidad podemos reemplazar estas desigualdades con:

$$\sum_{g \in F(w)} z_{vwfg} = m(w) \cdot x_{vf} \quad \forall \{v, w\} \in E, f \in F(v)$$

Estas restricciones son válidas por la definición de z_{vwfg} y la multiplicidad de las restricciones:

$$\sum_{g \in F(w)} z_{vwfg} = \sum_{g \in F(w)} x_{vf} \cdot x_{wg} = \left(\sum_{g \in F(w)} x_{wg}\right) \cdot x_{vf} = m(w) \cdot x_{vf}$$

En otras palabras, esto implica la definición de las variables z, como $z_{vwfg} \le x_{wg} \cdot x_{vf}$. Si $x_{wg} = 0$ ó $x_{vf} = 0$, entonces la correspondiente variable z_{vwfg} también es igual a cero. Supongamos que $x_{vf} = 1$, para w existen m(v) frecuencias de tipo g con $x_{wg} = 1$. Por lo tanto, se tiene que z_{vwfg} es también 1.

Ejemplo

Tomemos el ejemplo planteado para la gráfica de la Figura 7.1.

Planteamiento

La Función objetivo queda:

Min $z = 0.8z_{ab} + z_{ac} + z_{ad} + z_{ae} + z_{bc} + z_{be} + z_{bf} + z_{cd} + z_{cf} + z_{de} + 0.8z_{df} + z_{ef}$ Sujeta a la siguiente serie de restricciones:

Restricciones del tipo : $\sum_{f \in F(v)} x_{vf} = 1$:

$$x_{a0} + x_{a4} + x_{a8} + x_{a10} + x_{a12} = 1;$$
 $x_{b4} + x_{b8} + x_{b10} + x_{b12} + x_{b14} = 1;$ $x_{c0} + x_{c2} + x_{c6} + x_{c8} + x_{c12} = 1;$ $x_{d3} + x_{d7} + x_{d9} + x_{d10} + x_{d11} = 1;$ $x_{e3} + x_{e7} + x_{e9} + x_{e10} + x_{e11} = 1;$ $x_{f3} + x_{f7} + x_{f9} + x_{f10} + x_{f11} = 1$

Restricciones del tipo $x_{vf} + x_{wg} \le 1 + z_{vwfg}$:

Vértices a y b:

 $x_{a4} + x_{b4} \le 1 + z_{ab}$; $x_{a8} + x_{b8} \le 1 + z_{ab}$; $x_{a10} + x_{b10} \le 1 + z_{ab}$; $x_{a12} + x_{b12} \le 1 + z_{ab}$. Vértices $a \ y \ c$:

$$x_{a8} + x_{c8} \le 1 + z_{ac};$$
 $x_{a0} + x_{c0} \le 1 + z_{ac};$ $x_{a12} + x_{c12} \le 1 + z_{ac}.$ Vértices $a \ y \ d$:

$$x_{a8} + x_{d10} \le 1 + z_{ad};$$
 $x_{a10} + x_{d10} \le 1 + z_{ad};$ $x_{a12} + x_{d10} \le 1 + z_{ad}.$ Vértices $a \ y \ c$: $x_{a10} + x_{e10} \le 1 + z_{ae}.$ Vértices $b \ y \ c$: $x_{b8} + x_{c8} \le 1 + z_{bc};$ $x_{b12} + x_{c12} \le 1 + z_{bc}.$

```
Vértices b v e
     x_{b8} + x_{e10} \le 1 + z_{be};
                                       x_{b10} + x_{e10} \le 1 + z_{be}; \quad x_{b12} + x_{e10} \le 1 + z_{be}.
 Vértices b \ y \ f: x_{b10} + x_{f10} \le 1 + z_{bf}.
Vértices c y f: x_{c8} + x_{f10} \le 1 + z_{cf}; x_{c12} + x_{f10} \le 1 + z_{cf}.
Vértices d y e:
     x_{d7} + x_{e9} \le 1 + z_{de};
                                       x_{d9} + x_{e7} \le 1 + z_{de};
                                                                         x_{d9} + x_{e10} < 1 + z_{de};
     x_{d9} + x_{e11} \le 1 + z_{de};
                                       x_{d10} + x_{e9} \le 1 + z_{de};
                                                                         x_{d10} + x_{e11} \le 1 + z_{de};
     x_{d11} + x_{e9} \le 1 + z_{de};
                                        x_{d11} + x_{e10} \le 1 + z_{de}.
Vértices d y f:
     x_{d7} + x_{f9} \le 1 + z_{df};
                                        x_{d9} + x_{f7} \le 1 + z_{df};
                                                                        x_{d9} + x_{f10} \le 1 + z_{df};
     x_{d9} + x_{f11} \le 1 + z_{df};
                                       x_{d10} + x_{f9} \le 1 + z_{df}; \quad x_{d10} + x_{f11} \le 1 + z_{df};
     x_{d11} + x_{f9} \le 1 + z_{df};
                                       x_{d11} + x_{f10} \le 1 + z_{df}.
Vértices e y f:
     x_{e7} + x_{f9} \le 1 + z_{ef};
                                       x_{e9} + x_{f7} \le 1 + z_{ef};
                                                                         x_{e9} + x_{f10} \le 1 + z_{ef};
     x_{e9} + x_{f11} \le 1 + z_{ef};
                                       x_{e10} + x_{f9} \le 1 + z_{ef};
                                                                        x_{e10} + x_{f11} \le 1 + z_{ef};
     x_{e11} + x_{f10} \le 1 + z_{ef}; \quad x_{e11} + x_{f9} \le 1 + z_{ef}.
Restricciones para los vértices v \in V, T_{vv} = \{0, 1\}:
    x_{d9} + x_{d10} \le 1;
                               x_{d10} + x_{d11} \le 1; x_{e9} + x_{e10} \le 1;
    x_{e10} + x_{e11} \le 1;
                             x_{f9} + x_{f10} \le 1; \quad x_{f10} + x_{f11} \le 1.
```

Solución

$$\begin{aligned} x_{a0} &= x_{b4} = x_{c2} = x_{d10} = x_{e10} = x_{f10} = 1 \\ x_{a4} &= x_{a8} = x_{a10} = x_{a12} = x_{b8} = x_{b10} = x_{b12} = x_{b14} \\ &= x_{c0} = x_{c6} = x_{c8} = x_{c12} = x_{d3} = x_{d7} = x_{d9} = x_{d11} \\ &= x_{e3} = x_{e7} = x_{e9} = x_{e11} = x_{f3} = x_{f7} = x_{f9} = x_{f11} = 0 \\ z_{ab} &= z_{ac} = z_{ad} = z_{ae} = z_{bc} = z_{be} = z_{bf} = z_{cd} = z_{cf} = z_{de} = z_{df} = z_{ef} = 0 \end{aligned}$$

Por lo que las frecuencias asignadas por región son:

$$f(a) = 0;$$
 $f(b) = 4;$ $f(c) = 2;$ $f(d) = 10;$ $f(e) = 10;$ $f(f) = 10.$

7.8. Variantes de la formulación

Formulaciones alternativas de la programación matemática han sido propuestas en la literatura. Normalmente, los heurísticos se inspiran en la formulación y son explorados para resolver este tipo de problemas.

Generación de la columna

Jaumard [31] desarrolló dos formulaciones de generación de columnas para el Max-FAP. En ésta se considera la restricción de la distancia co-celda, y las restricciones de de co-canal y de canal adyacente. Todos los vértices tienen el mismo dominio de frecuencia.

La primera formulación está basada en una formulación de la generación de la columna para colores, tal como lo muestran Mehorotra y Trick [39]. Las variables corresponden a conjuntos independientes en la gráfica de interferencia, es decir, los vértices pueden obtener la misma frecuencia simultáneamente. Para cada frecuencia f estos conjuntos independientes son denotados por T_f . Como éstos pueden diferir por la frecuencia, entonces el dominio de la frecuencia para los vértices puede diferir. Sea z_t una variable binaria denotando si t está o no está en T_f . Para modelar las restricciones y la función objetivo de Max-FAP con estas variables, se usa la relación. Para asegurar que la frecuencia f es elegida a lo más una vez se agrega. Esta formulación puede también ser usada para el MO-FAP y MS-FAP.

Para MO-FAP la restricción sería
$$\sum_{t \in T_f} z_i = y_f.$$

Jaumard [31] resuelve el Programa Lineal relajado de esta formulación con las técnicas de la generación de la columna, los precios de los problemas son el conjunto de pesos independientes los cuales describen estrategias de ramificación tan buenas como la generación de cortes.

La segunda formulación está basada en conjunto de frecuencias permisibles para celdas separadas. Las variables corresponden a conjuntos de frecuencias que pueden ser asignadas a ciertas celdas. Para cada celda v, subconjuntos de F denotados por T_v que satisfacen las restricciones co-celdas y las cotas inferiores y superiores en la multiplicidad son dadas. Otra variable binaria z_t especifica si T_v es elegido o no. Los autores muestran la Programación Lineal relajada de la formulación basada en estas variables, como la mejor, igual al valor de la LP-relajación de la formulación basada en estas variables es, la mejor, igual al valor de la LP-relajación de la formulación del programa previo. Por otro lado, los precios de los problemas son resueltos en una aproximación de la generación de la columna que está restringido por problemas de rutas más cortas.

Orientación de la formulación

Borndöfer et al. [5] considera MI-FAPs con co-canal e interferencia de frecuencias adyacentes. Aquí se modela la interferencia con penalizaciones de combinaciones de frecuencias. Más aún, prohíbe la combinación de frecuencias con penalizaciones por arriba de un cierto umbral. A lo largo de las asignaciones factibles buscan una penalización mínima. Para cada vértice en la gráfica de interferencias donde introducen una variable y_v que corresponde al número de frecuencia asignada a v. Para cada par (v, w) se denota la penalización de co-canal por p_{vw} y la penalización de canal adyacente por q_{vw} . Ahora, tres variables binarias más son declaradas:

$$z_{uv} = \begin{cases} 1 & \text{si } |y_v - y_w| = 1; \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$\check{z}_{uv} = \begin{cases} 1 & \text{si } |y_v - y_w| = 1; \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$\Delta_{vw} = \begin{cases} 1 & \text{si } y_v \ge y_w; \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Las variables Δ_{vw} determinan un orden parcial de las frecuencias asignadas a los vértices. Con estas variables uno puede modelar todas las restricciones y la función objetivo en términos lineales. El modelo así definido contiene muy pocas variables en comparación a las formulaciones dadas anteriormente. El precio para estos es una formulación débil. Si los Δ_{vw} son dados, los autores muestran que el problema es resuelto en tiempo polinomial, hasta que la matriz de restricciones es totalmente unimodular. Este resultado es usado en dos etapas heurísticas, donde las variables Δ_{vw} se ajustan iterativamente y entonces se determina una solución con los nuevos valores.

Capítulo 8

El Problema de la Ciudad de Filadelfia

En este capítulo presentamos el famoso Problema de la Ciudad de Filadelfia.

El rápido avance de la tecnología inalámbrica y la escasez del espectro radioeléctrico ha estimulado a la investigación en el uso eficiente del espectro radioeléctrico desde los años 70's. Una parte considerable de esta investigación, y en una gran mayoría, la tecnología operacional de los transmisores se basan hoy en la División de Frecuencias de Acceso Múltiple, FDMA¹, donde el ancho de banda disponible se divide en frecuencias. Estas frecuencias podrían ser asignados al transmisor mientras se minimiza el ancho de banda y se mantiene la interferencia con niveles aceptables.

El problema Filadelfia es un problema de asignación de frecuencias basado en una hipotética, pero real red de telefonía celular que cubre la región alrededor de esta ciudad. El problema ha sido usado varias veces como prueba de métodos heurísticos para encontrar una buena asignación de frecuencias, y evaluar teóricamente las cotas inferiores obtenidas para eficientizar al espectro radioeléctrico. En esta sección se resuelve el problema Filadelfia presentando una nueva cota inferior para un número consecutivo de frecuencias que cualquier asignación de frecuencias válida debería usar y así exhibir una asignación que se asemeje a esta cota. La solución hará que el problema Filadelfia se valore como patrón para la investigación en la asignación de frecuencias.

El método usado para establecer la cota inferior es parte de una teoría más general desarrollada por Janssen y Kilakos [26].

¹Siglas en Inglés de Frecuency Division Multiple Access

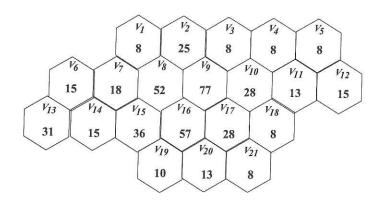


Figura 8.1: Malla de la Ciudad de Filadelfia

8.1. El Problema

La red celular del problema Filadelfia se basa en una malla regular hexagonal que se muestra en la Figura 8.1. Cada hexágono representa la región o celda que es servida por un transmisor. El conjunto de celdas será denotado como : $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_{21}\}$, donde la numeración también es indicada en la Figura. El vector demanda $\mathbf{w} \in Z^V$ es un vector de enteros no negativos que indica la demanda de frecuencias en cada celda: el componente wm_i de \mathbf{w} indica la demanda en la celda v_i . Para el problema Filadelfia:

$$\mathbf{w} = (8, 25, 8, 8, 8, 15, 18, 52, 77, 28, 13, 15, 31, 15, 36, 57, 28, 8, 10, 13, 8)$$

En este problema, las restricciones de interferencia entre cualquier par de celdas pueden ser representadas por un entero, el cual determina el mínimo espacio que tiene que existir entre las frecuencias asignados a dos celdas de tal manera que se evite la interferencia. El entero c_{ij} representará a la restricción de interferencia entre las celdas v_i y v_j .

Las restricciones c_{ij} para el problema Filadelfia pueden ser obtenidas como a continuación se describe. Sea $d(v_i, v_j)$ la distancia entre los centros de las celdas v_i y v_j , donde la unidad es la distancia entre los centros de las celdas adyacentes. Entonces se define

$$c_{ij} = \begin{cases} 5 & \text{si } i = j; \text{ restricción co-sitio} \\ 2 & \text{si } 0 < d(v_i, v_j) < 1; \\ 1 & \text{si } 1 < d(v_i, v_j) < 2\sqrt{3}. \end{cases}$$

Hay que notar que existen parejas de celdas que no tienen restricciones entre ellas, la correspondiente c_{ij} no está definida. Una agrupación de celdas tal que entre cualquier par de éstas existe una restricción es llamada agrupación completa.

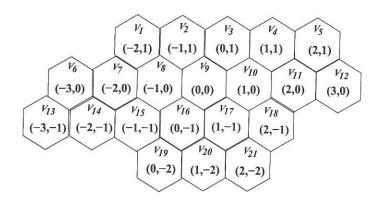


Figura 8.2: Malla de la Ciudad de Filadelfia

Una asignación válida es una asignación de conjuntos de frecuencias, representada por enteros no negativos, a los vértices de G tal que se satisfacen las condiciones descritas más adelante. Esta asignación puede ser representada por $f:V\to P(Z)$ del conjunto de vértices V a P(Z), el conjunto de todos los conjuntos enteros no negativos. Las condiciones son las siguientes:

$$|f(v_i)| = w_i, v_i \in V$$

$$k \in f(v_i) \text{ y } l \in f(v_j) \Rightarrow |k - l| \ge c_{ij}, c_{ij} \text{ dada, } i \ne j;$$

$$k, l \in f(v_i) \text{ y } k \ne l \Rightarrow |k - l| \ge c_{ij}, v_i \in V.$$

Recordemos que la amplitud es el número de frecuencias usadas las cuales determinan el ancho de banda de la asignación de frecuencias, y en esta sección se establecerá la amplitud del problema de Filadelfia.

8.2. Una Solución

Ahora construimos una solución al Problema de Filadelfia, aplicando el ALGORIT-MO A' presentado en la Sección 5.2. Recordemos que este algoritmo mostró un muy buen desempeño en gráficas hexagonales.

