#74

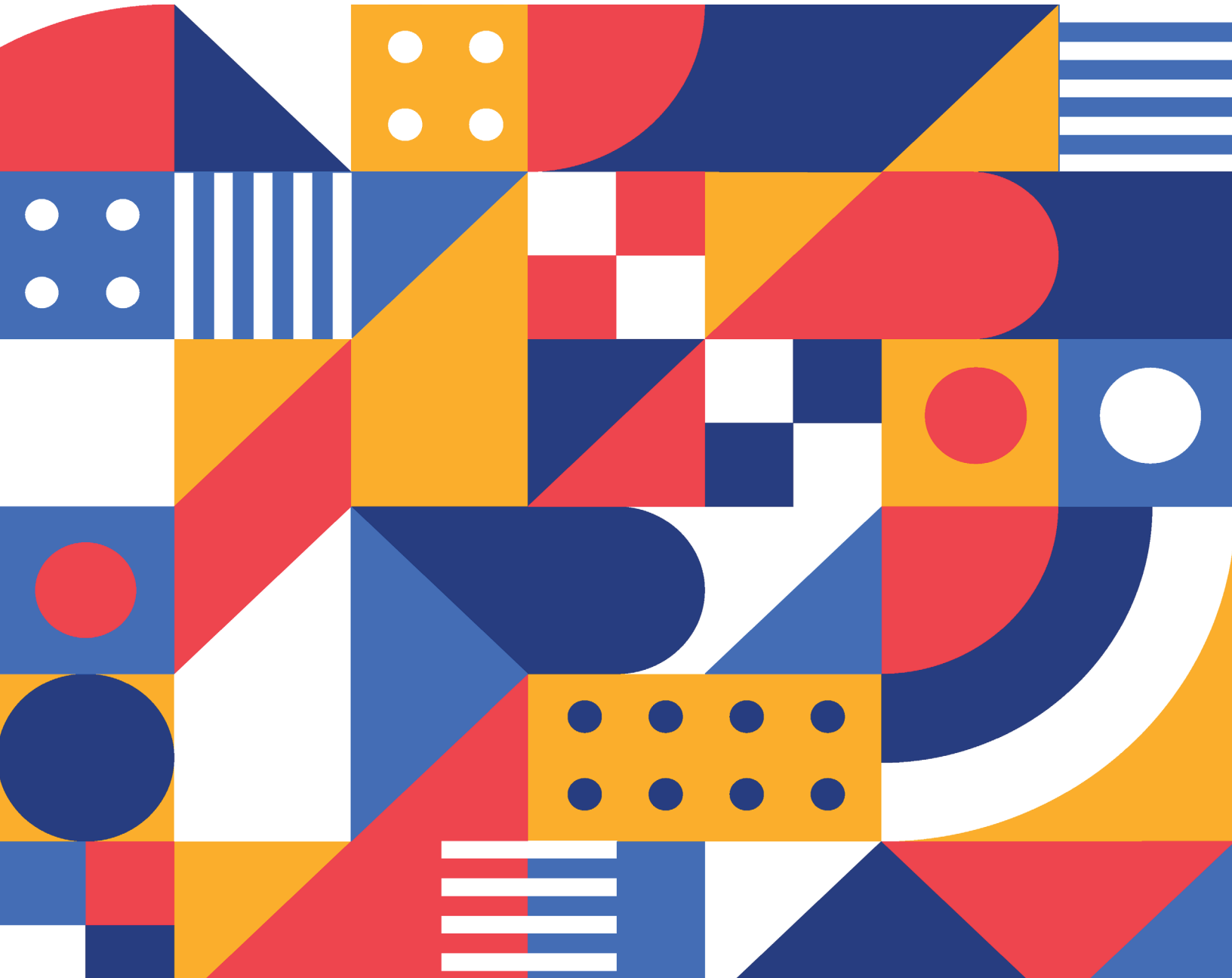
SERIE
MATEMÁTICAS

Iván Kupka

Notas de variable compleja

AÑO
2007

VÍNCULOS
MATEMÁTICOS



FACULTAD DE CIENCIAS

VÍNCULOS MATEMÁTICOS

NOTAS DE VARIABLE COMPLEJA

Iván Kupka*

VÍNCULOS MATEMÁTICOS NO. 74 2007

* Profesor invitado del IIMAS, Profesor de Asignatura de la Facultad de Ciencias, UNAM (1978). Redacción, revisión y complementos de Miriam Korsenny Ch.

I N D I C E .

		Páginas
Capítulo 0:	Resumen de Nociones Básicas de Topología y Algebra----------	1
Apéndice 0:	----------	27
Capítulo 1:	Serie de Potencías----------	69
Apéndice 1	----------	78
Capítulo 2:	Funciones Holomorfas----------	111
Apéndice 2:	----------	135
Capítulo 3:	Propiedades Fundamentales de las funciones Holomorfas----------	139
Apéndice 3:	----------	150
Capítulo 4:	Diferenciabilidad - Transformaciones Conformes----------	161
Apéndice 4:	----------	188
Capítulo 5:	La Función Exponencial----------	207
Apéndice 5:	----------	222
Capítulo 6:	Teorema y Fórmula de Cauchy. Aplicaciones. Función Logaritmo.----------	236
Apéndice 6:	----------	291
Capítulo 7:	Puntos singulares - Serie de Laurent - Funciones Holomorfas - Teorema de Residuos---	302

CAPITULO 0

RESUMEN DE NOCIONES BASICAS DE TOPOLOGIA Y ALGEBRA

En éste capítulo revisaremos las nociones y resultados de Algebra y Topología que necesitaremos en el presente curso.

SECCION 1: Definición del campo de los números complejos.

La definición que vamos a dar no es la más elegante, pero - si la más elemental.

DEFINICION 1: El conjunto de los *números complejos* $\mathbb{C}$ es el conjunto $\mathbb{R}^2$ con las leyes de composición siguientes:

(A) ADICION:

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$[(a,b),(a',b')] \to (a+a', b+b')$$

(B) MULTIPLICACION:

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$[(a,b),(a',b')] \to (aa'-bb', ab'+ba')$$

PROPOSICION 1:

(a) Con las dos operaciones arriba definidas, $\mathbb{C}$ es un campo conmutativo*, donde los números: $(0,0)$ y $(1,0)$, son los elementos idénticos de la adición y multiplicación respectivamente.

(b) La aplicación $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$; $a \to (a,o)$, es un isomorfismo** de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$

DEMOSTRACION: En el Apéndice O.

NOTACIONES PARA LOS NUMEROS COMPLEJOS QUE USAREMOS EN ESTE CURSO

(a) Identificaremos los números representados por los vectores (a,o) con los números reales a asociados.

(b) Denotaremos al número $(0,1)$ por i , $i^2 = -1$, ya que

$$(0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$$

(c) Con las identificaciones de (a) y (b) se ve que el número complejo representado por el vector (a,b) es igual a $a+ib$, ya que

$$a+ib = (a,o) + (o,1)(b,o) = (a,o)+(o,b) = (a,b)$$

En todo éste curso denotamos siempre al número complejo (a,b) con el símbolo: $a+ib$.

---

* Un campo conmutativo es un anillo asociativo, conmutativo, con elemento unitario, donde todo elemento distinto de cero tiene un inverso multiplicativo.

** Isomorfismo; en este caso se refiere a un homomorfismo inyectivo.

(d) Si $z = x + i\,y$ es un número complejo, el vector (x,y) que lo representa será denotado por $\vec{z}$.

(e) Si $z = x + i\,y$, a x se llama la parte real de z y se denota $Re\,(z)$, a y se llama parte imaginaria de z y se denota $Im(z)$.

SECCION 2: PROPIEDADES METRICAS DE LOS NUMEROS COMPLEJOS.

DEFINICION 2: El *valor absoluto* , $|z|$, de un número complejo $z = x + i\,y$ es el número no-negativo:

$$\sqrt{x^2+y^2} \quad \acute{o} \quad \sqrt{(Re(z))^2+(Im(z))^2}$$

PROPOSICION 2: Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;

(a) $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$

(b) $|z_1\ z_2| = |z_1|\ |z_2|$

(c) Si $|z| = o$, $z = o$

DEMOSTRACION: En el Apéndice O

DEFINICION 3:

(a) *Sucesión convergente de números complejos.* Una sucesión $\{z_n \mid n \geqslant 1\}$ de números complejos se llama convergente, de límite z_∞ , si $|z_\infty - z_n| \to o$, cuando $n \to +\infty$, esto

es, si para cualquier $\varepsilon > o$ existe un entero N_ε, tal que $|z_n - z_\infty| < \varepsilon$, siempre que $n > N_\varepsilon$.

(b) *Sucesión de Cauchy.* Una sucesión $\{z_n \mid n \geq 1\}$ de números complejos es llamada de Cauchy, si $|z_n - z_m| \to o$ cuando $n, m \to \infty$, esto es, si para cualquier $\varepsilon > o$, existe un entero N_ε, tal que $|z_n - z_m| < \varepsilon$ si $n, m > N_\varepsilon$.

PROPOSICION 3: Si una sucesión converge, su límite es único.

DEMOSTRACION: En el Apéndice O.

NOTACION: El límite de una sucesión convergente $\{z_n \mid n \geq 1\}$ se denota:

$$\lim_{n \to \infty} z_n$$

PROPOSICION 4: CRITERIO DE CAUCHY

Una sucesión es convergente si y solamente si, élla es de Cauchy.

DEMOSTRACION: En el Apéndice O

SECCION 3: NOCIONES ELEMENTALES DE TOPOLOGIA.

DEFINICION 4:

(a) Se llama *disco abierto* (respectivamente cerrado) de -

centro $w \in \mathbb{C}$ y de radio $r \in \mathbb{R}_+^*$ (respectivamente $r \in \mathbb{R}_+$) y se denota $D(w,r)$ (respectivamente $\overline{D(w,r)}$), al conjunto $\{z : |z-w| < r\}$ (respectivamente $\{z : |z-w| \leq r\}$).

(b) Se llama *rectángulo abierto* (respectivamente cerrado), de lados $]a,b[$ y $]c,d[$ (respectivamente $[a,b]$ y $[c,d]$), al conjunto $\{z \mid a < Re(z) < b,\ c < Im(z) < d\}$ (respectivamente $\{z \mid a \leq Re(z) \leq b,\ c \leq Im(z) \leq d\}$), el cual se denota $]a,b[\times]c,d[$ (respectivamente $[a,b] \times [c,d]$).

(c) Se llama *círculo de centro* w y de radio $r \in \mathbb{R}_+$, y se denota por $S(w,r)$ al conjunto: $\{z : |z-w| = r\}$.

DEFINICION 5: ABIERTOS Y CERRADOS:

(a) Un subconjunto E de $\mathbb{C}$ es llamado *abierto*, si dado cualquier elemento z de E, existe un disco abierto de centro z contenido en E.

(b) Un subconjunto E de $\mathbb{C}$ es llamado *cerrado* si $\mathbb{C} - E$ es abierto.

EJEMPLOS. Discos (ó rectángulos) abiertos son abiertos, discos (ó rectángulos) cerrados son cerrados.

NOTA: El conjunto $\mathbb{C}$ y el conjunto vacío, ϕ, son abiertos y cerrados.

PROPOSICION 5:

(a) Toda unión de abiertos es abierta.

(b) Toda intersección de cerrados es cerrada.

(c) Toda intersección finita de abiertos es abierta.

(d) Toda unión finita de cerrados es cerrada.

DEMOSTRACION: En el Apéndice 0.

NOTA: El menor cerrado que contiene a un conjunto E , se llama *cerradura* de E .

OBSERVACION: En la proposición 5, en las partes (c) y (d), pedimos que la intersección y unión respectivamente sea finita, a continuación daremos unos ejemplos, donde sucede que la intersección numerable infinita de abiertos, no es abierta y la unión numerable infinita de cerrados no es cerrada:

(c) $E_n = \mathcal{D}\left(0, \frac{1}{n}\right)$, $\cap E_n = \{0\}$ no es abierto.

(d) $F_n = \overline{\mathcal{D}\left(0, 1-\frac{1}{n}\right)}$, $\cup F_n = \mathcal{D}(0,1)$ no es cerrado.

DEFINICION 6: PUNTOS AISLADOS – PUNTOS DE ACUMULACION.

(a) Dado un conjunto E , $w \in E$, es llamado un *punto aislado* si existe un disco abierto de centro w , que no contiene ningún otro punto de E .

(b) Dado un conjunto E , un punto $w \in \mathbb{C}$, es llamado *punto de acumulación de* E, si todo disco de centro w contiene un punto de E distinto de w .

NOTA: Si $w \in E$; w es aislado o de acumulación.

PROPOSICION 6: CARACTERIZACION DE LOS CERRADOS.

Un subconjunto E de $\mathbb{C}$ es cerrado si y solamente si, todos los puntos de acumulación de E pertenecen a E.

En otros términos E es cerrado si y solamente si dada cualquier sucesión convergente $\{z_n \mid n \geq 1\}$ de puntos de E,

$$\lim_{n \to \infty} z_n \in E$$

DEMOSTRACION: En el Apéndice 0.

DEFINICION 7: *Inducción de la Topología.*

Si E es un subconjunto de $\mathbb{C}$, un subconjunto F de E es llamado abierto (respectivamente cerrado) en E, si existe un abierto (respectivamente cerrado) G tal que

$$F = E \cap G$$

PROPOSICION 7: Sea E un subconjunto de $\mathbb{C}$. Si E es abierto (respectivamente cerrado), y si el subconjunto F de E es abierto (respectivamente cerrado) en E; F es abierto (respectivamente cerrado) en $\mathbb{C}$.

DEMOSTRACION: En el Apéndice 0.

DEFINICION 8: COMPACTOS

Un subconjunto K de $\mathbb{C}$ es llamado *compacto*, si cualquier subconjunto infinito de K contiene una sucesión convergente de -

límite contenido en K .

NOTA: La definición de compacto arriba mencionada no es la más usual, ya que la misma no es una buena definición en espacios topológicos generales.

Sin embargo para nuestras necesidades élla es suficiente y también es más elemental que la definición general usual. - (En el Apéndice 0, en Nota a la definición 8 se encuentra la - definición usual de compacto).

PROPOSICION 8: Caracterización de los compactos:

Un subconjunto K de $\mathbb{C}$ es compacto si y solamente si K es cerrado y acotado.

(Acotado significa que existe un disco $\mathcal{D}(0,R)$ tal que

$$K \subset \mathcal{D}(0,R)).$$

DEMOSTRACION: En el Apéndice 0 .

DEFINICION 9: CONEXO.

(a) Un subconjunto E de $\mathbb{C}$ se llama *conexo* , si E no puede ser representado como unión de dos conjuntos abiertos en E , ajenos y no vacíos.

(b) Otra forma: E es conexo si no existe un subconjunto de E, no vacío, no idénticamente igual a E y que sea abierto y cerrado en E.

OBSERVACION: Las definiciones (a) y (b) son equivalentes; la demostración de este hecho se encuentra en el Apéndice 0.

NOTA: Propiedades de los conjuntos conexos.

(a) Un abierto es conexo, si y sólo si, dados dos puntos cualesquiera $w, z \in \Omega$ existe una poligonal en Ω de - origen w y extremo final z . Esto significa que exis te un conjunto finito de puntos $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ tales - que para todo j tal que $1 \leqslant j \leqslant n-1$, el segmento $\overline{z_j z_{j+1}}$ está en Ω y también los segmentos $\overline{wz}_1$ y $\overline{z}_n z$.

(b) Todo abierto Ω puede ser representado de una manera única como unión de abiertos conexos, ajenos dos a dos.

OBSERVACION: Las demostraciones de (a) y (b) se encuentran en el Apéndice 0.

DEFINICION 10: CONJUNTOS DENSOS.

(a) Un subconjunto F de un conjunto E, es llamado *denso* en E , si todo punto de E o pertenece a F o es punto de acumulación de F.

SECCION 4: FUNCIONES CONTINUAS.

NOTA PRELIMINAR: De acuerdo con las notaciones usadas para complejos y los vectores del plano (en "Notaciones para los Complejos".... de la parte (d) del final de la sección 1). Una función $f: E \to \mathbb{C}$ definida sobre un conjunto E de números complejos con valores comple - jos, puede ser considerada de cuatro maneras diferentes:

(a) Como función sobre un conjunto E de números complejos con valores complejos: $z \to f(z)$

(b) Como función de un vector $\vec{z}$, definida sobre el conjunto $\vec{E}$, de los vectores $\vec{z}=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ con valores complejos:

$$\vec{z} \to f(\vec{z})$$

(c) Como función de un número complejo z definido sobre E con valores vectoriales en $\mathbb{R}^2$:

$$z \to \overrightarrow{f(z)},$$

donde $\overrightarrow{f(z)}$ es el vector que representa al número $f(z)$.

(d) Como aplicación de un vector $\vec{z}$, definida sobre el conjunto $\vec{E}$ de la definición (b), con valores vectoriales.

$$\vec{z} \to \overrightarrow{f(\vec{z})}$$

Por $\vec{f}$ denotaremos a la aplicación $\vec{E} \to \mathbb{R}^2$ definida en el caso(d) y la llamaremos aplicación asociada a la función

$$f: E \to \mathbb{C} .$$

Inversamente, si $T: \vec{E} \to \mathbb{R}^2$ es una aplicación, entonces existe una única función compleja $f: E \to \mathbb{C}$, tal que $\vec{f} = T$;

Si $z = x + iy$, $\vec{z} = (x, y)$

$\vec{f}(\vec{z}) = (Re[f(x+iy)], Im[f(x+iy)])$

Y si $T(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ entonces

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y).$$

DEFINICION 11: FUNCIONES CONTINUAS.

Una función $f: E \to \mathbb{C}$ se llama *continua* en E, si dada cualquier sucesión convergente $\{z_n \mid n \geq 1\}$ de puntos de E tal que su límite z_∞ pertenece a E, la sucesión de imágenes $\{f(z_n) \mid n \geq 1\}$ es convergente, y su límite es $f(z_\infty)$.

OBSERVACION: En el Apéndice 0 se encuentra la definición usual de continuidad y su equivalencia con esta definición.

NOTA 1: Si $f: E \to \mathbb{C}$ es continua y si $G \subset E$, entonces la restricción de f a G es también continua.

NOTA 2: Si $f: E \to \mathbb{C}$ es continua, la aplicación $\vec{f}: \vec{E} \to \mathbb{R}^2$ correspondiente a f es una aplicación continua.

NOTACION: Si A es un subconjunto de $\mathbb{C}$, entonces:

$$f^{-1}(A) = \{z \mid z \in E,\ f(z) \in A\}$$

PROPOSICION 9: CARACTERIZACION DE LAS FUNCIONES CONTINUAS.

La continuidad de una función $f: E \to \mathbb{C}$ es caracterizada por - cualquiera de las dos propiedades siguientes (equivalentes):

(a) Si Θ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{C}$, entonces $f^{-1}(\Theta)$ es cerrado en E.

(b) Si Θ es un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, entonces $f^{-1}(\Theta)$ es abierto en E.

DEMOSTRACION: En el Apéndice 0.

NOTA: Si no hay $z \in E$, tal que $f(z) \in \Theta$, entonces $f^{-1}(\Theta)$ es vacío (y por lo tanto sería abierto y cerrado en E).

CONTRA EJEMPLOS PARA LA PROPOSICION 9: La imagen bajo una función continua $f: E \to \mathbb{C}$ de un abierto ó de un cerrado, no es - en general abierta o cerrada en $\mathbb{C}$.

EJEMPLO: Sea $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función

$$z \to \frac{|z|}{1+|z|},$$

f es continua, sin embargo la imagen $f(\mathbb{C})$ de $\mathbb{C}$ es el intervalo $\{w \mid 0 \leq Re(w) < 1,\ Im(w) = 0\}$; $\mathbb{C}$ es abierto y cerrado, sin embargo $f(\mathbb{C})$ no es abierto ni cerrado en $\mathbb{C}$.

PROPOSICION 10: Denotamos por $C(E)$ al conjunto de todas - las funciones continuas $E \to \mathbb{C}$

I. Con las tres operaciones:

(1) $C(E) \times C(E) \to C(E)$, $(f,g) \to f+g$, $(f+g)(z) = f(z)+g(z)$

(2) $C(E) \times C(E) \to C(E)$, $(f,g) \to f \cdot g$, $(f \cdot g)(z) = f(z)\, g(z)$

(3) $\mathbb{C} \times C(E) \to C(E)$, $(\lambda, f) \to \lambda f$, $(\lambda f)(z) = \lambda(f(z))$.

El conjunto de todas las funciones continuas de $E \to \mathbb{C}$ es un álgebra* sobre $\mathbb{C}$, con elemento cero la función constante 0, y unidad la función constante 1.

Además si E tiene más de un punto, $C(E)$ tiene divisores de cero.

II. Si $f: E \to \mathbb{C}$ $g: F \to \mathbb{C}$ son dos funciones continuas tales que $f(E) \subset F$, entonces la función $h = g \circ f: E \to \mathbb{C}$, composición de g y f es continua.

DEMOSTRACION: En el Apéndice 0.

NOTA: Debido al contraejemplo, $z \to \frac{|z|}{|z|+1}$ vemos que no toda función continua manda cerrados (respectivamente abiertos) en cerrados (respectivamente abiertos). La proposición siguiente nos da dos categorías de conjuntos invariantes bajo funciones continuas, lo cual es sumamente importante.

PROPOSICION 11: Si $f: E \to \mathbb{C}$ es continua y si

(a) K es un compacto contenido en E, entonces $f(K)$ es compacto.

---

* Un anillo asociativo A se llama álgebra sobre $\mathbb{C}$, si A es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, tal que para todo $a, b \in E$ y $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$$

(b) K es un conjunto conexo contenido en E, entonces $f(K)$ es conexo.

DEMOSTRACION: En el Apéndice 0.

COROLARIO 1: Si $f: E \to \mathbb{C}$ es continua y si E es compacto - existe por lo menos un punto $z_1 \in E$, tal que

$$|f(z_1)| = \sup \{|f(z)| \mid z \in E\}$$

y un punto $z_2 \in E$, tal que

$$|f(z_2)| = \inf \{|f(z)| \mid z \in E\}$$

DEMOSTRACION: En el Apéndice 0.

COROLARIO 2: Si $f: E \to \mathbb{C}$ es continua y si E es compacto, - para toda $\varepsilon > 0$ existe una $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que para toda $z_1, z_2 \in E$, - $|z_1 - z_2| < \delta(\varepsilon)$ implica $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$ (es decir f es uniformemente continua).

DEMOSTRACION: En el Apéndice 0.

