#94

SERIE
MATEMÁTICAS

José Alfredo Amor

Lógica proposicional dentro de la lógica de 1er orden

AÑO
2007

VÍNCULOS MATEMÁTICOS

Facultad de Ciencias
Vínculos matemáticos

Lógica proposicional dentro de la lógica de primer orden

El estudio de la lógica proposicional y su decidibilidad efectiva dentro del lenguaje de la lógica de predicados

José Alfredo Amor*

Serie: Notas de clase

Nº 94. 2011

* Profesor de la Facultad de Ciencias de la UNAM
Impreso en la Coordinación de Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM

LOGICA PROPOSICIONAL

DENTRO DE LA LOGICA DE PRIMER ORDEN

El estudio de la lógica proposicional y su decidibilidad

efectiva dentro del lenguaje de la lógica de predicados

Jose Alfredo Amor Montaño

Facultad de Ciencias UNAM

LOGICA PROPOSICIONAL DENTRO DE LA LOGICA DE PRIMER ORDEN

Introducción

La lógica proposicional o lógica de enunciados es el estudio de la lógica de los conectivos a partir de proposiciones, que puedan ser verdaderas o falsas. Es común estudiar esta lógica con un lenguaje que tiene como símbolos a "letras proposicionales" P, Q, R, etc. y los símbolos usuales para los conectivos: negación $\neg$, conjunción $\wedge$, disyunción v, condicional $\longrightarrow$, bicondicional $\longleftrightarrow$.

Desde luego también se usan paréntesis y se hacen convenciones acerca del uso de los paréntesis. Todo eso se verá más adelante en la definición de proposición.

Lo que queremos resaltar en esta parte es el hecho de que las letras proposicionales representan afirmaciones o enunciados que pueden ser verdaderos o falsos pero de los que no sabemos su contenido. Esto no sucede en la realidad. El punto de vista de estas notas respecto a la lógica proposicional es totalmente distinta al usual y clásico; véase [4], [5] y [6]; ya que partimos de un lenguaje de primer orden en el cual tenemos variables, cuantificadores, igualdad, predicados, funciones y constantes, **ademas** de los conectivos. Es un lenguaje muy rico y expresivo con el cual se pueden formular la mayoría de las teorías matemáticas.

Así pues, para nosotros, la lógica proposicional será el estudio de la lógica de los conectivos, pero **dentro de** un lenguaje de primer orden y las letras proposicionales, serán enunciados que pueden ser verdaderos o falsos pero que sí sabemos qué contenido tienen, solo que hacemos abstracción de él, para fijarnos en su comportamiento como un todo o como un "bloque", respecto a los conectivos.

Por ejemplo el siguiente enunciado, formalizable en lenguaje de predicados o de primer orden:

" 5 = 3 + 2   y   **no** hay primo distinto de 2 que sea par "

se puede traducir usando las partes subrayadas, como bloques respecto a los conectivos, como: $P \wedge \neg Q$, donde $\wedge$ simboliza "y" y $\neg$ simboliza "no". Sin embargo no es natural que tengamos en nuestro lenguaje a P y Q como **símbolos** proposicionales de los que no sabemos su contenido, sino que deberíamos tener como símbolos: =, símbolos de función como +, símbolos constantes como 5, 3, 2, símbolos de predicado como "ser primo", "ser par", cuantificadores $\forall$, $\exists$; y variables, para decir "existe", "todo", etc., **ademas** de los símbolos para conectivos como "y" y "no".

En los libros clásicos como [4],[5],[6] la presentación se hace con variables proposicionales, como se dijo antes, en un lenguaje llamado lenguaje proposicional; esto se desarrolla en el primer capítulo. En el capítulo segundo se presenta la lógica de primer orden o lógica de predicados como **otro** lenguaje y generalemente no es clara la relación entre esos dos lenguajes y esas dos lógicas, aunque se supone que la segunda, la de predicados, "contiene" a la primera, la de proposiciones, sin embargo esto no es muy claro a excepción de [4], que lo aclara muy brevemente. Nuestro enfoque es con un solo lenguaje (el de predicados) y con un solo tratamiento, de la lógica proposicional realmente como parte o subconjunto de la lógica de predicados. Otro libro que presenta la lógica de predicados pero que no desarrolla de ningún modo la lógica de proposiciones, es [7].

En relación a los libros clásicos pues, nuestra presentación es al revés; desarrollamos o suponemos, primero su segundo capítulo y después el primer capítulo, todo con el mismo lenguaje.

Creemos que este enfoque acerca de la lógica proposicional tiene varias ventajas y es un estudio muy interesante por las siguiente razones: en primer lugar no hay un cambio de lenguaje entre lógica proposicional y lógica de predicados; el lenguaje es el mismo: un lenguaje de primer orden o lenguaje de predicados. En segundo lugar el enfoque de la lógica de proposiciones dentro de un lenguaje de primer orden tiene un contenido real; las letras P,Q,R, no son entes cerrados y extraños, sino fórmulas del lenguaje de primer orden dado y su estudio en relación al comportamiento lógico de los conectivos, nos proporciona un procedimiento efectivo de decisión, en forma parcial, para los conceptos de validez universal, consecuencia lógica y satisfacibilidad, ya que la lógica proposicional es efectivamente decidible para los conceptos de: tautología, consecuencia lógica-proposicional (a la que llamaremos consecuencia tautológica) y satisfacibilidad-proposicional. En tercer lugar, este enfoque aclara perfectamente bien y jusfica con todo rigor, la diferencia entre tautología y verdad universal. Una tautología es una fórmula que es verdadera en cualquier interpretación (es decir, una fórmula universalmente válida) cuya verdad depende **exclusivamente** de los conectivos. Una verdad universal ó universalmente válida es una fórmula que es verdadera con cualquier interpretación y cuya verdad puede depender tanto de los conectivos como de los cuantificadores y de la igualdad. Será claro entonces que toda tautología es universalmente válida pero **no** inversamente. En forma análoga se aclara la relación entre consecuencia lógica y consecuencia tautológica y la relación entre satisfacibilidad y satisfacibilidad-proposicional.

INDICE

Prerrequisitos.

Se suponen conocidos como requisitos previos para estas notas, los conceptos siguientes: Véase [4], [7] y [2].

1. Lenguaje de primer orden L, de un tipo dado. El tipo consta de los símbolos de predicado, de función y de constante y el resto de los símbolos son comunes a **cualquier** lenguaje de primer orden y son:
   a) Variables: $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots\ldots$
   b) Cuantificadores: $\forall$, $\exists$.
   c) Símbolo de igualdad: $\approx$
   d) Conectivos: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\longrightarrow$, $\longleftrightarrow$.
   e) Auxiliares:), (, ' .

2) Estructuras Algebraico-Relacionales de un tipo dado.
Aquí el tipo corresponde al tipo del lenguaje del cual la estructura es interpretación. Las denotaremos con las letras $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, etc; y respectivamente con las letras latinas A, B, C, etc, a sus universos. La estructura $\mathfrak{A}$ es una cuarteta $\mathfrak{A} = \langle A, \mathcal{R}, \mathcal{O}, \mathcal{E} \rangle$, donde A es su universo y es un conjunto no vacío; $\mathcal{R}$ es una colección (posiblemente vacía) de relaciones sobre A que son interpretación de los símbolos de predicado del tipo; $\mathcal{O}$ es una colección (posiblemente vacía) de operaciones sobre A, que son interpretación de los símbolos de función del tipo; y $\mathcal{E}$ es una colección (posiblemente vacía) de elementos de A que son interpretación de los símbolos constantes del tipo

3. El concepto de interpretación de términos. Si t es un término del lenguaje L y $\mathfrak{A}$ es una estructura interpretación para L y S es una sucesión de elementos de su universo A, denotamos con $t^{\mathfrak{A}}[s]$ la interpretación del término t en la estructura $\mathfrak{A}$ con la sucesión de S.

4. El concepto de satisfacción de fórmulas. Si φ es una fórmula del lenguaje L, $\mathfrak{A}$ es una interpretación para L y S una sucesión de elementos de A, denotamos $\mathfrak{A} \models \varphi\ [s]$ para abreviar que la fórmula φ es satisfecha por la sucesión S en la estructura $\mathfrak{A}$.

5. <u>El concepto de verdad de Tarski.</u> Si φ es fórmula de L y $\mathfrak{A}$ es interpretación para L, con $\mathfrak{A} \models \varphi$ denotamos que φ es verdadera en $\mathfrak{A}$ ó que $\mathfrak{A}$ es modelo de φ; es decir, que para toda sucesión S de elementos de A, $\mathfrak{A} \models \varphi_{[s]}$.

6. <u>El concepto de verdad universal.</u> Sea φ es fórmula de L. Con $\models \varphi$, denotamos que φ es universalmente válida, es decir, que para toda interpretación $\mathfrak{A}$ de L, $\mathfrak{A} \models \varphi$. Es decir, φ es verdadera en toda interpretación de L.

7. <u>El concepto de consecuencia lógica.</u> Si Σ es un conjunto de fórmulas de L y φ es una fórmula de L, con $\Sigma \models \varphi$ denotamos que φ es consecuencia lógica de Σ; es decir, que para toda interpretación $\mathfrak{A}$ de L y toda sucesión S de elementos de A, se cumple lo siguiente: si $\mathfrak{A} \models \alpha_{[s]}$ para toda $\alpha \in \Sigma$, entonces $\mathfrak{A} \models \varphi_{[s]}$.

8. <u>El concepto de satisfacibilidad.</u> Si Σ es un conjunto de fórmulas de L decimos que Σ es satisfacible, si hay una interpretación $\mathfrak{A}$ de L y una sucesión S de elementos de A, tales que para toda $\alpha \in \Sigma$, $\mathfrak{A} \models \alpha_{[s]}$

Las fórmulas se denotan con las letras griegas minúsculas α, β, γ, φ, ψ. Los conjunto de fórmulas se denotan con las mayúsculas Σ, Γ, Δ. Las estructuras o interpretaciones del Lenguaje L se denotan con letras góticas $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, y sus respectivos universos, con las respectiva letras latinas A, B, C,... En la notación de consecuencia lógica, si $\Sigma = \{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$, entonces $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\} \models \varphi$ lo denotaremos sin llaves de conjunto: $\alpha_1,\dots,\alpha_n \models \varphi$.

Con "sii" y con "$\Leftrightarrow$" indistintamente abreviamos "si y sólo si". Con " $\Rightarrow$ " abreviamos " si ..... entonces .... ". Con "H.I." abreviamos "Hipótesis Inductiva".