La Figura 8.1 muestra el mapa de la Ciudad de Filadelfia, donde se incluyen las demandas de cada vértice o región. Tenemos que las restricciones de distancia entre la regiones se definen como $c_o = 5, c_1 = 2, c_2 = 1$ y la amplitud cíclica es 9. Determinaremos una etiquetación base con la Progresión Aritmética utilizando la fórmula: $f(i,j) = 2i + 5j \mod 9$. La Figura 8.2 muestra la coordenadas de los vértices en el mapa, Elegimos al vértice v_9 como el origen ya que es el de mayor demanda.

La Figura 8.3 presenta la gráfica asociada al mapa de la Ciudad de Filadelfia, así como la etiquetación base óptima, obtenida con la progresión aritmética.

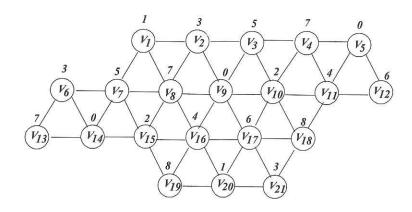


Figura 8.3: Gráfica asociada a la Malla

Tenemos que la amplitud cíclica es 9 y que $c_o=5$, entonces $s=\max\{9,5\}=9$. El Cuadro 8.2 muestra los resultados de aplicar el Algoritmo A'. La amplitud de esta coloración es 684. Veremos que la solución óptima es 426.

v	Asignación	v	Asignación
1	1, 10, 19,, 9(7)+1=64	12	6, 15, 24,, 9(14)+6=132
2	3, 12, 21,, 9(24)+3=219	13	7, 16, 25,, 9(30)+3=273
3	5, 14, 23,, 9(7) + 5 = 68	14	0, 9, 18,, 9(14)+0=126
4	7, 16, 25,, 9(7)+7=70	15	2, 11, 20,, 9(35)+2=317
5	0, 9, 18,, 9(7)+1=64	16	4, 13, 22,, 9(56)+4=508
6	3, 12, 21,, 9(14)+3=129	17	6, 15, 24,, 9(28) + 6 = 258
7	5, 14, 23,, 9(17)+5=158	18	8, 17, 26,, 9(7)+8=71
8	7, 16, 25,, 9(51) + 7 = 466	19	8, 17, 26,, 9(9)+8=89
9	0, 9, 18,, 9(76)+0=684	20	1, 10, 19,, 9(12)+1=109
10	2, 11, 20,, 9(27)+2=245	21	3, 12, 21,, 9(7)+3=66
11	4, 13, 22,, 9(12)+4=112		

Cuadro 8.1: Asignación obtenida con A'

8.3. La Solución

La cota inferior de la amplitud se basa en una configuración local de siete celdas de la gráfica mostrada en la Figura 8.1, la cual constituye un bloque² completo y es derivada del mínimo costo de un tour cerrado. Tal bloque está constituido por el vértice v_9 y sus vecinos a distancia 1, que son: v_{16} , v_8 , v_2 , v_3 , v_{10} , v_{17} . El vértice v_9 , es el de mayor peso en la malla y a éste se colorea con 0, para iniciar la coloración básica.

Un tour en un bloque completo con un vector de demanda \mathbf{w} el cual es una sucesión de celdas tal que cada celda v_i es visitada w_i veces. Un tour es cerrado si éste se inicia y termina en la misma celda. El costo de un tour es la suma de las restricciones sobre las aristas entre dos vértices consecutivos.

Cualquier asignación válida de un bloque completo corresponde a un tour en tal bloque, la sucesión de celdas está dada por el orden creciente de las frecuencias asignadas. La amplitud de una asignación es al menos tan grande como el costo del tour correspondiente, la banda entre las frecuencias de dos celdas sucesivas debería ser al menos tan grande como la restricción entre éstas. El costo mínimo de cualquier tour da, por lo tanto, una cota inferior para la amplitud. La siguiente proposición muestra como el costo mínimo de un tour cerrado puede también ser usado como cota de la amplitud.

Lema 22 Sea G un bloque completo y V el conjunto de celdas y \mathbf{w} el vector demanda de G. Sea $\gamma(w)$ el costo mínimo de un tour cerrado de G con un vector demanda \mathbf{w} . Entonces la amplitud del bloque es al menos el mínimo de L_1 y L_2 , donde:

$$L_1 = \gamma(w) - \max\{ c_{ij} \mid i \neq j; v_i, v_j \in V \}$$

$$L_2 = \min\{\gamma(w)^{(i)} \mid \forall i \text{ tal que } v_i \in V; w_i > 1; w_i^{(i)} = w_i - 1, w_j^{(i)} = w_j, j \leq i \}$$

Demostración: Tómese cualquier asignación óptima, es decir, una asignación de amplitud mínima de G con vector de demanda \mathbf{w} , y sea T el tour correspondiente a esta asignación. La amplitud de esta asignación, y por lo tanto la amplitud del bloque, es acotado inferiormente por el costo de T.

Si las frecuencias con los más bajos y altos niveles son asignadas a diferentes celdas $(v_i y v_j)$, entonces el costo de T es igual al costo del tour cerrado obtenido en T que conecta a $v_i y v_j$ menos el costo de esta nueva conexión, llamada, c_{ij} . Por lo que en este caso, el costo de T es acotado inferiormente por L_1 .

Si las más altas y más bajas frecuencias son asignadas a la misma celda, digamos v_i , entonces T es en realidad un tour cerrado, pero un tour cerrado en el cual se pasa solamente $w_i - 1$ veces a través de v_i . El costo de T es por lo tanto igual al costo mínimo de un tour cerrado a través de G con un vector demanda w', el cual es acotado inferiormente por L_2 .

²usaremos bloque como traducción literal de *cluster*

La siguiente proposición muestra como encontrar una cota inferior para el costo mínimo de un tour cerrado.

Proposición 23 Sea $x \in Q^V$ un vector de números racionales no negativos indexados por las celdas de un bloque completo que satisface las condiciones:

$$x_i + x_j \le c_{ij} \quad \forall v_i, v_j \in V$$

Entonces cualquier tour cerrado tiene costo de al menos $w \cdot x$

Demostración: Sea x un vector que satisface las condiciones de la proposición. Se toma cualquier tour cerrado y sea E la colección de pares de celdas consecutivas que forman el tour. De acuerdo con la definición, el costo del tour cerrado es la suma de las restricciones entre los pares de celdas de E. Pero como el tour cerrado visita cada celda w_i veces, por lo tanto cada celda está contenida en $2w_i$ parejas de E, se tiene que:

$$\sum_{(v_i, v_j) \in E} c_{ij} \ge \sum_{(v_i, v_j) \in E} (x_i + x_j) = \sum_{v_i \in V} 2w_i \cdot x_i = 2w \cdot x$$

Lo que completa la prueba.

La desigualdad del sistema $x_i + x_j \leq c_{ij}$ para toda $v_i, v_j \in V$ y $x_i \geq 0$. Para toda $v_i \in V$ describe un poliedro en Q^V . Por lo tanto, cualquier vector que satisface estas desigualdades puede ser escrito en términos de los puntos extremos del poliedro. Además, el valor máximo de $w \cdot x$, y por lo tanto la mejor cota inferior será siempre obtenido por un vector x que representa un punto extremo.

En el documento de Jannssen y Kilakos [26], una descripción completa de los puntos extremos del poliedro, definido por las desigualdades de la proposición anterior, es dada por un número de diferentes tipos de restricciones en los vectores c, incluso la restricción del vector del problema Filadelfia. Se asume que c_{ij} toma a lo más tres valores. Por lo tanto, la familia de puntos extremos obtenida para este caso generaliza la mayoría de las restricciones difíciles. Se sospecha que para la mayoría de los vectores en las restricciones difíciles o de muchos valores, será difícil obtener una descripción completa, por lo que muchas cotas inferiores importantes pueden no obtenerse.

Regresando al problema de Filadelfia. Sea $V'=\{v_2,v_3,v_8,v_9,v_{10},v_{16},v_{17}\}$ el conjunto de celdas que completan un bloque que será usado para determinar la cota inferior. El bloque consiste de solamente siete celdas, es fácil obtener una descripción completa de los puntos extremos del poliedro definido por la igualdad de la última proposición. Sea $x^{(j)}, j=1,\cdots,8$ los vectores en V' definidos por:

$$x_i^{(1)} = \begin{cases} 3/2 & \text{si } i = 9; \\ 1/2 & \text{e.o.c} \end{cases}$$
$$x_i^{(2)} = \begin{cases} 2 & \text{si } i = 9; \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

y para j = 3, ..., 8

$$x_i^{(j)} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \in V_j; \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

donde $V_3 = \{v_9, v_2, v_3\}, V_4 = \{v_9, v_3, v_{10}\}, V_5 = \{v_9, v_{10}, v_{17}\}, V_6 = \{v_9, v_{17}, v_{16}\}, V_7 = \{v_9, v_{16}, v_8\}, y V_8 = \{v_9, v_8, v_2\}.$

Los puntos extremos del poliedro descrito por las desigualdades de la Proposición corresponden exactamente a los vectores $x^{(j)}$ ya que algunos coeficientes son cero.

Sea w'=(25,8,52,77,28,57,28) el vector demanda del problema Filadelfia restringido a V'. Usando la descripción dada de los puntos extremos, es fácil ver que el máximo de $w \cdot x$, donde x es un vector que satisface las desigualdades de la Proposición y son obtenidos por $x^{(1)}$. Por lo que la mejor cota inferior para el problema Filadelfia puede ser obtenida por este método. Por lo tanto, el costo del tour cerrado del bloque completo definido por V' es al menos $w' \cdot x^{(1)} = 429$. Cuando se aplica el Lema, se ve que $L_1 = 429 - 2 = 427$ y $L_2 = \gamma(w^9) = 426$. Por lo tanto, la amplitud del bloque cerrado, y por lo tanto la amplitud del problema Filadelfia, es al menos 426.

La última mejor cota fue 414, publicada por Gamst[20], en 1986, pero tenía un error aritmético. La cota de 426 es, en realidad, la mejor posible: El Cuadro 8.2 describe una asignación válida con amplitud 426, presentada por Jannssen y Kilakos [26], en 1999. Hurley y Smith obtuvieron una asignación con la misma amplitud haciendo uso de cálculos heurísticos. Estas asignaciones mejoran por uno a las anteriores asignaciones obtenidas por Leese.

$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$			
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	v_i	w_i	Colores
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		8	
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		25	118 + 5k, k = 0,,19; 339 + 7k, k = 0,4.
$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		8	374 + 7k, k = 0,,7.
$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		8	341 + 7k, k = 0,,7.
$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		8	
$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	1. 1.0007	15	
9 77 5k, k = 0,,43; 215 + 6k, k = 0,,20; 335 + 7k, k = 0,,13. 10 28 3 + 5k, k = 0,,3; 98 + 5k, k = 0,,3; 218 + 6k, k = 0,,19. 11 13 336 + 7k, k = 0,,12. 12 15 219 + 6k, k = 0,,14. 13 31 5k, k = 0,,30. 14 15 184 + 5k, k = 0,,6; 357 + 7k, k = 0,,7. 15 36 4 + 5k, k = 0,,35. 16 57 97 + 5k, k = 0,,23; 219 + 6k, k = 0,,19; 340 + 7k, k = 0,,12. 17 28 23 + 5k, k = 0,,14; 338 + 7k, k = 0,,12. 18 8 220 + 6k, k = 0,,7. 19 10 294 + 6k, k = 0,,6; 336 + 7k, k = 0,,2. 20 13 216 + 6k, k = 0,,12.			
$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$			2 + 5k, $k = 0,,18$; $217 + 6k$, $k = 0,,19$; $337 + 7k$, $k = 0,,12$.
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	9	77	5k, k = 0,,43; 215 + 6k, k = 0,,20; 335 + 7k, k = 0,13.
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	10	28	3 + 5k, $k = 0,,3$; $98 + 5k$, $k = 0,,3$; $218 + 6k$, $k = 0,,19$.
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$			336 + 7k, k = 0,,12.
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		15	219 + 6k, k = 0,,14.
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	13	31	5k, k = 0,,30.
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		15	
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$			**
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	16	57	97 + 5k, $k = 0,,23$; $219 + 6k$, $k = 0,,19$; $340 + 7k$, $k = 0,,12$.
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	17	28	23 + 5k, k = 0,,14; 338 + 7k, k = 0,,12.
$20 \mid 13 \mid 216 + 6k, k = 0,,12.$	18	8	
$20 \mid 13 \mid 216 + 6k, k = 0,,12.$	19	10	294 + 6k, k = 0,,6; 336 + 7k, k = 0,,2.
$21 \mid 8 \mid 268 + 6k, k = 0,7$	20	13	
	21	8	268 + 6k, k = 0,,7.

Cuadro 8.2: Asignación de frecuencias óptima para el Problema de Filadelfia.

Apéndices

Apéndice A

Telecomunicaciones

En este apéndice se introducen los aspectos fundamentales sobre la radio comunicación y la Comunicación Inalámbrica. Se parte de un reducido trasfondo técnico y una descripción breve de la historia reciente hasta las distintas facetas de las aplicaciones vigentes de la comunicación inalámbrica.

Radio Comunicación, Espectro de Radio y su Manejo

En esta sección se introduce la terminología básica de la radiocomunicación. La radio ha sido una vía de transporte de información a través del aire por medios electromagnéticos. Es un hecho físico, que si se suministra suficiente poder a una onda electromagnética de frecuencia alta (una corriente eléctrica), ésta no solamente tiene la habilidad de propagarse por medio de un buen material conductor como los metales, sino también es capaz de transmitirse a través de malos conductores.

Con frecuencias por encima de los 30 KHz, la radiación electromagnética tiene la capacidad de propagarse directamente a través del aire. Este tipo de transmisión es llamada radio. La codificación de la señal de radio para el transporte de señales útiles de comunicación como el teléfono móvil, es conocida como la radiocomunicación; y el rango total de frecuencias, que hace posible la radiocomunicación se denomina espectro de radio.

Para la mediación del uso del espectro de radio, la Unión Internacional de Telecomunicación-sector Radiocomunicaciones ITU¹, divide al espectro en varias partes llamadas bandas. Normalmente, una banda es subdividida en un número de canales,

¹Siglas del inglés, International Telecommunication Union

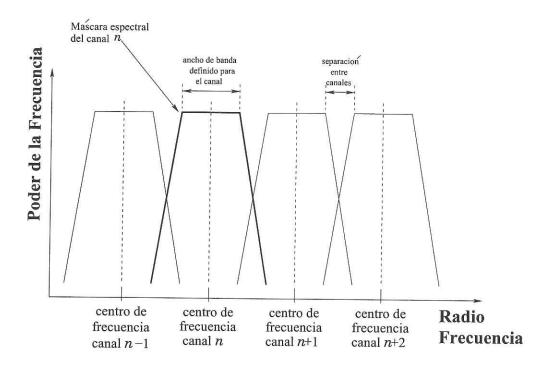


Figura A.1: La máscara espectral

cada uno definido en términos de su ancho de banda² y centro de frecuencia³. La estructura de los canales en la banda de radio es definida por la banda $raster^4$, la cual determina el ancho de banda destinado para cada canal y el espacio libre (ancho de banda sin uso) entre los canales adyacentes. Cada canal en el raster es separado en intervalos iguales y comúnmente tienen el mismo ancho de banda.

Como vemos en la máscara espectral del canal n de la Figura A.1, remarcada con línea más gruesa, el centro de frecuencia se localiza en la mitad de la parte plana. Para frecuencias más allá de los límites del ancho de banda del canal (la parte inclinada de la máscara), el transmisor no tiene permitido la emisión de señales fuertes. La delimitación de la interferencia entre los canales adyacentes (n-1) y (n+1), es dada por una pequeña porción sin uso del espectro.

²El ancho de banda de un canal es la cantidad del espectro de radio disponible para la comunicación (mayor ancho de banda se traduce en mejor fidelidad de las señales de audio.

³Para un canal individual dado, es la frecuencia apropiada en el centro de la porción del espectro o ancho de banda del canal asignado.

⁴Es un patrón predeterminado que provee substancialmente cobertura uniforme a una área.