NOTA IMPORTANTE: Las dos aplicaciones:

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad (z_1, z_2) \to z_1 + z_2 \quad y$$

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad (z_1, z_2) \to z_1 z_2$$

Son continuas en el sentido de que si $\{z_n | n \geq 1\}$ y $\{w_n | n \geq 1\}$ son dos sucesiones convergentes de límites z_∞ y w_∞, respectivamente, entonces las sucesiones $\{z_n + w_n | n \geq 1\}$ y $\{z_n w_n | n \geq 1\}$ son convergentes de límites $z_\infty + w_\infty$ y $z_\infty w_\infty$, respectivamente.

SECCION 5: Raíces n-ésimas.

El presente párrafo es puramente técnico. Necesitaremos estos resultados pues serán utilizados más adelante en el capítulo 2, donde demostraremos una generalización de los mismos - (Teorema fundamental del álgebra).

La meta de este párrafo es probar que dado cualquier número complejo y cualquier entero $n \geq 1$ existe una raíz n-ésima.

TEOREMA 1: Dada una $a \in \mathbb{C}$ cualquiera y un número entero - $n \geq 1$ entonces existe al menos una $a_n \in \mathbb{C}$, de manera que

$$(a_n)^n = a, \quad ((a_n)^n = \underbrace{a_n \cdot a_n \cdot \ldots, a_n}_{n \text{ veces}})$$

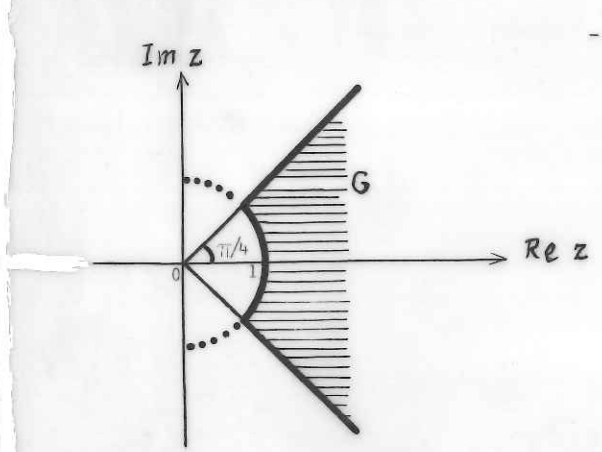
El teorema va a ser consecuencia de algunos Lemas.

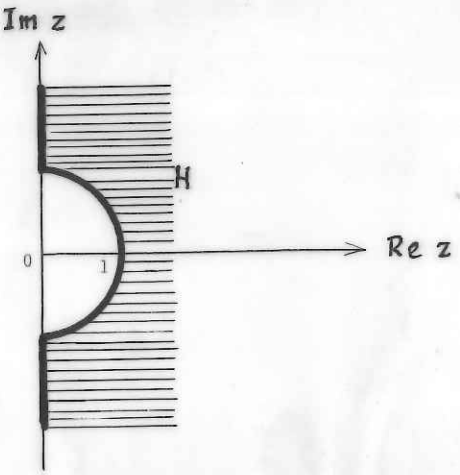
Sea

$$H = \{a \mid |a| \geq 1, \ Re(a) \geq 0\}$$

y

$$G = \{a \mid |a| \geq 1, \ Re(a) \geq 0 \text{ y } |Im(a)| \leq Re(a)\}$$





LEMA 1:

(a) Si $a \in H$, existe un único $z \in G$, tal que $z^2=a$. Denotaremos a z por $\varphi(a)$.

(b) Si $Re(a)=0$: $|Im(\varphi(a))| = Re(\varphi(a))$

Si $Re(a) > 0$: $|Im(\varphi(a))| \leq \left|\frac{Im(a)}{2Re(a)}\right| Re(\varphi(a))$

(c) $|\varphi(a)| \geq 1$ y $(|\varphi(a)|-1) \leq \frac{1}{2}(|a|-1)$

DEMOSTRACION:

(a) Sean $a= \alpha + i\beta$, $z= x+iy$, luego $z^2= a$ es equivalente al sistema:

$$(S) \quad \begin{aligned} x^2-y^2 &= \alpha \\ 2xy &= \beta \end{aligned}$$

CASO 1: Si $\alpha = 0$, $x^2= y^2$, o sea $|x|=|y|$, pero como $2|xy|=|\beta|$, por tanto $2|x|^2=|\beta|$, entonces el sistema tiene dos soluciones:

$$\left(x= \sqrt{\left|\frac{\beta}{2}\right|}\,,\ y= \varepsilon \sqrt{\left|\frac{\beta}{2}\right|}\right) \text{ y } \left(x=-\sqrt{\left|\frac{\beta}{2}\right|}\,,\ y=-\varepsilon \sqrt{\left|\frac{\beta}{2}\right|}\right)$$

donde $\varepsilon = \frac{\beta}{|\beta|}$ (como $|a| \geq 1$ y $\alpha = o$ entonces $\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \geq 1$ ó sea - $\sqrt{\beta^2} \geq 1$ y por tanto $|\beta| \geq 1$).

Unicamente la primera solución está en G, ya que: en éste caso la solución a la que nos estamos refiriendo es

$$x = \sqrt{\left|\frac{\beta}{2}\right|} \qquad y = \varepsilon \sqrt{\left|\frac{\beta}{2}\right|}$$

$|x + iy| = \sqrt{\left|\frac{\beta}{2}\right| + \frac{\beta^2}{|\beta|^2}\left|\frac{\beta}{2}\right|} = \sqrt{|\beta|} \geq 1$ por lo mencionado en el - paréntesis, $x \geq o$ y $|y| \leq x$; por lo tanto dicha solución está - en G y claramente la segunda solución no está en G.

CASO 2: Si $\alpha > o$. Como $x^2 = \alpha + y^2$ entonces $x \neq o$.

Sea $t = \frac{y}{x}$, como $\alpha > o$, entonces $|t| < 1$.

El sistema (S) es equivalente al sistema

$$(S') \quad |t| < 1$$

$$x^2(1-t^2) = \alpha$$

$$2x^2 t = \beta$$

y éste es equivalente al sistema.

$$(S'') \qquad \frac{2t}{1-t^2} = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$x^2 = \frac{\alpha}{1-t^2}$$

$$|t| < 1$$

La aplicación $t \to \frac{2t}{1-t^2}$ del intervalo $]-1,1[$ en $\mathbb{R}$ es estrictamente creciente ya que si $f(t) = \frac{2t}{1-t^2}$, entonces $f'(t) = \frac{2}{1+t^2}$ y además manda el intervalo $]-1, 1[$ a todo $\mathbb{R}$.

Luego existe un único $t_0 \in]-1,1[$ tal que:

$$\frac{2t_0}{1-t_0^2} = \frac{\beta}{\alpha}$$

A éste t_0 corresponden dos soluciones de (S)

$$\left(x = \sqrt{\frac{\alpha}{1-t_0^2}},\ y = t_0 \sqrt{\frac{\alpha}{1-t_0^2}} \right) \quad y \quad \left(x = -\sqrt{\frac{\alpha}{1-t_0^2}},\ y = -t_0 \sqrt{\frac{\alpha}{1-t_0^2}} \right)$$

Solamente la primera solución pertenece a G y ésto demuestra la parte (a) del Lema.

(b) Si $\alpha = 0$ vemos por la parte (a) que:

$$|Im\ \varphi(a)| = Re\ \varphi(a)$$

Si $\alpha > 0$ Resulta de las dos siguientes relaciones:

$$\frac{y}{x} = t_0 \text{ y } \frac{2\,t_0}{1-t_0^2} = \frac{\beta}{\alpha} \ ,$$

y ya que $|1-t^2| < 1$, entonces :

$$|t_0| = \frac{1}{2}\ |1-t_0^2|\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < \frac{1}{2}\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|$$

lo mismo que:

$$|t_0| \leqslant \frac{1}{2}\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| = \frac{1}{2}\ \frac{|Im\,(a)|}{Re(a)} \quad \text{(ya que } Re(a) > 0 \text{ y}$$

por tanto $|Re\,(a)| = Re(a))$

y además como $t_0 = \frac{y}{x} = \frac{Im\ \varphi\ (a)}{Re\ \varphi\ (a)}$

entonces $$\frac{|Im\ \varphi\ (a)|}{Re\ \varphi\ (a)} \leqslant \frac{1}{2}\ \frac{Im(a)}{Re(a)}$$

lo cual demuestra (b)

(c) Como ya demostramos que $\varphi\,(a) \in G$ entonces $|\varphi(a)| \geqslant 1$.

Ahora $z^2 = a$, y por lo tanto $|z|^2 = |a|$ y si $|a| \geqslant 1$, entonces $|z| \geqslant 1$.

Sea $|z| = 1+\varepsilon$, $\varepsilon \geqslant 0$, luego entonces:

$(1+\varepsilon)^2 = |a|$, y como

$(1+\varepsilon)^2 = 1+2\varepsilon+\varepsilon^2 \geqslant 1+2\varepsilon$, entonces

$1+2\varepsilon \leq |a|$ y $\varepsilon \leq \frac{|a|-1}{2}$, esto es

$$|\varphi(a)| - 1 \leq \frac{|a|-1}{2}$$

lo cual demuestra (c)

LEMA 2: Para todo $a \in H$ la sucesión $\{\varphi^n(a) \mid n \geq 1\}$ converge a 1, donde $\varphi^n = \underbrace{\varphi_0\varphi_0 \ldots \ldots \varphi_0\varphi}_{n \text{ veces}}$, ésta composición está bien definida,

ya que $\varphi(H) \subset G \subset H$.

DEMOSTRACION:

Sea $a = \alpha + i\beta$, y consideramos primero el caso $\alpha > o$. Aplicando inductivamente el Lema 1, resulta $\varphi^n(a) = x_n + iy_n$, donde

(a) $x_n > 0$, para toda $n \geq 1$

(b) $\left|\frac{y_n}{x_n}\right| \leq \frac{1}{2}\left|\frac{y_{n-1}}{x_{n-1}}\right|$, para toda $n \in \mathbf{N}$

(c) $0 \leq |\varphi^n(a)| - 1 \leq \frac{1}{2}(|\varphi^{n-1}(a)| - 1)$, para toda $n \in \mathbf{N}$

De esto resulta que:

$$\left|\frac{y_n}{x_n}\right| \leq \frac{1}{2^n}\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|, \text{ para toda } n \in \mathbf{N} \text{ y}$$

$0 \leq |\varphi^n(a)| - 1 \leq \frac{1}{2^n}(|a|-1)$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Luego $\left|\frac{y_n}{x_n}\right| \to 0$ cuando $n \to \infty$ y $|\varphi^n(a)| \to 1$ cuando $n \to \infty$

como $|\varphi^n(a)|^2 = x_n^2 + y_n^2$, entonces $x_n^2 \to 1$ y $y_n^2 \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Ahora por ser $x_n > o$, para toda $n \in \mathbb{N}$, tendremos que $x_n \to 1$ cuando $n \to \infty$, luego entonces $\varphi^n(a) \to 1$ cuando $n \to \infty$.

Ahora si $\alpha = o$, entonces por Lema 1.

$a_1 = \varphi(a) = \alpha_1 + i\beta_1$, donde $\alpha_1 > o$, y entonces se reduce al caso anterior, ya que:

$$\varphi^n(a) = \varphi^{n-1}(a_1) \text{ y } \lim_{n\to\infty} \varphi^{n-1}(a_1) = 1$$

Por tanto:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi^n(a) = 1$$

DEMOSTRACION DEL TEOREMA: Sea $a \in H$ y r un entero ≥ 2 , vamos a demostrar que existe un $w \in \mathbb{C}$, tal que $w^r = a$.

Para todo entero $n \geq 1$ existe un único entero $k(n) \geq o$, tal que:

$$\frac{k(n)}{2^n} \leq \frac{1}{r} < \frac{k(n)+1}{2^n}$$

De esto resulta que:

$$(k(n) + 1)\ r > 2^n \text{ , es decir}$$

$(K(n)+ 1)\ r = 2^n + q_n$, donde $0 < q_n < r$ (ya que $k(n)\ r \leq 2^n$)

Denotaremos a $\varphi^n(a)$ mediante z_n .

Del lema 1 (c) resulta que:

$$1 \leq |z_n| \leq 1 + \frac{1}{2}(|z_{n-1}| - 1), \text{ para todo } n \geq 1 .$$

Entonces:

$$1 \leq |z_n| \leq |z_{n-1}| \text{ para toda } n \in \mathbf{N}$$

Por consiguiente la sucesión $\{|z_n|\}$ es acotada por $|z_1|$.

Por otro lado tenemos que para todo entero $0 \leq q \leq r$: $(z_{n-1}^q) = (z_n - 1)(z_n^{q-1} + \ldots$

y luego $|z_n^q - 1| \leq |z_n - 1| \sum_{j=0}^{q-1} |z_n|^j$

Entonces $|z_n^q - 1| \leq |z_{n-1}| \sum_{j=0}^{r-1} |z_n|^j \leq \beta\ |z_{n-1}|$

donde β es la constante $\sum_{j=0}^{r-1} |z_1|^j$.

Sea w_n el número $z_n^{(k(n)+1)}$; demostremos que $w_n^r \to a$ cuando $n \to \infty$.

$w_n^r = z_n^{(k(n)+1)r} = z_n^{2n+q_n}$, pero como $z_n^{2^n} = a$, entonces

$$w_n^r = a \cdot z_n^{q_n}$$

Debido a que $|z_n^{q_n}-1| \leq \beta |z_n-1|$ y del lema 2 $z_n \to 1$ cuando $n \to \infty$, tendremos que $z_n^{q_n} \to 1$ cuando $n \to \infty$,

por tanto $w_n^r \to a$ cuando $n \to \infty$.

Como la sucesión $\{w_n^r | n \geq 1\}$ converge, entonces ella es acotada y, por tanto, la sucesión $\{w_n | n \geq 1\}$ es acotada. Entonces existe una subsucesión $\{T_j | j \geq 1\}$, $T_j = w_{n_j}$ de la sucesión $\{w_n | n \geq 1\}$ que es convergente. Sea w el límite de la sucesión $\{T_j | j \geq 1\}$.

Por la nota final de la sección 4, tendremos

$$w^r = \lim_{j\to\infty} T_j^r = \lim_{n\to\infty} w_n^r = a$$

Entonces hemos probado de que si $a \in H$ y si r es un entero ≥ 2, existe una $w \in \mathbb{C}$ tal que: $w^r = a$.

En general:

(1) Si $a \neq o$ de manera que $|a| < 1$ y $Re(a) \geq o$, tendremos que $\frac{1}{a} \in H$ y por tanto existe un w_1 de suerte que $w_1^r = \frac{1}{a}$. Si $w = \frac{1}{w_1}$ entonces $w^r = a$

(2) Si $a \neq o$ de suerte que $Re(a) < o$, tendremos que si $a_1 = -a$, $Re(a_1) > o$ y por lo anterior existe w_1 de manera que $w_1^r = a_1$.

Si r es impar. Sea $w = -w_1$, y por tanto $w^r = (-w_1)^r = -a_1 = a$

Si r es par, entonces $r = 2^s q$, con q impar.

Si $s = 1$, $w = i w_1$ y, por tanto, $w^r = (iw_1)^{2^s q} = i^{2^s q} w_1^r = (-1)^q w_1^r = -a_1$

Si $s \geq 2$ como $i \in H$, sea $T = \varphi^{s-1}(i)$, o sea $T^{2^{s-1}} = i$, luego $T \in G$.

Entonces por lo anterior existe un w_2 tal que

$$w_2^q = T ,$$

luego

$$w_2^{2^{s-1}q} = T^{2^{s-1}} = i, \text{ por tanto,}$$

$$w_2^r = w^{2^s q} = i^2 = -1;$$

Si $w = w_2 w_1$, entonces

$$w^r = (w_2 w_1)^r = (-1)(a_1) = -a_1 = a$$

Con esto el Teorema queda probado.

EJERCICIO: Sea $\mathbb{R}[x]$ el anillo de todos los polinomios con coeficientes reales y sea $(x^2+1)\,\mathbb{R}[x]$ el ideal generado por x^2+1. Entonces $\mathbb{R}[x] / (x^2+1)\mathbb{R}[x]$ es isomorfo a $\mathbb{C}$.

Si $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ el residuo de la división de $P(x)$ por x^2+1 es de la forma $bx+a$.

Entonces se manda la clase $P+(x^2+1)\,\mathbb{R}[x]$ de $Pa(a+ib)$.

DEMOSTRACION: En el Apéndice O.

APENDICE 0

DEMOSTRACION DE LA PROPOSICION 1:

(a) Sean $x, y, z \in \mathbb{C}$, donde $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ y $z = (z_1, z_2)$

(1) Cerradura (adición): $x+y = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1+y_1, x_2+y_2) \in \mathbb{C}$.

(2) Conmutatividad (Adición):

$$x+y = (x_1+y_1,\ x_2+y_2) = (y_1+x_1,\ y_2+x_2) = y+x$$

(3) Asociatividad (Adición):

$$(x+y)+z = (x_1+y_1, x_2+y_2)+(z_1, z_2) = [(x_1+y_1)+z_1, (x_2+y_2)+z_2] = [x_1+(y_1+z_1), x_2+(y_2+z_2)] =$$

$$= (x_1, x_2) + (y_1+z_1, y_2+z_2) = x+(y+z)$$

(4) Existencia del elemento idéntico (Adición):

Existe $0 = (o, o)$ tal que: $x+0 = (x_1, x_2)+(o, o) = (x_1+o, x_2+o) = (x_1, x_2$

(5) Existencia del elemento inverso (Adición)

Dado $x \in \mathbb{C}$, existe $-x = (-x_1, -x_2)$ tal que:

$$x+(-x) = (x_1, x_2)+(-x_1, -x_2) = (x_1+(-x_1), x_2+(-x_2)) = (o, o) = 0$$

(6) Cerradura (Multiplicación):

$$x \cdot y = (x_1y_1 - x_2y_2,\ x_1y_2+x_2y_1) \in \mathbb{C}$$

(7) Conmutatividad (multiplicación):

$$x \cdot y = (x_1y_1 - x_2y_2,\ x_1y_2+x_2y_1) = (y_1x_1 - y_2x_2, y_2x_1+y_1x_2) = y \cdot x$$

(8) Asociatividad (Multiplicación):

$$(x\cdot y).z = (x_1y_1 - x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1)(z_1, z_2) =$$

$$= (x_1y_1z_1 - x_2y_2z_1 - x_1y_2z_2 - x_2y_1z_2, x_1y_1z_2 - x_2y_2z_2 + x_1y_2z_1 + x_2y_1z_1)$$

$$x.(y.z) = (x_1, x_2)(y_1z_1 - y_2z_2, y_1z_2 + y_2z_1) =$$

$$= (x_1y_1z_1 - x_1y_2z_2 - x_2y_1z_2 - x_2y_2z_1, x_1y_1z_2 + x_1y_2z_1 + x_2y_1z_1 - x_2y_2z_2)$$

(9) Existencia del elemento idéntico (Multiplicación):

Existe $1=(1,0)$ tal que:

$$x\cdot 1 = (x_1, x_2)\ (1,0) = (x_1, x_2) = x$$

(10) Existencia del elemento inverso (Multiplicación):

Dado $x \in \mathbb{C}$ con $x \neq 0$ existe $x^{-1} = \left(\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}, \frac{-x_2}{x_1^2+x_2^2}\right)$ tal que:

$$x\cdot x^{-1} = (x_1, x_2)\ \left(\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}, \frac{-x_2}{x_1^2+x_2^2}\right) = (1,0) = 1$$

(11) Distributividad (Adición y Multiplicación):

$$x\cdot(y+z) = (x_1y_1 + x_1z_1 - x_2y_2 - x_2z_2, x_1y_2 + x_1z_2 + x_2y_1 + x_2z_1)$$

$$x\cdot y + x\cdot z = (x_1y_1 - x_2y_2 + x_1z_1 - x_2z_2, x_1y_2 + x_2y_1 + x_1z_2 + x_2z_1)$$

Con ésto queda demostrada la parte (a).

(b) Sea f la aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$ definida como

$$f(a) = (a,0)$$

(1) f es un homomorfismo:

Sean $a,b \in \mathbb{R}$

$f(a+b)= (a+b,o)= (a,o)+ (b,o)= f(a)+f(b)$

$f(a\cdot b)= (ab,o) = (a,o)\ (b,o)= f(a)\ f(b)$

(2) f es inyectiva:

Si $f(a)= f(b)$

entonces $(a,o)= (b,o)$

y por lo tanto $a = b$

DEMOSTRACION DE LA PROPOSICION 2:

Sean $x= x_1+i\,x_2$ y $y= y_1+iy_2$ definiremos el conjugado de x como $x_1-i\,x_2$ y lo denotaremos por $\bar{x}$. Es fácil ver que las siguientes propiedades son válidas:

$$|x|=|\bar{x}|,\ \bar{\bar{x}}=x,\ |x|^2=x\cdot\bar{x},\ \overline{x+y} = \bar{x}+\bar{y},\ \overline{x\cdot y} = \bar{x}\cdot\bar{y},\ x+\bar{x} = 2\mathrm{Re}(x) \text{ y } \mathrm{Re}(x) \leq |x|.$$

Demostraré, por comodidad, primero la parte (b) pues va a ser usada para demostrar la parte (a).

(b) $|xy|= \sqrt{(x_1y_1-x_2y_2)^2+(x_1y_2+x_2y_1)^2}= \sqrt{x_1^2\,y_1^2- 2x_1y_1x_2y_2+x_2^2\,y_2^2+x_1^2y_2^2+2x_1y_2x_2y_1+x$

$|x|\ |y|= \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\ \ \sqrt{y_1^2 + y_2^2} = \sqrt{x_1^2y_1^2+x_1^2\,y_2^2+x_2^2y_1^2+x_2^2\,y_2^2}$

(a) $|x+y|^2=(x+y)\ \overline{(x+y)}=(x+y)\ (\bar{x}+\bar{y})= x.\bar{x}+x.\bar{y}+y.\bar{x}+y.\bar{y}=$

$=|x|^2 + x.\bar{y} + \overline{x.\bar{y}} + |y|^2= |x|^2 + 2\ \mathrm{Re}\ (x.\bar{y})+|y|^2 \leqslant |x|^2+2|x\bar{y}|+|y|^2=$

$=|x|^2 + 2|x|\ |\bar{y}| + |y|^2= |x|^2+ 2|x|\ |y| + |y|^2= (|x| + |y|)^2$

por tanto: $|x+y|^2 \leqslant (|x|+|y|)^2$ y como

$$|x+y| \geqslant 0 \text{ y } |x| + |y| \geqslant 0$$

se concluye que $|x+y| \leqslant |x| + |y|$

(c) Supongamos $|x|= 0$, $\sqrt{x_1^2+x_2^2}= 0$, $x_1^2+ x_2^2= 0$

como $x_1^2 \geqslant 0$ y $x_2^2 \geqslant 0$ se deduce $x_1^2=0$ y $x_2^2= 0$

y por lo tanto $x_1=0$ y $x_2=0$ ó sea $x=0$

DEMOSTRACION DE LA PROPOSICION 3:

Supongamos que la sucesión $\{z_n | n \geqslant 1\}$ converge a dos límites distintos L_1 y L_2, entonces por la definición de sucesión convergente tendremos:

$$|z_n - L_1| \to o, \text{ cuando } n \to \infty$$

$$|z_n - L_2| \to o, \text{ cuando } n \to \infty$$

Pero $|L_1-L_2|= |L_1- z_n+z_n- L_2| \leqslant |L_1-z_n|+|z_n-L_2|=|z_n-L_1|+|z_n-L_2| \to 0$

es decir $|L_1- L_2| \to 0$ cuando $n \to \infty$,

pero a su vez como L_1-L_2 es constante $L_1-L_2=0$, o sea $L_1=L_2$, esta contradicción niega la posibilidad de que la sucesión converja a límites distintos.