I. Bloques, proposiciones y valuaciones

Sea L un lenguaje de primer orden, fijo pero arbitrario; es decir, están dados los predicados, los símbolos de función y las constantes.

Definición. Una fórmula φ de L se llama un bloque sii φ es una fórmula atómica o es una cuantificación.

Ejemplos de bloques:

1) Si P es un predicado de n argumentos y $t_1, \ldots, t_n$ son términos, $P(t_1 \ldots t_n)$ es un bloque ya que es una fórmula atómica.
2) Si t_1, t_2 son términos, entonces $(t_1 \approx t_2)$ es una bloque ya que es una fórmula atómica.
3) Si α es una fórmula cualquiera y x es una variable entonces la fórmula $(\forall x\ \alpha)$ es un bloque ya que es una cuantificación y $(\exists\ x\ \alpha)$ es un bloque por la misma razón.

Es claro que todo bloque será de alguna de las formas anteriores. Supongamos que P, Q son predicados binarios, que f, g son funciones y que a, c son constantes del lenguaje L, entonces las siguientes fórmulas son bloques:

$P(x,y)$, $Q(c,y)$, $\forall x P(x,a)$, $\exists y\ P(c,y)$, $\forall x\ \exists y\ P(x,y)$,
$\forall x(P(x,c) \longrightarrow Q(x,x))$, $\forall x(P(c,a) \vee \neg\exists y\ Q(x,y))$, $(x \approx c)$,
$\exists x\ (P(x) \wedge x \approx f(c))$, $(f(c) \approx g(a))$, $\forall x(x \approx x)$, $\exists x(x \approx x \wedge P(c))$.

Algunos ejemplos de fórmulas que no son bloques:
$P(x,y) \wedge Q(c,x)$, $(x \approx x) \wedge P(c)$, $\forall x P(x) \vee (x \approx f(c))$, $P(c,a) \vee \neg\exists y\ Q(x,y)$
$\forall x \exists y\ P(x,y) \vee \exists z\ P(z,c)$, $(f(c) \approx x \longrightarrow f(c) \approx g(x))$, $P(c) \vee \neg\ P(c)$.

Obsérvese que un bloque es una fórmula que no es una negación, ni es una disyunción, ni es una conjunción, ni es una condicional, ni es una bicondicional.

Definición. Sea E el conjunto de todos los bloques de L.
Obsérvese que toda fórmula de L puede generarse a partir de E mediante una seria finita de aplicaciones de los conectivos, e inversamente toda expresión generada de esa manera, es una fórmula. Rigurosamente:

Definición. Una expresión es una sucesión de símbolos de L.

Definición. Una proposición se define recursivamente como:

1) Los bloques son proposiciones.
2) Si α, β son proposiciones, entonces $(\neg\alpha)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \longrightarrow \beta)$, $(\alpha \longleftrightarrow \beta)$, son proposiciones.
3) Una expresión es una proposición sólo si lo es con base en 1) y 2).

Teorema 1 Para cualquier expresión φ:

φ es una fórmula $\Leftrightarrow$ φ es una proposición.

Prueba:

$\Rightarrow$) Por inducción sobre la formación de φ como fórmula.

- si φ es atómica $\Rightarrow$ φ es bloque $\therefore$ φ es proposición por Def (1).

  Supongamos α, β fórmulas, son proposiciones. (H. I.)
- si $\varphi = (\neg\, \alpha)$ o $\varphi = (\alpha \vee \beta)$ o $\varphi = (\alpha \wedge \beta)$ o $\varphi = (\alpha \longrightarrow \beta)$ o $\varphi = (\alpha \longleftrightarrow \beta)$ $\therefore$ φ es proposición por H. I. y por Def. (2).
- Si $\varphi = (\forall\, x\, \alpha)$ o $\varphi = (\exists\, x\, \alpha)$ $\Rightarrow$ φ es bloque $\therefore$ φ es proposición por Def (1).

$\Leftarrow$) Por inducción sobre la formación de φ como proposición.

- Si φ es bloque $\Rightarrow$ φ es atómica ($\therefore$fómula) o φ es cuantificación ($\therefore$fórmula)
- Suponemos que α, β proposiciones, son fórmulas; entonces $(\neg\alpha)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \longrightarrow \beta)$, $(\alpha \longleftrightarrow \beta)$ son fórmulas por definición de fórmula.

Así pues, toda proposición es fórmula y toda la fórmula es proposición.

$\square$

Definición. Una valuación es una función **v** definida sobre el conjunto **E** y con valores en $\{0,1\}$. Es decir **v**: E $\longrightarrow$ $\{0,1\}$.

Es claro que **E** es un subconjunto del conjunto de todas las fórmulas. Ahora extenderemos la función **v** a una función $\mathbf{v}^*$ definida para todas las fórmulas.

<u>Definición</u>. Dada una valuación v, definimos su <u>extensión v^*</u> sobre todas las fórmulas de L, como:

$$v^*(\alpha) = v(\alpha) \quad \text{si} \quad \alpha \in E$$

$$v^*(\neg\alpha) = 1 - v^*(\alpha)$$

$$v^*(\alpha \vee \beta) = \text{máximo } \{v^*(\alpha),\ v^*(\beta)\}$$

$$v^*(\alpha \wedge \beta) = \text{mínimo } \{v^*(\alpha),\ v^*(\beta)\}$$

$$v^*(\alpha \longrightarrow \beta) = \begin{cases} 0 \text{ si } v^*(\alpha) = 1 \text{ y } v^*(\beta) = 0 \\ 1 \text{ En otro caso.} \end{cases}$$

$$v^*(\alpha \longleftrightarrow \beta) = \begin{cases} 0 \quad \text{si } v^*(\alpha) \neq v^*(\beta) \\ 1 \quad \text{si } v^*(\alpha) = v^*(\beta) \end{cases}$$

Obsérvese que para toda fórmula φ, $v^*(\varphi) \in \{0,1\}$ y que

$$v^* : \{\varphi \ / \ \varphi \text{ es fórmula}\} \longrightarrow \{0,1\}$$

Esta definición de v^* a partir de v y de los operadores lógicos está justificada con un teorema general de recursión para conjuntos generados a partir de un conjunto base (en este caso, los bloques) y con una serie de operaciones generadoras (en este caso la aplicación de los conectivos). Véase [4].

II. Tautología, Consecuencia tautológica y satisfacibilidad proposicional.

Sea v una valuación y α una fórmula. Decimos que <u>v satisface a α</u> sii $v^*(\alpha) = 1$. Si Σ es un conjunto de fórmulas, decimos que v satisface Σ si $v^*(\beta) = 1$ para toda $\beta \in \Sigma$.

<u>Definición</u> Sea $\Sigma \cup \{\varphi\}$ un conjunto de fórmulas.

1) φ es una <u>tautología</u> sii toda valuación satisface φ.
   Esto se denotará: $\models_T \varphi$.

2) φ es <u>consecuencia tautológica</u> de Σ sii toda valuación que satisface Σ, satisface φ.
   Esto se denotará: $\Sigma \models_T \varphi$. Aqui Σ es conjunto de fórmulas y φ es fórmula. Si $\{\alpha\} \models_T \varphi$ esto lo denotamos $\alpha \models_T \varphi$ y en forma análoga, si Σ es $\{\alpha_1,\dots,\alpha_k\}$, entonces $\{\alpha_1,\dots,\alpha_k\} \models_T \varphi$ lo denotamos $\alpha_1,\dots,\alpha_k \models_T \varphi$.

3) Σ es <u>proposicionalmente satisfacible</u> (prop. sat.) sii hay una valuación que satisface Σ.

<u>Teorema 2</u>

i) $\models_T \varphi$ sii $(\neg\varphi)$ no es prop. sat.
ii) $\models_T \varphi$ sii $\emptyset \models_T \varphi$. Aquí $\emptyset$ denota al conjunto vacío de fórmulas.
iii) $\Sigma\cup\{\alpha\} \models_T \beta$ sii $\Sigma \models_T (\alpha \longrightarrow \beta)$. En particular: $\alpha \models_T \beta$ sii $\models_T (\alpha \longrightarrow \beta)$.
iv) $\Sigma \models_T \alpha$ sii $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ no es prop. sat.
v) Si $\Sigma \models_T \alpha$ y $\Sigma \subseteq \Delta$ entonces $\Delta \models_T \alpha$
vi) Si $\models_T \alpha$ y $\models_T (\alpha \longrightarrow \beta)$ entonces $\models_T \beta$
vii) Σ es prop. sat. sii hay β tal que $\Sigma \not\models_T \beta$
viii) $\alpha_1,\dots,\alpha_n \models_T \varphi$ sii $\models_T (\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \longrightarrow \varphi)$
sii $(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \wedge \neg\varphi)$ no es prop. sat.

□

Ejercicio. Probar el Teorema 2.

<u>Definición</u>. Sean α, β fórmulas de L. Decimos que α y β son <u>tautológicamente</u> <u>equivalentes</u> (denotándolo $\alpha \equiv_T \beta$) sii $\models_T (\alpha \longleftrightarrow \beta)$.

Decimos que α implica tautológicamente a β sii $\models_T (\alpha \longrightarrow \beta)$.

Es fácil verificar que: $\alpha \models_T \beta$ y $\beta \models_T \alpha$ sii $\alpha \underset{T}{\equiv} \beta$. También es inmediato verificar que la relación " $\underset{T}{\equiv}$ " es una relación de equivalencia entre las fórmulas.

Teorema 3

Sustitución en tautologías, origina tautologías.

Si $\models_T \varphi$ y $A_1, \dots, A_n$ son los bloques de φ; $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ son fórmulas cualesquiera y φ' es el resultado de sustituir α_i en lugar de A_i en φ, entonces $\models_T \varphi'$.

Ejemplo: $\varphi = (P(c) \longrightarrow (\exists x Q(x,c) \longrightarrow P(c)))$ Es fácil ver que $\models_T \varphi$.

$A_1 = P(c)$, $A_2 = \exists x Q(x,c)$.

Sean $\alpha_1 = (\forall z\ P(z) \wedge Q(a,w))$, $\alpha_2 = (Q(x,y) \wedge \neg R(x,c))$. Entonces

$\varphi' = (\forall z\ P(z) \wedge Q(a,w)) \longrightarrow [(Q(x,y) \wedge \neg R(x,c)) \longrightarrow (\forall z\ P(z) \wedge Q(a,w))]$.