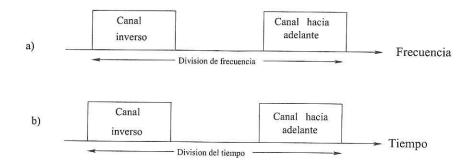


Figura A.2: Técnicas a) FDD y b) TDD

Modulación y Acceso Múltiple para la Comunicación Inalámbrica

La modulación es el proceso de codificar la información de un mensaje fuente de una manera adecuada para su transmisión. La forma más sencilla de modulación es la codificación, interrumpiendo la onda portadora a intervalos concretos mediante una clave o conmutador para formar los puntos y las rayas de la radiotelegrafía de onda continua.

La onda portadora también se puede modular variando la amplitud de la onda según las variaciones de la frecuencia e intensidad de una señal sonora, tal como una nota musical. Esta forma de modulación, amplitud modulada (AM), se utiliza en muchos servicios de radiotelefonía, incluidas las emisiones normales de las estaciones de radio.

La frecuencia modulada (FM) es la técnica de modulación analógica más popular usada en los sistemas de comunicación móvil⁵. En FM, la frecuencia de la onda portadora se varía dentro de un rango establecido a un ritmo equivalente a la frecuencia de una señal sonora. Esta forma de modulación, desarrollada en la década de 1930, presenta la ventaja de generar señales relativamente limpias de ruidos e interferencias. Por tanto, la radiodifusión FM se efectúa en bandas de frecuancia alta (88 a 108 MHz), aptas para señales grandes pero con alcance de recepción limitado.

Las ondas portadoras también se pueden modular variando la fase de la portadora según la amplitud de la señal. La modulación en fase, sin embargo, ha quedado reducida a equipos especializados. La demodulación o detección es el proceso de extraer el mensaje de la portadora de tal forma que éste pueda ser procesado e interpretado por el receptor dedicado.

⁵El término móvil ha sido aplicado historicamente para clasificar cualquier terminal de radio que pueda estar en movimiento durante su operación. Recientemente ha sido aceptado para describir una terminal de radio destinada a una plataforma de alta velocidad; por ejemplo, un teléfono celular en un vehículo moviéndose vertiginosamente.

Los esquemas de acceso múltiple permiten que un gran número de usuarios móviles compartan simultáneamente una cantidad finita (ancho de banda) del espectro de radio. En los sistemas de comunicación inalámbrica, es deseable que los usuarios envíen y reciban información, de la estación base al mismo tiempo. Por ejemplo, en los sistemas de telefonía convencional es posible hablar y escuchar a la vez; y este efecto, llamado duplicación, es también requerido en los sistemas de telefonía inalámbrica.

La duplicación por división de la frecuencia, FDD⁶ provee dos bandas distintas de frecuencias a cada usuario. La banda hacia adelante (forward band) proporciona el tráfico de la estación base al móvil, y la banda inversa (inverse band) del móvil a la base.

La duplicación por división del tiempo, TDD⁷ utiliza el tiempo en lugar de la frecuencia para proveer ligas hacia adelante y hacia atrás. La Figura A.2 ilustra las técnicas FDD y TDD, (a) FDD provee dos canales simplex sobre la misma frecuencia y (b) TDD provee dos intervalos de tiempo simplex al mismo tiempo.

Las principales técnicas de acceso usadas para compartir el ancho de banda en un sistema de comunicación inalámbrica son:

- i) El acceso múltiple por división de la frecuencia, FDMA⁸ asigna canales individuales a cada usuario. Para entender mejor el acceso FDMA, consideremos las radiodifusoras: cada estación emite su señal a una frecuencia diferente en una banda disponible. FDMA es usado principalmente para transmisión analógica. Aunque es capaz de portar información digital, no se considera un método eficiente para ésta. La Figura A.3 (a) ilustra la técnica FDMA donde los distintos canales son asignados a bandas de frecuencias diferentes.
- ii) Los sistemas de acceso múltiple por división del tiempo, TDMA⁹ dividen el espectro de radio en intervalos de tiempo, y en cada intervalo solamente a un usuario se le permite transmitir o recibir. La Figura A.3 (b) expone el esquema TDMA donde cada canal ocupa un intervalo de tiempo repetido cíclicamente.
- iii) El acceso múltiple por división del código CDMA¹⁰ da un único código a cada llamada y la propaga sobre las frecuencias disponibles. El acceso CDMA es una forma de propagación del espectro, que significa que el dato es enviado en pequeñas piezas sobre un número de frecuencias disponibles, para usar en algún tiempo en el rango especificado; y todos los usuarios transmiten sobre la misma porción de banda del espectro. La Figura A.3 (c) muestra el acceso CDMA en el cual cada canal es asignado a un único código que es ortogonal a los códigos usados por otros usuarios.

⁶Siglas del inglés, Frequency Division Duplexing.

⁷Siglas del inglés, Time Division Duplexing.

⁸Siglas del inglés, Frequency Division Multiple Access.

⁹Siglas del inglés, *Time Division Multiple Access*.

¹⁰Siglas del inglés, Code Division Multiple Access.

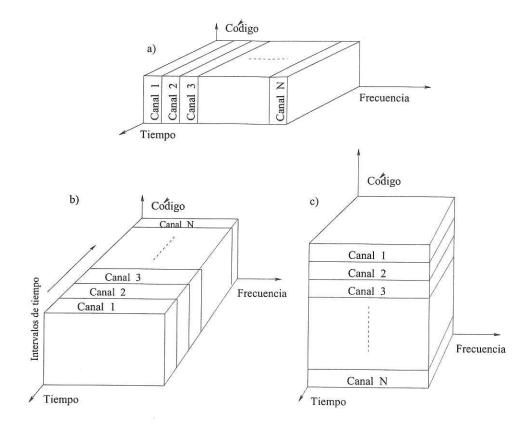


Figura A.3: Esquemas de acceso múltiple: a) FDMA, b)TDMA y c)CDMA

El Espectro de Radio Aplicable en la Comunicación Inalámbrica

Actualmente, las ondas de radio son aprovechadas principalmente en: telégrafo inalámbrico, radiodifusión, televisión, redes de telefonía celular, radar, sistemas de navegación (control de tráfico aéreo y marítimo) y comunicación tanto militar como espacial. Las frecuencias que son aplicables son limitadas; no obstante, el rango varía aproximadamente de 3KHz a 300GHz correspondiendo a longitudes de onda entre 100Km y 1mm, respectivamente.

La interferencia entre las señales de radio hace ineludible la estricta administración del uso de frecuencias a todos los niveles (global, nacional y regional). A nivel global, la Unión Internacional de Telecomunicación regula el uso de frecuencias, donde las agencias nacionales hacen lo propio en un país. El Cuadro A.1, presentado al final de este apéndice, da un bosquejo de las frecuencias utilizadas actualmente para las aplicaciones citadas.

Por ejemplo, las aplicaciones más conocidas (como radiodifusión, televisión y telefonía celular) ocupan frecuencias muy alta y superelevada del espectro VHF, Very High Frequency, y UHF, Ultra High Frequency, respectivamente.

La comunicación inalámbrica entre dos puntos es establecida con el uso de un transmisor y un receptor. El transmisor emite oscilaciones electromagnéticas, las cuales pueden ser moduladas vía amplitud o frecuencia (AM, FM). El receptor detecta tales oscilaciones y las transforma en sonidos o imágenes.

Cuando dos transmisores emiten frecuencias cercanas entre sí, éstas pueden interferirse. El nivel de interferencia depende de varios factores, tales como la distancia, la posición geográfica y el poder de las señales de los transmisores, además de las condiciones climáticas y dirección de transmisión. En el caso de un nivel de interferencia alto, la calidad de la señal podría ser tan insignificante que una recepción apropiada sería imposible. En otras palabras, la señal recibida podría caer dentro del radio de interferencia¹¹, lo cual causaría una pérdida inaceptable de calidad.

El espectro de radio utilizable comercialmente es muy escaso. Por consiguiente, las frecuencias son reusadas por varios transmisores en la misma red. El desempeño eficiente de una red sólo puede ser alcanzado por medio de una rigurosa planificación de la asignación de canales a los transmisores. Las condiciones a ser satisfechas por un plan de canales, varía en función de la aplicación.

Historia de la Comunicación Inalámbrica

Aun cuando fueron necesarios muchos descubrimientos en el campo de la electricidad hasta llegar a la radio, su nacimiento data en realidad de 1873, año en el que el físico inglés James Clerk Maxwell publicó su teoría sobre las ondas electromagnéticas. La teoría de Maxwell se refería sobre todo a las ondas de luz; quince años más tarde, el físico alemán Heinrich Hertz logró generar electricamente tales ondas.

A principios de 1890, el inventor italiano Guglielmo Marconi comenzó a experimentar con la comunicación inalámbrica vía ondas de radio. En 1896 consiguió transmitir señales desde una distancia de 1.6 Km, y registró su primera patente inglesa. Tres años más tarde, logró establecer una comunicación comercial entre Inglaterra y Francia capaz de funcionar con independencia del tiempo; y en 1902 ya se enviaban de forma regular mensajes transatlánticos. En 1915 el desarrollo de la telefonía inalámbrica había alcanzado un grado de madurez suficiente, para establecer la comunicación entre Virginia y Hawai y entre Virginia y París. En 1909 Marconi recibió, junto con el físico Karl Ferdinand Braun, el Premio Nobel de Física por este trabajo pionero.

 $^{^{11}}$ La intensidad de una señal en comparación a la suma de las intensidades de las señales interfiriendo, también llamado ruido, es expresado por un radio de interferencia.

La estación de televisión experimental inició en los años 1930 y fue incorporada satisfactoriamente en la población a finales de 1940. En los últimos 50 años, el espectro de radio ha sido explotado por la comunicación inalámbrica en formas diferentes. Por ejemplo, las misiones en el espacio no serían viables sin la comunicación vía ondas de radio. Esto no es solamente utilizado para la comunicación por voz con los astronautas, sino también para la navegación de las astronaves.

Aplicaciones de la Comunicación Inalámbrica

Las comunicaciones inalámbricas están en su periodo de mayor crecimiento de la historia, debido a la capacidad de la tecnología. Además, en el sector consumidor han aumentado su difusión. La Figura A.4 ilustra cómo la telefonía móvil ha ido incursionando en la vida diaria, comparada con otras invenciones populares del siglo XX. La Figura A.4 es insuficiente con respecto a la curva etiquetada por "telefonía móvil", porque no incluye entre otras aplicaciones no telefónicas a los buscadores, la radio amateur, la banda civil, los teléfonos sin hilos¹² y los sistemas terrestres de microondas de radio. En las siguientes secciones damos una breve descripción de las aplicaciones más populares.

Radiodifusión y Televisión.- Hasta la introducción a gran escala de la televisión por cable y vía satélite, a principios de los años 1980, la forma idónea de transmitir las señales de la radio y de la televisión fue a través del aire. La competencia de una área de cobertura para la radioemisora o estación de televisión, hace imprescindible la distribución de las antenas alrededor de la región.

En el caso de la radiodifusión, cada una de sus antenas transmite en forma radial una señal AM ó FM. El rango empleado por las señales AM varía de 540KHz a 1600KHz (espectro de frecuencias medias), mientras que las señales FM son transmitidas en el rango 87MHz—108MHz (frecuencias VHF). Otras partes del espectro, VHF y UHF, son aprovechadas para transmitir televisión. Al igual que la radio, la señal de televisión es transmitida radialmente.

Redes de Telefonía Celular Terrestres.- En la última década, el desarrollo de las redes de telefonía celular (digital) no solamente atrajo la atención de la comunidad científica, sino también la de la sociedad completa. Es importante darse cuenta del enorme impacto que el teléfono celular y los servicios de comunicación personal, tendrán entre nosotros en las próximas décadas.

¹²Los sistemas de telefonía sin hilos son sistemas de comunicación de duplicación completa que usan el radio para conectar un artefacto portátil con una estación base dedicada, la cual es entonces conectada a una línea telefónica dedicada sobre la red fija telefónica.

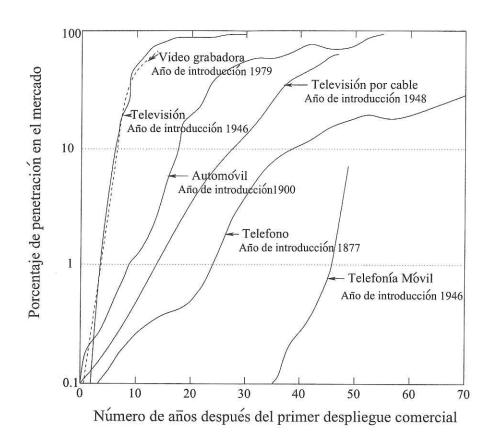


Figura A.4: Crecimiento de la telefonía móvil versus otras invenciones populares del siglo XX

Evolución Histórica

Las redes de telefonía móvil existen desde hace más de 50 años. A principios de 1946, la Comisión Federal de Comunicaciones permite que AT& T instale el primer sistema de telefonía móvil, MTS¹³ en la ciudad de St. Louis Misuri, EEUU. El sistema MTS estaba basado en una única torre de transmisión de alta potencia que cubría una área con radio de 80Km. En 1964, se introduce experimentalmente el sistema IMTS¹⁴ en Pensilvania, EEUU. En este sistema, 11 canales estaban disponibles para todos los usuarios en una área geográfica, atendidos por una sola torre de transmisión.

Más adelante, en los años 1970, AT& T y Motorola Inc. desarrollaron el Sistema de Telefonía Móvil Avanzado AMPS¹⁵; no obstante, el sistema no fue puesto públicamente para su uso en esa década.

¹³Siglas del inglés, Mobile Telephone Service.

¹⁴Siglas del inglés, Improved Mobile Telephone Service.

¹⁵Siglas del inglés, Advanced Mobile Phone System.

Mientras tanto, la compañía NTT¹⁶ lanza el primer sistema de telefonía celular del mundo en la ciudad de Tokio, Japón, en 1979. En persecución del sistema japonés, los países nórdicos (Finlandia, Suecia, Noruega y Dinamarca) también lanzaron un sistema telefónico celular conocido como Sistema Telefónico Móvil Nórdico NMT¹⁷ en 1981.

La inclusión pública del sistema AMPS en 1983 en la ciudad de Chicago, EEUU, tuvo 200, 000 suscriptores o abonados (términos aplicados para describir a los usuarios del sistema de comunicación móvil) después del primer año, y 2'000, 000 de suscriptores cinco años más tarde.

Así, el teléfono móvil llegó a ser una realidad para una persona común alrededor del mundo, en la segunda mitad de la década de 1980.

El Concepto Celular

El concepto celular tuvo su principal avance en la solución del problema de congestionamiento espectral y capacidad de suscriptores. Éste brindó una mayor capacidad en una localidad limitada del espectro de radio sin adelantos tecnológicos significativos. El concepto celular es una idea a nivel de sistema, que reemplaza a un transmisor de alto poder (celda grande) por varios de bajo poder (celdas pequeñas), cada una dando cobertura a una porción pequeña del área total de servicio.

Las celdas se caracterizan por su tamaño que es determinado por la potencia del transmisor de manera especial, ya que lo que se persigue siempre en los sistemas celulares es que la potencia de transmisión sea lo más baja posible a fin de poder reutilizar el mayor número de frecuencias. La Figura A.5 muestra el diagrama de un sistema celular, donde el área real de cobertura de un transmisor se llama huella.

El desarrollo de las redes de telefonía celular en los últimos años, ha aumentado la exigencia de "buenas técnicas" de solución al Problema de Asignación de Canales para redes celulares. En redes de radiodifusión y televisión, miles de usuarios reciben la misma señal transmitida por una sola antena. En cambio, en las redes de telefonía celular, una señal es transmitida únicamente entre un transmisor y un receptor. Aún más, el área de servicio tiene que ser cubierta con un gran número de antenas para satisfacer la demanda.

Por ejemplo, en un país como Holanda, una red de radio o televisión puede cubrir el área con menos de una docena de transmisores. En contraste, cerca de dos mil transmisores son necesarios para cubrir la misma área de servicio de telefonía móvil; además, con 40 canales disponibles se puede concluir que cada canal debe ser usado varias veces.