DEMOSTRACION DE LA PROPOSICION 4:

Para esta demostración, necesitaré las definiciones de disco abierto y de punto de acumulación, mencionadas en la definición 4 (a) y definición 6 (b) del Capítulo 0 respectivamente. Además la definición de conjunto acotado en los complejos, la cual se menciona en la proposición 8.

Antes de demostrar el criterio de Cauchy, demostraré un Lema y el Teorema de Bolzano Weierstrass.

LEMA AUXILIAR 1:

Supongamos $S \subset \mathbb{C}$ y $x \in \mathbb{C}$ un punto de acumulación de S, entonces todo $D(x,r)$ contiene una infinidad de puntos de S.

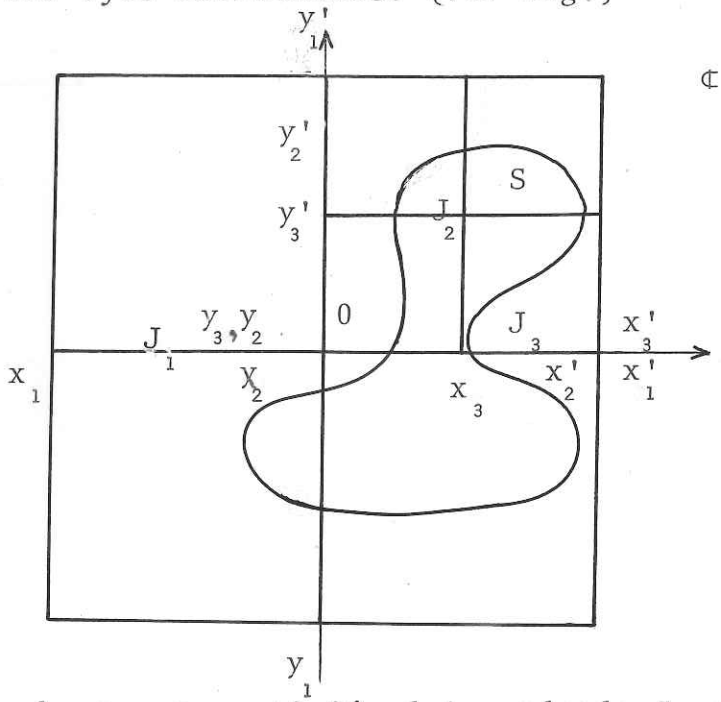
DEMOSTRACION: Supongamos lo contrario, entonces existe $D(x,a)$ que contiene sólo un número finito de puntos de S distintos de x; sean éstos; $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Si r es el menor de los números positivos: $|x-x_1|, |x-x_2|, \ldots, |x-x_n|$, entonces $D(x,\frac{r}{2})$ será un disco que no contiene puntos de S distintos de x; esto contradice el hecho de que x es un punto de acumulación.

TEOREMA AUXILIAR 1; (Bolzano Weierstrass)

Todo conjunto $S \subset \mathbb{C}$ acotado e infinito tiene en $\mathbb{C}$ al menos

un punto de acumulación de S.

DEMOSTRACION: Puesto que por hipótesis S es un conjunto acotado, entonces dicho conjunto estará contenido en un disco, o más cómodo, en un cierto cuadrado J_1 adecuadamente grande, con lados paralelos a los ejes coordenados. (ver fig.)



Hagamos ahora una partición del cuadrado J_1 en 4 partes iguales, mediante paralelas a sus lados que pasen por su centro (ver fig.).

Por hipótesis del teorema S es infinito, luego entonces al menos uno de los 4 cuadrados menores contiene un conjunto infinito de elementos de S, de lo contrario S contendría un número finito de elementos. Digamos que sea J_2 el tal cuadrado.

Ahora J_2 está en las mismas condiciones que J_1 y le podemos aplicar el mismo razonamiento: dividimos a J_2 en 4 cuadrados menores, al menos en uno de los cuales habría un conjunto infinito de elementos de S.

Siguiendo éste razonamiento obtenemos una sucesión decreciente de cuadrados:

$$J_1 \supset J_2 \supset J_3 \supset \ldots, \supset J_n \supset, \ldots,$$

cada uno de los cuales contiene un conjunto infinito de elementos de S.

Denotemos por x_n y x'_n $(x'_n > x_n)$ las abscisas de los lados horizontales del cuadrado J_n y respectivamente por y_n y y'_n $(y'_n \geq y_n)$ las ordenadas de sus lados verticales (ver Fig.).

Puntualizando las sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ son no decrecientes, mientras que $\{x'_n\}$ y $\{y'_n\}$ son no crecientes, además todas estas sucesiones están acotadas respectivamente por las abscisas y ordenadas del cuadrado J_1, podemos concluir que todas estas sucesiones tienen límite, pero por otro lado también observamos que las diferencias:

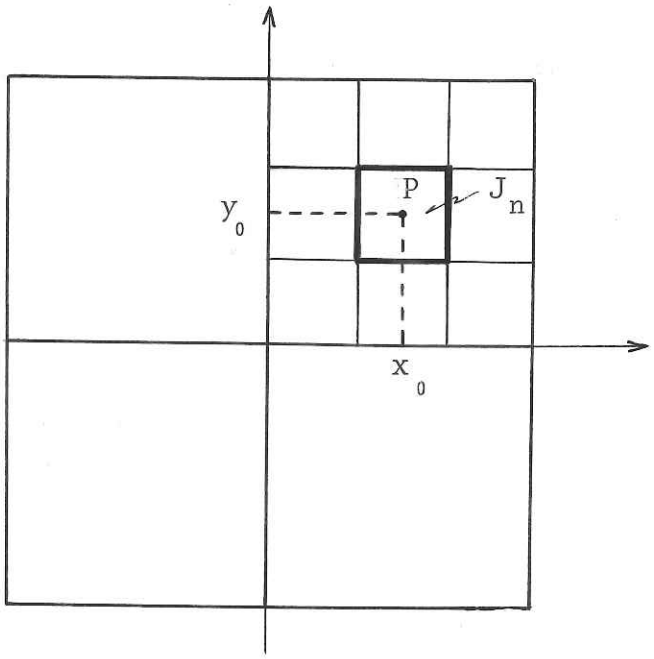
$$x'_n - x_n \to 0 \text{ cuando } n \to \infty$$

$$y'_n - y_n \to 0 \text{ cuando } n \to \infty$$

luego las sucesiones $\{x'_n\}$ y $\{x_n\}$ tienen un límite común x_o y análogamente $\{y'_n\}$ y $\{y_n\}$ tienden a un límite común y_o (en cada eje -

se tiene un encaje de intervalos).

Denotemos por P al punto de coordenadas (x_o, y_o). De la definición de x_n, x'_n, y_n y y'_n se colige en forma inmediata que cualquier punto de J_1 (el cuadrado original que contiene a S) con ordenada y_o está contenido en una franja horizontal acotada por los lados horizontales de J_n y también cualquier punto de J_1 con abscisa x_o queda contenido en una franja vertical acotada por los lados verticales de J_n, siendo esto cierto para toda n . Luego P está contenido en cualquier J_n de nuestra sucesión de cuadros (ver Fig.)



Tomemos finalmente un disco de radio arbitrario con centro en P. A partir de un cierto n el cuadrado J_n queda contenido en-

dicho disco; ya que contiene al punto P y sus lados tienden a cero cuando n crece, pero todo cuadrado tipo J_n contiene un - conjunto infinito de elementos de S, luego concluimos que el su sodicho disco contiene un conjunto infinito de elementos de S - y por tanto P es un punto de acumulación de S.

CRITERIO DE CAUCHY:

La condición necesaria y suficiente para que la sucesión $\{w_n | n \geq 1\}$ sea convergente consiste en que para todo $\varepsilon > 0$ - dado, existe cierto $N(\varepsilon)$, a partir del cual, es decir para $n > N$

$$|w_n - w_{n+P}| < \varepsilon$$

cualquiera que sea el número natural P .

DEMOSTRACION

CONDICION NECESARIA: Si $\{w_n\}$ converge a cierto w_o, entonces quiere decir que:

$$|w_n - w_o| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para cualquier $\varepsilon > 0$ dada de antemano y a partir de una cierta N, es decir para $n > N$.

En consecuencia, para las mismas n:

$$|w_{n+p} - w_o| < \frac{\varepsilon}{2}$$

con p un natural arbitrario.

Por lo tanto:

$$|w_n - w_{n+p}| = |w_n - w_o - w_{n+p} + w_o| = |w_n - w_o - (w_{n+p} - w_o)| \leq |w_n - w_o| + |w_{n+p} - w_o| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

para las $n > N(\varepsilon)$, o sea se cumple la condición necesaria del - criterio.

CONDICION SUFICIENTE:

En efecto tomando $\varepsilon=1$, tendremos

$$|w_n - w_{n+p}| < 1$$

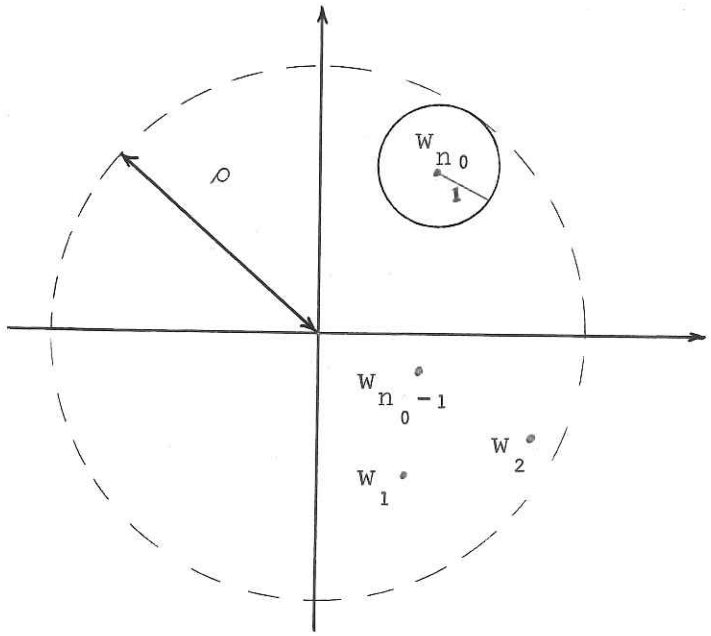
a partir de cierta n . Fijando el valor de una de esas n digamos $n=n_o$, obtenemos

$$\left|w_{n_o} - w_{n_o+p}\right| < 1$$

esto significa que todos los puntos w_{n_o+1}, w_{n_o+2},..., están en

el disco de radio 1 y centro en w_{n_o}.

Escogemos ahora un disco de radio ρ con centro en el origen $|w| < \rho$ de suerte que incluya al disco de radio 1 mencionado y a todos los puntos restantes, a saber: $w_1, w_2, \ldots, w_{n_o - 1}$ (ver fig).



De aquí obtenemos un disco que contiene a todos los miembros de la sucesión, luego entonces la sucesión $\{w_n\}$ es acotada y para éstas, por el teorema de Bolzano Weierstrass se asegura la existencia de al menos un punto de acumulación.

Observese que ρ puede escogerse tomando:

$$M = \max \{|w_1|, |w_2|, \ldots, |w_{n_o}|\} \text{ y haciendo } \rho = M+1.$$

Faltará solo demostrar que la sucesión no tiene dos puntos de acumulación diferentes.

Supongamos lo contrario que w_o y w_o^* ($w_o \neq w_o^*$) son puntos de acumulación de $\{w_n\}$.

Haciendo $\varepsilon = \frac{1}{3} |w_o^* - w_o|$

obtenémos que $|w_n - w_{n+p}| < \frac{1}{3} |w_o^* - w_o|$

se cumple a partir de una n adecuadamente grande: $n > N$.

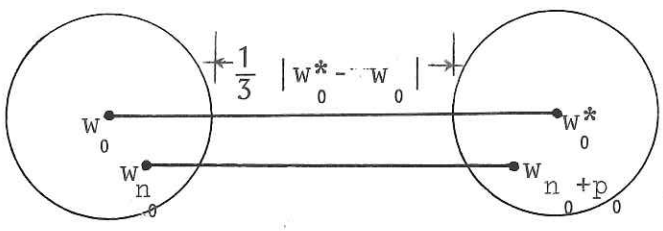
Por otro lado, en cada uno de los discos, con centro en w_o y w_o^*:

$$|w - w_o| < \frac{1}{3} |w_o^* - w_o|$$

$$|w - w_o^*| < \frac{1}{3} |w_o^* - w_o|$$

deben estar contenidos un conjunto infinito de elementos de la sucesión $\{w_n\}$; pues por hipótesis w_o y w_o^* son puntos de acumulación de $\{w_n\}$.

Finalmente supongamos que w_{n_o}, con índice $n_o > N$, pertenece al primer disco, mientras que $w_{n_o+p_o}$ es un término de la sucesión que está en el segundo disco, entonces evidentemente tendremos (ver fig.)



$$\left| w_{n_o} - w_{n_o} + p_o \right| > \frac{1}{3} \left| w_o^* - w_o \right|$$

que contradice la desigualdad de la que partimos. Esta contradicción obliga a reconocer que $\{w_n\}$ sólo tiene un punto de acumulación, es decir la sucesión $\{w_n\}$ converge.

DEMOSTRACION DE LA PROPOSICION 5: Primeramente demostraremos el siguiente lema auxiliar.

LEMA AUXILIAR 2: Sea $\{E\alpha\}$ una colección de conjuntos $E\alpha$ entonces:

$$(\bigcup_\alpha E\alpha)^c = (\bigcap_\alpha E\overset{c}{\alpha})$$

DEMOSTRACION:

Denotemos por A y B respectivamente al primer y segundo miembro de la igualdad por demostrar.

Sea $x \in A$, $x \notin \cup E\alpha$, entonces $x \notin E\alpha$ para toda α y por lo tanto $x \in E^c_\alpha$ para toda α, o sea $x \in \bigcap_\alpha E\overset{c}{\alpha}$ de donde $A \subset B$.

Sea $x \in B$, $x \in E\overset{c}{\alpha}$ para toda α, entonces $x \notin E\alpha$ para cualquier α y por lo tanto $x \notin \bigcup_\alpha E\alpha$ ó sea $x \in (\bigcup_\alpha E\alpha)^c$ de donde $B \subset A$.
y finalmente concluimos $A = B$

NOTA: Análogamente se demuestra que $(\bigcap_\alpha E\alpha)^c = \bigcup_\alpha E\overset{c}{\alpha}$.

A continuación demostraremos las proposición 5:

(a) Para toda colección $\{G\alpha\}$ de conjuntos abiertos, $\bigcup_{\alpha} G\alpha$ es abierto.

Sea $G = \bigcup_{\alpha} G\alpha$. Sea $x \in G$, entonces $x \in G\alpha$ para alguna α. Como x es un punto interior de $G\alpha$, existe un disco de cierto tadio r tal que:

$$D(x,r) \subset G\alpha \subset G,$$

luego por definición x es interior de G, finalmente entonces G es abierto.

(b) Para toda colección $\{F\alpha\}$ de conjuntos cerrados, su intersección $\bigcap_{\alpha} F\alpha$ es cerrada.

En efecto sabemos de la nota del Lema Auxiliar 2 que:

$$(\bigcap_{\alpha} F\alpha)^c = \bigcup_{\alpha} F\alpha^c$$

Como $F\alpha$ es cerrado, por definición 5 (b) F_{α}^c es abierto, por tanto de (a) se deduce que $\bigcup_{\alpha} F_{\alpha}^c$ es abierto, entonces $(\bigcap_{\alpha} F\alpha)^c$ es abierto, por lo cual -- $\bigcap_{\alpha} F_{\alpha}$ es cerrado.

(c) Sean $G_1, G_2, \ldots, G_n$ abiertos, demostraremos que $\bigcap_{i=1}^{n} G\,i$ es abierta.

Sea $H = \bigcap_{i=1}^{n} Gi$, entonces para todo $x \in H$ existen vecindades N_i de x con radios r_i, tales que $N_i \subset G_i$; $i=1,\ldots,n$.

Sea $r = \min(r_1, \ldots, r_n)$ y designemos por N la vecindad de x, de radio r. Entonces $N \subset G_i$ $i=1,\ldots,n$ lo cual significa que $N \subset H$ luego entonces H es abierto.

(d) Sean $F_1, \ldots, F_n$ cerrados queremos demostrar que $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ es cerrado.

En efecto del Lema Auxiliar 2 sabemos que:

$$(\bigcup_{i=1}^{n} F_i)^c = \bigcap_{i=1}^{n} F_i^c$$

y como F_i es cerrado, tendremos que F_i^c es abierto, luego (c) nos asegura que $\bigcap_{i=1}^{n} F_i^c$ es abierto, de donde obtenemos que $(\bigcup_{i=1}^{n} F_i)$ es abierto y por lo tanto $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ es cerrado.

DEMOSTRACION DE LA PROPOSICION 6:

CONDICION NECESARIA: Supongamos E es cerrado, sea x un - punto de acumulación de E. Hay que demostrar que x pertenece a E.

Si $x \notin E$, entonces $x \in E^c$, pero como E es cerrado, E^c es abierto, por consiguiente existe un disco con centro en x completamente contenido en E^c, de donde podemos asegurar que existe un disco de centro x que no tiene puntos de E, esto es x es aislado, - lo cual contradice que x sea punto de acumulación, consecuentemente x pertenece a E .

CONDICION SUFICIENTE: Supongamos E contiene a todos sus puntos de acumulación, demostraremos que E es cerrado; lo cual es equivalente a demostrar que E^c es abierto.

Sea $x \in E^c$, entonces no puede pasar que todo disco con centro en x, tenga siempre puntos de E pues eso significaría que x fuera punto de acumulación de E y entonces por hipótesis x estaría en E, por consiguiente existe al menos una vecindad de x que no contiene puntos de E ó sea que está contenida en E^c, por tanto E^c es abierto, y consecuentemente E es cerrado.

DEMOSTRACION DE LA PROPOSICION 7:

Supongamos que $F \subset E$ es abierto (respectivamente cerrado), en E, entonces existe G abierto (respectivamente cerrado), talque $F=E \cap G$; como E y G son abiertos (respectivamente cerrados), tendremos que $E \cap G$ es abierto (respectivamente cerrado), y consecuentemente F es abierto (respectivamente cerrado).

NOTA REFERENTE A LA DEFINICION 8:

Definición usual de compacto:

DEFINICION AUXILIAR 1:

Se dice que $\{G\alpha\}$es una *cubierta abierta* de un conjunto E, - donde E es un subconjunto de un espacio topológico X y G_α son subconjuntos abiertos de X para toda α, si $E \subset \cup G\alpha$

DEFINICION AUXILIAR 2: COMPACTOS.

Un subconjunto K de un espacio topológico X se dice que es compacto si toda cubierta abierta de K contiene una **subcubierta finita.**

DEMOSTRACION EN LA PROPOSICION 8

CONDICION NECESARIA:

Primero demostraremos que K es cerrado, con esto queremos demostrar que si $\{x_n\} \in k$ es convergente a x , entonces $x \in K$.

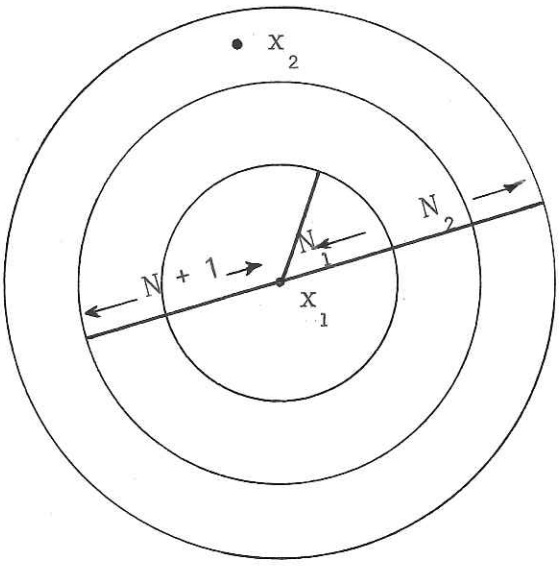
Consideramos el siguiente conjunto $S=\{x_1,x_2,x_3,....,\}$si S es un conjunto finito quiere decir que los términos de la sucesión - $\{x_n\}$ se repiten constantemente, ó sea que desde un cierto términ

no en adelante la sucesión es constante (ya que dicha sucesión es convergente)y entonces forzosamente tiene que converger a - esa constante, que por ser un término de la sucesión de $\{x_n\}$ y cada $x_n \in K$, entonces esa constante está en K.

Si S es infinito, entonces por ser $S \subset K$ y K compacto, S contiene una sucesión convergente con límite en K, pero esa sucesión tiene que ser ó $\{x_n\}$, ó $\{x_{n_k}\}$ una subsucesión, y en los dos casos convergen a x, luego $x \in K$, por lo cual K es cerrado.

Ahora demostraremos que K es acotado. Supongamos que K no es acotado, esto significa que no existe un disco D(o,r), talque $K \subset D(o,r)$, entonces podemos hacer la siguiente construcción:

Sea $x_1 \in K$, tomemos N_1 como radio de un disco que contenga a x_1, tomemos ahora N_1+1; y sea $N_2 > N_1+1$ el radio de otro disco - con centro en x_1 y que contenga a otro punto $x_2 \in K$ que no esté en el disco de radio N_1+1 (este disco de radio N_2 que contiene a x_2 existe ya que si no exsistiera K sería acotado) - - - (Ver Fig.)



Este mismo procedimiento puedo continuarlo para encontrar puntos $x_3, x_4, \ldots,$

Finalmente hemos encontrado $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ un conjunto infinito que no contiene una sucesión convergente ya que $|x_i - x_j| > 1$; para toda $i \neq j$ lo cual contradice el hecho de que k es compacto, y por lo tanto concluimos que k es acotado.