Prueba: Sea v cualquier valuación. Entonces $v^*(\varphi) = 1$.

Sea $v': E \longrightarrow \{0,1\}$ tal que $v'(A_i) = v^*(\alpha_i)$ $\forall_i = 1, \dots, n$.

Entonces $v'^*(\varphi) = 1$ pero obsérvese que $v^*(\varphi') = v'^*(\varphi)$ ya que $v^*(\varphi')$ está determinado por los valores de las α_i bajo v y por su estructura dentro de φ' y $v'^*(\varphi)$ está determinada por los valores de las A_i bajo v' y por su estructura dentro de φ, pero dichos valores y dichas estructuras son exactamente los mismos, por construcción.

Así pues $v^*(\varphi') = 1$ y $\models_T \varphi'$.

□

Teorema 4

Sustitución de equivalentes origina equivalentes

Sea φ' el resultado de sustituir β en lugar de alguna o todas, ocurrencias de α en φ.

Entonces $\models_T (\alpha \leftrightarrow \beta) \longrightarrow (\varphi \leftrightarrow \varphi')$ y por lo tanto, si $\alpha \underset{T}{\equiv} \beta$ entonces $\varphi \underset{T}{\equiv} \varphi'$.

Ejemplo: $\varphi = [(\exists x\ P(x) \longrightarrow Q(c)) \wedge \neg Q(c)] \longrightarrow \neg\exists x\ P(x)$

Sea $\alpha = (\exists x\ P(x) \longrightarrow Q(c))$ $\beta = (\neg \exists x\ P(x) \vee Q(c))$ Claramente $\alpha \underset{T}{\equiv} \beta$.

$\varphi' = [(\neg \exists x\ P(x) \vee Q(c)) \wedge \neg Q(c)] \longrightarrow \neg\exists x\ P(x) \therefore \varphi \underset{T}{\equiv} \varphi'$.

Prueba:

Sea v cualquier valuación. Supongamos que $v^*((\alpha\leftrightarrow\beta)) = 1$, entonces $v^*(\alpha) = v^*(\beta)$. Pero entonces $v^*(\varphi) = v^*(\varphi')$ por corresponder a φ y φ' los mismos valores en los mismos lugares de su estructura. Así pues $v^*(\varphi \leftrightarrow \varphi') = 1$ y entonces $v^*((\alpha \leftrightarrow \beta) \longrightarrow (\varphi \leftrightarrow \varphi')) = 1$.

Ahora, si $v^*(\alpha \leftrightarrow \beta) = 0$ entonces $v^*((\alpha \leftrightarrow \beta) \longrightarrow (\varphi \leftrightarrow \varphi')) = 1$.

La conclusión final se sigue de la definición de $\alpha \underset{T}{\equiv} \beta$ y del Teorema 2, vi). □

Teorema 5

Las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

I) Para cualquier conjunto Σ de fórmulas de **L**:

Si todo $\Gamma \subseteq \Sigma$, Γ finito es prop. sat. entonces Σ es prop. sat.

II) Para cualquier conjunto $\Delta \cup\{\alpha\}$ de fórmulas de **L**:

Si $\Delta \models_T \alpha$ entonces hay un $\Gamma \subseteq \Delta$, Γ finito tal que $\Gamma \models_T \alpha$.

Prueba:

I $\Rightarrow$ II) Supongamos I. Sea $\Delta\cup\{\alpha\}$ un conjunto de fórmulas de L.

Probemos la contrapuesta: supongamos que para todo $\Gamma \subseteq \Delta$, Γ finito, $\Gamma \not\models_T \alpha$, entonces para todo $\Gamma \subseteq \Delta$, Γ finito, hay v tal que v satisface Γ y v no satisface α $\therefore$ v satisface $(\neg\, \alpha)$.

Así pues para todo Γ finito $\Gamma \subseteq \Delta \cup\{\neg\, \alpha\}$, Γ es prop. sat. Entonces por I), $\Delta \cup\{\neg\, \alpha\}$ es prop. sat, es decir, hay v que satisface Δ y no satisface α (pues satisface $\neg\alpha$); esto es que $\Delta \not\models_T \alpha$.

II $\Rightarrow$ I). Supongamos II. Sea Σ conjunto de fórmulas de **L**.

Probemos la contrapuesta: Supongamos que Σ no es prop. sat. entonces para toda v, v no satisface Σ, entonces $\Sigma \models_T (P(\mathbf{x}) \wedge \neg\, P(\mathbf{x}))$ se cumple por vacuidad. De aquí por II, hay un $\Gamma \subseteq \Sigma$, Γ finito tal que $\Gamma \models_T (P(\mathbf{x}) \wedge \neg P(\mathbf{x}))$, pero entonces Γ no puede ser satisfacible y es $\Gamma \subseteq \Sigma$, Γ finito, Γ no satisfacible proposicionalmente.

□

Las afirmaciones anteriores son ciertas y son dos versiones del teorema llamado, de Compacidad para la Lógica Proposicional.

Teorema de Compacidad. Para cualquier conjunto Σ de fórmulas de L:

Σ es prop. sat. sii todo subconjunto finito de Σ es prop. sat.

En lo que sigue daremos una prueba de este importante teorema; antes damos unas definiciones y lemas previos.

Definición. Sea Σ un conjunto de fórmulas de L.

1. Σ es finitamente satisfacible (fin. sat.) sii todo subconjunto finito de Σ es prop. sat.
2. Σ es maximal finitamente satisfacible (max. fin. sat.) sii Σ es un maximal en sentido de contención entre todos los conjuntos fin. sat. de fórmulas; es decir, si Σ' es fin. sat. y $\Sigma \subseteq \Sigma'$ entonces $\Sigma = \Sigma'$.
3. La valuación canónica asociada a Σ, es $v_\Sigma : E \longrightarrow \{0,1\}$, tal que para toda $\alpha \in E$,
$v_\Sigma(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \in \Sigma \\ 0 & \text{si } \alpha \notin \Sigma \end{cases}$

Ejercicio. Sea v una valuación. Sea $\Sigma_v = \{\alpha \ / \ v(\alpha) = 1 \}$. Mostrar que Σ_v es un maximal fin. sat.

Lema o Sea Σ un conjunto maximal fin. sat. de fórmulas de L y α, β fórmulas, entonces:

i) $\alpha \notin \Sigma$ sii $(\neg \alpha) \in \Sigma$

ii) $\alpha \in \Sigma$ o $\beta \in \Sigma$ sii $(\alpha \vee \beta) \in \Sigma$

i) $\Rightarrow$) Supongamos $\alpha \notin \Sigma$. Luego $\Sigma \subsetneqq \Sigma \cup \{\alpha\}$ $\therefore$ $\Sigma \cup \{\alpha\}$ no es fin. sat. por lo que hay un Γ finito tal que $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq \Sigma \cup \{\alpha\}$ y $\Gamma \cup \{\alpha\}$ es no satisfacible. Veamos que $\Sigma \cup \{\neg \alpha\}$ si es fin. sat. Sea $\Delta \cup \{\neg \alpha\} \subseteq \Sigma \cup \{\neg \alpha\}$ con Δ finito. Obsérvese que $\Gamma \cup \Delta \subseteq \Sigma$ y $\Gamma \cup \Delta$ es finito de donde por hipótesis $\Gamma \cup \Delta$ es satisfacible por una valuación digamos v y entonces $v^*(\alpha) = 0$ pues $\Gamma \cup \{\alpha\}$ no es satisfacible. Luego $v^*(\neg \alpha) = 1$ y así v satisface $\Gamma \cup \{\neg \alpha\}$. Por tanto $\Sigma \cup \{\neg \alpha\}$ es fin. sat. y como $\Sigma \subseteq \Sigma \cup \{\neg \alpha\}$ y Σ es max. fin. sat. entonces $(\neg \alpha) \in \Sigma$.

$\Leftarrow$) Supongamos $(\neg \alpha) \in \Sigma$. Entonces $\alpha \notin \Sigma$ puesto que si $\alpha \in \Sigma$, se tendría $\{\alpha, \neg\alpha\} \subseteq \Sigma$ lo que contradice que Σ es fin. sat.

ii) $\Rightarrow$) Supongamos que $\alpha \in \Sigma$ o $\beta \in \Sigma$. Veamos que $\Sigma \cup \{\alpha\vee\beta\}$ es fin. sat. Sea Γ finito, $\Gamma \cup \{\alpha\vee\beta\} \subseteq \Sigma \cup \{\alpha\vee\beta\}$. Si $\alpha \in \Sigma$ entonces hay v que satisface $\Gamma \cup \{\alpha\}$ $\therefore$ v satisfece $\Gamma \cup \{\alpha\vee\beta\}$. Si $\beta \in \Sigma$ es análogo, así pues $\Sigma \cup \{\alpha\vee\beta\}$ es fin. sat. y $\Sigma \subseteq \Sigma \cup \{\alpha\vee\beta\}$, pero Σ es max. fin. sat. $\therefore$ $\alpha\vee\beta \in \Sigma$.

$\Leftarrow$) Supongamos $\alpha \notin \Sigma$ y $\beta \notin \Sigma$. Entonces por i)$\Rightarrow$) $(\neg\alpha) \in \Sigma$ y $(\neg\beta) \in \Sigma$ entonces $(\alpha\vee\beta) \notin \Sigma$ pues si $(\alpha\vee\beta) \in \Sigma$ se tendría $\{\neg\alpha, \neg\beta, \alpha\vee\beta \} \subseteq \Sigma$ lo que contradice que Σ es fin. sat.

□

Lema 1. Si Σ es fin. sat. entonces hay un Σ' tal que $\Sigma \subseteq \Sigma'$ y Σ' es maximal fin. sat.

Prueba. Sea $F = \{ \Delta / \Sigma \subseteq \Delta$ y Δ es fin. sat.$\}$. Aplicaremos el Lema de Zorn al conjunto parcialmente ordenado $<F, \subseteq >$:
Sea C una cadena en F; es decir $C \subseteq F$ y $<C, \subseteq >$ es orden total. Entonces $\bigcup C$ es una cota superior de C. Veamos que $\bigcup C \in F$. Como $\Sigma \subseteq \Delta$ para todo $\Delta \in C$ entonces claramente $\Sigma \subseteq \bigcup C$; ahora veamos que $\bigcup C$ es fin. sat., sea $\Gamma \subseteq \bigcup C$, Γ finito, así $\Gamma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ y por lo tanto hay $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ en C tales que para cada i, $\alpha_i \in \Delta_i$; como C es totalmente ordenado, hay un $m \in \{1, \ldots, n\}$ tal que para toda i, $\Delta_i \subseteq \Delta_m$ por tanto $\Gamma \subseteq \Delta_m \subseteq \bigcup C$ y Δ_m es fin. sat. por estar en F, luego Γ es satisfacible; así pues $\bigcup C$ es fin. sat. y $\bigcup C \in F$.