 ¹⁶Siglas del inglés, Nippon Telegraph and Telephone corp.
 ¹⁷Siglas del inglés, Nordic Mobile Telephone system.

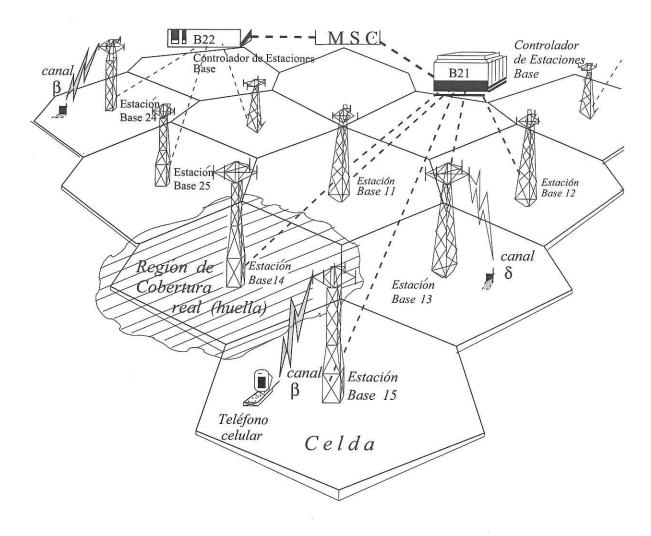


Figura A.5: Sistema celular

El tráfico en los sistemas celulares es usualmente muy alto para permitir el uso de un canal para una llamada a la vez; los canales de radio deben ser usados simultáneamente para más de una llamada. Esto es conocido como reuso de canal. Reusar el canal causa interferencia, lo cual se refleja en la degradación de la calidad de transmisión. Afortunadamente, la transmisión de bajo poder de teléfonos portátiles (operados con baterías), da la oportunidad de incrementar el reuso de canales en la misma área de servicio sin interferencia inaceptable.

Sistemas Celulares Basados en Satélites

En adición a los sistemas terrestres, los basados en satélites están en construcción. Con tal sistema se hace posible una conexión con un teléfono celular alrededor de todo el mundo, especialmente en aquellas regiones que no han sido cubiertas por un sistema terrestre. En contraste con otros sistemas de comunicación vía satélite, los sistemas telefónicos basados en satélites operan en una órbita terrestre pequeña (780Km de altura), y son llamados sistemas LEO¹⁸. Primero, la corta distancia entre la tierra y el satélite hace posible conectar el sistema con un aparato portátil. Segundo, las señales pueden ser transportadas entre satélites sin el uso de estaciones base en la tierra.

Análogamente a los sistemas terrestres, los satélites operan con ciertas frecuencias, que deben ser seleccionadas de tal forma que la interferencia se encuentre en un rango tolerable. Las frecuencias no solamente son imprescindibles para comunicar los aparatos, también lo son para establecer la comunicación entre satélites y estaciones terrestres y, entre satélites mutuamente. En un futuro cercano, los operadores proveerán un servicio en el cual la comunicación terrestre y vía satélite estén integrados.

Redes Fijas de Telecomunicación Celular

Una de las aplicaciones más recientes de la comunicación inalámbrica es el establecimiento de las redes fijas de telecomunicación celular. A diferencia de las redes celulares móviles, en los sistemas fijos los transmisores y receptores están localizados en puntos específicos del área. También proveen una alternativa atractiva financieramente a la construcción de redes alambradas convencionales en países en desarrollo, donde la estructura de una red móvil aún no está disponible.

Por otro lado, la introducción de nuevos servicios como la comunicación de datos (internet, e-mail) y video-conferencias, provocan una insuficiente capacidad de las redes alambradas existentes. Las conexiones inalámbricas puntuales pueden ser utilizadas como una alternativa para la extensión de las capacidades de esas redes alambradas, sin el establecimiento de cables de conexión. Sin embargo, la conexión puntual implica la mutua visión entre transmisor y receptor, lo cual significa que no debe haber obstáculos entre ellos. Consecuentemente, los transmisores y receptores tienen que ser instalados en lugares altos, como azoteas de edificios y cimas de colinas.

¹⁸LEO es una constelación de satélites de órbita baja.

Frecuencia	Abreviación	Longitud de onda y aplicaciones
3 KHz		100 Km
muy baja	VLF	navegación marítima
30 KHz		10 Km
baja	LF	ayuda de navegación
300 KHz		1 Km
media	MF	radio AM, radio marítimo
$3~\mathrm{MHz}$		100 m
alta	HF	radio de onda corta
30 MHz		10 m
muy alta	VHF	televisión VHF, radio FM
300 MHz		1 m
ultraelevada	UHF	televisión UHF, telefonía celular, posición global
3 GHz		10 cm
superelevada	SHF	comunicación espacial/satelital, microondas
30 GHz		1 cm
extremadamente alta	EHF	radio-astronomía, radar
300 GHz		1 mm

Cuadro A.1: El espectro de radio aplicable en la comunicación inalámbrica

Apéndice B

Sistema GSM

El sistema GSM de telefonía móvil celular debe sus siglas al *Group Spéciale Mobile* creado en la década de 1980 con el objeto de definir un sistema de cobertura paneuropea y de naturaleza digital, capaz de dar servicio a un gran número de suscriptores y que pudiera integrarse fácilmente en las nuevas redes de telecomunicación RDSI. Este grupo inició sus trabajos en el año 1985 concluyendo la especificación del sistema en 1991.

Un poco de Historia de GSM

La historia la podemos situar cuando en 1982 en un Congreso de administraciones de Correos y Telecomunicaciones (CEPT) se tomaron dos decisiones:

Primera: establecer un equipo con el nombre de *Groupe Special Mobile*, GSM, que desarrollara un conjunto de estándares para una futura red celular de comunicaciones móviles de ámbito paneuropeo.

Segunda: recomendar la reserva de dos sub-bandas de frecuencias próximas a 900 Mhz para este sistema.

Estas decisiones fueron tomadas para tratar de solventar los problemas que habían creado el desarrollo descoordinado de sistemas móviles celulares individualmente en los diferentes países participantes del CEPT y que eran incompatibles.

Dos de estos problemas eran:

- No poder disponer de una misma terminal al pasar de un país a otro;
- No disponer de un mercado propio suficientemente extenso, lo cual dificulta una industria europea de sistemas móviles competitiva a nivel mundial.

En 1984 empieza a surgir otro factor adicional, los sistemas celulares de la primera generación, en particular en los países del norte de Europa experimentan una aceptación y penetración en el mercado extraordinariamente superior a la prevista.

En 1986 las cifras indicaban la saturación de la capacidad de estos sistemas para principio de la década de los 90's. Ante esto surgió la intención de utilizar parte de las subbandas de frecuencias destinadas al GSM como ampliación de las usadas por los sistemas móviles celulares de primera generación, Sistema 900.

En consecuencia la Comisión de la Comunidad Europea emitió una Directiva en la que reservaban dos subbandas de frecuencias en la banda de 900 Mhz, para el sistema europeo, que empezaría a funcionar en 1991, pero más pequeñas que las recomendadas por la CEPT. Asimismo contemplaba que las frecuencias en estas subbandas que estuvieran siendo utilizadas por sistemas móviles celulares de la primera generación (analógicos), deberían abandonarlas en los siguientes diez años; es decir, hasta el 2001, que es la vida que les quedaba a los TMA, analógicos.

Mientras tanto los miembros del GSM realizaban excelentes progresos en el desarrollo y acuerdo de estándares.

Se adoptó la decisión de que el sistema sería digital, en lugar de analógico lo que redundaría en mejorar la eficiencia del radio espectro, mejor calidad de transmisión, posibilidades de nuevos servicios y otras mejoras como la seguridad.

También permitiría la utilización de tecnología VLSI, pudiendo fabricar terminales móviles más pequeños y baratos; en definitiva el uso de un sistema digital que complementaría el desarrollo de la Red Digital de Servicios Integrados (RDSI) con la que GSM debería tener un interface.

Se siguieron haciendo progresos y en septiembre de 1987 trece operadores de red europeos formaron un MoU¹ para continuar con el proyecto y lanzarlo en julio de 1991. Esto fue seguido con la invitación simultánea hecha en febrero de 1988 a todos los operadores de red involucrados en el sistema.

Pronto se dieron cuenta de que habían más problemas de los previstos. Por lo que se acordó que se efectuaría el desarrollo de la especificación en dos fases. Además la implantación en términos geográficos vislumbraba que debía realizarse en fases, empezando por ciudades importantes y aeropuertos; se seguiría con autopistas, calculando que se tardarían años en lograr un servicio completo a todo Europa.

En 1988 se inicio una intensa actividad en pruebas de validación particularmente en relación con el interface Radioléctrico. Como resultado se ajustaron ligeramente las especificaciones GSM y se pudo comprobar que el sistema funcionaba.

No se alcanzó la fecha acordada para julio de 1991 para el lanzamiento comercial del sistema GSM. A ello contribuyeron el retraso del desarrollo y acuerdo de pruebas de certificación, la necesidad de modificar algunas especificaciones GSM ya que la complejidad técnica del desarrollo de terminales portátiles se tardó en resolver más de lo previsto. Fue en junio de 1992 cuando aparecieron los portátiles.

El servicio comercial del sistema GSM llegó en 1992, si bien el tamaño de las áreas de cobertura y el número de usuarios era bastante dispar. Las redes que estaban

¹Siglas del Inglés, Memorandum of Understanding

funcionando se basaban en las especificaciones de la Fase 1 y no todos los servicios contemplados en la Fase 1 estaban disponibles.

A finales de 1993, el número de operadores que habían firmado el MoU había aumentado de trece a cuarenta y cinco, entre los que estaban la mayor parte del mundo excepto América del Norte y Japón. Treinta redes GSM estaban en servicio con cerca de un millón de abonados en todo el mundo.

A finales del 1994 el número de miembros del MoU había crecido a 102 operadores de red y Administraciones reguladores de Telecomunicaciones de 60 países.

El mercado de redes y equipamientos GSM se ha extendido más allá de las fronteras de Europa occidental. Europa del Este, la Commomwealth, Oriente, Asia, áfrica y Oceanía son regiones donde existen sistemas GSM operativos. Actualmente la mayor parte de los firmantes del MoU no pertenecen a países europeos. Esta amplitud del mercado es la razón por la que las siglas GSM han tomado otra acepción como Global System for Mobile comunications que es diferente de la original de 1982.

Especificaciones

El sistema GSM es un sistema de Telefonía móvil tanto celular como digital:

- Telefonía móvil. Permite la comunicación entre usuarios móviles.
- Celular. La zona de cobertura se divide en zonas llamadas celdas a las cuales se asigna un número de canales de radio o frecuencias. Estas celdas cuentan con una infraestructura de estaciones base, a cada celda le corresponde una estación base, que transmiten con la potencia necesaria para alcanzar toda el área de cobertura. La división en celdas permite el reuso de frecuencias y el consiguiente aumento de suscriptores a los que la red puede dar servicio simultáneamente, sin necesidad de aumentar el grupo de frecuencias contratadas. Cada celda o estación base puede asimismo incluir uno o varios transmisores según el volumen de tráfico cursado. Así, una celda con 3 transmisores podrá emitir con 3 frecuencias simultáneamente y soportar 3 veces más tráfico que una celda con un solo transmisor.
- Digital. Dado que supone la solución más económica, sencilla y eficaz para asumir la demanda del mercado e incorporar los diferentes avances tecnológicos, frente a la solución analógica empleada por otros sistemas de telefonía móvil.

En el año 1993 había 36 redes GSM en 22 países y otros 25 estaban considerando la posibilidad de implantarlo. Aunque el sistema GSM es un sistema típicamente europeo, existen redes GSM operativas en alrededor de 80 países de todo el mundo. Con motivo de este desarrollo, se asignó un nuevo termino al acrónimo GSM.

El sistema GSM ofrece importantes ventajas tanto a los operadores como a los usuarios del sistema. De entre ellas destacan:

- Utilización eficiente del medio de transmisión.
- Mejora en la calidad de la señal de voz, incluso en condiciones de recepción débil de señal y alta interferencia, a pesar de que el uso del codificador de voz puede provocar ciertas variaciones en el timbre de voz y un retardo hasta cierto punto apreciable.
- Posibilidad de comunicación entre distintos países sin la necesidad de cambiar de terminal, con el único requisito de acuerdos pertinentes entre los diferentes operadores.
- Aparición de la SIM del tamaño de una tarjeta de crédito, en donde se registran los datos del inscrito. Evita también robos y usos fraudulentos.
- Conversaciones seguras por la encriptación de la información en el canal.
- Prestaciones adicionales como la transmisión de datos y fax, y servicios suplementarios tales como el redireccionamiento de llamada, llamada en espera, identificación de llamada entrante, etcétera.

Novedades Introducidas

El sistema GSM permite la conexión con la red conmutada (Telefónica) con la RDSI (Red de servicios integrados) y permite ofrecer al usuario telefonía, transmisión de datos (hasta 9.600 bit/s), faxsímil del grupo III, conexión a sistemas de correo electrónico (X-400) y envío de mensajes cortos (alfanuméricos) que permite tanto su envío como su recepción desde una terminal móvil, leyéndolos en este ultimo caso en el visor correspondiente.

Además, el sistema GSM soporta otras prestaciones adicionales, como: desvío de llamada, restricciones de llamadas entrantes o salientes, conferencias a tres, llamada en espera y otras más.

La terminal a su vez, ofrece prestaciones adicionales como marcación abreviada, repetición del último numero marcado, bloqueo del terminal, entre otros.

El tema de la seguridad ofrece en este servicio novedades importantes respecto a los actuales (TMA), el uso de tarjeta de usuario para la autentificación de la validez de la llamada; encriptado, que facilita una confidencialidad total (voz, datos e identidad del abonado) e imposibilidad de utilización de equipos robados mediante la asignación previa de un número de serie a cada estación móvil.

En su componente radio se utiliza la banda de frecuencias de 900 Mhz con el método TDMA, Acceso por multiplexación en el tiempo, que proporciona ocho frecuencias telefónicas en una misma portadora y una codificación de voz a 13 Kbps, destinándose un octavo de tiempo a cada canal. Esta prevista para un futuro una codificación de voz a velocidad mitad, lo que permitiría la utilización de 16 frecuencias por portador.

Estructura del GSM

En lo que se refiere a la estructura básica del GSM el sistema se organiza como una red de celdas radioeléctricas continuas que proporcionan cobertura completa al área de servicio. Cada celda pertenece a una estación base, BTS, que opera en un conjunto de frecuencias de radio diferentes a los usados en las celdas adyacentes y que se encuentran distribuidas según un plan celular.

Un grupo de BTS's se encuentran conectado a un controlador de estaciones base, BSC, encargado de aspectos como el *handover* (traspaso del móvil de una celda a otra) o el control de potencia de las BTS's y de los móviles. En consecuencia, el BSC se encarga del manejo de toda la red de radio y supone una auténtica novedad respecto a los anteriores sistemas celulares.

Una o varias BSC's se conectan a una central de conmutación de móviles, MSC. Este es el corazón del GSM como responsable de la inicialización, enrutamiento, control y finalización de las llamadas, así como de la información sobre tarifas. Es también la interface entre diversas redes GSM o entre una de ellas y las redes públicas de telefonía o datos. La información referente a los abonados se encuentra almacenada en dos bases de datos que se conocen como registro de posiciones base, HLR, y registro de posiciones de visitantes, VLR. El primero analiza los niveles de subscripción, servicios suplementarios y localización actual, o mas reciente de los móviles que pertenecen a la red local. Asociado al HLR trabaja el centro de autentificación, AUC, que contiene la información por la que se comprueba la autenticidad de las llamadas con el fin de evitar los posibles fraudes, la utilización de tarjetas de abonado (SIM's) robadas o el disfrute del servicio por parte de impagados.

El VLR contiene la información sobre los niveles de suscripción, servicios suplementarios y red de localización para un abonado que se encuentra o al menos se encontraba recientemente en otra zona visitada. Esta base de datos dispone también de información relativa a si el abonado se encuentra activo o no, lo que evita el uso improductivo de la red, envío de señales a una localización que se encuentra desconectada.