CONDICION SUFICIENTE: Si K es cerrado y acotado, hay que demostrar que K es compacto, esto es que dado cualquier subconjunto infinito E de K, dicho subconjunto contiene una sucesión convergente con límite en K.

Primero: Si $E \subset K$, con E infinito, y si contiene una sucesión convergente, entonces su límite tiene que pertenecer a k, puesto que por hipótesis K es cerrado.

Segundo: Demostraremos ahora que todo conjunto $E \subset K$ infinito, bajo nuestras hipótesis, contiene una sucesión convergente. Como E es un conjunto infinito y acotado, entonces por el teorema de Weierstrass (demostrado en el teorema auxiliar 1) tiene un punto de acumulación en $\mathbb{C}$, por lo cual puede construirse una sucesión convergente que tienda a ese punto, y que por lo mencionado anteriormente dicho punto debe pertenecer a k. Por lo tanto K es compacto.

DEMOSTRACION REFERENTE A LA DEFINICION 9:

Demostraré que las partes (a) y (b) de la definición 9 son equivalentes, o sea (a) si y solamente si (b).

CONDICION NECESARIA: Por reducción al absurdo, supongamos que existe $A \neq E \neq \phi$ abierto y cerrado en E, $A \subset E$.

Por ser A cerrado en E, existe G cerrado tal que:

$$A = E \cap G,$$

entonces $E-A$ es abierto en E ya que:

$$E-A = E \cap A^c = E \cap (E \cap G)^c = E \cap (E^c \cup G^c) = (E \cap E^c) \cup (E \cap G^c) = E \cap G^c$$

Como G es cerrado G^c es abierto y por lo tanto $E-A$ es abierto en E.

Pero a la vez A es abierto en E, entonces tendremos que:

$$E = A \cup (E-A) \text{ con } A \neq \phi \text{ y } E-A \neq \phi$$

con A y $E-A$ abiertos en E y ajenos, lo cual contradice (a), por lo tanto (b) es cierto.

CONDICION SUFICIENTE: Por reducción al absurdo, suponga mos que:

$E = A \cup B$; con $A \cap B = \Phi$ y $A \neq \Phi$, $B \neq \Phi$; con A y B abiertos en E.

Sea $\bar{A}$ el conjunto A, unión todos los puntos de acumulación de A, entonces $\bar{A}$ es cerrado.

Además $\bar{A} \cap E = A$, pues :

$\bar{A} \cap E = \bar{A} \cap (A \cup B) = (\bar{A} \cap A) \cup (\bar{A} \cap B) = A \cup (\bar{A} \cap B)$ y $\bar{A} \cap B = \Phi$, ya que si $x \in \bar{A}$ y $x \in B$, entonces x no puede estar en A porque $A \cap B = \Phi$.- Por consiguiente x sería punto de acumulación de A, por tanto toda vecindad de x contendría puntos de A, y como B es abierto en E, luego existe G un abierto tal que $B = E \cap G$, consecuentemente G no puede tener puntos de A, y como $x \in B$, es decir $x \in G$, esto es no existe una vecindad de x completamente contenida en G lo que contradice que G es abierto, en resumen:

$\bar{A} \cap B = \Phi$ y por tanto $\bar{A} \cap E = A$

y además como $A \neq \Phi$ y $A \neq E$, $B \neq \Phi$ $(A \cup B = E)$ y A es abierto en E, pero también es cerrado en E, ya que $\bar{A} \cap E = A$, por lo cual A es abierto y cerrado en E, pero esto contradice a (b) entonces (a) es cierto.

DEMOSTRACION DE LA NOTA REFERENTE A LA DEFINICION 9:

(a) CONDICION NECESARIA:

Sea Ω un conjunto abierto conexo.

Escojamos un punto $a \in \Omega$ y sea $\Omega_1 \subset \Omega$ el conjunto que cumple la condición de que sus puntos pueden ser unidos a a por medio de una poligonal contenida en Ω, y sea $\Omega_2 \subset \Omega$ el conjunto cuyos puntos no pueden ser unidos a a por medio de una poligonal.

Demostraremos que Ω_1 y Ω_2 son ambos abiertos. Supongamos $a_1 \in \Omega_1$, tendremos por ser Ω abierto que existe un disco $|z-a_1| < \varepsilon$ contenido en Ω. Todos los puntos de ese disco pueden ser unidos a a_1 por medio de un segmento y de a_1 a a por medio de una poligonal ya que $a_1 \in \Omega_1$, entonces ese disco está contenido en Ω_1, por lo cual Ω_1 es abierto.

Supongamos $a_2 \in \Omega_2$, tendremos entonces que existe un disco $|z-a_2| < \varepsilon$ contenido en Ω (ya que Ω es abierto). Si un punto de ese disco pudiera ser unido a a por medio de una poligonal, uniríamos a_2 con ese punto y luego de ese punto a a por medio de una poligonal, lo que querría decir que $a_2 \in \Omega_1$ pero como $a_2 \notin \Omega_1$ sino que $a_2 \in \Omega_2$, entonces todo punto de ese disco debe pertenecer a Ω_2 y por tanto Ω_2 es abierto.

$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, y Ω es conexo y además Ω_1 y Ω_2 son abier

tos entonces $\Omega_1 = \Phi$ ó $\Omega_2 = \Phi$, como $a \in \Omega_1$, tendremos que $\Omega_2 = \Phi$, luego todos los puntos pueden ser unidos a a por medio de una poligonal.

Dados cualesquiera dos puntos z y w basta unir por medio de una poligonal de z a a y de a a w respectivamente y obtendremos la poligonal deseada.

CONDICION SUFICIENTE. Supongamos $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ con Ω_1 y Ω_2 - abiertos en Ω_1 ajenos y distintos del vacío (por reducción al - absurdo).

Escojamos $a_1 \in \Omega_1$ y $a_2 \in \Omega_2$, esos puntos pueden ser unidos por medio de una poligonal en Ω.

Uno de los lados de la poligonal debe unir un punto de Ω_1 con otro de Ω_2 y por esta razón es suficiente considerar el caso que a_1 y a_2 están unidos por un segmento. Este segmento tiene representación paramétrica.

$$z = a_1 + t(a_2 - a_1), \text{ donde } o \leq t \leq 1$$

los subconjuntos del intervalo $o < t < 1$ que corresponden a puntos en Ω_1 y Ω_2 respectivamente son abiertos ajenos y no vacíos. Esto contradice el hecho de que los intervalos son conexos.

Por lo tanto Ω es conexo.

(b) Antes de demostrar (b) daremos una defincion auxiliar y un Lema Auxiliar:

DEFINICION AUXILIAR 3: Componente es un subconjunto conexo no contenido en ningún otro subconjunto conexo.

LEMA AUXILIAR 3: Demostraremos que todo conjunto tiene una única descomposición en componentes.

DEMOSTRACION: Sea E dicho conjunto, consideremos un pun $a \in E$ y sea A la unión de todos los subconjuntos conexos de- E que contienen a a Es claro que A contiene a $\{a\}$, dado que - el conjunto que consta de un sólo punto es conexo.

Si demostramos que A es conexo, es claro que será el máximo conexo que contiene a a (por construcción), y éste es el único conjunto con tal propiedad. En otras palabras, A será la com ponente que contiene a a y cualesquiera dos componentes diferentes serán ajenas.

(Pues si hubiera dos componentes diferentes A y B tal que $A \cap B \neq \phi$ tendrían un punto c en común, para éste punto existe C la unión de todos los subconjuntos conexos que contienen a c y por tanto $A \subset C$ y $B \subset C$ donde C contiene a a y C conexa - o sea $C \subset A$ y por tanto $C = A$ lo que querría decir $B \subset A$, lo cual contradice que B es una componente).

Y entonces esto significaría que

$$E = A_1 \cup A_2 \cup , \ldots ,$$

donde A_i es componente conexa con $A_i \cap A_j = \phi$ si $i \neq j$.

Ahora demostraremos que A tiene que ser conexo. Suponga - mos que A no es conexo, entonces

(1) $A = A_1 \cup A_2$ $A_1 \cap A_2 = \phi$, A_1 y $A_2 \neq \phi$ y A_1, A_2 abiertos en A.

Entonces existen abiertos A'_1 y A'_2 tales que:

$$A_1 = A \cap A'_1 \quad , \quad A_2 = A \cap A'_2$$

por tanto $A = (A \cap A'_1) \cup (A \cap A'_2) = A \cap (A'_1 \cup A'_2)$ luego $A \subset A'_1 \cup A'_2$

por (1) con $A \cap A'_1 \cap A'_2 = \phi$ y $A \cap A'_1 \neq \phi$ y $A \cap A'_2 \neq \phi$

Podemos suponer que A'_1 contiene al punto a (ya que $A \subset A'_1 \cup A'_2$) y sea $c \in A \cap A'_2$ como $c \in A$, tendremos que existe un conjunto conexo $A_o \subset E$ que contiene a a y a c (ya que $A = \cup A_i$ con A_i conexos que contienen a a), pero esto es imposible ya que

$A_o \subset A \subset A'_1 \cup A'_2$ y $A_o \cap A'_1 \cap A'_2 = \phi$ y $A_o \cap A'_1$ contiene a a y $A_o \cap A'_2$ contiene a c, luego A_o no podría ser conexo lo cual es una contradicción por tanto A es conexo.

Demostraré ahora (b) utilizando el lema auxiliar 3, lo único que nos resta demostrar es que si Ω es abierto, sus componentes son abiertas.

Si Ω es abierto $\Omega = \bigcup_{\infty} A\alpha$, $A\alpha$ conexo y $A\alpha \cap A\beta = \phi$ por el Lema Auxiliar 3.

Demostraré que $A\alpha$ es abierto.

Sea $x \in A\alpha$, tendremos que $x \in \Omega$, como Ω es abierto, entonces existe $D(x,r) \subset \Omega$ donde $D(x,r)$ es un conjunto conexo que con -

tiene a x, luego $D(x,r) \subset A\alpha$, consecuentemente $A\alpha$ es abierto.

DEMOSTRACION REFERENTE A LA OBSERVACION DE LA DEFINICION 11:

A continuación daremos una distinta caracterización de las funciones continuas (de hecho dicha caracterización es la definición usual).

TEOREMA AUXILIAR 2: f es continua en Ω (según la definición - 11) si y solamente sí, dado $w \in \Omega$, para todo $\varepsilon > o$ existe una - $\delta > o$ tal que si $|z-w| < \delta$ entonces $|f(z)-f(w)| < \varepsilon$ ó en otras palabras $f(D(w,\delta)) \subset D(f(w),\varepsilon)$.

DEMOSTRACION:

CONDICION NECESARIA: Sea $w \in \Omega$. Supongamos que dado $\varepsilon > o$, para todo $\delta > o$ tal que si $|z-w| < \delta$ entonces $|f(z)-f(w)| > \varepsilon$ (por reducción al absurdo).

Entonces podemos encontrar una sucesión de $\{w_n | n \geq 1\}$ tal - que:

$$|w_1 - w| < 1$$

$$|w_2 - w| < \frac{1}{2}$$

$$\vdots$$

$$|w_n - w| < \frac{1}{n}$$

y $|f(w_n) - f(w)| > \varepsilon$.

Pero ésto es una contradicción ya que claramente

$w_n \to w$ cuando $n \to \infty$ y por hipótesis

$$f(w_n) \to f(w) \text{ cuando } n \to \infty .$$

CONDICION SUFICIENTE: Sea $\{w_n \mid n \geq 1\}$ una sucesión convergente a $w \in \Omega$; sea $f(w)$ la imágen de w .

Dada una $\varepsilon > 0$ arbitraria, consideremos $D(f(w),\varepsilon)$, por hipótesis existe $\delta > 0$ tal que:

$$f(D(w,\delta)) \subset D(f(w),\varepsilon) \ldots\ldots (1)$$

Como $w_n \to w$ cuando $n \to \infty$ implica que dada esa δ existe N tal que $|w_n - w| < \delta$, para toda $n > N$ y por lo tanto dada esa $\varepsilon > 0$ existe esa misma N (por(1)) tal que:

$|f(w_n) - f(w)| < \varepsilon$ para toda $n > N$ y como ε era arbitraria tenemos por lo tanto que

$$f(w_n) \to f(w) \text{ cuando } n \to \infty$$

y por lo tanto f es continua (en el sentido de la definición-11)

DEMOSTRACION DE LA PROPOSICION 9:

Demostraremos las siguientes 4 proposiciones con lo cual quedará demostrada la proposición 9:

(a) Supongamos f es continua en E y demostraremos que si o es un subconjunto cerrado de $\mathbb{C}$, entonces $f^{-1}(o)$ es cerrado en E.

(b) Supongamos f continua en E y demostraremos que si o es un subjunto abierto de $\mathbb{C}$, entonces $f^{-1}(o)$ es abierto en E.

(c) Supongamos que si o es un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, y sucede que $f^{-1}(o)$es abierto en E entonces demostraremos que f tiene que ser continua.

(d) Supongamos que si o es un subconjunto cerrado de $\mathbb{C}$, y sucede que $f^{-1}(o)$ es cerrado en E, entonces demostraremos que f es continua.

DEMOSTRACION

(a) Supongamos $f: E \to \mathbb{C}$ es continua. Hay que demostrar que $f^{-1}(o)$ es cerrado en E si o es cerrado.

Sea $\{z_n | n \geq 1\}$ una sucesión arbitraria en $f^{-1}(o)$ (convergente en E) Tenemos que demostrar que $z = \lim_{n \to \infty} z_n \in f^{-1}(o)$; como $z_n \in f^{-1}(o)$, luego $f(z_n) \in o$ y puesto que o es cerrado y f continua, tendremos $\lim_{n \to \infty} f(z_n) \in o$, por consiguiente $f^{-1}(\lim_{n \to \infty} (f(z_n))) \in f^{-1}(o)$, y además por ser f continua sabemos que

$$f(\lim_{n \to \infty} z_n) = \lim_{n \to \infty} f(z_n)$$

por lo tanto:

$$z = \lim_{n \to \infty} z_n = f^{-1}\left(\lim_{n \to \infty} f(z_n)\right) \in f^{-1}(\sigma)$$

es decir $z \in f^{-1}(\sigma)$; concluimos que $f^{-1}(\sigma)$ es cerrado en E

(b) Sea σ el conjunto abierto de $\mathbb{C}$, demostraré que $f^{-1}(\sigma)$ es abierto.

Si σ es abierto, entonces σ^c es cerrado, luego por (a) $f^{-1}(\sigma^c)$ es cerrado, por consiguiente

$(f^{-1}(\sigma^c))^c$ es abierto, pero $(f^{-1}(\sigma^c))^c = f^{-1}(\sigma)$ y por lo tanto $f^{-1}(\sigma)$ es abierto

(c) Para demostrar que f es continua, consideremos una sucesión $\{z_n\}$ en E tal que $z_n \to z$ cuando $n \to \infty$.

Tomemos un disco $D(f(z),\varepsilon)$ (que por definición es abierto , luego $f^{-1}(D(f(z),\varepsilon))$ será abierto por hipótesis,- y tal que $z \in f^{-1}(D(f(z),\varepsilon))$. Por ser abierto existe - una δ, tal que $D(z,\delta) \subset f^{-1}(D(f(z),\varepsilon))$.

Como $z_n \to z$ cuando $n \to \infty$, dada δ existe una N, tal que - $|z_n - z| < \delta$, para las $n > N$, luego entonces:

$$f(z_n) \in f(D(z,\delta)) \subset (D(f(z),\varepsilon) \text{ para todo } n > N.$$

Por lo tanto dado $\varepsilon > 0$ existe una N, tal que

$$|f(z_n)-f(z)| < \varepsilon \text{ para toda } n > N.$$

Por consiguiente $f(z_n)$ converge a $f(z)$, luego f es continua.

(d) Dada la hipótesis de esta parte voy a demostrar que si A es abierto $f^{-1}(A)$ es abierto y utilizaré la parte (c).

Sea A un abierto entonces A^c es cerrado, por hipótesis $f^{-1}(A^c)$ es cerrado, y por lo tanto $(f^{-1}(A^c))^c$ es abierto, lo mismo que $f^{-1}(A)$ es abierto y entonces por la parte (c) se tiene que f es continua.

DEMOSTRACION DE LA PROPOSICION 10:

NOTA: En esta demostración usaremos el hecho de que $\mathbb{C}$ es un campo.

1. Hay que demostrar que C(E) es un anillo asociativo

(a) Sean f y $g \in C(E)$, necesitamos demostrar que $f+g \in C(E)$, ó sea hay que verificar que f+g es continua.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión convergente con límite x, necesitamos demostrar que $\{(f+g)(x_n)\}$ converge a $(f+g)(x)$, es decir. Para toda $\varepsilon>0$ exista N tal que:

$$|f+g)(x_n)-(f+g)(x)|<\varepsilon \text{ para toda } n > N$$

Dado $\frac{\varepsilon}{2}$ existe N_1 tal que $|f(x_n)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, para toda $n>N_1$

Dado $\frac{\varepsilon}{2}$ existe N_2 tal que $|g(x_n)-g(x)|< \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $n > N_2$, ya que f y g son continuas respectivamente.

Entonces dada $\varepsilon > o$ tomemos $N= \max \{N_1, N_2\}$, para la cual:

$$|(f+g)(x_n)-(f+g)(x)| \leq |f(x_n)-f(x)|+|g(x_n)-g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}= \varepsilon,$$

para todo $n > N$.

Luego entonces tendremos que $\{(f+g)(x_n)\}$ converge a $(f+g)(x)$ y por lo tanto $f+g \in C(E)$

(b) $f+g= g+f$, si f y $g \in C(E)$

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=g(x)+f(x)=(g+f)(x)$$

(c) Sea g la función constante 0, ó sea $g(x)=0$, claramente continua, entonces, para todo $f \in C(E)$:

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = f(x)+0 = f(x).$$

(d) Dada $f(x) \in C(E)$ existe $-f(x) \in C(E)$, tal que

$$(f+(-f))(x) = f(x) + (-f(x)) =0$$

(e) Si f y $g \in C(E)$, entonces $f\,g \in C(E)$.

Si $\{x_n\}$ es una sucesión convergente a x, debemos verificar que $\{(fg)(x_n)\}$ converge a $(fg)(x)$, es decir para todo $\varepsilon > 0$ existe N tal que

$$|(fg)(x_n) - (fg)(x)| < \varepsilon, \text{ para todo } n > N$$

Como $\{f(x_n)\}$ converge (ya que f es continua). Existe un disco con centro en el origen y de radio M en el cual quedan incluidos todos los términos de la sucesión (esto lo vemos en el Criterio de - Cauchy), o sea $|f(x_n)| \leq M$ para todo n.

También dado $\frac{\varepsilon}{2(|g(x)|+1)}$ existe N_1 tal que $|f(x_n)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(|g(x)|+1)}$ para $n > N_1$

Como $\{g(x_n)\}$ converge (ya que g es continua), entonces dado $\frac{\varepsilon}{2M}$ existe N_2, tal que.

$$|g(x_n)-g(x)| < \frac{\varepsilon}{2M}, \text{ para } n > N_2$$

Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$
se tiene que:

$$|(fg)(x_n)-(fg)(x)| = |f(x_n)g(x_n)+f(x_n)g(x)-f(x_n)g(x)-f(x)g(x)| \leq$$

$$\leq |f(x_n)||g(x_n)-g(x)|+|g(x)||f(x_n)-f(x)| \leq$$

$$\leq |f(x_n)||g(x_n)-g(x)|+(|g(x)|+1)|f(x_n)-f(x)| \leq$$

$$\leq M|g(x_n)-g(x)|+(|g(x)|+1)|f(x_n)-f(x)| <$$

$$< M\frac{\varepsilon}{2M} + (|g(x)|+1)\frac{\varepsilon}{2(|g(x)|+1)} = \varepsilon$$

para toda $n > N$.

En efecto $\{fg(x_n)\}$ converge a $(fg)(x)$ y por tanto $fg \in C(E)$.

(f) $f \cdot g = g \cdot f$ ya que:

$$(f\cdot g)(x) = f(x)g(x) = g(x)f(x) = (gf)(x)$$

(g) $(f\cdot g)\cdot h = f\cdot(g\cdot h)$, ya que:

$$\left[(f\cdot g)\cdot h\right](x) = (fg)(x)h(x) = \left[f(x)g(x)\right]h(x) = f(x)\left[g(x)h(x)\right] =$$

$$= f(x)(gh)(x) = \left[f\cdot(g\cdot h)\right](x)$$

(h) $f\cdot(g+h) = fg+fh$ ya que:

$$\left[f\cdot(g+h)\right](x) = f(x)(g+h)(x) = f(x)\left[g(x)+h(x)\right] =$$

$$= f(x)g(x) + f(x)h(x) = (f\cdot g)(x) + (f\cdot h)(x) =$$

$$= \left[f\cdot g + f\cdot h\right](x)$$

Hasta aquí hemos demostrado que $C(E)$ es un anillo asociativo y por tanto también es un grupo abeliano con respecto $+$. Para que $C(E)$ sea un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, primero vemos que si $\alpha \in \mathbb{C}$ y $f \in C(E)$, tenemos definido un elemento $\alpha f \in C(E)$ (lo cual checaré abajo) tal que

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

Checaré ahora que $\alpha f \in C(E)$ siendo que $f \in C(E)$ y $\alpha \in \mathbb{C}$.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión convergente a $x \in E$, entonces tendrá que demostrarse que $\{(\alpha f)(x_n)\}$ converge a $(\alpha f)(x)$, es decir:

Para todo $\varepsilon > o$ existe N tal que

$$|(\alpha f)(x_n) - (\alpha f)(x)| < \varepsilon; \text{ para toda } n > N.$$

Como $\{f(x_n)\}$ converge (ya que f es continua), supongamos $\alpha \neq o$ (ya que si $\alpha = o$ el resultado es obvio), entonces dado $\frac{\varepsilon}{|\alpha|}$ existe N_1 de suerte - que:

$$|f(x_n) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|}, \text{ para } n > N_1$$

Sea $N = N_1$, entonces:

$|(\alpha f)(x_n)-(\alpha f)(x)| = |\alpha|\ |f(x_n)-f(x)| < |\alpha| \frac{\varepsilon}{|\alpha|}\ \varepsilon$, para todo $n > N_1$.

Hemos demostrado pues que si $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$, $(\alpha f)(x_n) \to (\alpha f)(x)$ cuando $n \to \infty$ y por lo tanto $\alpha f \in C(E)$.