Ahora bien, por lo anterior y por el Lema de Zorn, hay en F un elemento maximal respecto a la contención. Sea Σ' tal elemento maximal fin. sat.; entonces $\Sigma \subseteq \Sigma'$ y Σ' es maximal fin. sat. $\square$

Lema 2. Sea Σ maximal fin. sat., entonces su valuación canónica v_Σ satisface a Σ.

Prueba. Demostraremos por inducción sobre la formación de α como proposición que:

$$v^*_\Sigma(\alpha) = 1 \text{ sii } \alpha \in \Sigma$$

Si $\alpha \in E$ entonces $v^*_\Sigma(\alpha) = v_\Sigma(\alpha) = 1 \Leftrightarrow \alpha \in \Sigma$, por definición de v_Σ.

Supongámoslo para α y β (H. I.)

$$v^*_\Sigma(\neg \alpha) = 1 \Leftrightarrow v^*_\Sigma(\alpha) = 0 \Leftrightarrow v^*_\Sigma(\alpha) \neq 1 \underset{\text{H. I.}}{\Leftrightarrow} \alpha \notin \Sigma \underset{\text{Lema o}}{\Leftrightarrow} (\neg \alpha) \in \Sigma$$

$$v^*_\Sigma(\alpha \vee \beta) = 1 \Leftrightarrow v^*_\Sigma(\alpha) = 1 \text{ o } v^*_\Sigma(\beta) = 1 \underset{\text{H. I.}}{\Leftrightarrow} \alpha \in \Sigma \text{ o } \beta \in \Sigma \underset{\text{Lema o}}{\Leftrightarrow} (\alpha \vee \beta) \in \Sigma$$

$\square$

Teorema de Compacidad. Para cualquier Σ conjunto de fórmulas de **L**:

$$\Sigma \text{ es prop. sat. sii } \Sigma \text{ es fin. sat.}$$

Prueba. Sea Σ fin. sat.. Por Lema 1, hay un Σ' tal que $\Sigma \subseteq \Sigma'$ y Σ' es maximal fin. sat.. Por Lema 2, la valuación canónica $v_{\Sigma'}$ satisface a Σ' por lo que satisface a Σ, de donde Σ es prop. sat..

$\square$

Ejercicios

1. Traducir las siguientes oraciones a proposiciones, usando bloques para representar afirmaciones que no sean una negación, ni una disyunción, ni conjunción, ni condicional, ni bicondicional. Por ejemplo: "2 es primo y no es menor que 1", usando **P** para representar el bloque "2 es primo" y **Q** para el bloque "2 es menor que 1", la traducción será: $P \wedge \neg Q$.

a) Si el Sr. López es feliz, la Sra López es infeliz.

b) Una condición necesaria y suficiente para que el sultán sea feliz, es que tenga vino, mujeres y música.

c) Una condición suficiente para que **x** sea impar, es que **x** sea primo distinto de 2.

d) Una condición necesaria para que una sucesión **S** converja, es que **S** sea acotada.

e) Si **x** es positivo, x^2 es positivo y si x^2 es positivo entonces **x** puede ser positivo o puede no serlo.

2. Decir si las siguientes afirmaciones son ciertas o no y justificarlo con una prueba o con un contraejemplo:

a) Si $\models_T \alpha$ y $\models_T \beta$ entonces $\models_T (\alpha \wedge \beta)$

b) Si $\models_T (\alpha \wedge \beta)$ entonces $\models_T \alpha$ y $\models_T \beta$

c) Si $\models_T \alpha$ o $\models_T \beta$ entonces $\models_T (\alpha \vee \beta)$

d) Si $\models_T (\alpha \vee \beta)$ entonces $\models_T \alpha$ o $\models_T \beta$

e) Si $\not\models_T \alpha$ entonces $\models_T (\neg \alpha)$.

f) Si $\models_T \beta$ entonces $\not\models_T (\neg \beta)$.

g) $\models_T (\neg \alpha \longrightarrow \alpha) \longrightarrow \alpha$

h) $\models_T \alpha \longrightarrow (\neg\alpha \longrightarrow \beta)$

i) $\models_T \forall x\ (x \approx x)$

j) $\models_T [(\forall x\ P(x) \longrightarrow Q(c)) \wedge \neg Q(c) \longrightarrow \neg \forall x\ P(x)]$

k) $\models_T (\forall x\ P(x) \vee \exists x \neg P(x))$

l) $\models_T (\forall x\ P(x) \longrightarrow \exists x\ P(x))$

m) $\models_T ((\alpha \longrightarrow \beta) \longrightarrow \alpha) \longrightarrow \alpha$ (Ley de Peirce)

n) $\models_T (\alpha \vee \neg \alpha)$

o) $\models_T \alpha$ o no $\models_T \alpha$

p) Si $\Sigma \models_T \alpha$ y $\Sigma \models_T \beta$ entonces $\Sigma \models_T (\alpha \wedge \beta)$

q) Si $\Sigma \models_T (\alpha \wedge \beta)$ entonces $\Sigma \models_T \alpha$ y $\Sigma \models_T \beta$

r) Si $\Sigma \models_T \alpha$ o $\Sigma \models_T \beta$ entonces $\Sigma \models_T (\alpha \vee \beta)$

s) Si $\Sigma \models_T (\alpha \vee \beta)$ entonces $\Sigma \models_T \alpha$ o $\Sigma \models_T \beta$

t) Si $\Sigma \not\models_T \alpha$ entonces $\Sigma \models_T (\neg\, \alpha)$.

u) Si $\Sigma \models_T \beta$ entonces $\Sigma \not\models_T (\neg\, \beta)$.

3. Sea φ una no-tautología ($\not\models_T \varphi$), que tiene como bloques $P_1,\ldots,P_n$ y β se obtiene de φ al sustituir las fórmulas $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ en lugar de $P_1,\ldots,P_n$, respectivamente.
Entonces ¿es β una no-tautología?. Justificar.

4. Si α es una fórmula que involucra <u>únicamente</u> los conectivos $\neg$, $\wedge$, $\vee$, y α^* se obtiene a partir de α cambiando cada $\wedge$ por $\vee$ y cada $\vee$ por $\wedge$ y cada bloque por su negación, mostrar que α^* es tautológicamente equivalente a $\neg\alpha$ [Principio de Dualidad].
Sugerencia: por inducción sobre proposiciones y usar las leyes de negación: $\neg\neg\, \alpha \underset{T}{\equiv} \alpha$ y De Morgan: $\neg(\alpha \vee \beta) \underset{T}{\equiv} (\neg\, \alpha \wedge \neg\, \beta)$, $\neg(\alpha \wedge \beta) \underset{T}{\equiv} (\neg\, \alpha \vee \neg\, \beta)$.

5. Sea φ una proposición formada de bloques, <u>únicamente</u> con el conectivo "$\leftrightarrow$". Probar que φ es una tautología sii cada bloque ocurre un número par de veces.
Sugerencia: mostrar previamente que el conectivo "$\leftrightarrow$" es conmutativo y asociativo, es decir:

$$(P \leftrightarrow Q) \underset{T}{\equiv} (Q \leftrightarrow P) \qquad \text{y} \qquad P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R) \underset{T}{\equiv} (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R$$

6. Dados n bloques proposicionales, por ejemplo tres: P, Q, R, y dadas todas las v^* para P, Q, R, que son ocho (en general 2^n), encontrar una fórmula α con bloques P, Q, R, tal que sus valuaciones extendidas sean las dadas.
La tabla que representa a todas las valuaciones para los bloques es lo que se conoce como tabla de verdad. Si α(P, Q, R) denota la fórmula a encontrar, con bloques P, Q, R, el problema en el caso particular queda planteado así:

P	Q	R	$\alpha(P,Q,R)$	$\beta(P,Q,R)$
1	1	1	1	0
1	1	0	0	1
1	0	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	1	0	0	1
0	0	1	1	0
0	0	0	0	0

Encontrar $\alpha(P,Q,R)$ y $\beta(P,Q,R)$.
En general poderlo hacer para cualquier tabla dada.

7. Cierto país está habitado por gente que: o siempre dice la verdad (veraz) o siempre dice mentiras (mitómano) y que responde sólo a preguntas de respuesta si-o-no.

Un turista llega a una bifurcación en el camino, donde un camino lleva a la ciudad y el otro no; él no sabe cuál es cuál, pero hay un habitante en la bifurcación: el Sr. R.

¿Qué pregunta de respuesta si-o-no debe hacer el turista al Sr. R. para determinar con absoluta certeza, qué camino tomar para ir a la ciudad? Puede hacer una y sólo una pregunta al Sr. R. el cual sabe los criterios de verdad los conectivos.

Sugerencia: considerar el bloque P: "El Sr. R. es veraz"
y el bloque Q: "El camino de la izquierda lleva a la ciudad".
y construir una adecuada tabla de verdad que involucre P y Q, de modo tal que resuelva el problema; es decir, la respuesta a la pregunta, con esa tabla de verdad, determine la decisión que el turista debe tomar: cuál camino elegir.

8. Carlos, Rafael y Javier son acusados de evadir al fisco. Sus testimonios son:

Carlos: "Rafael es culpable y Javier es inocente".
Rafael: "Si Carlos es culpable, Javier también lo es".
Javier: "Yo soy inocente, pero al menos uno de los otros dos es culpable".

a)¿Es posible que los tres testimonios sean verdaderos?
b) Suponiendo que los tres son inocentes ¿alguien mintió?¿quien?
c) ¿El testimonio de alguno se sigue tautológicamente del de algún otro? ¿Cuál del de cuál?
d) Si los tres testimonios fueran verdaderos entonces ¿quién es inocente y quién culpable?

9. Fernando, Alfredo y Victor están involucrados en un crimen que sólo uno de ellos cometió y para protegerse atestiguan así:

Fernando: "Yo no lo hice". "Alfredo tampoco lo hizo".

Alfredo: "Fernando no lo hizo". "Lo hizo Victor".

Victor: "Yo no lo hice". "Lo hizo Fernando".