El registro de identidad de los equipos, EIR, almacena información sobre el tipo de estación móvil en uso y puede eludir que se realice una llamada cuando se detecte que ha sido robada, pertenece a algún modelo no homologado o sufre de algún fallo susceptible de afectar negativamente a la red.

En cuanto a las comunicaciones en la red, se ha desarrollado un nuevo esquema de señalización digital. Para la comunicación entre MSC's y registros de posición se utiliza la parte de aplicación para móviles del Sistema de Señalización número 7 del CCITT, fórmula casi imprescindible para la operación de redes GSM a nivel internacional.

Entre las diversas entidades de la red se encuentran definidos interfaces estándar que aseguren un método común de acceso para todos los móviles, tanto los de diferentes países como los de diferentes suministradores.

Arquitectura Funcional del GSM

La norma GSM únicamente especifica entidades funcionales e interfaces normalizadas. Con ello se consigue la utilización de cualquier sistema por cualquier estación móvil, aunque no pertenezcan al mismo suministrador, y la interconexión de equipos de distintos suministradores a través de los interfaces normalizadas, evitando influir de forma excesiva sobre los desarrollos particulares de cada uno de los fabricantes de equipos.

Elementos del sistema GSM

La Estación móvil y el Módulo de identificación de usuario son los elementos fundamentales del subsistema GSM.

I. Estación Móvil, MS.

Una estación móvil se compone funcionalmente de dos partes: El Equipo Terminal y la Terminal Móvil.

- 1. El equipo terminal, ET.- Este equipo realiza funciones semejantes a las de una terminal RDSI y realiza las siguientes funciones:
 - Transmisión radio:
- Codificación de voz.
- Protección de errores;
- Control del flujo de datos de usuario;
- Gestión de movilidad;
- Soporte de terminales múltiples;
- Gestión de frecuencias de transmisión radio;
- Capacidad de la terminal, incluyendo la interfaz hombre-máquina;
- Adaptación de velocidad de datos de usuario y velocidad del canal.
- 2. La terminal móvil, TM.- Hay tres tipos de TM:
 - TMO: Realiza las funciones anteriormente mencionadas, sin incluir ninguna interface.
 - TM1: Incluye además una interfaz RDSI.
 - TM2: Incluye además interfaces CCITT series X y V.

Utilizando estos tres tipos de TM se pueden establecer las configuraciones necesarias para acceder al sistema GSM.

Una estación móvil puede además clasificarse en distintos tipos según varias características:

- a) Por su utilización:
 - Equipo móvil. Equipo portátil. Equipo transportable.
- b) Por la potencia de salida:
 - Clase 1. 20 w Móvil y transportable.

Clase 4. 2 w - Portátil.

Clase 2. 8 w - Vehículo y transportable.

Clase 3. 5 w - Portátil.

Clase 5. 0.8 W - Portátil.

Las características de las estaciones móviles se clasifican en tres tipos básicos y uno adicional:

1. Características Básicas obligatorias de la estación móvil:

Visualización del numero llamado;

Indicación de señales de progreso de la llamada;

Indicación de país/sistema; Indicador de servicio.

Gestión de la identidad de suscripción (SIM);

Indicador de PIN (clave de acceso) no valido;

Identidad internacional de equipo de estación móvil (IMEI);

2. Características básicas opcionales:

Indicación y reconocimiento de mensajes cortos;

Indicación de saturación de memoria para mensajes cortos;

Interfaz para equipo terminal de datos;

Interfaz para terminal RDSI;

Función de acceso internacional (tecla +);

Conmutador encendido/apagado;

Interfaz analógica;

Auto prueba.

3. Características suplementarias:

Aviso de tarifas;

Control de servicios suplementarios.

4. Características adicionales:

Marcación abreviada:

Limitación de llamada a números fijos;

Operación manos libres;

Repetición del último numero marcado;

Restricción de todas las llamadas salientes;

Bloqueo electrónico de la terminal;

Indicador de calidad de recepción;

Indicador de unidades de tarifas;

Estación móvil multi-usuario.

II. Módulo de identificación del usuario, SIM

Para que una estación móvil GSM pueda funcionar necesita tener introducido el módulo de identificación del usuario. Existen dos tipos distintos de modulo de identificación del usuario:

- Una tarjeta inteligente que puede ser retirada de la estación móvil cuando el usuario termina de utilizarla.
- Un módulo que es incorporado dentro de la estación móvil, con el fin de estar instalado permanentemente, aunque siempre sería posible retirarlo abriendo la carcaza de la estación móvil. Este módulo es el que contiene toda la información necesaria para realizar la función de autentificación del usuario, además de otras informaciones necesarias para el sistema.

El SIM debe contener la siguiente información:

- Número de serie;
- Estado del SIM (bloqueado o desbloqueado);
- Clave del algoritmo de autentificación;
- Algoritmo de Autentificación (A3);
- Identificación internacional del usuario móvil (MSI);
- Identificación temporal del usuario móvil (TMSI);
- Algoritmo de generación de claves de cifrado (A8);
- Clave del algoritmo de cifrado de señalización y datos (A5);
- Número de secuencia de la clave del algoritmo de cifrado;
- Clase de control de acceso del usuario.

Sistema de Estación Base, BSS

Es la entidad responsable del establecimiento de las comunicaciones con las estaciones móviles que se encuentran dentro de su área de influencia. Esta área de influencia puede ser constituida por una o más celdas radio cada una de ellas con una estación base. Hay ocho clases de estaciones base en función de la potencia que van desde los 320 W a 2.5 w.

Un sistema de estación base está constituido por un controlador de estación base BSC del que dependen una o más estaciones base BTS.

Una estación base está constituida por un conjunto de transceptores, TRX, que cubren la misma área. La estación base incluye además de los tranceptores un módulo que realiza la función de control común de estos transceptores (FCC). Tomando como base esta estructura existen dos tipos de sistemas de estación base:

- El sistema de estación integrado donde el BSC y una BTS están integrados en un mismo equipo.
- El sistema de estación base separado donde el BSC es una entidad distinta de las estaciones base, a las que se conecta mediante una interfaz normalizada, denominado interfaz A-bis. Esta última estructura, es la más general.

El transcodificador es un elemento que pertenece funcionalmente al BSS pero que puede estar situado físicamente en la BTS, en el BSC o externo al BSS, junto a la central de conmutación móvil. La función de transcodificador es convertir la velocidad neta utilizada en las frecuencias radio, inferior a 16 kb/s, a la velocidad normalmente utilizada en la red fija, que es de 64 kbit/s.

El que esta conversión no se realice hasta el final posibilita que se puedan multiplexar 4 frecuencias de 16 kbit/s en uno de 64 kbit/s ahorrando capacidad de transmisión, en el interfaz entre la BTS y el BSC y en el interface entre el BSC y la central de conmutación, Interface A. A partir de los tipos básicos anteriormente definidos pueden distinguirse 7 estructuras finales distintas, teniendo en cuenta además la situación del transcodificador, y la utilización de submultiplexación en el interface A-bis, BSS del 1 al 7.

Además de esta clasificación existen otras características funcionales, opcionales dentro de la especificación GSM, que determinan dentro de cada uno de estos tipos diferentes sistemas de estación base. Hay unas características funcionales que son fundamentales, función de salto de frecuencia, SLF, función de control de potencia, CP, y la función de transmisión discontinua, TXD.

La interconexión del BSS con las demás entidades del sistema GSM se define utilizando un modelo basado en el modelo de interconexión de Sistemas Abiertos, OSI, recogido en las recomendaciones CCITT X200 y X210.

Dentro de cada capa están las entidades. Las entidades de distintos sistemas que pertenecen a la misma capa, pueden intercambiar información entre sí.

Las entidades de un mismo sistema situadas en capas adyacentes interactúan entre ellas a través de su frontera común. De esta forma, las capas inferiores prestan sus servicios a las capas superiores.

Todos los sistemas del BSS: El interface radio, la interfaz A y la interface A-bis se han definido utilizando un modelo de tres capas:

- La Capa 1: coincide con la capa inferior del modelo OSI, y soporta todas las funciones necesarias para la transmisión de una secuencia de bits sobre un canal establecido en un medio físico de transmisión.
- La Capa 2: es la capa de enlace de datos, y tiene como misión permitir el intercambio de tramas de información entre dos entidades conectadas a través de un medio físico.
- La Capa 3: en realidad comprende las capas 3 a 7 del modelo OSI, llegando por lo tanto hasta definir la naturaleza de la comunicación requerida para satisfacer las necesidades de los usuarios de la comunicación.

Para definir totalmente la interconexión del sistema, además de esa estructura de capas es necesario también utilizar funciones de gestión del sistema. Estas funciones pueden incluir funciones que son comunes a varias capas.

Funciones del BSC:

- Gestión de frecuencias radio; Control de potencia en el móvil;
- Control de potencia en la BSS;
- Gestión de frecuencias en el enlace BSC-MSC;
- Configuración de las frecuencias radio, recibe del OMC;
- Gestión de secuencias de salto de frecuencia (BSC,OMC), éstas son enviadas por el BSC hacia el BTS;
- Selección de canal, supervisión del enlace y liberación de canal;
- Determinación del nivel de potencia necesario en el móvil;
- Determinación de la necesidad de realizar cambio de canal.

Funciones de la BTS:

- Gestión de frecuencias radio;
- Supervisión de frecuencias libres y envío de información de estos hacia la BSC;
- Temporización de bloques BCCH/CCCH. Edición de mensajes de aviso;
- Detección de accesos al sistema por parte de móviles;
- Codificación y entrelazado para protección de errores;
- Determinación del avance de temporización;
- Medidas de intensidad de campo y calidad de las señales recibidas de los móviles;
- Recepción de medidas enviadas por los móviles sobre condiciones de intensidad y calidad;
- Opcionalmente la BTS puede realizar un pre-procesamiento;
- Construcción de mensajes de aviso a partir de la información recibida;
- Detección de acceso por traspaso de un móvil;
- Comprobación de la identificación de referencia del traspaso;
- Encriptación de la información de señalización y tráfico.

Central de Conmutación Móvil, MSC

Está encargada de todas las funciones de conmutación para las estaciones móviles situadas en su área de influencia, área MSC. Las principales diferencias de esta central respecto a una central de la red fija, consisten en que ésta debe tener también en cuenta el impacto de las funciones de asignación de los recursos radio y la naturaleza móvil de los usuarios. Por lo tanto, este tipo de central implementa ciertos procedimientos adicionales a los de una de red fija, como lo es la actualización de la posición de las estaciones móviles y lo que tiene que ver con las funciones de traspaso de llamadas en curso, cuando los móviles se van desplazando entre las celadas de la red móvil.

Central de Conmutación Móvil de Cabecera, MSCC

Es una central utilizada para dirigir hacia ella las llamadas originadas en la red fija. Se encarga de interrogar al HLR, adecuado para conocer la posición del móvil al que va dirigida la llamada y encaminar la llamada hacia la central de conmutación móvil correspondiente. La elección de las centrales de conmutación móvil que van a ser además centrales de cabecera depende de la organización de la red móvil. El sistema GSM introduce, respecto a los sistemas analógicos de segunda generación, una mayor descentralización de las funciones de la central de conmutación móvil, pasando parte de ellas a ser realizadas dentro de los propios sistemas de estación base. De esta forma se consigue descargar de trabajo a la central de conmutación y agilizar en muchos casos algunos procedimientos característicos de una red móvil, como puede ser por ejemplo el traspaso de las llamadas en curso, al pasar el móvil de una a otra celda.

Unidad de Interfuncionamiento, UI

Es una entidad funcional asociada con la central de conmutación móvil. Esta unidad es la encargada de proporcionar la funcionalidad necesaria para permitir el interfuncionamiento del sistema GSM con las redes fijas (RDSI, RTC, y RTPCP). Las funciones incluidas en esta unidad dependen por lo tanto de los servicios que se implementen y de las redes fijas a las que se conecten. Su principal cometido es convertir los protocolos utilizados en el sistema GSM a los utilizados en las redes fijas.

Registro de Posición Base, HLR

Es una base de datos cuya misión es la gestión de los usuarios móviles. Una red GSM puede tener uno o varios HLR, dependiendo del número de usuarios móviles, de la capacidad del equipo y de la organización de la red.

El HLR almacena dos tipos de información:

- La información de suscripción de los usuarios;
- La información de localización de los abonados, permitiendo de esta forma la función de seguimiento es decir la actualización automática de la posición del móvil para que se le pueda encaminar las llamadas que reciba.

Todas las funciones de administración de los abonados se realizan sobre esta base de datos. La información de suscripción de un abonado consta de los siguientes pasos:

- 1. Dos números de identificación;
- 2. El identificativo internacional de la estación móvil IMSI;
- 3. El numero RDSI internacional de la estación MSISDN;
- 4. Servicios portadores y teleservicios que el usuario puede usar;
- 5. Restricciones de servicios por ejemplo limitación de seguimiento;
- 6. Servicios suplementarios que el usuario puede usar y las tablas de par metros necesarios para dichos servicios;
- 7. Características del equipo móvil utilizado por el usuario.

Centro de Autenticación, AUC

Es una base de datos, con la misión de controlar a los móviles que se encuentran en su región o área de influencia. Este área de influencia puede comprender una o varias MSC. Cuando una estación móvil aparece en un área de localización lo primero que hace es iniciar un proceso de registro comunicando a la MSC local su identidad. La MSC comunica este registro hacia su Registro de Posición Visitado. Si el móvil no estaba ya registrado en otra área de localización dependiente también del mismo VLR es necesario enviar también esta información hacia el HLR del móvil, para indicarle

que actualice su posición y encamine las llamadas recibidas hacia el área donde se encuentra actualmente el móvil.

El VRL contiene también la información necesaria para gestionar las llamadas originadas o recibidas por los móviles registrados en su base de datos. Esta información incluye los siguientes elementos:

- El identificador internacional de la estación móvil (IMSI);
- El número RDSI internacional de la estación móvil (MSISDN);
- El identificador temporal.

El subsistema radio.

El subsistema radio, que constituye el enlace físico entre las estaciones móviles y la red fija, está formado por una serie de canales. El sistema GSM emplea una modulación multiplexada en tiempo y frecuencia. De esta forma, una celda puede transmitir diversas frecuencias (llamadas portadoras) simultáneamente. Cada frecuencia portadora puede soportar además distintos canales (en general dedicados al tráfico de llamadas) gracias a la multiplexación en tiempo, dividiéndose cada trama en 8 ranuras o segmentos de tramas, correspondientes con otros tantos canales lógicos, generalmente 1 de control y 7 de tráfico por cada portadora, o bien 8 de tráfico si otra de las frecuencias portadoras de la misma celda ya contiene un canal de control. El estándar GSM distingue los canales de usuario, que cursan y gestionan las llamadas, de los canales de control propiamente dichos, según la jerarquía siguiente:

Canales de usuario:

Canal de tráfico.

Canales de control, asociados durante la comunicación.

Lento: Control de potencia, medidas, avance temporal.

Rápido: Información de traspaso.

• Canales de control:

Difusión: Base-Móviles.

Acceso: Base-Móviles-Dedicados.

Como se mencionó, los canales de usuario ocupan las ranuras no destinadas a los canales de control, apareciendo éstos como máximo 1 vez por trama y por tanto quedan 7 u 8 ranuras de una trama destinadas al tráfico y al control de tráfico según el siguiente esquema:

 Los canales de tráfico soportan la transmisión de la información de voz y datos en forma de ráfagas. Los canales de control asociados aparecen una vez que se ha establecido la comunicación y son propios del usuario. Se distinguen dos tipos de canales de control asociado:

Lentos: Transportan información de control de potencia, la estación base informa al móvil si ha de aumentar o disminuir la potencia transmitida, y medidas de potencia del móvil a la estación base para que ésta decida el control de potencia e información de avance temporal.

Rápidos: Transmiten la información de traspaso cuando el usuario se traslada de una celda a otra, que debe transferirse al móvil antes de que se interrumpa la comunicación. Por este motivo la transmisión se lleva a cabo sobre un canal de tráfico, pudiendo producirse una ligera degradación de la transmisión.