Además para ser $C(E)$ espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ se tienen que cumplir - las siguientes 4 propiedades:

Sean $f, g \in C(E)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

(a) $\alpha(f+g) = \alpha f + \alpha g$ ya que:

$$\left[\alpha(f+g)\right](x) = \alpha\left[(f+g)(x)\right] = \alpha(f(x)+g(x)) =$$

$$= \alpha f(x)+\alpha g(x) = (\alpha f)(x) + (\alpha g)(x) = (\alpha f+\alpha g)(x).$$

(b) $(\alpha+\beta) f = \alpha f + \beta f$ ya que:

$$\left[(\alpha+\beta)\ f\right](x) = (\alpha+\beta)f(x) = \alpha f(x) + \beta f(x) =$$

$$= (\alpha f)(x) + (\beta f)(x) = (\alpha f+\beta f)(x)$$

(c) $\alpha(\beta f) = (\alpha\beta)f$ ya que:

$$\left[\alpha(\beta f)\right](x) = \alpha\left[(\beta f)(x)\right] = \alpha\left[\beta\ f(x)\right] =$$

$$= (\alpha\beta)\ f(x) = \left[(\alpha\beta)f\right](x)$$

(d) $1 \cdot f = f$ ya que:

$$(1 \cdot f)(x) = 1\ f(x) = f(x)$$

Y finalmente una última propiedad para que $C(E)$ sea

un álgebra sobre $\mathbb{C}$ es que:

si $f, g \in C(E)$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ entonces:

$$\alpha(fg) = (\alpha f)g = f(\alpha g).$$

Y ésto se cumple debido a que:

$$\left[\alpha(fg)\right](x) = \alpha\left[(fg)(x)\right] = \alpha\left[f(x)g(x)\right] =$$

$$= \left[\alpha f(x)\right] g(x) = \left[(\alpha f)g\right](x)$$

$$y \left[(\alpha f)g\right](x) = (\alpha f)(x)\ g(x) = \left[\alpha f(x)\right] g(x) =$$

$$= \left[f(x)\alpha\right] g(x) = f(x)\left[\alpha g(x)\right] = \left[f(\alpha g)\right](x)$$

Por lo tanto $C(E)$ es un Algebra sobre $\mathbb{C}$.

Si E tuviera sólo un punto, sea z dicho punto, entonces -- $g(z)=z_1$ y $f(z)=z_2$

Y si $gf=0$ implica que $z_1 z_2=0$ y por lo tanto $z_1=0$ $z_2=0$ o sea $g(z)=0$ ó $f(z)=0$, esto quiere decir que en este caso $C(E)$ no tiene divisores de cero.

Basta que E tenga más de un punto, y podemos construir funciones en $C(E)$ que sí tienen divisores de cero, por ejemplo las siguientes dos funciones f y g definidas como: Sean $f,g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$f(z) = \begin{cases} z, & \text{si } z \in \{z \mid -\infty < \mathrm{Re}(z) \leq 0,\ -\infty < \mathrm{Im}(z) < \infty\} \\ 0, & \text{si } z \in \{z \mid 0 < \mathrm{Re}(z) < \infty,\ -\infty < \mathrm{Im}(z) < \infty\} \end{cases}$$

$$g(z) = \begin{cases} 0, \text{ si } z\in\{z \mid -\infty<Re(z)\leq 0,\ -\infty<Im(z)<\infty\} \\ z, \text{ si } z\in\{z \mid 0<Re(z)<\infty, -\infty<Im(z)<\infty\} \end{cases}$$

Aquí tenemos que $(fg)(z)=0$ para todo $z \in \mathbb{C}$ sin embargo $f(z)\neq 0$ y $g(z)\neq 0$.

II.- Demostraremos ahora que la composición de 2 funciones, continuas f y g es también una función continua; lo cual quiere decir que si tomo una sucesión $\{x_n\}$ convergente a x en E entonces debemos tener que $\{(g\circ f)(x_n)\}$ converge a $(g\circ f)(x)$, si $f: E \to \mathbb{C}$, $g: F \to \mathbb{C}$ y $f(E)\subset F$.

Por ser f continua $\{f(x_n)\}\subset F$ converge a $f(x)$ en E, pero además g es continua, tendremos que $\{g(f(x_n))\}$ converge a $g(f(x))$, luego en efecto si $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$ entonces $(g\circ f)(x_n)\to(g\circ f)(x)$ cuando $n \to \infty$ y por tanto $g\circ f\in C(E)$

DEMOSTRACION DE LA PROPOSICION 11:

(a) Si k es compacto contenido en E, entonces, todo subconjunto infinito de k contiene una sucesión convergente.

Sea $W \subset f(k)$ un subconjunto infinito, entonces existe un subconjunto $V \subset k$, tal que $f(V)= W$, V es infinito, pues de no serlo f no sería función. Como k es compacto V contiene una sucesión convergente con límite en k. Sea $\{x_n\}$ dicha sucesión tal que $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$ y $x \in k$, luego $\{f(x_n)\}\subset W$ y por ser f continua $f(x_n) \to f(x)$ cuando $n \to \infty$, y como $x \in k$, $f(x)\in f(k)$, de donde obtenemos que $f(k)$ es compacto.

(b) Tenemos que demostrar ahora que f(k) es conexo. Supongamos que f(k) no fuera conexo, entonces:

$f(k) = A_1 \cup B_1$ con A_1 y B_1 abiertos en f(k) y $A_1 \cap B_1 =$

$= \phi$ con

$A_1 \neq \phi$, $B_1 \neq \phi$, luego existen A y B abiertos tales que

$$A_1 = A \cap f(k)$$

$$B_1 = B \cap f(k)$$

Como f es continua, tenemos que $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ - son abiertos, luego $f^{-1}(A) \cap k$ y $f^{-1}(B) \cap k$ son abiertos en k. Por otro lado:

$f^{-1}(A) \cap k \neq \phi$, $f^{-1}(B) \cap k \neq \phi$ (pues $A_1 = A \cap f(k) \neq \phi$ y $B_1 =$

$= B \cap f(k) \neq \phi$)

y $(f^{-1}(A) \cap k) \cap (f^{-1}(B) \cap k) = \phi$, ya que $A_1 \cap B_1 = \phi$

Además

(1)..... $(f^{-1}(A) \cap k) \cup (f^{-1}(B) \cap k) = k$ esto es ya que en primer lugar es claro que:

$$(f^{-1}(A) \cap k) \cup (f^{-1}(B) \cap k) \subset k$$

y en segundo lugar:

$k \subset (f^{-1}(A) \cap k) \cup (f^{-1}(B) \cap k)$ puesto que:

Sea $x \in k$, luego $f(x) \in f(k)$, entonces $f(x) \in A_1$ ó -- $f(x) \in B_1$.

Si entonces $f(x) \in A_1$, tendremos que $f(x) \in A$ y $f(x) \in f(k)$, y por tanto

$$x \in f^{-1}(A) \cap k$$

o si $f(x) \in B_1$, tendremos que $f(x) \in B$ y $f(x) \in f(k)$, y por tanto

$$x \in f^{-1}(B) \cap k$$

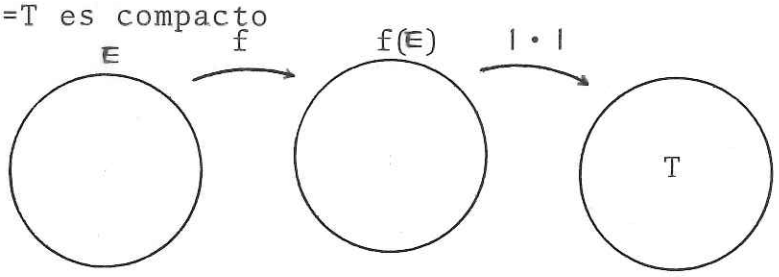
con esto demostramos la igualdad (1).

Pero esto es una contradicción ya que k es conexo por hipótesis.

Por lo tanto f(k) tiene que ser conexo.

DEMOSTRACION DEL COROLARIO 1:

Como E es compacto y f continua, entonces $f(E)$ es compacto y como la función valor absoluto es continua (esto lo demostraremos en el siguiente párrafo a continuación), tenemos que $\{|f(x)|: f(x) \in f(E)\} = T$ es compacto



donde T es un subconjunto de $\mathbb{R}$ compacto.

Es así que T es cerrado y acotado, luego tiene sup e inf, y por el axioma de Completez de los reales T contiene a su sup y a su inf por lo tanto existen números $|f(z_1)|$ y $|f(z_2)|$ con $z_1, z_2 \in E$ tales que

$$|f(z_1)| = \sup \{|f(x)| : x \in E\}$$

y $$|f(z_2)| = \inf \{|f(x)| : x \in E\}$$

Demostraré ahora que la función $h: k \to \mathbb{R}$ definida como: $h(z) = |z|$ con $k \subset \mathbb{C}$ es una función continua.

Sea $\{z_n\}$ una sucesión convergente a $z \in E$.

Hay que demostrar que $\{h(z_n)\}$ converge a $h(z)$, o sea que.

Para toda $\varepsilon > 0$ exista N tal que $|h(z_n) - h(z)| < \varepsilon$ para $n > N$.

o sea $\big||z_n| - |z|\big| < \varepsilon$, para $n > N$.....(2)

Pero sabemos que para toda $\varepsilon > 0$ existe N tal que

$$|z_n - z| < \varepsilon, \text{ para toda } n > N \text{ .....(1)}$$

y como:

$$-|z_n - z| = -|z - z_n| \leq |z_n| - |z| \leq |z_n - z|$$

se concluye que:

$$\big||z_n| - |z|\big| \leq |z_n - z| < \varepsilon \text{ para todo } n > N$$

entonces dada ε, la misma N en (1) sirve para demostrar (2), por tanto h es continua.

DEMOSTRACION DEL COROLARIO 2: Por reducción al absurdo.

Supongamos dada $\varepsilon>0$ para toda δ existen z_1 y $z_2 \in E$ tales que si $|z_1-z_2| < \delta$ entonces $|f(z_1)-f(z_2)| > \varepsilon$ por lo tanto:

Si $\delta=1$, existen P_1 y $q_1 \in E$ con $|P_1-q_1|<1$ y $|f(P_1)-f(q_1)| > \varepsilon$

Si $\delta=\frac{1}{2}$, existen P_2 y $q_2 \in E$ con $|P_2-q_2|<\frac{1}{2}$ y $|f(P_2)-f(q_2)| > \varepsilon$

Si $\delta=\frac{1}{3}$, existen P_3 y $q_3 \in E$ con $|P_3-q_3|<\frac{1}{3}$ y $|f(P_3)-f(q_3)| > \varepsilon$

Claramente tenemos dos sucesiones $\{P_n\}$ y $\{q_n\}$ tales que:

$$|P_n-q_n| \to 0 \text{ y } |f(P_n) - f(q_n)| > \varepsilon$$

Dadas $\{P_n\}$ y $\{q_n\}$sucesiones en E y E compacto, entonces $\{P_n\}$ contiene una sucesión convergente que tiende a un punto P.

Sea $\{P_{n_k}\}$ la sucesión convergente.

Si tomamos $\{q_{n_k}\}$, entonces $|P_{n_k}-q_{n_k}| \to 0$, luego habrá que demostrar que:

dado δ existe N de suerte que $|q_{n_k}-P| < \delta$, para todo $n > N$

Tomo $\frac{\delta}{2}$ existe N_1 tal que $|P_{n_k}-q_{n_k}| < \frac{\delta}{2}$, para $n_k > N_1$

y Tomo $\frac{\delta}{2}$ existe N_2 tal que $|P_{n_k}-P| < \frac{\delta}{2}$ para $n_k > N_2$

entonces:

$$|q_{n_k} - P| \leq |q_{n_k} - P_{n_k}| + |P_{n_k} - P| < \delta \text{ para todo } n_k > N$$

donde $N = \max \{N_1, N_2\}$

ó sea que $q_{n_k} \to P$ cuando $n_k \to \infty$, y como f es continua:

$$f(P_{n_k}) \to f(P) \text{ cuando } n_k \to \infty$$

$$f(q_{n_k}) \to f(P) \text{ cuando } n_k \to \infty$$

Y por tanto dada la ε original:

Si tomamos $\frac{\varepsilon}{2}$ existe N_1 tal que $|f(P_{n_k}) - f(P)| < \frac{\varepsilon}{2}$ para $n_k > N_1$ y existe N_2 tal que $|f(q_{n_k}) - f(P)| < \frac{\varepsilon}{2}$ para $n_k > N_2$

Basta tomar $N = \max \{N_1, N_2\}$

y tendremos que:

$$|f(P_{n_k}) - f(q_{n_k})| \leq |f(P_{n_k}) - f(P)| + |f(P) - f(q_{n_k})| < \varepsilon$$

para todo $n_k > N$

lo cual contradice el hecho de que $|f(P_n) - f(q_n)| > \varepsilon$ luego el Corolario 2 se Cumple.

DEMOSTRACION DEL EJERCICIO:

Por un teorema de Algebra, (se puede consultar en el libro Algebra Moderna, autor I. N. Herstein en el Capítulo 3 Sección 4, lema 36) si $\cup$ es una ideal del anillo R, entonces $R/\cup$ es un anillo, por lo tanto:

$$\mathbb{R}[x] \Big/ (x^2+1)\,\mathbb{R}[x] \quad \text{es un anillo}$$

Ahora podemos establecer la siguiente función:

$$\varphi: \mathbb{R}[x] \Big/ (x^2+1)\,\mathbb{R}[x] \to \mathbb{C}$$

definida como $\varphi(U_p) = a+ib$, donde $\cup_p$ es la clase $P+(x^2+1)\,\mathbb{R}(x)$ de P y donde ax+b es el residuo que deja P(x) al dividirlo entre x^2+1.

Hay que demostrar, que φ es un isomorfismo.

1.- Sea r_p el residuo que deja P(x) al dividirse entre x^2+1, entonces:

$$P(x) = (x^2+1)\,P_1(x) + r_p(x)$$

y analogamente sera r_q el residuo que deja q(x) al dividirse entre x^2+1, entonces:

$$q(x) = (x^2+1)\,q_1(x) + r_q(x)$$

Por consiguente:

$$P(x) + q(x) = (x^2+1)\ (P_1(x)+q_1(x)) + r_p(x) + r_q(x),$$

luego el residuo al dividir $P(x) + q(x)$ entre x^2+1 es $r_p(x) + r_q(x)$ consecuentemente:

$$\varphi(U_{p+q}) = r_p(x) + r_q(x) = \varphi(U_p) + \varphi(U_q)$$

ahora $P(x)\ q(x) = (x^2+1)\left[(x^2+1)\ P_1(x)\ q_1(x) + r_q(x) + r_p(x)\right] + r_p(x)\ r_q(x),$

esto es $\varphi(U_{pq}) = r_p(x)\ r_q(x) = \varphi(U_p)\cdot\varphi(U_q)$

2.- Demostraremos ahora que φ es inyectiva

Supongase $\varphi(U_p) = \varphi(U_q)$

Si el resto de dividir a P y a q entre x^2+1 es $a+bx$ y $c+dx$ respectivamente, entonces.

$$a+ib = c+id$$

por tanto $(a,b) = (c,d)$

o sea $a = c,\ b = d$

por lo cual $a+xb = c+xd$

lo cual implica $U_p = U_q$

3.- Finalmente demostraremos que φ es sobre.

Sea $a+ib \in \mathbb{C}$. Existe la clase

$$a+xb + (x^2+1)\,\mathcal{R}(x) = U_p \quad \text{de manera que:}$$

$$\varphi(U_p) = a+ib.$$

CAPITULO 1

SERIES DE POTENCIAS

SECCION 0: Series de números complejos.

DEFINICION 1:

(a) Consideremos la sucesión de números complejos.

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

Una serie de números complejos es una suma formal infinita

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

o más simplemente $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

(b) Las sumas $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ donde $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ se llaman sumas parciales de la serie; s_n es la n-ésima suma parcial.

DEFINICION 2:

(a) Dadas dos series $\sigma_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sigma_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$, la suma formal $\sigma_1 + \sigma_2$ de las dos series es la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$$

y el producto formal $\sigma_1 \sigma_2$ (producto de *Cauchy*) es la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \quad \text{donde} \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

(b) Dada una serie $\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y un escalar $\lambda \in \mathbb{C}$, el producto formal $\lambda\sigma$ es la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n$$

PROPOSICION 1: Con las tres operaciones de la definición 2 el conjunto Σ de todas las series formales es un álgebra conmutativa sobre $\mathbb{C}$. El cero del algebra es la serie $\sum_{n=o}^{\infty} a_n$ donde todos los a_n son nulos. La unidad del álgebra es la serie $\sum_{n=o}^{\infty} b_n$ donde $b_o = 1$ y todos los otros b_n son nulos.

DEMOSTRACION: En el apendice 1.

DEFINICION 3:

(*a*) Una serie $\sum_{n=o}^{\infty} a_n$ es llamada convergente, si la sucesión $\{s_n | n \geq o\}$ de las sumas parciales de la serie es convergente.

El límite s de la sucesión $\{s_n | n \geq o\}$ es llamado

"suma de la serie $\sum_{n=o}^{\infty} a_n$"

(*b*) Una serie $\sum_{n=o}^{\infty} a_n$ es llamada absolutamente convergente si la serie $\sum_{n=o}^{\infty} |a_n|$ es convergente.

PROPOSICION 2: Una serie absolutamente convergente es convergente.

DEMOSTRACION: En el apêndice 1.

PROPOSICION 3:

(*a*) Si ΣC es el subconjunto de Σ formado por las series convergentes, entonces ΣC es un subespacio vectorial de Σ.

(*b*) Si ΣAC es el subconjunto de Σ formado por las series absolutamente convergentes, ΣAC es una subalgebra de Σ.

(c) La aplicación $\Sigma C \to \mathbb{C}$, que a cada serie convergente asocia su suma, es lineal.

(d) La aplicación $\Sigma\, AC \to \mathbb{C}$, que a cada serie absolutamente convergente le asocia su suma es un homomorfismo de algebras.

DEMOSTRACION: En el apéndice 1.

NOTA: El conjunto $\Sigma\, C$ no es una subalgebra de Σ.

Ejemplo: Sea $\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. La serie σ es convergente (ya que $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ cumple:

$$|a_1| \geq |a_2| \geq |a_3| \geq \ldots.$$

y $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$, luego por el criterio de Weierstrass para series alternantes (vease Apéndice 1) la serie converge).

Pero esta serie no es absolutamente convergente, ya que;

$\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ y como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right|$ diverge (Esto es por el criterio de comparación que se demuestra para series de números reales).

Ahora sea $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ la serie $\sigma^2 = \sigma \cdot \sigma$,

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \frac{(-1)^{n+1-k}}{\sqrt{n+1-k}} = (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(n+1-k)}} \text{ para } n \geq 1$$

además $\sqrt{k(n+1-k)} \leq \frac{1}{2}(k+n+1-k) = \frac{n+1}{2}$ (se usa $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$) entonces $\frac{1}{\sqrt{k(n+1-k)}} \geq \frac{2}{n+1}$

y por lo tanto $|c_n| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n+1-k}} \geq n \cdot \frac{2}{n+1} = \frac{2n}{n+1}$

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2$ entonces $c_n \not\to 0$ cuando $n\to\infty$ esto quiere decir $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ no puede ser convergente (pues si fuera convergente, por un teorema para series de números reales $c_n \to 0$ cuando $n\to\infty$).

Del criterio de Cauchy resulta inmediatamente la siguiente proposición:

PROPOSICION 4: Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es convergente si y sólo si para toda $\varepsilon > 0$ existe un entero N, tal que $n > N$ y $q \geq 0$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+q} a_n \right| < \varepsilon$$

DEMOSTRACION: En el Apéndice 1.

COROLARIO:

(a) Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es convergente entonces $a_n \to 0$ cuando $n\to\infty$

(b) Si $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ es convergente, con b_n real para toda n y si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es una serie, tal que

$$|a_n| \leq b_n, \text{ para toda } n \geq 0,$$

entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente.

(c) Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es tal que a_n es real y $a_n \geq 0$, para toda n, entonces la serie es convergente si y solamente si $\sup \{s_n | n \geq 1\} < +\infty$ donde s_n es la n-ésima suma parcial.

DEMOSTRACION: En el Apéndice 1.

NOTA: En lo subsiguiente se hará el siguiente abuso de notación. En todo el curso si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es una serie convergente vamos a denotar por este mismo símbolo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a la suma de esa serie. Esta notación es muy desafortunada pero muy usual y cómoda.

SECCION 1: *Series de Potencias Formales.*

DEFINICION 4:

(a) Una serie de potencias formal es una sucesión $\{a_n | n \geq 1\}$ de números complejos escrita en forma de una suma formal infinita de potencias de un símbolo x :

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots .$$

o más simplemente $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Designemos por $\mathbb{C}\left[[x]\right]$ el conjunto de las series de poten-- cias formales.

(*b*) Si una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es tal que existe un entero r para el que $a_n = 0$, si $n > r$, entonces la serie se llama polinomio. El menor r con la propiedad arriba mencionada se llama grado del polinomio

DEFINICION 5:

(*a*) Dadas dos series de potencias $\sigma_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $\sigma_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, la suma formal $\sigma_1 + \sigma_2$ de esas series es la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n ,$$

y el producto formal $\sigma_1 \sigma_2$ es la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ donde } c_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k}$$

(*b*) Si $\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es una serie de potencias y λ un ele-- mento de $\mathbb{C}$, entonces el producto formal $\lambda\sigma$ es la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n) x^n$$

PROPOSICION 5:

(*a*) Con las operaciones de la definición 5 $\mathbb{C}\left[[x]\right]$ es una álgebra conmutativa sobre $\mathbb{C}$, el cero del álgebra es la serie $\sum_{n=0}^{\infty} 0 . x^n$ y la unidad de la misma es la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, donde $a_n = 0$

si $n \geq 1$, y $a_0 = 1$

(b) $\mathbb{C}\left[\left[x\right]\right]$ no tiene divisores de cero.

DEMOSTRACION: En el Apéndice 1.

DEFINICION 6: Dada una serie $\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, se llama serie derivada de σ y se denota por $\frac{d\sigma}{dx}$ a la serie formal de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

PROPOSICION 6:

(a) La aplicación $\frac{d}{dx} : \mathbb{C}\left[\left[x\right]\right] \to \mathbb{C}\left[\left[x\right]\right]$, $\sigma \to \frac{d\sigma}{dx}$ es lineal

(b) $\frac{d(\sigma_1 \sigma_2)}{dx} = \sigma_2 \frac{d\sigma_1}{dx} + \sigma_1 \frac{d\sigma_2}{dx}$ para todo $\sigma_1 \sigma_2 \in \mathbb{C}\left[\left[x\right]\right]$

DEMOSTRACION: En el Apéndice 1.