Se sabe que uno de ellos,"el bueno", dice dos verdades; otro, "el forastero" dice una verdad y una mentira y el otro, "el tramposo", dice dos mentiras. ¿Cuál es el nombre de cada personaje y cuál fue el que cometió el crimen?.

10. En una lógica de K valores de verdad $0, 1, \ldots K-1$, $(K \geq 2)$

¿Cuantas valuaciones hay para n bloques proposicionales?

Ejercicios complementarios.

Se conoce como un orden reflexivo, a una relación binaria que sea reflexiva, antisimétrica y transitiva. La ralación " $\models_T$" entre fórmulas es claramente reflexiva y transitiva, pero no es antisimétrica pues si $\alpha \models_T \beta$ y $\beta \models_T \alpha$ entonces $\alpha \underset{T}{\equiv} \beta$ pero no necesariamente son iguales; aunque la relación $\underset{T}{\equiv}$ es relación de equivalencia.

Una relación que cumple lo anterior se llama un pre-orden.

Los siguientes ejercicios, pueden interpretarse como afirmaciones acerca de que el preorden " $\models_T$" entre las fórmulas prop. sat. no tiene mínimo y es denso.

1. Para toda fórmula prop. sat. α hay una fórmula prop, sat. β tal que $\beta \models_T \alpha$ y $\alpha \not\models_T \beta$.

2. Si α, β, son fórmulas tales que $\alpha \models_T \beta$ pero $\beta \not\models_T \alpha$ entonces hay una fórmula γ tal que $\alpha \models_T \gamma$ y $\gamma \models_T \beta$ pero $\gamma \not\models_T \alpha$ y $\beta \not\models_T \gamma$.

3. Lema de Interpolación de Craig.

   Si α, β, son fórmulas que tienen bloques en común y $\alpha \models_T \beta$ entonces hay una fórmula γ que tiene como únicos bloques a los bloques que son comunes en α y β, y tal que $\alpha \models_T \gamma$ y $\gamma \models_T \beta$.

La fórmula γ anterior se llama un interpolante para α y β.

Sugerencia: inducción sobre el número de bloques que ocurren en α pero no en β. ¿Qué se puede decir de α y β, si $\alpha \models \beta$ y no poseen ningún bloque en común?.

III. Relaciones entre lógica proposicional y lógica de primer orden.

Definición Dada una interpretación para L: una estructura $\mathfrak{A}$ y dada una sucesión S de elementos de A, definimos la valuación asociada

$v_{\mathfrak{A}_s}$: E $\longrightarrow$ {0,1} tal que para todo bloque P:

$$v_{\mathfrak{A}_s}(P) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathfrak{A} \models P\,[s] \\ 0 & \text{si } \mathfrak{A} \not\models P\,[s] \end{cases}$$

Es decir:

$$v_{\mathfrak{A}_s}(P) = 1 \quad \text{sii} \quad \mathfrak{A} \models P_{[s]}$$

Lema Sea φ fórmula cualquiera, $\mathfrak{A}$ interpretación para L y s sucesión de elementos de A. Entonces:

$$\overset{*}{v}_{\mathfrak{A}_s}(\varphi) = 1 \quad \text{sii} \quad \mathfrak{A} \models \varphi \;\; [s] \qquad (*)$$

Prueba por inducción, sobre fórmulas o sobre proposiciones.

i) φ bloque) $\overset{*}{v}_{\mathfrak{A}_s}(\varphi) = 1$ sii $v_{\mathfrak{A}_s}(\varphi) = 1$ $\underset{\text{DEF.}\,v\mathfrak{A}s}{\text{sii}}$ $\mathfrak{A} \models \varphi$ [s]

ii) Supongamos inductivamente que α, β, son proposiciones que cumplen (*) (H.I.)

$\varphi = (\neg\alpha)$ $\quad \overset{*}{v}_{\mathfrak{A}_s}((\neg\alpha)) = 1$ sii $\overset{*}{v}_{\mathfrak{A}_s}(\alpha) \neq 1$ $\underset{\text{H.I.}}{\text{sii}}$ $\mathfrak{A} \not\models \alpha_{[S]}$ $\underset{\text{Def.Satisf.}}{\text{sii}}$ $\mathfrak{A} \models (\neg\alpha)_{[S]}$

$\varphi = (\alpha\vee\beta)$ $\quad \overset{*}{v}_{\mathfrak{A}_s}(\alpha\vee\beta) = 1$ sii $\overset{*}{v}_{\mathfrak{A}_s}(\alpha) = 1$ o $\overset{*}{v}_{\mathfrak{A}_s}(\beta) = 1$ $\underset{\text{H.I.}}{\text{sii}}$ $\mathfrak{A} \models \alpha_{[S]}$ o $\mathfrak{A} \models \beta_{[S]}$

$\underset{\text{Def.Satisf.}}{\text{sii}}$ $\mathfrak{A} \models (\alpha\vee\beta)_{[S]}$.

□

Teorema 6 Toda tautología es universalmente válida. Es decir, si $\models_T \varphi$ entonces $\models \varphi$. Pero no inversamente.

Sea φ. Supongamos que $\not\models \varphi$, entonces hay $\mathfrak{A}$, s tales que $\mathfrak{A} \not\models \varphi_{[s]}$ entonces por Lema, $\overset{*}{v}_{\mathfrak{A}_s}(\varphi) = 0$ de donde φ no es tautología.

Contraejemplos para el inverso:

$$\models (\forall x\; P(x) \longrightarrow P(c)) \quad \text{pero} \quad \not\models_T (\forall x\; P(x) \longrightarrow P(c)).$$

$$\models \forall x\; (x \approx x) \quad \text{pero} \quad \not\models_T \forall x\; (x \approx x).$$

□

Teorema 7 Toda consecuencia tautológica es consecuencia lógica. Es decir, si $\Sigma \models_T \alpha$ entonces $\Sigma \models \alpha$. Pero no inversamente.

Sea $\Sigma \cup \{\alpha\}$ conjunto cualquiera de fórmulas.

Supongamos que $\Sigma \not\models \alpha$, entonces hay $\mathfrak{A}$ y s tales que $\mathfrak{A} \models \beta[s]$ para toda $\beta \in \Sigma$ y $\mathfrak{A} \not\models \alpha\ [s]$.

Entonces por Lema, $v_{\mathfrak{A},s}$ cumple: $v^*_{\mathfrak{A}s}(\beta) = 1$ para todo $\beta \in \Sigma$ y $v^*_{\mathfrak{A}s}(\alpha) = 0$, de donde $\Sigma \not\models_T \alpha$.

Dos ejemplos de consecuencias lógicas que no son tautológicas:

$\forall x\ P(x),\ (P(a) \longrightarrow Q(a)) \models Q(a)$ pero $\forall x\ P(x)\ ,\ (P(a) \longrightarrow Q(a)) \not\models_T Q(a)$.

$(a \approx f(c)),\ P(a) \models P(f(c))$ pero $(a \approx f(c)),\ P(a) \not\models_T P(f(c))$.

□

Teorema 8 Todo conjunto de fórmulas que es satisfacible, es proposicionalmente satisfacible, pero no inversamente.

Sea Σ conjunto de fórmulas, Σ satisfacible; entonces hay $\mathfrak{A}$ y s tales que $\mathfrak{A} \models \beta\ [s]$ para toda $\beta \in \Sigma$; entonces por Lema, para todo $\beta \in \Sigma$, $v^*_{\mathfrak{A}s}(\beta) = 1$ de donde Σ es proposicionalmente satisfacible.

Un ejemplo de conjunto de fórmulas, proposicionalmente satisfacible pero no satisfacible:

$\Sigma = \{\neg(x \approx x),\ \forall x\ (P(x) \wedge \neg P(x))\}$ es prop. sat. con v tal que $v\ (x \approx x) = 0$, $v(\forall x\ (P(x) \wedge \neg\ P(x)) = 1$. Pero claramente no es satisfacible en ninguna interpretación para su lenguaje.

□

Lema

Sea $v : E \longrightarrow \{0,1\}$ tal que par cualesquiera términos t_1, t_2, t_3 se cumple:

$$\text{i) } v(t_1 \approx t_1) = 1$$
$$\text{ii) } v^*(t_1 \approx t_2 \longrightarrow t_2 \approx t_1) = 1$$
$$\text{iii) } v^*(t_1 \approx t_2 \wedge t_2 \approx t_3 \longrightarrow t_1 \approx t_3) = 1$$

Entonces hay una estructura asociada $\mathfrak{A}v$ y una sucesión asociada S_v de elementos de A_v (el universo de $\mathfrak{A}_v$) tales que para cualquier fórmula φ sin cuantificadores:

$$v^*(\varphi) = 1 \quad \text{sii} \quad \mathfrak{A}_v \models \varphi \quad [s_v]$$

Prueba:

Definimos una relación $\cong$ sobre los términos del lenguaje: $t_1 \cong t_2$ sii$_{def}$ $v(t_1 \approx t_2) = 1$.

La Relación $\cong$ es relación de equivalencia sobre los términos, por las propiedades de v:

. $t_1 \cong t_1$ pues $v(t_1 \approx t_1) = 1$ por propiedad (i).

. Suponemos $t_1 \cong t_2$ entonces $v(t_1 \approx t_2) = 1$ y por la propiedad (ii) y el criterio de extensión de valuación, $v(t_2 \approx t_1) = 1 \therefore t_2 \cong t_1$.

. Suponemos $t_1 \cong t_2$ y $t_2 \cong t_3$ entonces $v(t_1 \approx t_2) = 1$ y $v(t_2 \approx t_3) = 1$ y por propiedad (iii) y definición de extensión v^*, se tiene que $v(t_1 \approx t_3) = 1$ de donde $t_1 \cong t_3$.

Sea $\bar{t} = \{ t' : t' \cong t\}$. Definimos $\mathfrak{A}_v = \langle A_v, P^{\mathfrak{A}v}, f^{\mathfrak{A}v}, c^{\mathfrak{A}v}\rangle$ para cada P, f, c en el tipo del lenguaje, del siguiente modo:

$$A_v = \{\bar{t} : t \text{ es término de } L\}.$$

- Si P es predicado de n argumentos entonces

$$P^{\mathfrak{A}v} =_{def} \{\langle\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n\rangle / v(P(t_1, \dots, t_n)) = 1\} \qquad P^{\mathfrak{A}v} \subseteq A_v^n.$$

- Si f es función de m argumentos entonces

$f^{\mathfrak{A}v}: A_v^m \longrightarrow A_v$ tal que $f^{\mathfrak{A}v}(\langle\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_m\rangle) =_{def} \overline{f(t_1, \dots, t_m)}$.