Por otra parte, los canales de control son comunes a todos los usuarios de una celda siendo utilizados en los pasos previos al establecimiento de la llamada. Estos canales, que han de estar presentes en todas las celdas de la red ocupan normalmente una sola ranura de una de las portadoras de la celda, respondiendo a la siguiente jerarquía:

- Los canales de difusión se transmiten en el enlace descendente, de la estación base a la terminal móvil y proporcionan distintos tipos de información: configuración del sistema, frecuencia portadora de la estación base que permite sintonizar el móvil, frecuencias con canal de control, sincronización con la trama de la estación base, entre otros.
- Los canales de acceso son canales ascendentes o de subida, es decir, van del móvil a la estación base, que, al ser comunes a todos los usuarios, requieren la presencia de un mecanismo de acceso al medio. Entre otras funciones, controlan las peticiones de llamadas de los usuarios.
- Finalmente, se encuentran los canales de control dedicados, destinados a transmitir información de control entre la red y el móvil con funciones específicas, como el intercambio de datos de usuario entre la estación base y el móvil antes de realizarse la comunicación.

Reducción del nivel de interferencias.

Como todo sistema de telefonía celular, GSM permite el reuso de frecuencias de diferentes estaciones base con el objeto de aumentar la capacidad de tráfico de la red. Esta reutilización conlleva, sin embargo, la posible aparición de interferencias entre celdas. De este modo, junto al diseño de una planificación de frecuencias adecuada para determinar cuál debe ser la distancia de reuso entre celdas y la utilización de una modulación robusta, el estándar GSM incorpora tres mecanismos para compensar

los efectos de las interferencias, siendo decisión de la operadora incluirlos o no en su servicio:

- 1. Control de potencia: permite modificar dentro de un cierto rango la potencia transmitida en ambas direcciones, de móvil a base y viceversa. En GSM se aplica un control de potencia, independiente en ambas direcciones, en función de los niveles de recepción medidos por la estación base y la terminal móvil.
- 2. Transmisión discontinua: detenta la existencia de silencios en la comunicación e inhibe la transmisión radio durante este tiempo (aproximadamente el 50 % del tiempo de una llamada nos encontramos en la escucha) para no interferir en celdas contiguas.
- 3. Conmutación de Frecuencia (*frequency hopping*), (FH): varía la frecuencia portadora de transmisión, de una trama a otra.

A pesar de que un operador suele contratar un número fijo de frecuencias, es posible encontrar diseños frecuenciales GSM en rangos de distinta amplitud, en el sentido no sólo de que el número de frecuencias empleadas en cada celda sea distinto de un diseño a otro, sino de que el propio número de frecuencias disponibles por la red pueda variar significativamente. La planificación frecuencial se puede llevar a cabo de forma segmentada, dividiendo el área de cobertura, sea una región, un área metropolitana o una ciudad de dimensiones variables.

Apéndice C

Algoritmos

Los algoritmos son una parte central de todas las áreas de las ciencias de la computación y, de hecho, forma parte relevante de casi todas las ciencias, de los negocios y de la tecnología.

La naturaleza de un algoritmo se logra apreciar generalmente en todas aquellas disciplinas que se benefician del uso de computadoras. La computadora no solamente es una máquina que puede realizar procesos para darnos resultados, sin que tengamos la noción exacta de las operaciones que realiza para llegar a ellos.

Con la computadora, además de lo anterior, también podemos diseñar soluciones a la medida de problemas específicos. Sobre todo, si estos involucran operaciones matemáticas repetitivas, o que requieren del manejo de un volumen muy grande de datos.

El diseño de soluciones a la medida de nuestros problemas requiere, como en otras disciplinas, una metodología que nos enseñe de manera gradual la forma de llegar a las soluciones. Una forma de obtener soluciones, a través de las computadoras son los programas, que no son más que una serie de operaciones que realiza la computadora para llegar a un resultado, con un grupo de datos específicos.

Lo anterior nos lleva al razonamiento de que un programa nos sirve para solucionar un problema específico. Para poder realizar programas, además de conocer la metodología mencionada, también debemos de conocer, de manera específica las funciones que puede realizar la computadora y las formas en que se pueden manejar los elementos que hay en la misma.

Un algoritmo es una secuencia finita de pasos, que resuelve un problema en un tiempo finito (que termina en un número finito de operaciones). Un algoritmo tiene las siguientes características:

- 1. Trabaja a partir de datos, aunque ocasionalmente podría no recibir entradas.
- 2. Produce como salida un resultado que corresponde a la solución del problema; o bien termina indicando que no existe tal.
- 3. Secuencia Finita de pasos. El algoritmo define una secuencia de pasos, bien definidos, cuya ejecución transforma a la entrada en la salida.

4. Correctez. El algoritmo debe terminar y garantizar la solución para cualquier ejemplar del problema.

El propósito del análisis de Algoritmos es predecir el comportamiento de los algoritmos sin implantarlos en máquina alguna [37]. Además es mucho más conveniente tener medidas sencillas para la eficiencia de un algoritmo que implantarlo y probar su eficiencia cada vez con parámetros específicos para sistemas diferentes. Tradicionalmente, el tiempo de ejecución de un algoritmo depende del tiempo de ejecución y tamaño de memoria utilizado.

Análisis de Algoritmos

El tiempo necesario para ejecutar un algoritmo resulta ser una función que depende generalmente de la cantidad de datos a procesar; mayor cantidad de datos significa más tiempo de ejecución. El valor exacto de esta función depende de varios factores, tales como la velocidad de la máquina. Así el resultado del análisis debe indicar cuánto tarda el algoritmo en cuestión, en tiempo de ejecución, para una entrada particular.

Dado que el número de entradas potenciales es enorme y que seguramente dos algoritmos tendrán comportamiento diferente para entradas distintas, debemos considerar una métrica para la entrada, como su tamaño, y entonces hacer un análisis referente a este tamaño.

Por otro lado, los algoritmos no se comportan de manera similar para todas las entradas del mismo tamaño, pero es imposible analizar todas las entradas del mismo tamaño para todos los algoritmos. En lugar de esto, podemos comparar el desempeño de algoritmos diferentes que resuelvan el mismo problema. De esta manera, ¿cómo elegimos un indicador?

Elegir la mejor entrada usualmente no es muy representativo, porque representa una solución trivial. El caso esperado es una buena elección, pero algunas veces será muy difícil obtener una medida eficiente, pues la esperanza del tiempo de ejecución dependerá de parámetros diferentes o de la forma como están organizados los datos. Finalmente, el cálculo del tiempo de ejecución, usando la peor entrada como indicador es muy usual, aunque represente un análisis pesimista.

Para un programa fijo, ejecutándose en una computadora, podemos dibujar la gráfica que representa la función del tiempo de ejecución. La Figura C.1 muestra una gráfica sobre cuatro programas, donde las curvas representan 4 funciones típicas en el análisis de algoritmos: lineal, $n\log n$, cuadrática y cúbica. El tamaño de la entrada n varía de 1 a 100 elementos y los tiempos de ejecución asociados varían de 0 a 10 milisegundos. La Figura C.2 muestra los tiempos de ejecución para los mismos programas, pero con tamaños de entrada mayores.

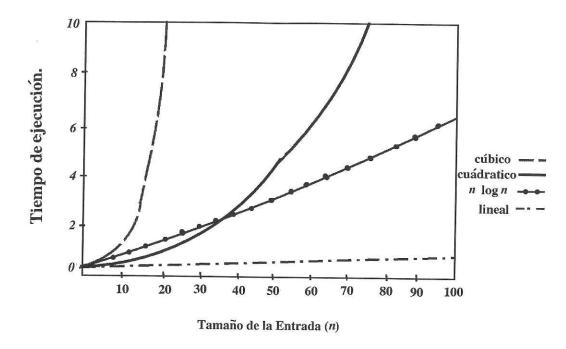


Figura C.1: Tiempos de ejecución para tamaños de entrada pequeños.

Para valores pequeños de n, por ejemplo aquellos menores a 35, en la Figura C.1 mostramos que hay puntos para los cuales una curva es inicialmente mejor que otra, aunque esto deja de ser cierto cuando la entrada n se hace "suficientemente" grande. Para tamaños de entradas pequeños, es difícil comparar las funciones. Por ejemplo, consideremos la función f(n) = n + 2500, es mayor que n^2 cuando n es menor que 50, pero a partir de este punto la función lineal será siempre menor que la función cuadrática y la constante pierde importancia.

Otro punto importante es que para tamaños pequeños de entrada los tiempos de ejecución son insignificantes y comúnmente no tenemos que preocuparnos por ellos.

La Figura C.2 muestra mayores diferencias entre las curvas de la primera figura, cuando el tamaño de la entrada es grande. Un algoritmo resuelve un problema de tamaño 10,000 en una fracción de segundo mientras que el algoritmo $n\log n$ utiliza aproximadamente diez veces este tiempo.

La característica más notoria de estas curvas es que los algoritmos cuadráticos y cúbicos no pueden competir con los restantes para tamaños de entrada razonablemente grandes. El cuadro C.1 ordena de manera creciente distintas funciones que describen comúnmente el tiempo de ejecución de los algoritmos.

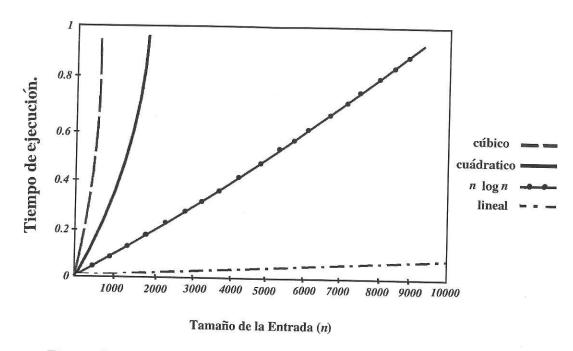


Figura C.2: Tiempos de ejecución para tamaños de entrada mayores.

Notación asintótica.

Una vez que revisamos las ideas básicas del análisis de algoritmos, podemos dar un enfoque más formal para la notación de las diferentes funciones de crecimiento.

Definición 10 Notación **O**. Decimos que f(n) es de orden de g(n), denotado $f(n) \in O(g(n))$, si existen c > 0 y n_0 tales que: $f(n) \le c \cdot g(n) \ \forall n \ge n_0$.

La notación O representa una cota superior para el tiempo de ejecución del algoritmo, garantizando que no se va a tardar más, para n suficientemente grande. Esta notación es similar a la relación menor o igual, con respecto al crecimiento de funciones, es decir, que f no crece más rápido que g.

Definición 11 Notación Ω . Decimos que $f(n) \in \Omega(g(n))$ si existen c > 0 y n_0 tales que: $f(n) \ge c \cdot g(n) \ \forall n \ge n_0$.

Esta notación es similar a la relación mayor o igual, es decir, una función no crece más lento que otra.

Definición 12 Notación Θ . Decimos que $f(n) \in \Theta(g(n))$ si y sólo si: $f(n) \in O(g(n))$ y $f(n) \in \Omega(g(n))$.

Utilizamos esta notación para indicar que las dos funciones tienen un índice de crecimiento similar. Θ representa una categoría de orden.

Función	Nombre
c	Constante
$\log n$	Logarítmica
n	Lineal
$n\log(n)$	$n \log n$
n^2	Cuadrática
n^3	Cúbica
2^n	Exponencial

Cuadro C.1: Funciones de índice de crecimiento.

Definición 13 Notación **o**. Decimos que f(n) es o pequeña de g(n), denotado $f(n) \in o(g(n))$, si para toda c > 0 existe $n_0 > 0$ tales que: $0 \le f(n) < c \cdot g(n) \ \forall n \ge n_0$.

La notación \mathbf{o} es similar al menor estricto, es decir, una función crece estrictamente más lento que otra.

Definición 14 Notación ω . Decimos que $f(n) \in \omega(g(n))$ si para toda c > 0 existe $n_0 > 0$ tales que: $0 \le c \cdot g(n) < f(n) \ \forall n \ge n_0$.

La notación ω es similar al mayor estricto, es decir, una función crece estrictamente más rápido que otra.

Generalmente utilizaremos la notación O para representar el índice de crecimiento de una función, así el tiempo de ejecución de un algoritmo cuadrático se describe como $O(n^2)$. La notación O nos permite establecer un orden relativo entre funciones, comparando los términos dominantes. También hay que notar que lo que se busca siempre es dar cotas lo más ajustadas posibles.

El Cuadro C.2 muestra algunos ejemplos Categorías de orden de complejidad y el nombre que se les asocia.

Categoría	Nombre
$\Theta(1)$	Constante
$\Theta(\log n)$	Logarítmico
$\Theta(n)$	Lineal
$\Theta(n \log n)$	$n\log(n)$
$\Theta(n^2)$	Cuadrática
$\Theta(n^3)$	Cúbica
$\Theta(2^n)$	Exponencial

Cuadro C.2: Categorías de orden de complejidad.

Los distintos órdenes de complejidad, en las diferentes notaciones, particionan a las funciones en clases de equivalencia, una por cada orden de complejidad. Listamos a continuación varias propiedades que preservan estas clases:

```
\begin{array}{lll} 1. & g(n) \in O(f(n)) & \Longleftrightarrow & f(n) \in \ \Omega(g(n)) \\ 2. & k \in \mathbb{N}, & f(n) \in O(g(n)) & \Longleftrightarrow & k \cdot f(n) \in \ O(g(n)) \\ 3. & g(n) \in \Theta(f(n)) & \Longleftrightarrow & f(n) \in \ \Theta(g(n)) \\ 4. & \mathrm{Si} \ b > 1, & a > 1, & \log_a \ n \in \ \Theta(\log_b n) \end{array}
```

5. Si 0 < a < b, $a^n \in o(b^n)$

6. $\forall 0 < a, \quad a^n \in o(n!)$

Problemas P, NP y NP-Completos

Este material está basado en el libro Compared to what?: an introduction to the analysis of algorithms, de Gregory J. E. Rawlins [43].

Las Ciencias de la Computación tratan problemas de complejidad computacional, es decir, estudian los costos de cómputo necesarios para resolver un problema, hablando en términos de recursos computacionales, fundamentalmente memoria, espacio de almacenamiento y tiempo de cómputo. La teoría de complejidad se restringe a trabajar con problemas de decisión, cuya su solución corresponde a una respuesta SÍ o NO.

Cuando nos enfrentamos a un problema concreto, habrá una serie de algoritmos aplicables. Se suele decir que el orden de complejidad de un problema es el del mejor algoritmo que se conozca para resolverlo. Así se clasifican los problemas, y se realizan los estudios sobre algoritmos que se aplican en el mundo real. Estos estudios nos indican que existen problemas muy difíciles y problemas que no son computacionalmente tratables.

¿Cómo identificamos los problemas que se pueden resolver? Empecemos por definir el concepto problema.

Definición 15 Problema. Es una cuestión a resolver, que generalmente posee paramétros o entradas.

Después de definir un problema, debemos decidir cómo tratarlos para resolverlos. El siguiente es un plan general que podemos seguir:

1. Primero construimos o elegimos un modelo abstracto, de manera que podamos decidir entre diferentes soluciones. Cada solución debe tener alguna medida para evaluar la dificultad de implementar dicha solución. Por ejemplo, la cantidad de memoria, el acceso a disco, el número de comparaciones o el de asignaciones. A este modelo se le conoce como modelo de cómputo y no es otra cosa que un conjunto de suposiciones que se asumen acerca de una máquina (virtual o real) sobre la cual será ejecutado el algoritmo.

- 2. Después diseñamos un algoritmo que resuelva el problema, teniendo en cuenta el modelo elegido. Este algoritmo es una manera de resolver el problema y debe ser suficientemente claro para que pueda efectuarse en una computadora.
- 3. Finalmente, comparamos las cotas máxima y mínima para comprobar si la solución es buena, para el problema particular. De no ser así, tratamos de rediseñar el algoritmo para obtener mejores cotas. Si esto no funciona, entonces rediseñamos el modelo.

Clasificación de problemas.