NOTA: Se puede demostrar que una serie $\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es invertible en $\mathbb{C}\left[\left[x\right]\right]$ si y solamente si $a_0 \neq 0$ (Ver Apéndice 1)

SECCION 2 *Convergencia de series de potencias.*

DEFINICION 7:

(a) Dada una serie de potencias $\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, se llama dominio de convergencia de σ y se denota por conv (σ), al conjunto de todos los $w \in \mathbb{C}$, tales que la serie de números complejos - -

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ converge.

El 0 siempre pertenece a conv (σ).

(b) Una serie de potencias σ es llamada convergente si existe en conv (σ) un $w \neq 0$.

Ejemplo: Todos los polinomios formales (Definición 4(b)) son convergentes.

TEOREMA 1 DEFINICION 8:

(a) Dada una serie de potencias σ existe un número R, $0 \leq R \leq +\infty$ tal que

$$\mathcal{D}(0,R) \subset \text{Conv } (\sigma) \subset \overline{\mathcal{D}(0,R)}$$

Si $R=+\infty$ esto significa que Conv (σ)=$\mathbb{C}$.

(b) Ese número R, claramente único es llamado radio de convergencia de σ.

(c) σ es convergente si y sólo si $R>0$

(d) Para todo $w \in \mathbb{C}$, tal que $|w|<R$ la serie de números complejos $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ es absolutamente convergente.

Antes de demostrar el Teorema vamos a enunciar un Lema que utilizaremos para demostrar el Teorema.

LEMA 1: Si $w \in$ conv (σ) y $w \neq o$ y si $r=|w|$ entonces

$$\mathcal{D}(o,r) \subset \text{Conv } (\sigma)$$

DEMOSTRACION DEL LEMA 1: En el Apéndice 1.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 1: En el Apéndice 1.

COROLARIO:

(a) Si $\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es una serie convergente de radio de convergencia R, para todo r, tal que $0<r<R$ existe una constante $A(r)\geq 0$, tal que

$$|a_n| \leq \frac{A(r)}{r^n}, \text{ para todo } n\geq 0$$

(b) Si $\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es una serie tal que existen constantes $A \geq 0$ y $r \geq 0$ tal que

$$|a_n| \leq \frac{A}{r^n}, \text{ para todo } n \geq 0,$$

entonces la serie σ es convergente y su radio de convergencia es mayor ó igual a r

DEMOSTRACION: En el Apéndice 1.

NOTACION: $\mathbb{C}\{x\}$ denotará el conjunto de las series de potencias convergentes.

PROPOSICION 7 :

(a) $\mathbb{C}\{x\}$ es una subálgebra de $\mathbb{C}[[x]]$

(b) $\frac{d}{dx}(\mathbb{C}\{x\}) \subset \mathbb{C}\{x\}$ y, $\frac{d\sigma}{dx}$ y σ tienen el mismo radio de convergencia.

DEMOSTRACION: En el apéndice 1.

APENDICE 1

DEMOSTRACION DE LA PROPOSICION 1.

Recordemos que Σ es un álgebra conmutativa, si:

(i) Es un anillo asociativo y conmutativo.

(ii) Es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$

(iii) Para todo $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$, $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\alpha(\sigma_1 \sigma_2) = (\alpha\sigma_1)\sigma_2 = \sigma_1(\alpha\sigma_2)$$

verifiquemos: Sean $\sigma_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sigma_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ y $\sigma_3 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$.

(i)

1.- $\sigma_1 + \sigma_2 \in \Sigma$, ya que por definición

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) \in \Sigma$$

2.- $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_2 + \sigma_1$, ya que

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} (b_n + a_n) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sigma_2 + \sigma_1$$

3.- $(\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_3 = \sigma_1 + (\sigma_2 + \sigma_3)$, ya que

$$(\sigma_1+\sigma_2)+\sigma_3 = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n) + \sum_{n=0}^{\infty} c_n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [(a_n+b_n)+c_n] = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n+(b_n+c_n)] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} (b_n+c_n) = \sigma_1 + (\sigma_2+\sigma_3)$$

4.- Existe el elemento 0 , o sea $\sigma_0 = \sum_{n=0}^{\infty} 0$ tal que - para todo $\sigma_1 \in \Sigma$

$$\sigma_1 + \sigma_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} 0 = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n+0) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sigma_1$$

5.- Dada $\sigma_1 \in \Sigma$, $\sigma_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si $-\sigma_1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-a_n)$, entonces.

$$\sigma_1 + (-\sigma_1) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n+(-a_n)) = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = \sigma_0$$

6.- $\sigma_1\ \sigma_2 \in \Sigma$, ya que

$$\sigma_1\ \sigma_2 = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \ , \quad d_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\ b_{n-k} \ ,$$

entonces $\sigma_1\ \sigma_2 \in \Sigma$.

7.- $\sigma_1\ \sigma_2 = \sigma_2\ \sigma_1$, ya que

$\sigma_1 \sigma_2 = \sum_{n=0}^{\infty} d_n$ donde

$$d_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$$

$\sigma_2 \sigma_1 = \sum_{n=0}^{\infty} d'_n$ donde.

$$d'_n = \sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k} = b_0 a_n + b_1 a_{n-1} + \ldots + b_n a_0$$

como $d_n = d'_n$, entonces

$$\sigma_1 \sigma_2 = \sigma_2 \sigma_1$$

8.- $(\sigma_1 \sigma_2) \sigma_3 = \sigma_1 (\sigma_2 \sigma_3)$, ya que.

$$(\sigma_1 \sigma_2) \sigma_3 = \sum_{n=0}^{\infty} z_n \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} z'_n$$

donde $z_n = \sum_{j=0}^{n} a_n b_{n-j}$

y $z'_n = \sum_{k=0}^{n} z_k c_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} \right) c_{n-k} =$

$$= \sum_{k=0}^{n} (a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_k b_0) c_{n-k} =$$

$$= \begin{cases} \text{si} \quad k = 0 , & a_0 \, b_0 \, c_n \\ \text{si} \quad k = 1 , & (a_0 b_1 + a_1 b_0) \, c_{n-1} \\ \text{si} \quad k = 2 , & (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) \, c_{n-2} \\ \qquad \vdots & \\ \text{si} \quad k = n , & (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0) \, c_0 \end{cases}$$

$$\sigma_1 (\sigma_2 \cdot \sigma_3) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} t_n = \sum_{n=0}^{\infty} t'_n$$

donde $t_n = \sum_{k=0}^{n} b_k \, c_{n-k}$

$$y \; t'_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \, t_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\sum_{j=0}^{n-k} b_j \, c_{n-k-j} \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\overline{n}} a_k \, (b_0 c_{n-k} + b_1 c_{n-k-1} + \ldots + b_{n-k} c_0) =$$

$$= \begin{cases} \text{si } k = 0 , & a_0 (b_0 c_n + b_1 c_{n-1} + \ldots + b_n c_0) \\ \text{si } k = 1 , & a_1 (b_0 c_{n-1} + b_1 c_{n-2} + \ldots + b_{n-1} c_0) \\ \text{si } k = 2 , & a_2 (b_0 c_{n-2} + \ldots + b_{n-2} c_0) \\ \qquad \vdots & \\ \text{si } k = n , & a_n (b_0 \, c_0) \end{cases}$$

Como $z'_n = t'_n$, entonces

$$(\sigma_1 \sigma_2)\sigma_3 = \sigma_1 (\sigma_2 \sigma_3)$$

9.- $\sigma_1 \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3$, ya que

$$\sigma_1 (\sigma_2 + \sigma_3) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} (b_n + c_n) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n$$

donde $z_n = \sum_{k=0}^{n} a_k (b_{n-k} + c_{n-k})$

$$\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 = \sum_{n=0}^{\infty} t_n + \sum_{n=0}^{\infty} t'_n = \sum_{n=0}^{\infty} (t_n + t'_n)$$

donde $t_n + t'_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} + \sum_{k=0}^{n} a_k c_{n-k} =$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k (b_{n-k} + c_{n-k})$$

y entonces $z_n = t_n + t'_n$

y por lo tanto $\sigma_1 (\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3$.

(ii) Ya hemos demostrado que Σ es un grupo abeliano bajo la suma, y por tanto para que Σ sea un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, nos bastaría demostrar las siguientes 4 propiedades.

Ya definimos que para toda $\alpha \in \mathbb{C}$ y $\sigma \in \Sigma$ con $\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} d_n$

$$\alpha\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha d_n) \in \Sigma.$$

Supongamos $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ con $\sigma_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sigma_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ entonces:

1.- $\alpha(\sigma_1 + \sigma_2) = \alpha\sigma_1 + \alpha\sigma_2$, ya que

$$\alpha(\sigma_1+\sigma_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha(a_n+b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n+\alpha b_n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha b_n = \alpha\sigma_1 + \alpha\sigma_2$$

2.- $(\alpha+\beta)\sigma_1 = \alpha\sigma_1 + \beta\sigma_1$, ya que

$$(\alpha+\beta)\sigma_1 = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha+\beta)a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n+\beta a_n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n + \sum_{n=0}^{\infty} \beta a_n = \alpha\sigma_1 + \beta\sigma_1$$

3.- $\alpha(\beta\sigma_1) = (\alpha\beta)\sigma_1$, ya que

$$\alpha(\beta\sigma_1) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \beta a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha(\beta a_n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha\beta) a_n = (\alpha\beta)\sigma_1$$

4.- Sea 1 el elemento unitario de Φ entonces

$1\,\sigma_1 = \sigma_1$ para todo $\sigma_1 \in \Sigma$, ya que

$$1\,\sigma_1 = 1 \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sigma_1$$

(iii) Por último demostraremos que si $\alpha \in \Phi$ y $\sigma_1\ \sigma_2 \in \Sigma$ - entonces:

$\alpha(\sigma_1\sigma_2) = (\alpha\sigma_1)\sigma_2 = \sigma_1(\alpha\sigma_2)$, ya que

$$\alpha(\sigma_1\sigma_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha c_n \text{ donde } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}$$

$$\alpha c_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha(a_k b_{n-k}) = \sum_{k=0}^{n} (\alpha a_k)\, b_{n-k}$$

Luego entonces como $(\alpha\sigma_1)\sigma_2 = \sum_{n=0}^{\infty} c'_n$ donde

$$c'_n = \sum_{k=0}^{n} (\alpha a_k)\, b_{n-k}$$

tendremos que $\alpha c_n = c'_n$ y por lo tanto

$$\alpha(\sigma_1\sigma_2) = (\alpha\sigma_1)\sigma_2$$

y además

$$\alpha(\sigma_1\sigma_2) = \alpha(\sigma_2\sigma_1) = (\alpha\sigma_2)\sigma_1 = \sigma_1(\alpha\sigma_2).$$

DEMOSTRACION DE LA PROPOSICION 2:

Sea $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ y $\bar{S}_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$ donde $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es una serie absolutamente convergente.

Como por hipótesis la sucesión $\{\bar{S}_n \mid n \geq 0\}$ es convergente, tendremos que ella es de Cauchy, luego: Para toda $\varepsilon > 0$ existe N tal que $|\bar{S}_n - \bar{S}_m| < \varepsilon$ para toda n , $m > N$ (si $m > n$, hacemos $m = n+q$, $q > 0$).

Reescribiendo tenemos:

Para toda $\varepsilon > 0$ existe N tal que $|\bar{S}_n - \bar{S}_{n+q}| < \varepsilon$, para toda $n > N$ y $q \in \mathbb{N}$, pero

$$|S_{n+q} - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+q} a_n \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+q} |a_n| = |\bar{S}_{n+q} - \bar{S}_n|$$

Asi que, para toda $\varepsilon > 0$ existe N tal que

$$|S_{n+q} - S_n| < \varepsilon \text{ para toda } n > N$$

ó sea que $\{S_n \mid n \geq 0\}$ es también de Cauchy y por tanto convergente, luego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es convergente.

DEMOSTRACION DE LA PROPOSICION 3:

(a) $\Sigma\ C$ es un subespacio de Σ si siempre que $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma\ C$, $\alpha, \beta \in \Phi$ se cumple $\alpha\sigma_1 + \beta\sigma_2 \in \Sigma\ C$, o sea que si σ_1 y σ_2 son dos series convergentes, entonces hay que demostrar que $\alpha\sigma_1 + \beta\sigma_2$ es convergente.

Sean $\sigma_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sigma_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$

y $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$

Sabemos que $\{A_n \mid n \geq 0\}$ y $\{B_n \mid n \geq 0\}$ convergen, luego $\{\alpha A_n \mid n \geq 0\}$ y $\{\beta B_n \mid n \geq 0\}$ convergen, por tanto $\{\alpha A_n + \beta B_n \mid n \geq 0\}$ converge, en consecuencia $\alpha\sigma_1 + \beta\sigma_2 \in \Sigma\ C$, por consiguiente $\Sigma\ C$ es un subespacio de Σ.

(b) Hay que demostrar que $\Sigma\ A\ C$ es un subanillo y un subespacio de Σ, lo primero lo desmostraremos en los puntos del 1 al 4 y lo segundo en el punto 5.

1.- Si $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma\ A\ C$, queremos demostrar que $\sigma_1 + \sigma_2 \in \Sigma\ A\ C$

Tenemos: $\sigma_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sigma_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ y $\sigma_1 + \sigma_2 = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$

Sean $A_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$, $B_n = \sum_{k=0}^{n} |b_k|$ $C_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k + b_k|$

Demostraremos que $\{C_n \mid n \geq 0\}$ es de Cauchy, ó sea deberá tenerse que:

Para toda $\varepsilon > 0$ exista N tal que $|C_{n+q} - C_n| < \varepsilon$, para toda $n > N$.

Como $\{A_n \mid n \geq 0\}$ y $\{B_n \mid n \geq 0\}$ son convergentes y lo tanto de Cauchy, se tiene que:

Para $\frac{\varepsilon}{2}$ existe N_1 tal que $|A_{n+q} - A_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, para toda $n > N_1$.

Para $\frac{\varepsilon}{2}$ existe N_2 tal que $|B_{n+q} - B_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, para toda $n > N_2$.

luego

$$|C_{n+q} - C_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+q} |a_k + b_k| \right| \leq$$

$$\leq \left| \sum_{k=n+1}^{n+q} |a_k| + |b_k| \right| \leq \left| \sum_{k=n+1}^{n+q} |a_k| \right| +$$

$$+ \left| \sum_{k=n+1}^{n+q} |b_k| \right| = |A_{n+q} - A_n| + |B_{n+q} - B_n| < \varepsilon$$

para toda $n > N$, tomando $N = max \{N_1, N_2\}$

2.- Claramente el elemento $0 \sum_{k=0}^{\infty} 0$ es un elemento de $\Sigma\ A\ C$

3.- Si $\sigma_1 \in \Sigma\ A\ C$, entonces $-\sigma_1 \in \Sigma\ A\ C$.

En efecto si $\sigma_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, tendremos que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$

converge, y para demostrar que $\sum_{n=0}^{\infty} -a_n$ es absolutamente convergente, tendremos que demostrar que $\sum_{n=0}^{\infty} |-a_n|$ converge, pero $\sum_{n=0}^{\infty} |-a_n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$,

y esta serie es convergente, ya que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ por - hipótesis es absolutamente convergente.

4.- Si σ_1 y $\sigma_2 \in \Sigma$ A C, entonces $\sigma_1 \sigma_2 \in$ A C. En efecto:

Sean $\sigma_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sigma_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ dos series absolutamente convergentes $\sigma_3 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n$ el producto $\sigma_1 \sigma_2$

Vamos a demostrar que σ_3 es absolutamente convergente.

Sea $\sigma_4 = \sum_{n=0}^{\infty} d_n$ el producto de las series $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$, $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$. Sean $A_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$, $B_n = \sum_{k=0}^{n} |b_k|$ y -- $\mathcal{D}_n = \sum_{k=0}^{n} d_k$.

Sabemos que $d_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k||b_{n-k}|$ y resulta que para toda n.

$$\mathcal{D}_n = \sum_{k=0}^{n} d_k = \sum_{k=0}^{n} (|a_k||b_0| + |a_{k-1}||b_1| + |a_{k-2}||b_2|$$

$$+ \ldots\ldots + |a_0||b_k|) =$$

$$= |a_0||b_0| + (|a_1||b_0| + |a_0||b_1|) + (|a_2||b_0| +$$

$$+|a_1||b_1|+|a_0||b_2|)+\ldots\ldots+(|a_n||b_0|+$$

$$+|a_{n-1}||b_1|+\ldots\ldots+|a_1||b_{n-1}|+|a_0||b_n|)=$$

$$=|a_0|(|b_0|+|b_1|+\ldots+|b_n|)+|a_1|(|b_0|+\ldots+$$

$$+|b_{n-1}|)+,\ldots\ldots+|a_n||b_0|,$$

pero

$$A_n\ B_n = |a_0|(|b_0|+\ldots+|b_n|)+|a_1|(|b_0|+\ldots+$$

$$+|b_n|)+\ldots\ldots+|a_n|(|b_0|+\ldots+|b_n|)$$

de aquí es claro que:

$$\mathcal{D}_n \leqslant A_n\ B_n$$

Para $r = \begin{cases} \frac{n}{2}, & si\ \ n\ es\ par \\ \\ \frac{n-1}{2}, & si\ \ n\ es\ impar \end{cases}$

$$A_r\ B_r = |a_0|(|b_0|+\ldots+|b_r|)+|a_1|(|b_0|+\ldots+|b_r|)$$

$$+\ldots+|a_r|(|b_0|+\ldots+|b_r|)$$

luego $A_r B_r \leqslant \mathcal{D}_n$ y por lo tanto:

$$A_r B_r \leqslant \mathcal{D}_n \leqslant A_n B_n$$

Si $A = \lim_{n\to\infty} A_n$, $B = \lim_{n\to\infty} B_n$ (ya que por hipótesis - $\{A_n\}$ y $\{B_n\}$ convergen), tendremos que $A_r B_r \to A\ B$ y $A_n B_n \to A\ B$ cuando $n \to \infty$ luego $\mathcal{D}_n \to A\ B$ cuando $n \to \infty$ por tanto la sucesión $\{\mathcal{D}_n \mid n \geqslant 0\}$ siendo convergente es de Cauchy.

Además $|C_n| = |\sum_{k=0}^{n} a_k\ b_{n-k}| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k||b_{n-k}| = d_n$, entonces para todo entero n y $q \geqslant 0$:

$$|\bar{C}_{n+q} - \bar{C}_n| = \sum_{k=n+1}^{n+q} |C_k| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+q} d_k =$$

$$= |\mathcal{D}_{n+q} - \mathcal{D}_n| \text{ donde } \bar{C}_n = \sum_{k=0}^{n} |C_k|$$

y como $\{\mathcal{D}_n \mid n \geqslant 0\}$ es de Cauchy, tendremos que - $\{\bar{C}_n \mid n \geqslant 0\}$ es de Cauchy, y por tanto es convergente, es decir $\sum_{n=0}^{\infty} |C_n|$ converge, esto es - - $\sum_{n=0}^{\infty} C_n = \sigma_3$ es absolutamente convergente.

5.- Para demostrar que $\Sigma\ A\ C$ es subespacio vectorial de Σ, hay que demostrar que $\alpha\sigma_1 + \beta\sigma_2 \in \Sigma\ A\ C$, si $\sigma_1 , \sigma_2 \in \Sigma\ A\ C$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Si $\sigma_1 \in \Sigma\ A\ C$, tendremos que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge.

Para demostrar que $\alpha\sigma_1 \in \Sigma\ A\ C$, es decir que $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha a_n|$ converge:

Supongamos que $A_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$ y $A'_n = \sum_{k=0}^{n} |\alpha a_k|$, pero $\{A_n \mid n \geq 0\}$ es de Cauchy, por lo que:

Para toda $\varepsilon > 0$ existe N tal que $|A_{n+q} - A_n| < \varepsilon$, para todo $n > N$ pero

$$|A'_{n+q} - A'_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+q} |\alpha a_k| \right| =$$

$$= |\alpha| \sum_{k=n+1}^{n+q} |a_k| = |\alpha|\ |A_{n+q} - A_n|$$

entonces para toda ε, tomo $\frac{\varepsilon}{|\alpha|}$ para la cual existe N tal que $|A_{n+q} - A_n| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$, (Estoy suponiendo $\alpha \neq 0$ pues si $\alpha = 0$ el resultado es claro), para toda $n > N$.

Y por tanto $|A'_{n+q} - A'_n| < \varepsilon$, para todo $n > N$ - (o sea la misma N) o sea $\{A'_n \mid n \geq 0\}$ es de Cauchy y por lo tanto convergente es decir $\alpha\sigma_1 \in \Sigma\ A\ C$.

Análogamente $\beta\sigma_2 \in \Sigma\ A\ C$ y por *1*:

$\alpha\sigma_1 + \beta\sigma_2 \in \Sigma\ A\ C$ y por tanto $\Sigma\ A\ C$ es un subespacio de Σ.

Finalmente concluimos que $\Sigma\ A\ C$ es una subálgebra de Σ.

(c) La aplicación $\Sigma\ C \to \mathbb{C}$ es lineal.

Sea φ la función tal que $\varphi(\sigma_1) = A$, con $\sigma_1 \in \Sigma\ C$ y A la suma de la serie.

Sean σ_1 y $\sigma_2 \in \Sigma\ C$, $\alpha \in \mathbb{C}$ tenemos que demostrar:

(i) $\varphi(\sigma_1+\sigma_2) = \varphi(\sigma_1) + \varphi(\sigma_2)$

(ii) $\varphi(\alpha\sigma_1) = \alpha\varphi(\sigma_1)$

demostración:

(i) Si $\sigma_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sigma_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k,\quad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k,$$

$$A_n \to A \text{ y } B_n - B, \text{ cuando } n \to \infty$$

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sum_{k=0}^{\infty} (a_n + b_n),\quad C_n = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k)$$

Hay que demostrar que $\varphi(\sigma_1+\sigma_2) = A + B$, es decir

$C_n \to A + B$ cuando $n \to \infty$ o sea para todo $\varepsilon > 0$ existe N tal que $|C_n - (A+B)| < \varepsilon$, para toda $n > N$.

Dado $\frac{\varepsilon}{2}$ existe N_1 tal que $|A_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$, para toda $n > N_1$

Dado $\frac{\varepsilon}{2}$ existe N_2 tal que $|B_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$, para toda $n > N_2$

entonces

$$|C_n - (A+B)| = \left| \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) - A - B \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{n} a_k - A + \sum_{k=0}^{n} b_k - B \right| \leq |A_n - A| +$$

$$+ |B_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ para toda } n > N,$$

donde $N = max\{N_1, N_2\}$

(ii) Para demostrar $\varphi(\alpha\sigma_1) = \alpha A$, supongamos

$$\alpha\sigma_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha a_n, \quad C_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha a_k$$

es decir, hay que demostrar

$$C_n \to \alpha A, \text{ cuando } n \to \infty,$$

esto significa que.