. Si C es constante, entonces: $C^{\mathfrak{A}v} =_{def} \bar{C}$.

Definimos por último $S_v: \mathbb{N} \longrightarrow A_v$ sucesión de elementos de A_v, como:

$$S_v(i) = \bar{x}_i$$

Es inmediato verificar, por inducción sobre los términos que:

<u>SUBLEMA</u> $t^{\mathfrak{A}v}[S_v] = \bar{t} \in A_v$ (*) está justificado por la definición usual de $t^{\mathfrak{A}}[s]$.

. Si $t = x_i \therefore x_i^{\mathfrak{A}v}[S_v] =_{*} S_v(i) =_{def S_v} \overline{x_i}$

. Si $t = c \therefore c^{\mathfrak{A}v}[S_v] =_{*} C^{\mathfrak{A}v} =_{def \mathfrak{A}v} \bar{C}$

Supongámoslo para $t_1, \dots, t_m$ (H. I.)

. Si $t = f(t_1, \dots, t_m) \therefore f(t_1, \dots, t_m)^{\mathfrak{A}v}[S_v] =_{*} f^{\mathfrak{A}v}(t_1^{\mathfrak{A}v}[S_v], \dots, t_m^{\mathfrak{A}v}[S_v])$

$$=_{HI} f^{\mathfrak{A}v}(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_m) =_{def \mathfrak{A}v} \overline{f(t_1, \dots, t_m)}$$

Veamos ahora, por inducción sobre φ, sin cuantificadores que:

$$v^{*}(\varphi) = 1 \quad \text{sii} \quad \mathfrak{A}_{v} \models \varphi \quad [S_{v}]$$

si $\varphi = P(t_1, \ldots, t_n)$

$$\begin{aligned} v^{*}(P(t_1,\ldots,t_n)) = 1 \ &\text{sii} \ v(P(t_1,\ldots,t_n)) = 1 \\ &\text{sii} \ <\bar{t}_1,\ldots,\bar{t}_n> \in P^{\mathfrak{A}v} \ \text{(por def de } \mathfrak{A}v\text{)}. \\ &\text{sii} \ <t_1^{\mathfrak{A}v}[S_v],\ldots, \ t_n^{\mathfrak{A}v}[S_v]> \in P^{\mathfrak{A}v} \text{(pues } \bar{t} = t^{\mathfrak{A}v}[Sv]. \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{SUBLEMA} \\ &\text{sii} \ \mathfrak{A}v \models P(t_1,\ldots,t_n) \ [Sv] \ \text{(por definición de Verdad).} \end{aligned}$$

. Si $\varphi = (t_1 \approx t_2)$

$$v^{*}(t_1 \approx t_2) = 1 \ \text{sii} \ v(t_1 \approx t_2) = 1 \ \text{ sii } t_1 \cong t_2 \ \text{sii} \ \bar{t}_1 = \bar{t}_2$$

$$\underset{\text{SUBLEMA}}{\text{sii}} \ t_1^{\mathfrak{A}v}[Sv] = t_2^{\mathfrak{A}v}[Sv] \ \text{sii} \ \mathfrak{A}v \models (t_1 \approx t_2)[Sv].$$

Supongámoslo para α, β (H. I.)

. Si $\varphi = (\neg\alpha)$

$$v^{*}(\neg\alpha) = 1 \ \text{sii} \ v^{*}(\alpha) = 0 \ \text{sii} \ v^{*}(\alpha) \neq 1 \ \underset{\text{(HI)}}{\text{sii}} \ \mathfrak{A}v \not\models \alpha \ [Sv] \ \text{sii} \ \mathfrak{A}v \models (\neg\alpha) \ [Sv]$$

.Si $\varphi = (\alpha \vee \beta)$

$$\begin{aligned} v^{*}(\alpha\vee\beta) = 1 \ &\text{sii} \ v^{*}(\alpha) = 1 \ \text{o} \ v^{*}(\beta) = 1 \\ &\underset{\text{(H.I.)}}{\text{sii}} \ \mathfrak{A}v \models \alpha[Sv] \ \text{o} \ \mathfrak{A}v \models \beta[Sv] \\ &\text{sii} \ \mathfrak{A}v \models (\alpha\vee\beta)[Sv] \end{aligned}$$

□

Teorema 9 Si φ es universalemente válida y sin cuantificadores y sin igualdades, entonces φ es tautología.

Sea φ fórmula **sin** cuantificadores **ni** igualdades.

Supongamos que φ no es tautología. Entonces hay $v\colon E \longrightarrow \{0,1\}$ tal que $v^{*}(\varphi) = 0$

Sea $v'\colon E \longrightarrow \{0,1\}$ tal que

$$v'(P) = \begin{cases} v(P) \ \text{si} \ P \neq (t_1 \approx t_2) \\ 1 \ \text{si} \ P = (t_1 \approx t_1) \\ 0 \ \text{si} \ P = (t_1 \approx t_2) \ \text{con} \ t_1 \neq t_2 \ \text{(Distintos términos } t_1, t_2\text{).} \end{cases}$$

Obsérvese que v cumple las propiedades i), ii), iii), del Lema.

Entonces para toda φ **sin** símbolo de igualdad se cumple que $v^{*}(\varphi) = v'^{*}(\varphi)$

y como φ **no** tiene símbolo de igualdad entonces $\mathbf{v'}^*(\varphi) = \mathbf{v}^*(\varphi) = 0$ y como no tiene cuantificadores, por el Lema, hay $\mathfrak{A}_{\mathbf{v'}}$ y $S_{\mathbf{v'}}$ tales que

$$\mathbf{v}^*(\varphi) = \mathbf{v'}^*(\varphi) = 1 \quad \text{sii} \quad \mathfrak{A}_{\mathbf{v'}} \models \varphi \quad [S_{\mathbf{v'}}]$$

Por lo tanto $\mathfrak{A}_{\mathbf{v'}} \not\models \varphi_{[S_{\mathbf{v'}}]}$ de donde φ no es universalmente válida.

□

<u>Teorema 10</u> Si $\Sigma \cup \{\varphi\}$ es un conjunto de fórmulas, **sin cuantificadores y sin simbolos de igualdad**, entonces:

a) $\models \varphi$ sii $\models_T \varphi$

b) $\Sigma \models \varphi$ sii $\Sigma \models_T \varphi$

c) Σ es satisfacible sii Σ es prop. sat.

a)$\Rightarrow$) Es una reescritura del Teorema 9.

$\Leftarrow$) Es una caso particular del Teorema 6.

b)$\Rightarrow$) Supongamos que $\Sigma \not\models_T \varphi$, entonces hay $\mathbf{v}$ tal que $\mathbf{v}^*(\beta) = 1$ para todo $\beta \in \Sigma$ y $\mathbf{v}^*(\varphi) = 0$, entonces para $\mathbf{v'}$ como en la prueba del Teorema 9, $\mathbf{v'}^*(\beta) = 1$ para todo $\beta \in \Sigma$ y $\mathbf{v'}^*(\varphi) = 0$ y hay $\mathfrak{A}_{\mathbf{v'}}$ y $S_{\mathbf{v'}}$ tales que $\mathfrak{A}_{\mathbf{v'}} \models \beta$ $[S_{\mathbf{v'}}]$ para toda $\beta \in \Sigma$ y $\mathfrak{A}_{\mathbf{v'}} \not\models \varphi$ $[S_{\mathbf{v'}}]$, de donde $\Sigma \not\models \varphi$.

$\Leftarrow$) Es un caso particular del Teorema 7.

c)$\Rightarrow$) Es un caso particular del Teorema 8.

$\Leftarrow$) Supongamos que Σ es prop. sat. y sea $\mathbf{v}$ tal que $\mathbf{v}^*(\beta) = 1$ para todo $\beta \in \Sigma$. Entonces con $\mathbf{v'}$ como en el Teorema 9, tenemos que $\mathbf{v'}^*(\beta) = 1$ para todo $\beta \in \Sigma$ y hay $\mathfrak{A}_{\mathbf{v'}}$ y $S_{\mathbf{v'}}$ tales que $\mathfrak{A}_{\mathbf{v'}} \models \beta$ $[S_{\mathbf{v'}}]$ para todo $\beta \in \Sigma$, de donde Σ es satisfacible.

□

IV Métodos de decisión en lógica proposicional. Arboles de Verdad.

Introducción.

Decimos que un **argumento** en un lenguaje de primer orden **L**, es una sucesión finita de enunciados de dicho lenguaje, de los cuales el último, llamado conclusión, se dice que es consecuencia lógica de los anteriores, llamados premisas.

Un argumento o raciocinio, es válido o correcto si no puede ocurrir que las premisas sean interpretadas todas como verdaderas y la conclusión como falsa.

En otras palabras, un argumento es válido o correcto si cada vez que todas las premisas sean verdaderas, bajo alguna interpretación, entonces la conclusión tanga que ser necesariamente verdadera, en esa misma interpretación.

Es claro que lo anterior significa lo mismo que: la condicional que tiene como antecedente la conjunción de todas las premisas en el caso que se tenga un número finito de ellas y como consecuente a la conclusión, sea una condicional universalemente válida; o sea, verdadera en cualquier interpretación.

Otra manera más, que significa lo mismo que las dos anteriores, es que: la conclusión sea consecuencia lógica del conjunto de todas las premisas.

El problema de decidir si un argumento dado en lenguaje de primer orden es correcto o no, **no** es en general un problema de decisión efectiva o algorítmico. Sin embargo , si nos restringimos a la lógica proposicional o lógica de predicados, podemos decidir si la conclusión es consecuencia tautológica de las premisas, en el caso de un número finito de premisas. En ese caso, por resultados anteriores sabremos que la consecuencia también es lógica. (Teorema 7).

Debe ser claro de los resultados anteriores, que si la consecuencia no es tatutológica, en general no podemos asegurar que no sea consecuencia lógica; sin embargo, en el caso de que los enunciados del argumento no tengan cuantificadores ni igualdades y que la conclusión no sea consecuencia tautológica, <u>sí</u> podemos asegurar que: no es consecuencia lógica. (Teorema 10.b).