Los problemas computacionales se pueden clasificar según los requerimientos y según la complejidad.

En términos de los requerimientos, existen seis problemas computacionales:

- 1. Búsqueda de datos: Encontrar una X en la entrada que satisface la propiedad Y.
- 2. Estructura: Transformar la entrada para satisfacer la propiedad Y.
- 3. Construcción: Construir una X que satisface la propiedad Y.
- 4. Optimización: Encontrar la mejor X que satisface la propiedad Y.
- 5. Decisión: Decidir cuándo la entrada satisface la propiedad Y.
- 6. Adaptivos: Mantener la propiedad Y todo el tiempo.

También podemos clasificar los problemas según la complejidad. Existen cuatro categorias de problemas difíciles:

- 1. Conceptualmente difícil. No se tienen algoritmos para resolver estos problemas, porque éstos no se entienden lo suficiente para diseñar un modelo o un algoritmo. Muchos de estos problemas se tratan en el área de Inteligencia Artificial.
- 2. Analíticamente difícil. Se tiene un algoritmo para resolver este problema, pero no se sabe cómo analizarlo, es decir, no se sabe cuánto tiempo tomará para resolver cada ejemplar.
- 3. Computacionalmente difíciles. Existe un algoritmo y su análisis, pero tal análisis sugiere que para ejemplares de problemas relativamente pequeños, tardaría varios años enresolverse.
 - Estos problemas se dividen en dos grupos: problemas que se sabe son computacionalmente difíciles y problemas que se sospecha lo son.
- 4. Computacionalmente sin solución. No se tiene un algoritmo para resolver este problema porque tal algoritmo no se puede diseñar.

Todavía quedan por resolver algunas preguntas: ¿Hay problemas mucho más difíciles que otros? De ser así, ¿cuáles? ¿Qué tan difíciles son estos problemas? Finalmente, si resultan ser mucho más difíciles, ¿qué podemos hacer?

Primero consideremos que, actualmente, nombramos a un problema como factible o eficiente si tiene una solución con costo polinomial, pero ¿por qué polinomial? He aquí algunas razones:

- Los Polinomios son cerrados bajo composición y suma. Si tenemos dos algoritmos factibles podemos usar uno como subrutina del otro y obtendremos un algoritmo factible, esto significa que es cerrado bajo composición. Por otra parte, si ejecutamos uno después del otro, también obtenemos un algoritmo factible, lo que indica que es cerrado bajo suma.
- Todas las computadoras de secuencia digital están relacionadas polinomialmente. Si en una máquina podemos resolver un problema en un tiempo f(n), podremos resolverlo en el mismo tiempo polinomial f(n) en otra máquina. Si un problema tiene una solución polinomial en cualquier computadora digital actual, entonces este problema tendrá una solución polinomial en cualquier otra computadora digital. Esto hace más sencillo nombrar a un problema como polinomial, independientemente de la máquina en el que se ejecute.
- Por lo general, un algoritmo polinomial hará una cantidad considerable de trabajo. Si un algoritmo es exponencial, entonces será factible sólo para entradas pequeñas.

Problemas NP.

En la sección anterior revisamos por qué preferimos tener algoritmos polinomiales. A continuación formalizamos la idea de que un problema con solución polinomial es fácil y uno donde cada solución crece más rápido que cualquiera polinomial es difícil.

Definición 16 Polinomialmente transformable. Decimos que un problema P_1 es polinomialmente transformable a un problema P_2 , si podemos transformar cualquier entrada de P_1 en un ejemplar de P_2 en un tiempo polinomial.

De esta manera, podemos resolver cualquier ejemplar de P_1 transformándolo, en tiempo polinomial, en un ejemplar de P_2 , y así resolvemos el ejemplar de P_2 . Entonces, tenemos que si P_2 es fácil, entonces P_1 es fácil. Pero si P_2 es dífil, no podemos decir que P_1 es difícil, ya que podría existir otra manera de resolver P_1 aunque sí podemos asegurar que P_1 no es más difícil que P_2 .

Para demostrar que P_1 es polinomialmente transformable en P_2 tenemos que encontrar un algoritmo de tiempo polinomial que transforma cualquier ejemplar de P_1

en un ejemplar de P_2 . Si se puede hacer esta transformación, entonces éstos dos problemas son **polinomialmente equivalentes**. Y esto se cumple, aún sin considerar si son fáciles o difíciles.

Se dice que los problemas que se resuelven en tiempo polinomial están en la clase P. Diremos que un problema es computacionalmente difícil si no esta en P, es decir, si este problema no tiene una solución de tiempo polinomial.

Existe una clase que contiene la clase P. Estos problemas son No-determinísticos de tiempo polinomial. Algunos de estos problemas pueden caracterizarse por el hecho de que puede aplicarse un algoritmo polinomial para comprobar si una posible solución es válida o no. Esta característica lleva a un método de resolución no determinista, que consiste en aplicar heurísticas para obtener soluciones que se van aceptando o rechazando.

La clase de estos problemas se le llama NP. La clase P es un subconjunto de NP, ya que un algoritmo determínistico en P puede plantearse como un algoritmo no determínistico que cuenta con una solución polinomial.

Definición 17 Problema NP-difícil. Un problema X es llamado un problema NP-difícil, si cada problema en NP es polinomialmente reducible a X.

Definición 18 Problema NP-Completo. Un problema X es llamado Problema NP-Completo si: 1. X pertenece a NP. 2. X es NP-difícil.

Lema 24 Un problema X es un problema NP-Completo si:

- 1. X pertenece a NP.
- **2'.** $\exists Y$ polinomialmente reducible a X, para algín Y que es NP-Completo.

Demostración: Por la Condición 2 en la definición de NP-Completo, cada problema en NP es polinomialmente reducible a Y. Pero debido a que Y es polinomialmente reducible a X y la reducibilidad es una relación transitiva, cada problema en NP es polinomialmente reducible a X también.

Muchos de los problemas clásicos NP-completos pertenecen a la Teoría de gráficas; por ejemplo, el problema del conjunto independiente máximo o el problema de coloración de vértices. Para estos problemas, hasta el momento, no se conocen algoritmos de orden polinomial que los resuelvan.

Apéndice D

Programación Matemática

En este anexo se presenta una breve introducción sobre la Programación matemática. Iniciamos dando un panorama general de la Investigación de Operaciones (IDO), continuamos con una breve descripción de la Programación Linal y concluimos con la Programación Entera. En estos últimos dos temas se presentan problemas para ejemplificar las técnicas.

Investigación de Operaciones (IDO)

La Investigación de Operaciones (IDO) se remonta al siglo pasado, a principios de la Segunda Guerra Mundial, cuando se empezó a utilizar para asignar recursos escasos a las operaciones militares y a las actividades de cada operación de este tipo de tal forma que esta asignación fuera lo más efectiva posible. Por lo anterior las administraciones militares americanas e inglesas recurrieron a los científicos para que estos resolvieran este tipo de problemas así como problemas de tipo estratégico y táctico.

El éxito que tuvo la IDO en el campo militar hizo que la industria, los negocios y el gobierno se interesaran en este campo y fue para 1951 cuando se introdujo por completo en Gran Bretaña mientras Estados Unidos se encontraba en el proceso de introducirla a estas áreas.

Científicos que habían participado en la Guerra en el área de IDO se dedicaron a buscar resultados sustanciales en este campo, de lo que se obtuvieron grandes avances. Uno de los más importantes ejemplos es el método simplex para resolver problemas de programación lineal, desarrollado en 1947 por George Dantzig. Aunado al desarrollo teórico, la aparición de las computadoras facilitó el crecimiento de esta disciplina, debido a que las computadoras podían hacer los cálculos mucho más rápido que los humanos.

La IDO se ocupa de la toma de decisiones óptima y del modelado de sistemas determinísticos y probabilísticos que se originan en la vida real.

Generalmente, la investigación de operaciones considera las siguientes etapas para la solución de un problema:

- 1. Formulación del problema.
- 2. Construcción de un modelo matemático que represente el sistema.
- 3. Obtención de una solución a partir del modelo.
- 4. Prueba del modelo y la solución obtenida.
- 5. Establecimiento de controles sobre la solución.
- 6. Implantación de la solución.

Los modelos matemáticos tienen muchas ventajas sobre una descripción verbal del problema. Una ventaja obvia es que el modelo matemático describe un problema en forma mucho más concisa. Esto tiende a hacer que toda la estructura del problema sea más comprensible y ayuda a revelar las relaciones importantes entre causa y efecto. De esta manera, indica con más claridad que datos adicionales son importantes para el análisis. También facilita simultáneamente el manejo del problema en su totalidad y el estudio de todas sus interrelaciones. Por último, un modelo matemático forma un puente para poder emplear técnicas matemáticas poderosas, además de las computadoras, en el análisis del problema. Sin duda, muchos de los componentes de un modelo pueden quedar vinculados al uso de paquetes de computación.

Por otro lado, existen obstáculos que deben evitarse al usar modelos matemáticos. Un modelo es necesariamente, una idealización abstracta del problema, por lo que casi siempre se requieren aproximaciones y suposiciones de simplificación si se quiere que el modelo sea manejable (capaz de ser resuelto). Por lo tanto, debe tenerse cuidado de que el modelo sea siempre una representación válida del problema. El criterio apropiado para juzgar la validez es verificar si este predice o no con suficiente exactitud los efectos relativos de los diferentes cursos de acción, para poder tomar una decisión que tenga sentido. En consecuencia, no es necesario incluir detalles sin importancia o factores que tiene aproximadamente el mismo efecto sobre todas las opciones. Por lo que, lo que se requiere es que exista una alta correlación entre la predicción del modelo y lo que ocurre en la vida real.

Métodos Cuantitativos que estudia la IDO

Una gran proporción de los problemas que se presentan en la vida real, y que frecuentemente se recurren, llegan a tener ciertas similitudes y es por ello que pueden pertenecer a alguno de los problemas prototipos que a continuación se mencionan:

- Teoría de Probabilidades;
- Técnicas matemáticas;
- Modelos de reemplazo;
- Modelos de secuenciación;
 Modelos de inventario;
 Modelos de asignación;

- Modelos competitivos;
- Modelos de flujo;
- Modelos de ruta;

Técnicas de simulación;

- Modelos de líneas de espera.
- Modelos de programación dinámica.
 Métodos de búsqueda y heurísticos.

Métodos combinados de investigación de operaciones.

Programación Lineal

La segunda etapa de la IDO para resolver un problema es la Construcción de un modelo matemático que represente el sistema. Los modelos matemáticos son una representación idealizada de la realidad pero expresados en términos de símbolos y expresiones matemáticas, por ejemplo, el modelo matemático de un problema industrial es el sistema de ecuaciones y expresiones matemáticas que describen la esencia del problema. Así, se pueden tomar n decisiones cuantificables relacionadas unas con otras, se representan como variables de decisión $(x_1, x_2, ..., x_n)$ para las que se deben determinar los valores respectivos.

La medida de efectividad (ganancia para el problema industrial) se expresa entonces como una función matemática de estas variables de decisión. Esta función se llama función objetivo. También se expresan matemáticamente todas las limitaciones que se puedan imponer sobre los valores de las variables de decisión, casi siempre en forma de ecuaciones o desigualdades. Tales expresiones matemáticas de las limitaciones, con frecuencia reciben el nombre de restricciones. Las constantes (los coeficientes o el lado derecho de las ecuaciones) en las restricciones y en la función objetivo se llaman parámetros del modelo. El modelo matemático puede expresarse entonces como el problema de elegir los valores de las variables de decisión de manera que se maximice la función dada, sujeta a ciertas restricciones.

Una clase importante de este tipo de problemas son los modelos de programación lineal, en los cuales las funciones matemáticas de la función objetivo y las restricciones son lineales.

Modelo general (Forma estándar)

A continuación se describe la forma estándar de la Programación Lineal, para la cual se consideran las siguientes variables:

i = recurso, i = 1, 2, ..., n.j =actividades, j = 1, 2, ..., m.

z =medida global de efectividad.

 c_j = coeficiente de utilidad (maximización) o coeficiente de costo (minimización).

 x_i = nivel de actividad y, representa la variable de decisión.

 $b_i = \text{cantidad disponible para asignar a las actividades}$

(requerimiento mínimo a satisfacerse), se le llama lado derecho.

 A_{ij} = cantidad del recurso i que consume cada unidad de la actividad j.

$$\begin{array}{ll} \text{Max (min)} & \sum_{i=1}^n c_i x_i \\ \text{sujeto a} & \\ & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \leq b_1 \\ & a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \leq b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n \leq b_m \\ & x_i \geq 0, \ \forall i = 1, \ldots, n. \end{array} \tag{D.1}$$

Algunas veces el modelo anterior no se ajusta a nuestra realidad por lo que otras formas legítimas son algunas restricciones de la siguiente forma:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \ge b_1$$
 ó $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$

Cuando las variables de decisión no tienen la restricción de no negatividad, se toma: X_i no restringida en signo, para algunos valores de i.

Cualquier problema que incluya una o varias de las formas mencionadas con anterioridad es considerado como un problema de programación lineal.

Terminología para las soluciones del modelo

Algunas veces podemos estar acostumbrados a que la palabra solución significa la respuesta final a un problema, pero en programación lineal esto es muy distinto. Es por esto que cualquier conjunto de valores específicos para las variables de decisión se llama solución, sin que esto sea una posibilidad deseable o siquiera permitida. Es por ello que hay que identificar los tipos de soluciones usando un adjetivo apropiado.

Una solución factible es aquella en la que todas las restricciones se satisfacen.

La región de soluciones factibles es la colección de todas las soluciones factibles. Es posible que en un problema no se tenga región de soluciones factibles. Dado que existen soluciones factibles, la programación lineal tiene como objetivo encontrar a la mejor de tal forma que esta sea la que en realidad maximice o minimice la función objetivo.

Una solución óptima es aquella solución que es factible y además lleva al valor más favorable de la función objetivo. El valor más favorable es el valor más grande o más pequeño dependiendo si la función objetivo es de maximizar o minimizar, respectivamente, sobre toda la región de soluciones factibles.

Las soluciones de un problema de programación lineal pueden ser: (1) Una única solución óptima; (2) Varias soluciones óptimas (soluciones alternativas); (3) No tener soluciones óptimas.

Métodos de solución de Problemas de Programación Lineal

Cabe mencionar que otros de los métodos muy utilizados siempre y cuando el problema de programación lineal sea de dos variables es el método gráfico.

Existen varios paquetes de computación que utilizan como rutina a este método, y que frecuentemente son utilizados para resolver problemas de programación lineal, de los cuales se mencionan: QSB, LINDO, LINGO, CPLEX, TORA.

A continuación presentamos tres problema para ejemplificar la programación lineal.

Ejemplo 1: Producción

Un fabricante desea determinar la producción semanal óptima de los artículos A, B y C que maximice su ganancia. La ganancia por unidad y el mínimo de producción semanal de estos artículos son, respectivamente, \$2.00, \$2.00 y \$4.00; 100 unidades, 60 unidades y 60 unidades. Los productos A, B y C se procesan en tres máquinas. A continuación se resumen las horas de procesamiento requeridas por artículo por máquina:

Máquina	Art. A	Art. B	Art. C
1	0	1	2
2	1	1	1
3	2	1	1

El número de horas disponibles por semana para las máquinas 1, 2 y 3 es 240, 400 y 360, respectivamente. Encuentre la programación óptima de la producción.

El programa lineal asociado a este problema queda definido de la siguiente manera:

Max
$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

sujeto a
 $x_2 + 2x_3 \le 240$
 $x_1 + x_2 + x_3 \le 400$
 $2x_1 + x_2 + x_3 \le 360$
 $x_1 \ge 100$
 $x_2, x_3 \ge 60$
 $x_1, x_2, x_3 \ge 0$ (D.2)

Donde: $x_i = \text{cantidad del producto } i, i = 1, 2, 3.$ 1 = A; 2 = B; 3 = C. La solución es: $x_1 = 105, x_2 = 60, x_3 = 90$ y la función objetivo vale: 690 unidades.