Para todo $\varepsilon > 0$ existe N tal que $|C_n - \alpha A| < \varepsilon$, para toda $n > N$ (de nuevo supongo $\alpha \neq 0$ pues si $\alpha = 0$ el resultado es claro).

Dado $\frac{\varepsilon}{|\alpha|}$ existe N_1 tal que $|A_n - A| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$, para toda $n > N_1$

Por tanto $|C_n - \alpha A| = |\sum_{k=0}^{n} \alpha a_k - \alpha A| = |\alpha| \, |A_n - A| < |\alpha| \frac{\varepsilon}{|\alpha|} = \varepsilon$, para toda $n > N$, donde $N = N_1$.

(d) La aplicación $\Sigma A C \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}$ que a cada serie absolutamente convergente asocia su suma, es un homomorfismo de álgebras:

O sea.

(i) $\varphi(\sigma_1 + \sigma_2) = \varphi(\sigma_1) + \varphi(\sigma_2)$

(ii) $\varphi(\alpha\sigma_1) = \alpha \, \varphi(\sigma_1)$

(iii) $\varphi(\sigma_1 \, \sigma_2) = \varphi(\sigma_1) \, \varphi(\sigma_2)$

Ya que toda serie absolutamente convergente es convergente, las partes (i) y (ii) quedan demostradas (véase la demostración de (c))

Queda por demostrar:

(iii) Si $\sigma_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sigma_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sabemos por (b) que $\sigma_1 \sigma_2 \in \Sigma A C$. Si $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$

y $A_n \to A$, $B_n \to B$ cuando $n \to \infty$.

Sabemos que $\varphi(\sigma_1) = A$ y $\varphi(\sigma_2) = B$.

Hay pues que demostrar $\varphi(\sigma_1 \sigma_2) = AB$.

$$\sigma_1 \sigma_2 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \text{ donde } C_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \, b_{n-k};$$

Sea $C_n = \sum_{k=0}^{n} C_k$.

Por lo tanto hay que demostrar que $C_n \to AB$ cuando $n \to \infty$.

Sea $\beta_n = B_n - B$

$$C_n = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_0 b_0) + \ldots +$$

$$+ (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0) = a_0 (b_0 + \ldots + b_n) +$$

$$+ a_1 (b_0 + \ldots + b_{n-1}) + \ldots + a_n b_0 = a_0 B_n +$$

$$+ a_1 B_{n-1} + \ldots + a_n B_0 = a_0 (B + \beta_n) + a_1 (B + \beta_{n-1}) + \ldots +$$

$$+ a_n (B + \beta_0) = A_n B + a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \ldots + a_n \beta_0$$

Sea $\gamma_n = a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \ldots + a_n \beta_0$

Como $A_n B \to AB$ cuando $n \to \infty$, entonces es sufi-

ciente demostrar que $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0$.

Como $B_n \to B$, cuando $n \to \infty$, se tendrá:

$$\beta_n = B_n - B \to 0 \text{ cuando } n \to \infty,$$

luego existe $M > 0$ tal que $|\beta_n| \leq M$, para todo n.

Sea k el valor que toma la suma infinita $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ (ya que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente), entonces dado $\frac{\varepsilon}{2k}$ existe N_1 tal que $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2k}$, para toda $n > N_1$ (puedo suponer $k \neq 0$ ya que si $k = 0$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sería la serie nula para lo cual el resultado es claro).

Y al mismo tiempo $\sum_{k=n+1}^{n+q} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2M}$ para $q \geq 0$ y $n > N_2$ (esto ya que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ es convergente) - ó sea que si tomamos $N = max\{N_1, N_2\}$ entonces para toda $p > 2N$ podemos escribir:

$$|\gamma_p| \leq \sum_{k=0}^{N} |a_k \beta_{p-k}| + \sum_{k=N+1}^{P} |a_k \beta_{p-k}| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2k} \sum_{k=0}^{N} |a_k| + M \sum_{k=N+1}^{P} |a_k| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2k} \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| + M \sum_{k=N+1}^{P} |a_k| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2k} \cdot k + M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$$

para toda $p > 2N$

luego $\gamma_p \to 0$, cuando $p \to \infty$

o lo mismo $\gamma_n \to 0$, cuando $n \to \infty$,

entonces $C_n \to AB$ cuando $n \to \infty$

y por tanto $\varphi(\sigma_1 \sigma_2) = AB$.

CRITERIO DE WEIERSTRASS PARA SERIES ALTERNANTES:

Si $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente convergente hacia 0, la serie alternada $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ converge. (Como referencia para ver la demostración de éste Teorema se puede consultar: Análisis Matemático de I.M. Apostol).

DEMOSTRACION DE LA PROPOSICION 4:

CONDICION NECESARIA: Supongamos $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge. Sea $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, por tanto $\{S_n \mid n \geq 0\}$ converge, luego es de Cauchy, consecuentemente para toda $\varepsilon > 0$ existe N tal que para toda $n > N$ y $q > 0$ $|S_{n+q} - S_n| < \varepsilon$, esto significa que para toda $\varepsilon > 0$ existe N tal que:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+q} a_n \right| < \varepsilon, \text{ para toda } n > N \text{ y } q > 0$$

CONDICION SUFICIENTE: Sea $S_n = \sum_{K=0}^{n} a_k$.

Por hipótesis sabemos que para toda $\varepsilon > 0$ existe un entero N tal que para $n > N$ y $q > 0$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+q} a_k \right| < \varepsilon$$

ó lo mismo que decir.

Para toda $\varepsilon > 0$ existe N tal que $|S_{n+q} - S_n| < \varepsilon$ para $n > N$ y $q > 0$ esto implica que $\{S_n \mid n \geq 0\}$ es una sucesión de Cauchy y por lo tanto convergente, con lo cual concluimos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

DEMOSTRACION DEL COROLARIO DE LA PROPOSICION 4:

(a) Sabemos por la proposición 4 que si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, entonces: Para toda $\varepsilon > 0$ existe N tal que para toda $n > N$ y $q \geq 0$:

$$\left| \sum_{k=n}^{n+q} a_k \right| < \varepsilon.$$

en particular para $q = 0$ y para toda $\varepsilon > 0$ $|a_n| < \varepsilon$ para toda $n > N$ y esto significa $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Pero la parte (a) del Corolario no nos da una condición suficiente para que la serie sea convergente, -

como contraejemplo tenemos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, aquí se cumple $\frac{1}{n} \to 0$ cuando $n \to \infty$ sin embargo la serie diverge

(b) Como $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ es convergente entonces por la Proposición 4.

Para toda $\varepsilon > 0$ existe N tal que $\left|\sum_{k=n+1}^{n+q} b_k\right| < \varepsilon$, para toda $n > N$ y $q > 0$, pero

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+q} a_k\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+q} |a_k| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+q} b_k \leqslant$$

$$\leqslant \left|\sum_{k=n+1}^{n+q} b_k\right| < \varepsilon$$

(recordemos aquí que b_k es real para toda k) luego - $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ convergen, y por lo tanto $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente.

(c) CONDICION NECESARIA:

Supongamos, entonces si $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, tendremos que - $\{S_n \mid n \geqslant 0\}$ converge a L, luego para toda $\varepsilon > 0$ existe N tal que $|S_n - L| < \varepsilon$, para toda $n > N$, ó sea que

$$|S_n| - |L| \leqslant |S_n - L| < \varepsilon$$

lo cual significa que:

Dada una ε_0 existe N tal que $|S_n| < \varepsilon_0 + |L|$, para $n > N$.

Sea $M = Sup\ \{S_1, S_2, \ldots, S_N, \varepsilon_0 + |L|\}$.

(Como $\{S_1, \ldots\ldots, S_N, \varepsilon_0 + |L|\}$ es un conjunto finito tiene *sup*), por eso

$$|S_n| \leqslant M, \text{ para toda } n,$$

pero como $a_n \geqslant 0$, para toda n, entonces

$$S_n \leqslant M, \text{ lo cual implica}$$

$$Sup\ \{S_n \mid n \geqslant 1\} < +\infty$$

CONDICION SUFICIENTE: Supongamos $sup\ \{S_n \mid n \geqslant 1\} < +\infty$

Sea $S = Sup\ \{S_n \mid n \geqslant 1\}$
Hay que demostrar que $\{S_n \mid n \geqslant 1\}$ converge

(i) $\{S_n \mid n \geqslant 1\}$ es acotada

(ii) $\{S_n \mid n \geqslant 1\}$ es creciente ya que $a_n \geqslant 0$ y por tanto

$$a_0 \leqslant a_0 + a_1 \leqslant a_0 + a_1 + a_2 \leqslant \ldots,$$

luego

$$S_{n+1} \geq S_n \quad y \quad S_n \geq 0$$

Como $S = sup\ \{S_n \mid n \geq 1\}$, entonces $S_n \leq S$, para toda n por lo cual para toda $\varepsilon < 0$ existe N tal que:

$$S - \varepsilon \leq S_n \leq S$$

(de lo contrario S no sería el sup.) tendremos - pues que para toda $n > N$

$$S-\varepsilon < S_N < S_n < S < S+\varepsilon,$$

es decir $|S_n - S| < \varepsilon$, para toda $n > N$, o sea - que $\{S_n \mid n \geq 1\}$ converge, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

DEMOSTRACION DE LA PROPOSICION 5:

(a) Es la misma que se hizo en la Proposición 1.

(b) Sean $\sigma_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $\sigma_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ dos series tales que $\sigma_1 \sigma_2 = 0$.

Supongamos $\sigma_1 \neq 0$ y $\sigma_2 \neq 0$, entonces existen enteros $r, q \geq 0$ tales que $a_n = 0$, si $n < r$ y $a_r \neq 0$, además - $b_n = 0$, si $n < q$ y $b_q \neq 0$. Si $\sigma_1 \sigma_2$ es la serie - - $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ resulta de la definición de C_n que:

$$C_{r+q} = \sum_{k=0}^{r+q} a_k \, b_{r+q-k} = a_0 \, b_{r+q} +$$

$$+ a_1 \, b_{r+q-1} + \ldots + a_r \, b_q + \ldots +$$

$$+ a_{r+q} \, b_0$$

y como $a_r \, b_q \neq 0$, tendremos que $C_{r+q} \neq 0$ (éste ya que todos los demás términos de C_{r+q} son ceros ya que - - $a_0 = \ldots = a_{r-1} = 0$ y $b_{q-1} = \ldots = b_0 = 0$), lo que contradice el hecho de que $\sigma_1 \, \sigma_2 = 0$.

DEMOSTRACION DE LA PROPOSICION 6:

Supongamos $\sigma_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, x^n \qquad \sigma_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \, x^n$

(a) $$\frac{d\sigma_1}{dx} + \frac{d\sigma_2}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \, a_{n+1} \, x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \, b_{n+1} \, x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(a_{n+1} + b_{n+1}) \, x^n = \frac{d(\sigma_1 + \sigma_2)}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\lambda \sigma_1) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \, \lambda a_{n+1} \, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda \left((n+1) a_{n+1} \right) x^n =$$

$$= \lambda \frac{d\sigma_1}{dx}$$

(b) Ya que $\sigma_1 \, \sigma_2 = a_0 \, b_0 + (a_0 \, b_1 + a_1 \, b_0) \, x + \ldots + (a_0 \, b_{n+1} +$ $+ a_1 b_n + \ldots + a_{n+1} b_0) \, x^{n+1} + \ldots$, entonces el término n-ésimo de

$\frac{d(\sigma_1 \sigma_2)}{dx}$ será:

$$(n+1)(a_0 b_{n+1} + a_1 b_n + \ldots + a_{n+1} b_0) x^n$$

calculemos cuánto vale el término n-ésimo de

$$\sigma_1 \frac{d\sigma_2}{dx} + \sigma_2 \frac{d\sigma_1}{dx} :$$

$$\sigma_1 \frac{d\sigma_2}{dx} + \sigma_2 \frac{d\sigma_1}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) b_{n+1} x^n +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} c'_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n + c'_n) x^n$$

donde:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k (n-k+1) b_{n-k+1}$$

$$c'_n = \sum_{k=0}^{n} b_k (n-k+1) a_{n-k+1}$$

el n-ésimo término $(c_n + c'_n) x^n$, estará dado por:

$$x^n (c_n + c'_n) = a_0 (n+1) b_{n+1} x^n + a_1 n b_n x^n + a_2 (n-1) b_{n-1} x^n + \ldots +$$

$$+\ldots+ a_n \cdot 1 b_1 x^n + b_0 (n+1) a_{n+1} x^n + b_1 n a_n x^n + b_2 (n-1) a_{n-1} x^n + \ldots +$$

$$+\ldots+ b_n \cdot 1 a_1 x^n = (n+1)[a_0 b_{n+1} + a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1 +$$

$$+ a_{n+1} b_0]\ x^n$$

lo que es igual al n-ésimo término de $\frac{d\sigma_1 \sigma_2}{dx}$ por lo - tanto, en efecto tendremos que:

$$\frac{d\sigma_1 \sigma_2}{dx} = \sigma_1 \frac{d\sigma_2}{dx} + \sigma_2 \frac{d\sigma_1}{dx}$$

DEMOSTRACION REFERENTE A LA NOTA ENUNCIADA DESPUES DE LA PROPOSICION 6:

CONDICION NECESARIA: Supongamos que dado $\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ - existe σ_1, tal que $\sigma\sigma_1 = I = 1+0\cdot x+0\cdot x^2+\ldots\ldots\ldots$ $\sigma_1 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$, entonces

$$\sigma\sigma_1 = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \ldots\ldots\ldots =$$

$$= 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \ldots\ldots\ldots$$

por lo tanto $a_0 b_0 = 1$, luego deberá tenerse que $a_0 \neq 0$.

CONDICION SUFICIENTE: Si $a_0 \neq 0$ demostraremos que existe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sigma_1$, tal que

$$\sigma \cdot \sigma_1 = 1 \quad \text{donde} \quad \sigma = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Basta tomar $b_0 = \frac{1}{a_0}$, ya que $a_0 \neq 0$, teniendo que

$$\sigma\sigma_1 = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \ldots\ldots$$

entonces:

$$b_0 = \frac{1}{a_0}$$

b_1 sería tal que $a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0$, $b_1 = -\frac{a_1}{a_0^2}$

b_2 sería tal que $a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0$, $b_2 = \frac{a_1^2 - a_2 a_0}{a_0^2}$, etc.

Ahora ya que a_0 es el coficiente de $b_0, b_1, b_2, \ldots\ldots$ en los términos $0, 1, 2, \ldots\ldots$ respectivamente. Se puede conseguir una solución para b_n en las expresiones

$$a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$$

igualándola a 1 en el caso que $n = 0$ e igualándola a 0 en el caso $n \geq 1$.

DEMOSTRACION DEL LEMA 1: Sabemos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega^n$ converge, luego por el corolario de la Proposición 4

$a_n \omega^n \to 0$, cuando $n \to \infty$, por tanto

existe $Sup\ \{|a_n\omega^n| \mid n \geq 0\} < +\infty$. Sea M ese supremo, entonces tendremos:

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n}\ ,\ \text{para toda } n \geq 0.$$

Sea $z \in \mathcal{D}(0,r)$, $|a_n z^n| = |a_n||z|^n \leq M\ (\frac{|z|}{r})^n$, como $|z| < r$, la serie de números reales $\sum_{n=0}^{\infty} M\ (\frac{|z|}{r})^n$ converge (ya que $\frac{|z|}{r} < 1$), y como $|a_n z^n| \leq M\ (\frac{|z|}{r})^n$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge absolutamente - por el corolario (b) de la Proposición 4.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 1:

(a) Sea $T = \{|\omega| \mid \omega \in Conv\ (\sigma)\}$, tendremos que siempre - $0 \in T$. Si $T = \{0\}$, $R = 0$ y $Conv\ (\sigma) = \{0\}$.

Si $T \neq \{0\}$, $Conv\ (\sigma)$ contiene por el Lema 1 a la - - unión de todos los discos abiertos $\mathcal{D}(0,t)$, $t \in T$.

La unión, $\bigcup_{t\in T}\mathcal{D}(0,t)$, de esos discos es claramente un disco abierto $\mathcal{D}(0,R)$ $(R = sup\ \{t \mid t \in T\})$.

Si $\omega \in Conv\ (\sigma)$, $\mathcal{D}(0,|\omega|) \subset Conv\ (\sigma)$ por el Lema 1.

Y por definición de $\mathcal{D}(0,R)$ tendremos que $\omega \in \overline{\mathcal{D}(0,R)}$ luego entonces:

$$\mathcal{D}(0,R) \subset Conv(\sigma) \subset \overline{\mathcal{D}(0,R)}$$

(b) R es único ya que el supremo es único (o sea por cons

trucción)

(c) CONDICION NECESARIA: Si σ es convergente entonces por definción existe un $\omega \neq 0 \in Conv\ (\sigma)$, entonces - - - $\mathcal{D}(0,|\omega|) \subset \mathcal{D}(0,R)$, luego $R > 0$

CONDICION SUFICIENTE: Si $R > 0$, como por (a)

$$\mathcal{D}(0,R) \subset Conv\ (\sigma),$$

tendremos que existe $x \in \mathcal{D}(0,R)$, $x \neq 0$ y tal que - - $x \in Conv\ (\sigma)$, consecuentemente σ es convergente.

(d) Si $\omega \in \mathcal{D}(0,R)$. Sea r tal que:

$$|\omega| < r < R.$$

Como $r \in Conv\ (\sigma)$ y $\omega \in \mathcal{D}(0,r)$, resulta de la demostración del Lema 1 que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega^n$ converge absolutamente.

DEMOSTRACION DEL COROLARIO DEL TEOREMA 1:

(a) Si $r < R$, $r \in \mathcal{D}(0,R) \subset Conv\ (\sigma)$ de la demostración - del Lema 1 existe $A(r) \geq 0$ (esto ya que existe - - - $Sup\ \{|a_n r^n| \mid n \geq 0\}$ y le llamaremos $A(r)$) tal que

$$|a_n| \leq \frac{A(r)}{r^n} \quad \text{para todos los } n \geq 0.$$

(b) Si ω es tal que $|\omega| < r$, entonces

$$|a_n \omega^n| = |a_n||\omega|^n \leq A\left(\frac{|\omega|}{r}\right)^n, \text{ para todo } n \geq 0$$

Como $\sum_{n=0}^{\infty} A\left(\frac{|\omega|}{r}\right)^n$ converge (ya que $\frac{|\omega|}{r} < 1$), luego del corolario de la Proposición 4 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega^n$ converge, entonces $D(0,r) \subset Conv(\sigma)$, y por tanto σ es convergente y su radio de convergencia es mayor ó igual a r.

DEMOSTRACION DE LA PROPOSICION 7:

(a) Para todo $\sigma \in \mathbb{C}\{x\}$ supongamos que R sea el radio de convergencia de σ, por consiguiente para todo $\omega \in \mathbb{C}$, tal que $|\omega| < R$, la serie de números complejos $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega^n$ es absolutamente convergente por el Teorema 1 - (d).

Y sabemos por la poposición 3 - (b) que el conjunto de series absolutamente convergentes forman una subálgebra de Σ, luego entonces $\mathbb{C}\{x\}$ es una subálgebra de $\mathbb{C}[[x]]$.

(b) Sea $\sigma \in \mathbb{C}\{x\}$, $\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y sea R su radio de convergencia. Sea $0 < r < R$ y sea ρ tal que $r < \rho < R$.

Por el corolario (parte (a)) del Teorema 1 existe $A(\rho) \geq 0$, tal que $|a_n| \leq \frac{A(\rho)}{\rho^n}$, para todos los $n \geq 0$.

De allí se sigue que:

$$|'(n+1)a_{n+1}| \leqslant \frac{A(\rho)}{r^n}\ (\frac{(n+1)r^n}{\rho^{n+1}}),\ \text{para toda } n \geqslant 0.$$

Como $\rho \geqslant r$ $\quad Sup_n\ \frac{(n+1)r}{\rho^{n+1}} < +\infty$

Sea S ese supremo. Entonces

$$|(n+1)\ a_{n+1}| \leqslant S\ \frac{A(\rho)}{r^n}$$

entonces por la parte (b) del Corolario, del Teorema 1.

$$D(0,r) \subset Conv\ (\frac{d\sigma}{dx})$$

Como r es arbitrario $< R$, se tendrá que

$$D(0,R) \subset Conv\ (\frac{d\sigma}{dx})$$

Sea R' el radio de convergencia de $\frac{d\sigma}{dx}$, entonces

$$R' \geqslant R \ldots\ldots\ldots (i)$$

Si $\omega \in D(0,R')$ y $\omega \neq 0$: por el Teorema 1 - (d) se tendrá que $\sum_{n=0}^{\infty} |(n+1)a_{n+1}\omega^n|$ converge

$$\text{Como } |a_{n+1}\omega^{n+1}| \leqslant |(n+1)a_{n+1}\omega^n|\ |\omega| \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$Y \sum_{n=0}^{\infty} |(n+1)a_{n+1}\omega^n|\,|\omega| = |\omega| \sum_{n=0}^{\infty} |(n+1)a_{n+1}\omega^n|$$

se tendra que $\sum_{n=0}^{\infty} |(n+1)a_{n+1}\omega^n||\omega|$ converge y usando el corolario (b) de la Proposición 4 y (1) se tiene - que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\omega^n$ converge y por tanto $D(0,R') \subset Conv\ (\sigma)$

$$\text{ó sea}\quad R' \leq R \ldots\ldots\ldots (ii)$$

de (i) y (ii) se sigue que $R' = R$.

Y por lo tanto es claro que

$$\frac{d}{dx}\ (\ \mathbb{C}\{x\}\ ) \subset \mathbb{C}\{x\}.$$

CAPITULO 2

FUNCIONES HOLOMORFAS

SECCION 1: Funciones polinomiales

DEFINICION 0: $Z: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es la función identidad, que a cada número complejo a le asocia el mismo número:

$$Z(a)=a \text{ para todo } a \in \mathbb{C}$$

La aplicación $\vec{Z} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ asociada a Z (ver capítulo o, Sección 4 nota (c)), es también la identidad, ya que:

$$\vec{Z}(x,y) = (Re\ Z(x+iy), Im\ Z(x+iy)) = (x,y)$$

DEFINICION 1: El conjunto Π de las funciones polinomiales es la subálgebra de $C(\mathbb{C})$ generada por la función constante 1 y la función Z, o en otros términos es la menor subálgebra de $C(\mathbb{C})$ que contiene a 1 y Z. Un elemento de Π se llama función polinomial.