Todo lo análogo a lo anterior, podemos decir del problema de decidir si una fórmula es universalmente válida y del problema de decidir si un conjunto de fórmulas es satisfacible; así pues, en la lógica proposicional dentro de la lógica de primer orden, tenemos un mecanismo de decisión parcial para los problemas anteriores. Veamos pues un mecanismo particular, conocido como "árboles de verdad", por medio del cual se puede decidir efectivamente si una fórmula es o no tautología, o bien, decidir efectivamente si una fórmula es o no consecuencia tautológica de un conjunto finito de fórmulas, o bien, decidir efectivamente si un conjunto de fórmulas es o no proposicionalmente satisfacible.

El método de árboles de verdad, se basa en los siguientes hechos, ya conocidos:

I. <u>Def. Prop. Sat</u> $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_2\}$ es **prop. sat.** sii hay **v** tal que $v(\alpha_1) = \ldots = v(\alpha_n) = 1$

II. <u>Teo 2, i)</u> φ es **tautologia** sii $(\neg\varphi)$ no es prop. sat.

III. <u>Teo 2, iv) y viii)</u> φ es **consecuencia tautologica** de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sii $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \neg\varphi\}$ no es prop. sat. sii $(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \wedge \neg\varphi)$ no es prop. sat.

Un requisito previo al uso del método de árboles es transfomar las fórmulas involucradas, a otras fórmulas <u>tautológicamente equivalentes</u> y que sean disyunciones o sean conjunciones de bloques o de negación de bloques o bien de fórmulas que tengan esas mismas propiedades. Para ello, se usan las siguientes equivalencias tautológicas y el Teorema 4., de sustitución de equivalentes:

Doble negación: $\neg\neg\,\alpha \underset{T}{\equiv} \alpha$

De Morgan : $\begin{cases} \neg(\alpha \wedge \beta) \underset{T}{\equiv} \neg\,\alpha \vee \neg\beta \\ \neg(\alpha \vee \beta) \underset{T}{\equiv} \neg\,\alpha \wedge \neg\beta \end{cases}$

Negación de Implicación: $\neg(\alpha \longrightarrow \beta) \underset{T}{\equiv} \alpha \wedge \neg\beta$

$\neg(\alpha \longleftrightarrow \beta) \underset{T}{\equiv} (\alpha \wedge \neg\beta) \vee (\neg\alpha \wedge \beta)$

$(\alpha \longrightarrow \beta) \underset{T}{\equiv} \neg\alpha \vee \beta$

$(\alpha \longleftrightarrow \beta) \underset{T}{\equiv} (\alpha \wedge \beta) \vee (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$

Así, podemos suponer que las fórmulas únicamente tienen los conectivos $\neg$, $\wedge$, $\vee$, fuera de los bloques.

Supongamos que queremos decidir si $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \wedge \neg\varphi$ tiene o no tiene valuación que la satisfaga (prop. sat.).

El método consiste en partir de $\neg\varphi$ e ir adjuntando las premisas

$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ una a una.

Si hay que adjuntar una conjunción de bloques o bloques negados, digamos $A \wedge B$, esto se hace mediante una línea vertical:

$$\begin{array}{c} A \\ | \\ B \end{array}$$

Si hay que adjuntar una disyunción de bloques o bloques negados, digamos $A \vee B$, esto se hace mediante dos ramas que se abren:

$$\begin{array}{ccc} & \wedge & \\ / & & \backslash \\ A & & B \end{array}$$

Al ir adjuntando premisas, se va formando un árbol de posibilidades y en cada paso analizamos cada "rama" para determinar si hay en la rama un bloque y su negación; si tal es el caso, esa rama <u>no es posible</u> y "se cierra" indicándolo con una cruz: **x**. Si no es el caso de que en la rama haya un bloque y su negación, la rama <u>es posible</u> y la dejamos abierta. Al agregar una nueva premisa, hay que agregarla a cada una de las ramas que permanecen abiertas hasta ese momento. Una vez adjuntadas todas las premisas, hay dos posibilidades:

-Si se cerraron todas las ramas, la fórmula <u>no</u> es satisfacible.

-Si queda una rama abierta, la fórmula <u>sí</u> es satisfacible y la rama abierta nos da un ejemplo de una valuación que la satisface, definiendo tal valuación asignando 1 a los bloques que aparecen en esa rama, sin negación; y asignando 0 a los bloques que aparecen en la rama, con negación.

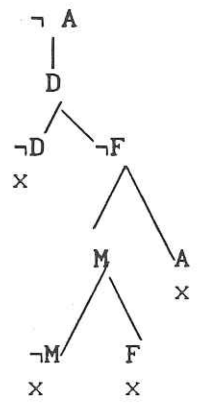
Veamos un ejemplo: Supongamos que M, A, F, D son bloques,

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} M \vee A \\ M \longrightarrow F \\ D \longrightarrow \neg F \\ D \end{array}\right\} \text{premisas} \\ \hline \therefore A \qquad\qquad \text{conclusión} \end{array}\right\} \text{Argumento}$$

El argumento es correcto si y sólo si $(M \vee A), (M \longrightarrow F), (D \longrightarrow \neg F), D \models A$

Analicemos si se cumple o no: $(M \vee A), (M \longrightarrow F), (D \longrightarrow \neg F), D \models_T A$

Sabemos que $(M \longrightarrow F) \underset{T}{\equiv} (\neg M \vee F)$ y $(D \longrightarrow \neg F) \underset{T}{\equiv} (\neg D \vee \neg F)$.



<u>negación</u> de la conclusión

premisa 4ª.

premisa 3ª (se cierra la rama izquierda pues aparece en ella D y ¬D).

premisa 1ª

premisa 2ª

Todas las ramas se cierran (x), por lo tanto el conjunto de fórmulas: $\{(M \vee A), (M \longrightarrow F), (D \longrightarrow \neg F), D, \neg A\}$ <u>no</u> es proposicionalmente satisfacible y entonces por Teorema 2 iv) y viii):
$(M \vee A), (M \longrightarrow F), (D \longrightarrow \neg F), D \models_T A$ se cumple. Así pues, por le Teorema 7 tenemos que:
$(M \vee A), (M \longrightarrow F), (D \longrightarrow \neg F), D \models A$ y el argumento es correcto.

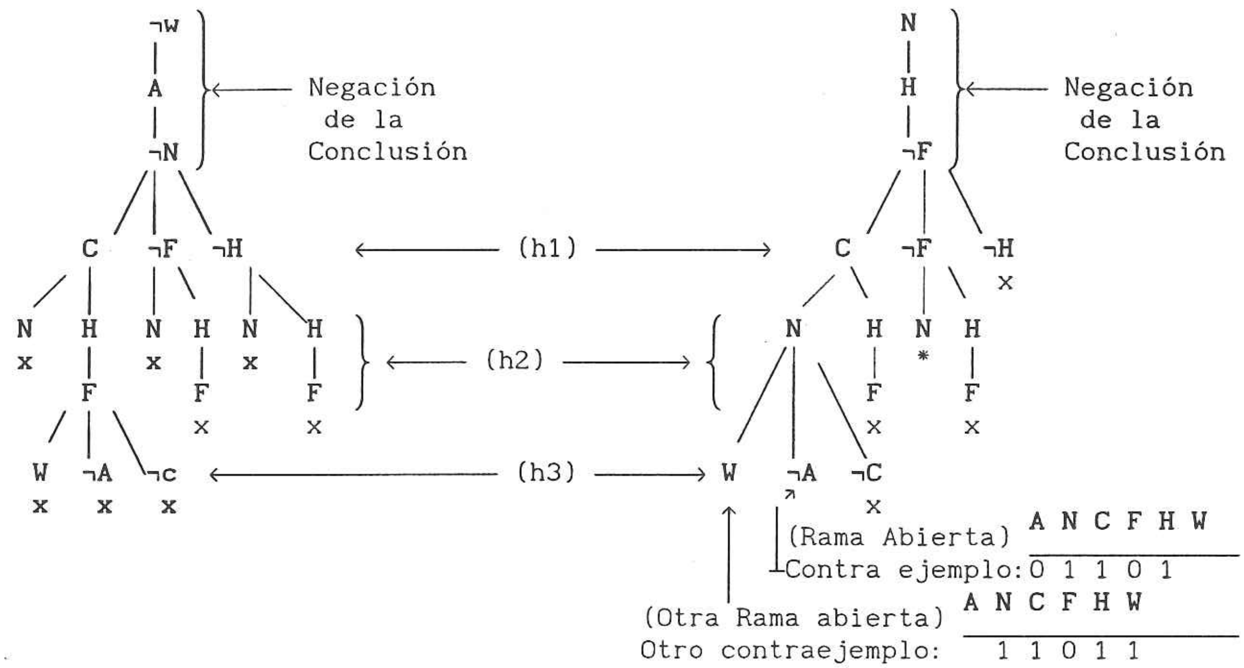
Obsérvese que no importa el orden en que se agreguen las premisas o las fórmulas que están en conjunción. Pero sí es conveniente, por eficiencia, agregar primero la negación de la conclusión, y de entre una conjunción o una disyunción, es conveniente agregar primero la conjunción ya que una disyunción generará más ramas y es conveniente que el árbol <u>no</u> se "abra" mucho al principio.
Otros ejemplos: consideremos las siguientes proposiciones como premisas o hipótesis:

h1) $\neg C \wedge F \longrightarrow \neg H$
h2) $\neg N \longrightarrow H \wedge F$
h3) $\neg W \longrightarrow (A \longrightarrow \neg C)$

En estos ejemplos, la tabla de verdad tendrá $2^6 = 64$ renglones! Pues hay 64 valuaciones posibles para los bloques A, N, C, F, H, W.

¿h1), h2) h3) $\models_T (\neg w \wedge A \longrightarrow N)$?

¿h1), h2), h3) $\models_T (N \longrightarrow \neg H \vee F)$?



La respuesta es: sí es consecuencia tautológica.

La respuesta es: no es consecuencia tautológica y hay una v contraejemplo, $v(A) = v(F) = 0$ y $v(N) = v(C) = v(H) = 1$, $v(w) \in \{0,1\}$.

Nota: al agregar h2 en el árbol de la derecha, quedó otra rama con N (*), sin desarollar mas, pues no es necesario, ya que antes (de izquierda a derecha), se encontró una rama abierta.

Resuminos a continuación, la utilización del método de árboles, para resolver tres tipos de problemas:

1o) Una fórmula α es tautología si y sólo si el árbol a partir de $(\neg\ \alpha)$ es cerrado (se cierran todas sus ramas).