Ejemplo 2: Dieta

Un agricultor posee 200 cerdos que consumen 90 lb de comida especial todos los días. El alimento se prepara como una mezcla de maíz y harina de soya con las siguientes composiciones:

Alimento	Calcio	Proteína	Fibra	Costo
Maíz	0.001	0.09	0.02	0.02
Harina de Soya	0.002	0.60	0.60	0.02

Los requisitos diarios de alimento de los cerdos son:

- a) Al menos 1% de calcio.
- b) Al menos 30 % de proteína.
- c) Máximo 5% de fibra.

Debemos determinar la mezcla de alimentos con el mínimo costo por día. Entonces, las variables están dadas por:

$$x_1 = lb$$
 de maíz; $x_2 = lb$ de harina de soya
El programa lineal asociado a este problema queda definido de la siguiente manera:

Min
$$z = 0.20x_1 + 0.60x_2$$

s. a $0.001x_1 + 0.002x_2 \ge 0.001$
 $0.090x_1 + 0.600x_2 \ge 0.3$
 $0.020x_1 + 0.600x_2 \le 0.05$
 $x_1 + x_2 \le 90$
 $x_1, x_2 \ge 0$ (D.3)

Este problema no tiene solución ya que no se puede encontrar el óptimo porque no existe región factible.

Ejemplo 3: Producción de sombreros

Una compañía elabora dos tipos de sombreros. Cada sombrero del primer tipo requiere dos veces más tiempo de mano de obra que un producto del segundo tipo. Si todos los sombreros son exclusivamente del segundo tipo, la compañía puede producir un total de 500 unidades al día. El mercado limita las ventas diarias del primero y segundo tipos de 150 y 200 unidades. Supóngase que la ganancia que se obtiene por producto es \$ 8 para tipo 1 y \$ 5 para el tipo 2.

Hay que determinar el número de sombreros de cada tipo que deben elaborarse para maximizar la ganancia.

El programa lineal asociado a este problema queda definido de la siguiente manera:

Max
$$z = 8x_1 + 5x_2$$

s. a
 $x_1 \le 150$
 $x_2 \le 200$
 $2x_1 - x_2 \le 0$
 $x_1, x_2 \ge 0$ enteros

La solución a este problema está dada por $x_1=100$ y $x_2=200$ con z=1800

Programación Entera

En una conferencia impartida en la División de Estudios de Posgrado, de la Facultad de Ingeniería, en la UNAM, en 2003, Hamdy Taha, comentó:

"Si puedes evitarte la programación entera, mucho mejor"

Muchos problemas de la vida real las variables de decisión sólo tienen sentido si su valor es entero. Por ejemplo, problemas de asignación de personas a actividades. Por lo que el sólo hecho de exigir en un problema el que las variables tomen valores enteros hace que un problema de programación lineal se transforme en un problema de programación entera.

El modelo matemático de programación entera es igual que el problema de programación lineal sólo que con la restricción adicional de que todas las variables deben de tomar valores enteros. Para el caso cuando sólo algunas variables deben ser enteras se dice que es un problema de programación entera mixto. Cuando en un problema de programación entera sólo existen dos posibilidades para las variables $\{0,1\}$ éstas son llamadas variables binarias y al problema comúnmente se le nombra como problema de programación entera binario.

A los problemas de programación entera se les considera dentro de los problemas de optimización combinatoria. Un problema combinatorio es aquel que asigna valores numéricos discretos a algún conjunto finito de variables X, de tal forma que satisfaga un conjunto de restricciones y minimice o maximice una función objetivo.

$$\begin{array}{ll} \text{Max (min)} & \sum_{i=1}^{n} c_{i}x_{i} \\ \text{sujeto a} & \\ & a_{11}x_{1} + a_{12}x_{2} + \ldots + a_{1n}x_{n} \leq b_{1} \\ & a_{21}x_{1} + a_{22}x_{2} + \ldots + a_{2n}x_{n} \leq b_{2} \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_{1} + a_{m2}x_{2} + \ldots + a_{mn}x_{n} \leq b_{m} \\ & x_{i} \geq 0, \ \forall i = 1, \ldots, n. \\ & x_{i} \ \text{ enteras, } \forall i = 1, \ldots, n. \end{array} \tag{D.5}$$

La programación entera trata de resolver problemas de: Distribución de bienes, Planeación de la producción y secuenciación de máquinas, Problemas de inversión de capital, Localización de servicios, Selección de cartera, Diseño de redes de telecomunicaciones y transporte.

Algunos problemas representativos de la programación entera son: El problema del agente viajero; El problema del cartero chino; El problema de la mochila; Planeación de máquinas en paralelo; Coloración de vértices; Ruta más corta; Empacado de cajas; Apareamiento o Acoplamientos; Cubierta de conjuntos; Flujo máximo; Problema de Cargo Fijo.

Métodos de solución

Hay dos tipos de métodos de solución: Los exactos y los heurísticos.

Algunos de los métodos exactos son: Método de planos de corte; Método de ramificación y acotamiento; Método de la teoría de grupos; y Métodos de la programación dinámica. Por otro lado, algunos de los métodos heurísticos son: Métodos constructivos; Métodos de descomposición; Métodos de reducción; Manipulación del modelo; y Métodos de búsqueda por entorno.

Se han desarrollado numerosas aplicaciones de programación entera en las cuales se utiliza como herramienta principal a la programación lineal, es decir, nos olvidamos de la condición de integrabilidad y se resuelve el problema como un problema de programación lineal continua, esto se conoce como relajación, es decir se relaja el problema.

Ejemplo

Debido a una escasez de gasolina, la demanda de boletos de Aeroméxico ha aumentado mucho en los últimos meses. La demanda ha crecido tanto que ahora la aerolínea está analizando la posibilidad de adquirir varios aviones nuevos. Existen tres tipos de aviones de entre los cuales se pueden elegir el DC-33, el Boeing 797 y el Lockheed Bi-Star. En la siguiente tabla se muestra el costo, capacidad y tiempo de mantenimiento requerido para cada tipo de avión. Aeroméxico desea adquirir los nuevos aviones al mínimo costo posible, sujeta a los requerimientos de capacidad y mantenimiento.

Los nuevos aviones deben transportar un total combinado de al menos 3,400 pasajeros y deben tener un tiempo combinado total de mantenimiento que no exceda las 250 horas mensuales. Se complica aún más la decisión de que aviones adquirir porque sólo existen disponibles para su compra cinco aviones Bi-Star.

Avión	Costo (millones)	Capacidad	Tiempo (hrs) mantenimiento
DC-33	10	350	25
Boeing 797	15	450	15
Lockeed Bi-Star	12	400	15

Durante el planteamiento determinamos las siguientes variables:

 x_1 = número de DC-33 que se compran; x_2 = número de B-797 que se compran; x_3 = número de Bi-Star que se compran.

El programa entero asociado a este problema queda definido de la siguiente manera:

Min
$$z = 10x_1 + 15x_2 + 12x_3$$

s. a
$$350x_1 + 450x_2 + 400x_3 \ge 3400$$

$$25x_1 + 15x_2 + 15x_3 \le 250$$

$$x_3 \le 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0, \text{ y enteros}$$
(D.6)

La solución es : $x_1 = 4$ y $x_3 = 5$. Por lo que la decisión que debe tomar Aeroméxico es comprar tres aviones del tipo DC-33 y cinco aviones tipo Lockheed Bi-Star.

Puede parecer que los problemas de programación entera son fáciles de resolver. Está garantizado que los problemas de programación entera tiene un número finito de soluciones factibles. Pero existen dos falacias en este tipo de razonamiento:

- 1) Tener un número finito de soluciones asegura que el problema se puede resolver;
- 2) Eliminar algunas soluciones factibles (las no enteras) de un problema de programación lineal será más fácil de resolverlo.

Bibliografía

- [1] P. M. Aardal and K. van Hoesel. Models and solution techniques for frequency assignment problems. Technical Report ZIB-Report 01-40, ZIB Berlin, 2001.
- [2] J. Abello, M.R. Fellows, and J.C. Stillwell. On the complexity and combinatorics of covering finite complexes. *J. Combin.*, 4:103–112, 1991.
- [3] J. Abril, A. Cortes, and J. Ozón. Sistemas multiagente para la asignación de frecuencias en redes celulares. Technical report, Universidad Politécnica de Cataluña, 2000.
- [4] I. Baybars. Optimal assignment of broadcasting frequencues. European Journal of Operational Research, 9:257–263, 1982.
- [5] R. Borndörfer, A. Eisenblätter, M. Grötschel, and A. Martin. The orientation model for frequency assignment problems. Technical Report 98-01, Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin, 1998.
- [6] K.N. Chang and S. Kim. Channel Allocation in cellular radio networks. Computer and Operational Research, 24:849–860, 1997.
- [7] G. Chartrand. Introductory Graph Theory. Dover Publication, 1977.
- [8] G. Chartrand and O. R. Oellermann. Applied an Algorithmic Graph Theory. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, 1993.
- [9] N. Christofides. Graph Theory: An Algorithmic Approach. Academic Press, London, 1975.
- [10] T. H. Cormen, C. E. Leinserson, and R. L. Rivest. Introduction to Algorithms. The MIT Press, McGraw Hill Book Company, 1990.
- [11] M.B. Cozzens and F. S. Roberts. *T-colorings of graphs and the channel assignment problem. Congress Numer.*, 35, 1982.

- [12] M.B. Cozzens and D. I. Wang. The general channel assignment problem. Congress Numer., 41:115–129, 1984.
- [13] J. Van den Heuvel, R. Leese, and M. Shepherd. Graph labelling and radio channel assignment. Journal of Graph Theory., 29(4), 1998.
- [14] R. Diestel. Graph Theory. Graduate texts in mathematics. Springer, 2 ed., 2000.
- [15] L.I. Echeveste-Escobar. Un Enfoque al Problema de Asignación de Canales utilizando Teoría de Gráficas. Tesis de Licenciatura para obtener el Título de Licenciado en Ciencias de la Computación. Facultad de Ciencias, UNAM, 2004.
- [16] S. M. Elnoubi, R. Sing, and S. C. Gupta. A new frequency channel assignment algorithm in high capacity mobile communication systems. IEEE Trans. Vehe. Technol, 31(3):125–131, 1982.
- [17] J. Fiala, Ton Kloks, and Jan Kratochvíl. Fixed parameter complexity of λ -labelings. Discrete Applied Mathematics, 113:59–72, 2001.
- [18] S. Fitzpatrick, J. Janssen, and R.Ñowakowski. Distributive Online Channel Assignment for Hexagonal Cellular Networks with Constraints. Technical Report, G-2000-14, 2000.
- [19] S. Fitzpatrick, J. Janssen, and R. J. Nowakowski. Distributive online channel assignment for hexagonal cellular networks with constraints. In *ICALP Satellite Workshops*, pages 147–154, 2000.
- [20] A. Gamst. Some lower bounds for a class of frequency assignment problems. *IEEE Trans. on Vehicular Tech.*, 35(1):8–14, 1986.
- [21] M. R. Garey and D. Johnson. *Computers and Intractability*. Bell Telephone Laboratories., 1979.
- [22] N. Garg, V. Vazirani, and M. Yannakakis. Approximate max-flow min-(multi)cut theorems and their applications. SIAM Journal on Computing, 25:235–251, 1996.
- [23] S. Gerke. Coloring weighted bipartite graphs with a co-site constraint. *Discrete Mathematics*, 224:125–138, 2000.
- [24] F. Harary. Graph Theory. Addison-Wesley, Reading, Mass, 1969.
- [25] In Proceedings of the 29th Annual ACM Symposium on Theory of Computing. Some optimal inapproximability results, 1997.
- [26] J. Janssen and K. Kilakos. Polyhedral analysis of channel assignment problems: (I) Tours. In IEEE Int. Conf. Communications, Montreal, Canada, 1996.

- [27] J. Janssen, K. Kilakos, and O. Marcotte. Fixed preferece frequency allocation for cellular telephone systems. IEEE Trans. Vehe. Techn, 48(2):533–541, 1999.
- [28] J. Janssen, D. Krizanc, L.Ñarayanan, and S. M. Shende. Distributed Online frequency assignment in Cellular Networks. J. Algorithms, 1988.
- [29] J. C. M. Janssen. *Channel assignment and graph labeling*, volume Dept. of Math and Stats. Dalhousie University. Halifax, N. S. Canada. ., 2002.
- [30] B. Jaumard. Mathematical models and exact methods for channel assignment in cellular networks. *Telecommunications Network Planning*, pages 239–255, 1999.
- [31] B. Jaumard. Comparison of column generation models for channel assignment in cellular networks. *Discrete Applied Mathematics*, 112:217–240, 2001.
- [32] B. Jiménez-Matus. El Problema de Asignación de Canales con Programación Matemática. Tesis de Licenciatura para obtener el Título de Matemático. Facultad de Ciencias, UNAM, 2005.
- [33] V. Kann, S. Khanna, J. Lagergren, and A. Panconesi. Hardness of approximating max k-cut and its dual. *Chicago Journal of Theorical Computer Science*, 2, 1997.
- [34] D.C. Kozen. The design and analysis of algorithms. Springer-Verlag, New York., 1991.
- [35] J. Kratochvíl. Regular codes in regular graph are difficult. Discrete Math., 113:91–205, 1994.
- [36] J. Kratochvíl, A. Proskurowski, and J.A. Telle. Covering regular graphs. *J. Combin. Theory Ser. B*, 71:1–16, 1997.
- [37] U. Manber. Introduction to Algorithms. A Creative Approach. Addison Wesley, USA, 1990.
- [38] R. Mathar and J. Mattfeldt. Channel Assignment in cellular radio networks. . IEEE Trans. on Vehicular Tech., 42:647–656, 1993.
- [39] A. Mehrotra and M.A. Trick. A column generation approach for graph coloring. INFORMS Journal on Computing, 8:344–354, 1996.
- [40] L Narayan and S. Shende. Static frequency assignment in cellular networks. In Proceedings of SIROCCO 97. Carleton Scientific Press, 1977.
- [41] J. Ozón. Contribución al coloreado de grafos y las redes pequeño-mundo. PhD thesis, Universidad Politécnica de Cataluña, 2001.

- [42] C.H. Papadimitriou and K. Steiglitz. Combinatorial Optimization. Algorithms and Complexity. Dover Publication, 1998.
- [43] G. J. E. Rawlins. Compared to what?: an introduction to the analysis of algorithms. W. H. Freeman and Company, USA, 1991.
- [44] A. Raychaudhuri. Intersection assignment, T-coloring and powers of graphs. Ph. D. Thesis, Department of Mathematics, Rutgers University, 1985.
- [45] A. Raychaudhuri. Further results on T-coloring and frequency assignment problems. SIAM J. Discrete Math., 2001.
- [46] P. A. Raymond. Performance analysis of cellular networks. . IEEE Trans. Comun, 39(12):1787–1793, 1991.
- [47] B.A. Reed and C.L. Sales. Recent Advances in Algorithms and Combinatorics. Springer, 2000.
- [48] F. S. Roberts. T-colorings of graphs. Recent results and open problems. Research Report, RRR 7-86, 1986.
- [49] F. S. Roberts. T-colorings of graphs. Recent results and open problems. Research Report, private communication, 1988.
- [50] D. Sakai. Labeling chordal graphs: distance two condition. SIAM J.Discr. Math., 7:133-140, 1994.
- [51] R. Sedgewick. An introduction to the analysis of algorithms. Addison-Wesley Publishin Company, USA, 1996.
- [52] D. H. Smith and S. Hurley. Bounds for the frequency assignment problem. $Discrete\ Math.,\ 167/168:571-582,\ 1997.$
- [53] J.A. Vega-Garfias. Asignación de Canales: Perspectiva General, Cotas y Algoritmos. Tesis de Maestría. CINVESTAV-IPN, 2003.
- [54] M. A. Weiss. Data structures and Algorithm analysis in Java. Addison Wesley Longman, USA, 1999.
- [55] M. A. Weiss. Estructuras de datos en JAVA. Addison Wesley, Madrid, 2000.
- [56] R. K. Yeh and J. R. Griggs. Labelling graphs with a condition at distance 2. SIAM J.Discr. Math., 5(4:586-595), 1992.