Si α es tautología, el método lo decide y si no es tautología también lo decide y proporciona una valuación que le da valor 0.

2o) Un fórmula φ es consecuencia tautológica de un conjunto finito Σ de fórmulas si y sólo si el árbol de $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es cerrado.

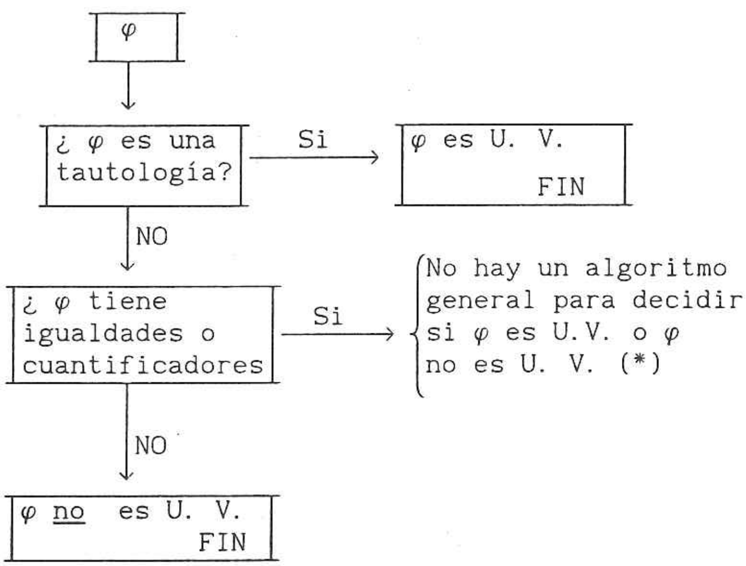
Si se da la consecuencia tautológica, el método lo decide y si no se da, también lo decide y proporciona una valuación que satisface a todas las fórmulas de Σ y no satisface a φ.

3o) Un conjunto finito Σ de fórmulas es prop. sat. si y sólo si el árbol de Σ tiene alguna rama abierta. Si Σ es satisfacible, el método lo decide y proporciona con la rama abierta, una valuación que satisface a Σ y si Σ no es satisfacible, el método lo decide ya que el árbol de Σ tendrá todas sus ramas cerradas en este caso.

Como es claro, el problema de decidir si $\Sigma \models_T \varphi$ para un conjunto finito Σ, es equivalente al de decidir si $\models_T (\bigwedge_{\alpha\in\Sigma}\alpha \longrightarrow \varphi)$.

Aquí $\bigwedge_{\alpha\in\Sigma}\alpha$ denota simplemente la conjunción de todas las fórmulas de Σ, siempre que Σ sea un conjunto **finito** de fórmulas. Si Σ es infinito, por el Teorema de Compacidad hay un $\Gamma \subseteq \Sigma$, Γ finito tal que $\Gamma \models_T \varphi$ aunque tal Γ no se puede obtener explícitamente de un modo efectivo.

Así pues, podemos pensar que el problema puede resumirse en decidir si una fórmula es tautología o no, lo cual es efectivamente decidible. Entonces, podemos dar un procedimiento efectivo el cual, dada una fórmula φ cualquiera, decida si es universalmente válida por razones proposicionales ó no es universalmente valida por razones proposicionales, o bien no pueda decidir lo anterior ya que su validez universal o su no validez universal, dependa de cuantificadores y/o de igualdades. Un esquema de tal procedimiento, basado en los Teoremas 6 y 9, es el siguiente:



(*) Si φ no es tautología y si tiene igualdades o tiene cuantificadores, no hay un algoritmo general para decidir si φ es U.V. o φ no es U.V. Sin embargo sí hay un procedimiento efectivo tal que:

"φ es U.V. si y sólo si el procedimiento afirma que φ es U.V."

El procedimiento mencionado **no** es un algoritmo de decisión, ya que si φ es U.V. el procedimiento lo dice, pero si no es universalmente válida, el procedimiento **no** dice que no lo sea.

Para una prueba de este último resultado, veáse [2] y [3].

Ejercicios

1. Sean P, Q, R bloques, y sean α, β, γ fórmulas, P(x) predicado. Determinar si son o no tautologías:

i) $(P \longrightarrow Q) \longrightarrow [(P \vee R) \longrightarrow (Q \vee R)]$

ii) $[\alpha \wedge (\beta \longrightarrow \gamma)] \longrightarrow [(\alpha \wedge \neg\beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)]$

iii) $[\alpha \wedge (\neg\beta \vee \gamma)] \longrightarrow (\alpha \wedge \gamma)$

iv) $\forall x\, P(x) \vee \exists x \neg P(x)$

v) $\forall x\, P(x) \longrightarrow \forall x\, P(x)$

vi) $\forall x (x \approx x)$

2. Determinar si se da o no la consecuencia tautológica, A, C, F, H, N, W, P, Q, R, son bloques:

i) $(\neg C \wedge F \longrightarrow \neg H), (\neg N \longrightarrow H \wedge F), (\neg W \longrightarrow (A \longrightarrow \neg C)) \models_T ((\neg W \wedge A) \wedge \neg N)$

ii) $(\neg\alpha \longrightarrow \alpha) \models_T \alpha$

iii) $(\neg C \wedge F \longrightarrow \neg H), (\neg N \longrightarrow H \wedge F), (\neg W \longrightarrow (A \longrightarrow \neg C)) \models_T (N \wedge (H \wedge \neg F)$

iv) $\forall x\, P(x),\ (P(c) \longrightarrow Q(c)) \models_T Q(c)$

v) $(x \approx y),\ (y \approx z) \models_T x \approx z$

vi) $(P \vee \neg Q),\ \neg(\neg R \vee P) \models_T (P \longrightarrow Q)$

vii) $\gamma \longrightarrow (\alpha \longrightarrow \neg\beta),\ \alpha \models_T (\gamma \longrightarrow \neg\beta)$

viii) $\alpha \longrightarrow (\beta \longrightarrow \gamma) \models_T \alpha \wedge \beta \longrightarrow \gamma$

3. Determinar si el conjunto dado es prop. sat.

i) $\Sigma = \{(P \longrightarrow Q),\ (Q \longrightarrow R),\ (T \longrightarrow \neg R), (P \wedge T)\}$

ii) $\{(P \longrightarrow Q \vee R), (Q \longrightarrow \neg P),\ (T \longrightarrow \neg R),\ (P \wedge T)\}$

iii) $\{\forall x\, P(x),\ \neg P(c)\}$

iv) $\{P(c) \wedge \neg P(a),\ (c \approx a)\}$

v) $\{(\forall x\, M(x) \longrightarrow R(c)), (\forall x\, P(x) \longrightarrow \forall x\, M(x)),\ \neg R(c),\ \neg\forall x P(x)\}$

4. ¿Cierto o falso? Justificar con prueba o contraejemplo.

a) Si $\Sigma \models_T (\alpha \vee \beta)$ entonces $\Sigma \models_T \alpha$ o $\Sigma \models_T \beta$

b) Si $\Sigma \not\models_T \alpha$ y $\not\models_T \beta$ entonces $\Sigma \not\models_T (\alpha \vee \beta)$

c) Si $\Sigma \not\models_T \alpha$ entonces $\Sigma \models_T \neg\alpha$

d) Si $\Sigma \models_T \alpha$ entonces $\Sigma \not\models_T \neg\alpha$

e) Si $\Sigma \models_T \alpha$ y Σ es prop. sat. entonces $\Sigma \not\models_T \neg\alpha$

5. Sean α, β fórmulas **sin cuantificadores** y **sin igualdad**.

Suponga que para cualquier lista finita de fórmulas $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$:

Si $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \models \alpha$ entonces $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \models \beta$.

Justifique entonces que: $\alpha \models_T \beta$.

6. Sean α, β fórmulas y suponga que $\alpha \models_T \beta$ (β es cons. tautológica de α).

Pruebe entonces que para cualquier conjunto Σ de fórmulas:

$$\Sigma \models_T \alpha \Rightarrow \Sigma \models \beta$$

7. Sean α, β fórmulas; α **sin cuantificadores** y **sin igualdad**, y suponga que:

(Para toda γ, $\gamma \models_T \alpha$) $\Rightarrow$ (Para toda γ, $\gamma \models_T \beta$).

Pruebe que: $\models \alpha \Rightarrow \models \beta$.

8. ¿Es correcto el siguiente argumento? Simbolícelo con bloques y analícelo tautológica y lógicamente.

La función valor absoluto es continua en cero, si es derivable en cero.

La función valor absoluto no es derivable en cero.

$\therefore$ La función valor absoluto no es continua en cero.

9. ¿Es correcto el siguiente argumento?

Simbolizarlo con bloques y analizarlo tautológica y lógicamente:

Si se elevan los precios o los salarios, hay inflación.

Si hay inflación, el congreso la regulará o el pueblo sufre.

Los congresistas se harán impopulares, si el pueblo sufre.

El congreso no regulará la inflación y los congresistas no se harán impopulares.

$\therefore$ No se elevarán los salarios.

10. ¿Es correcto el siguiente argumento?

El gobernador retendrá el apoyo de los obreros, sólo si aprueba el proyecto de ley.

El gobernador retendrá el apoyo de los campesinos, sólo si veta el proyecto de ley.

El gobernador (obviamente) o no veta o no aprueba el proyecto de ley.

$\therefore$ El gobernador no retendrá el apoyo de los obreros o no retendrá el apoyo de los campesinos.

Referencias y Bibliografía

1. Amor J. A., Axiomatizabilidad y Completud en Lógica de Primer Orden, Vínculos Matemáticos, No. 160, Fac. Ciencias, UNAM, 1988.
2. Amor J. A., Compacidad en Lógica de Primer orden y su relación con el Teorema de Completud, Facultad de Ciencias, UNAM.
3. Amor J. A., Ramírez J. A., Un procedimiento de prueba automática para enunciados universalemente válidos, en interacción con el usuario, Memoria IX Reunión Nacional de Inteligencia Artificial, Veracruz, Ver. Julio de 1992.
4. Enderton E., A mathematical introduction to logic, Academic Press, 1972.
5. Kleene S. C., Mathematical Logic, John Wiley, 1967.
6. Mendelson E., Introduction to mathematical logic, 3a Ed., Wadswarth Books, 1987.
7. Malitz J., Introduction to Mathematical Logic, Part III An introduction to model theory, Springer Verlag, 1979.
8. National Council of Teachers of Mathematicas, Logica, No. 12, Trillas, 1975.