PROPOSICION 1:

(a) Dado un punto $w \in \mathbb{C}$ cualquiera, el conjunto Π de las funciones polinomiales es exactamente el conjunto:

$$\{a_0 + a_1(Z-w) + \ldots + a_r(Z-w)^r \mid a_0, \ldots, a_r \in \mathbb{C}, r \text{ entero} \geq 0\}$$

donde $Z-w: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es la función: $a \to a-w$

(b) La expresión $a_0 + a_1(Z-w) + \ldots + a_r(Z-w)^r$ para una fun-

ción polinomial es única.

(c) Si en (b) se pide que $a_r \neq 0$, r no depende de w y se llama grado del polinomio $P=a_0+a_1(z-w)+\ldots+a_r(z-w)^r$

DEMOSTRACION:

(a) Sea L el conjunto

$$L=\{a_0+a_1(z-w)+\ldots+a_r(z-w)^r \mid r\geq 0, a_0,\ldots,a_r\in\Phi\}$$

Es fácil verificar que L es una subálgebra de $C(\Phi)$ (ver Apéndice 2, en la demostración referente a la proposición 1).

L contiene a la función constante 1 (tomar $r=0$, $a=1$)

L contiene también a la función z (tomar $r=1, a_0=w, a_1=1$)

Como Π es la subálgebra de $C(\Phi)$ generada por las funciones 1 y z, $\Pi \subseteq L$. Sin embargo la función $z-w$ pertenece claramente a Π y entonces todas las potencias $(z-w)^r$, r entero ≥ 0 de esta función también pertenecen a Π. Entonces $L \subseteq \Pi$. Por consiguiente $L=\Pi$.

(b) Supongamos que P es una función polinomial que tiene dos representantes:

$$a_0+a_1(z-w)+\ldots+a_s(z-w)^s \text{ y } b_0+b_1(z-w)+\ldots+b_t(z-w)^t$$

Podemos suponer que $s\geq t$. Si definimos

$$b_{t+1} = b_{t+2} = \ldots\ldots = b_s = 0$$

la función:

$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)(Z-w) + \ldots + (a_s - b_s)(Z-w)^s$$

es idénticamente nula.
Basta demostrar entonces que si una combinación lineal,

$$P = c_0 + c_1(Z-w) + \ldots + c_k(Z-w)^k$$

es idénticamente nula, entonces $c_0 = c_1 = \ldots\ldots = c_k = 0$
Vamos a proceder por inducción sobre K.

Si $K = 0$, se tiene $c_0 = 0$, y entonces el resultado es -- cierto.
Supongamos que el resultado es cierto para $K-1 \geq 1$, y vamos a probar el resultado para K. Evaluemos P en w; como $Z(w) = w$ entonces $P(w) = c_0$, y por lo tanto $c_0 = 0$. Sea $j \geq 1$ el entero tal que $c_0 = c_1 = \ldots = c_{j-1} = 0$ y -- $c_j \neq 0$, si $j = K+1$, ya no hay nada que demostrar; Si $j \leq K$:

$$P = (Z-w)^j (c_j + c_{j+1}(Z-w) + \ldots + c_k(Z-w)^{k-j})$$

Para continuar la demostración, necesitamos probar el siguiente lema

LEMA 1: Sean f y $g \in C(\mathbb{C})$ dos funciones tales que:

(1) $fg = 0$ idénticamente
(2) Los ceros de f son un conjunto finito
Entonces $g = 0$

DEMOSTRACION DEL LEMA: Sean $z_1, z_2, \ldots, z_k$ los ceros de ϕ, para $z \neq z_1, \ldots, z_k$, y $g(z)\phi(z)=0$, entonces como $\phi(z)$ y $g(z)$ son números complejos, los complejos no tienen divisores de cero, y $\phi(z)$ no es cero, se tiene que para esos puntos $g(z)=0$, y como por hipótesis g es continua y el complemento de z_i, $i = 1, \ldots$, k es denso concluimos que $g = 0$.

Aplicaremos ahora el Lema, para finalizar la demostración de la parte (b) de la proposición 1, lo aplicaremos a las funciones $\phi = (Z-w)^j$ y $g = c_j + c_{j+1}(Z-w) + \ldots + c_k(Z-w)^{k-j}$, como $\phi g = 0$, y el único cero de ϕ es w, $g=0$ y y como $j \geq 1$, $k-j \leq k-1$, por la inducción aplicada tendremos que:

$$c_j = c_{j+1} = \ldots\ldots = c_k = 0$$

lo cual demuestra (b)

(c) Si $P \in \Pi$ tal que $P = a_0 + a_1(Z-w) + \ldots + a_r(Z-w)^r$

dado $w \in \mathbb{C}$, entonces dado $w_1 \in \mathbb{C}$, $P = b_0 + b_1(Z-w_1) + \ldots + b_s \cdot (Z-w_1)^s$. Supongamos $s > r$ (demostraremos que tiene que suceder $s = r$, Si $s \leq r$ es análogo)

Tendríamos que:

$$b_0 = P(w_1) = a_0 + a_1(w_1-w) + \ldots + a_r(w_1-w)^r$$

$$a_0 = P(w) = b_0 + b_1(w-w_1) + \ldots + b_r(w-w_1)^r + \ldots + b_s(w-w_1)^s$$

Consideremos $a_n = 0$ Si $n > r$, y restemos miembro a miembro.

$$b_0 - a_0 = a_0 - b_0 + (a_1 + b_1)(w_1 - w) + \ldots +$$

$$+ (a_r + b_r)(w_1 - w)^r + \ldots + (a_s + b_s)(w_1 - w)^s$$

o sea

$$0 = 2(a_0 - b_0) + (a_1 + b_1)(w_1 - w) + \ldots\ldots +$$

$$+ (a_r + b_r)(w_1 - w)^r + \ldots + (a_s + b_s)(w_1 - w)^s$$

y por la demostración de la parte (b) tendremos que

$$a_0 - b_0 = 0, \quad a_1 + b_1 = 0, \ldots,$$

$$a_r + b_r = 0, \quad a_{r+1} + b_{r+1} = 0, \ldots, a_s + b_s = 0$$

entonces

$$b_r \neq 0 \text{ (ya que } a_r \neq 0) \text{ y } b_n = 0 \text{ si } n > r$$

por tanto r no depende de la w que se tome.

NOTA IMPORTANTE: Resulta de la proposición 1, aplicada en el caso $w = 0$, que a cada función polinomial P, se puede asociar de manera única un polinomio formal (Capítulo 1, Definición 4 (b)), de la manera siguiente; P puede ser representado de manera única como:

$$a_0 + a_1 Z + a_2 Z^2 + \ldots + a_j Z^j$$

Si a P le asociamos el polinomio formal:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_j x^j + 0 . x^{j+1} + 0 . x^{j+2} + \ldots$$

Esta correspondencia es un homomorfismo inyectivo de $\sqcap$ en $\mathbb{C}\left[(x)\right]$.

Entonces uno puede identificar funciones polinomiales y polinomios; y por lo tanto de aquí en adelante mencionaremos polinomios en lugar de funciones polinomiales.

SECCION 2: Funciones holomorfas

Las funciones holomorfas son la generalización de los polinomios, cuando se substituye series de potencias convergentes -- por los polinomios formales
¡ Las funciones holomorfas serán siempre definidas sobre abiertos !

DEFINICION 2: Una función $f: \Omega \to \mathbb{C}$, donde Ω es un abierto, es llamada holomorfa si para todo $w \in \Omega$, existe un disco abierto $\mathcal{D}(w, r) \subset \Omega$ y una serie de potencias

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

convergente en el disco $\mathcal{D}(o, r)$, (y esto es de radio de convergencia mayor o igual que r), Tales que para todo $z \in \mathcal{D}(w, r)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-w)^n$$

$f(z)$ es la suma de la serie de números complejos $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-w)^n$

NOTACION: $\mathcal{H}(\Omega)$ designará el conjunto de todas las funciones holomorfas de $\Omega \to \mathbb{C}$.

Vamos a demostrar primero un resultado similar a la proposición 1(b).

PROPOSICION 2 - DEFINICION 3:

(a) Sean $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ dos series de potencias ambas convergentes en un disco $D(o,r)$, y tales que para todo $z \in D(o,r)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

entonces $a_n = b_n$ para todos los n

(b) La serie de la definición 2, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, depende únicamente de f y de w, y se llama la serie de potencias que representa a f en w.

DEMOSTRACION:

(a) Como las series convergen en $D(o,\frac{r}{2}) \subset D(o,r)$, entonces por la parte (a)del Corolario del Teorema 1, Capítulo 1; existen constantes, A y $B \geq o$, tales que:

$$|a_n| \leq \frac{A.2^n}{r^n} \qquad |b_n| \leq \frac{B.2^n}{r^n}$$

para todos los $n \geq 0$.

Si a_n no es igual a b_n para todos los n, existe un entero $j \geq 0$, tal que $a_n = b_n$ si $n < j$ y $a_j \neq b_j$.

Para todo $z \in D(o, r)$

$$(a_j - b_j) z^j = \sum_{n=j+1}^{\infty} (b_n - a_n) z^n .$$

Ahora bien si $|z| < \frac{r}{4}$, tendremos:

$$\left| \sum_{n=j+1}^{\infty} (b_n - a_n) z^n \right| \leq \sum_{n=j+1}^{\infty} |b_n - a_n| \, |z^n| \leq$$

$$\leq \sum_{n=j+1}^{\infty} (|b_n| + |a_n|) |z^n| \leq \sum_{n=j+1}^{\infty} (A + B) \frac{2^n}{r^n} |z^n| =$$

$$= \sum_{n=j+1}^{\infty} (A + B) \left| \frac{2^n z^n}{r^n} \right| =$$

$$= (A+B) \frac{2^{j+1} |z|^{j+1}}{r^{j+1}} \sum_{n=j+1}^{\infty} \left| \frac{2^{n-j-1} z^{n-j-1}}{r^{n-j-1}} \right| \leq$$

$$\leq (A+B) \frac{2^{j+1} |z|^{j+1}}{r^{j+1}} \sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{r^{n-j-1}}{4^{n-j-1}} \cdot \frac{2^{n-j-1}}{r^{n-j-1}} =$$

$$= (A+B) \frac{2^{j+1} |z|^{j+1}}{r^{j+1}} \sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-j-1}} =$$

$$= \frac{(A+B) \, 2^{j+2} \, |z|^{j+1}}{r^{j+1}} \quad (\text{ya que}$$

$$\sum_{n=j+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-j-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2)$$

entonces para todo z tal que $|z| < \frac{r}{4}$

$$|(a_j - b_j)z^j| \leq \frac{2^{j+2}(A+B)|z|^{j+1}}{r^{j+1}}$$

Si $0 < |z| < \frac{r}{4}$:

$$|a_j - b_j| \leq \frac{2^{j+2}(A+B)|z|}{r^{j+1}}$$

tomando $|z| < \frac{|a_j - b_j| r^{j+1}}{(A+B)2^{j+3}}$ (ésta z cumple que $|z| < \frac{r}{4}$,

ya que:

$$\frac{|a_j - b_j| r^{j+1}}{(A+B)2^{j+3}} \leq \frac{(|a_j| + |b_j|) r^{j+1}}{(A+B)2^{j+3}} \leq$$

$$\leq \frac{\left(\frac{A.2^j}{r^j} + \frac{B.2^j}{r^j}\right) r^{j+1}}{(A+B)2^{j+3}} = \frac{(A+B)2^j r}{(A+B)2^{j+3}} = \frac{r}{8} < \frac{r}{4} \;)$$

Tendríamos:

$$|a_j - b_j| \leq \frac{2^{j+2}(A+B)}{r^{j+1}} \cdot \frac{|a_j - b_j| r^{j+1}}{(A+B)2^{j+3}} = \frac{|a_j - b_j|}{2}$$

esto es una contradicción y por lo tanto

$$a_n = b_n, \text{ para toda } n.$$

(*b*) Si existen dos discos $D(w,r_1)$ y $D(w,r_2)$, y dos series

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad y \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

tales que para todo $z \in D(w,r_1)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-w)^n$$

y para todo $z \in D(w,r_2)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-w)^n, \text{ entonces}$$

$$\text{si } r_3 = \inf \{r_1, r_2\}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \text{ para toda } z \in D(o,r_3)$$

Y aplicando (*a*), concluimos $a_n = b_n$ para todo n, y con

esto demostramos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ de la definición 2 sólo depende de f y w.

PROPOSICION 3: $\mathcal{H}(\Omega)$ es una subálgebra de $C(\Omega)$

DEMOSTRACION: Sean f y $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ y sea w un punto cualquiera de Ω. Sean $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ las series que representan a f y a g, respectivamente en w. Entonces existen dos discos abiertos

$$\mathcal{D}(w, r_1) \text{ y } \mathcal{D}(w, r_2) \text{ tales que:}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-w)^n, \text{ si } z \in \mathcal{D}(w, r_1), \text{ y}$$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-w)^n, \text{ si } z \in \mathcal{D}(w, r_2)$$

Sea $r_3 = \inf \{r_1, r_2\}$

Por el Teorema 1(d) del Capítulo 1.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n y^n$ convergen absolutamente para y tal que $|y| < r_3$ entonces tenemos que para z tal que $|z-w| < r_3$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-w)^n$ converge absolutamente, al igual que $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-w)^n$.

Y por la proposición 3(*b*) del capítulo 1

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)\ (z-w)^n$$

y $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-w)^n$, donde $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

convergen absolutamente para todo $z \in \mathcal{D}(w, r_3)$ y finalmente por la proposición 3(*d*) del capítulo 1.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)\ (z-w)^n = f(z) + g(z)$$

y $$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-w)^n = f(z)g(z)$$

para todo $z \in \mathcal{D}(w, r_3)$

De aquí concluimos que $f + g$ y $fg \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Sabemos por la proposición 3(*a*) del capítulo 1 que:

$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n y^n$ converge para y tal que $|y| < r_1$

o sea que para toda $z \in \mathcal{D}(w, r_1)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n (z-w)^n \text{ converge}$$

y por la proposición 3(*d*) del Capítulo 1

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n (z-w)^n = \lambda f(z)$$

por lo tanto $\lambda f \in \mathcal{H}(\Omega)$

Para concluir que $\mathcal{H}(\Omega)$ es una subálgebra de $\mathcal{C}(\Omega)$ lo único que falta por demostrar es que

$$\mathcal{H}(\Omega) \subset \mathcal{C}(\Omega)$$

Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y sean $w \in \Omega$ y $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ la serie que representa f en w, existe un $r > 0$ tal que $\mathcal{D}(w,r) \subset \Omega$ y si $z \in \mathcal{D}(w,r)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-w)^n$$

de allí resulta primero que $f(w) = a_0$ y

$$f(z) - f(w) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-w)^n$$

Por la parte (a) del corolario del Teorema 1, capítulo 1, existe una constante A tal que:

$$|a_n| \leq \frac{2^n \cdot A}{r^n} \text{ , para toda n.}$$

Si $|z-w| \leq \frac{r}{4}$

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-w)^n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot A}{r^n} |z-w|^n \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A}{r} |z-w| \frac{2^{n-1}}{r^{n-1}} \cdot \frac{r^{n-1}}{4^{n-1}} =$$

$$= \frac{2A}{r} |z-w| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{4A\,|z-w|}{r}$$

entonces si $|z-w| \leq \frac{r}{4}$, $|f(z) - f(w)| \leq \frac{4A\,|z-w|}{r}$

De aquí ya obtenemos la continuidad de f en w, ya que:

Si $z_n \to w$, dada $\frac{\varepsilon r}{4A}$ existe N tal que

$$|z_n - w| < \frac{\varepsilon r}{4A}, \text{ para } n > N.$$

OBSERVACION: Estamos considerando $f \mid \mathcal{D}(w, \frac{r}{4})$ entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ basta encontrar la N arriba mencionada para $\frac{\varepsilon r}{4A}$ y se tendrá

$$|f(z_n) - f(w)| \leq \frac{4A\ |z_n - w|}{r} \leq \frac{4A}{r} \cdot \frac{\varepsilon r}{4A} = \varepsilon$$

para toda $n > N$.

por lo tanto f es continua en w.

PROPOSICION 4:

(a) Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y si $a \in \mathbb{C}$ la función $f_a : \Omega - \{a\} \to \mathbb{C}$

donde $\Omega - \{a\} = \{w \mid w+a \in \Omega\}$ y $f_a(z) = f(z+a)$, es holomorfa.

(b) Si $f: \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa y Ω' es un subconjunto abierto contenido en Ω, entonces la restricción $f|\Omega'$ es -- holomorfa

(c) Sea $f: \Omega \to \mathbb{C}$ una función definida sobre un abierto, y tal que existe una familia $\{\Omega\alpha \mid \alpha \in A\}$ de abiertos con las propiedades:

(1) $\Omega = \bigcup_{\alpha \in A} \Omega\alpha$

(2) La restricción de f a $\Omega\alpha$, $f|\Omega\alpha$ es holomorfa para todos los $\alpha \in A$.

Entonces f es holomorfa.

DEMOSTRACION: En el Apéndice 2.

SECCION 3: Ejemplos de funciones holomorfas.

Resulta de la Definición 2 y de la Proposición 1(a) que todo polinomio es holomorfo. De la Proposición 4(b) resulta que la restricción de cualquier polinomio a cualquier abierto es holomorfo. La proposición siguiente da muchos ejemplos de funciones holomorfas.

PROPOSICION 5: Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie de potencias convergente de radio de convergencia R. La función $f: \mathcal{D}(0,R) \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es holomorfa. Si $w \in \mathcal{D}(o,R)$ y si f es representada en w por la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ entonces:

$$b_k = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} a_n w^{n-k}$$

Antes de dar la demostración de ésta proposición, haremos ver porqué la serie $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} a_n w^{n-k}$ converge.

Sabemos que para todo $w \in \mathcal{D}(o,R)$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ converge absolutamente (por Teorema 1(d) Capítulo 1), al igual que la

serie derivada, y con el mismo radio de convergencia por la Proposición 7(b) del Capítulo 1, y por lo tanto también la derivada k-ésima tiene el mismo radio de convergencia y por lo tanto

$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} w^{n-k} a_n$ converge absolutamente, ó sea la serie de números reales $\sum_{n=k}^{\infty} \left| \frac{n!}{(n-k)!} w^{n-k} a_n \right|$ converge, y como:

$$\left| \frac{n!}{k!\,(n-k)!} a_n w^{n-k} \right| \leq \left| \frac{n!}{(n-k)!} w^{n-k} a_n \right|,$$

tenemos que $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} a_n w^{n-k}$ converge absolutamente, (ya que $\sum_{n=k}^{\infty} \left| \frac{n!}{k!\,(n-k)!} a_n w^{n-k} \right|$ converge usando el criterio de comparación para series de números reales). Y como esto vale para todo - - $w \in \mathcal{D}(o,R)$ se tiene que el radio de convergencia de $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} a_n x^{n-k}$ es mayor o igual a R.

DEMOSTRACION: Sea $w \in \mathcal{D}(o,R)$, tenemos que encontrar un disco $\mathcal{D}(w,\varepsilon) \subset \mathcal{D}(o,R)$ y una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ convergente

en el disco $\mathcal{D}(o,\varepsilon)$ y tal que si $z \in \mathcal{D}(w,\varepsilon)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-w)^n$$

Para esto necesitamos un Lema. Sea r tal que

$$|w| < r < R$$

LEMA 2: Para todos los enteros $n \geq j \geq 1$ y para todos los z tales que $|z-w| \leq r-|w|$, entonces:

$$|z^n - \sum_{k=0}^{j} \frac{n!}{k!(n-k)!} w^{n-k}(z-w)^k| \leq \left(\frac{|z-w|}{r-|w|}\right)^{j+1} r^n$$

DEMOSTRACION DEL LEMA 2: Sea $z = z-w+w$, entonces de la fórmula del binomio

$$z^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} w^{n-k}(z-w)^k$$

$$|z^n - \sum_{k=0}^{j} \frac{n!}{k!(n-k)!} w^{n-k}(z-w)^k| = \left|\sum_{k=j+1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} w^{n-k}(z-w)^k\right|$$

$$\leq \sum_{k=j+1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} |w|^{n-k}|z-w|^k$$

Si $k \geq j+1$ $|z-w|^k = |z-w|^{j+1}|z-w|^{k-j-1} \leq |z-w|^{j+1}(r-|w|)^{k-j-1}$

por lo tanto

$$|z-w|^k \leq \frac{|z-w|^{j+1}}{(r-|w|)^{j+1}}(r-|w|)^k$$

$$\sum_{k=j+1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}|w|^{n-k}|z-w|^k \leq \frac{|z-w|^{j+1}}{(r-|w|)^{j+1}} \sum_{k=j+1}^{n}|w|^{n-k}(r-|w|)^k \leq$$

$$\leq \frac{|z-w|^{j+1}}{(r-|w|)^{j+1}} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}|w|^{n-k}(r-|w|)^k =$$

$$= \frac{|z-w|^{j+1}}{(r-|w|)^{j+1}} r^n,$$

lo cual demuestra el Lema 2.

Continuemos ahora con la demostración de la Proposición 5:

Sea $\rho = \frac{r+R}{2}$, como $\rho < R$ resulta de la parte (a) del Corolario del Teorema 1, Capítulo 1, que existe una constante $A \geq 0$ tal que:

$$|a_n| \leq \frac{A}{\rho^n}, \text{ para todos los } n \geq 0.$$

Para todo $k \geq n$ la serie $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} a_n w^{n-k}$ converge (por lo mencionado despues del enunciado de la Proposición 5)

Entonces sea b_k la suma de esa serie, y sea j un entero > 0.

Vamos a evaluar $|f(z) - \sum_{k=0}^{j} b_k (z-w)^k|$, para z tal que

$$|z-w| < r-|w|$$

Como $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ vamos a tomar un entero $N \geq j$ y evaluar:

$$d_N = |\sum_{n=0}^{N} a_n z^n - \sum_{k=0}^{j} (\sum_{n=k}^{N} \frac{a_n n!}{k!(n-k)!} w^{n-k})(z-w)^k|$$

$$d_N = |\sum_{n=0}^{N} a_n [z^n - \sum_{k=0}^{j} \frac{n!}{k!(n-k)!} w^{n-k}(z-w)^k]| \quad (n \geq j)$$

(Observemos aquí que términos que tienen el factorial de un número negativo, por no estar definidos quedarán excluidos de la última expresión)

Por el lema 2:

$$|z^n - \sum_{k=0}^{j} \frac{n!}{k!(n-k)!} w^{n-k}(z-w)^k| \leq \frac{|z-w|^{j+1}}{(r-|w|)^{j+1}} r^n$$

Si $|z-w| < r-|w|$, de aquí resulta que:

$$d_N \leq \sum_{n=0}^{N} |a_n| \frac{|z-w|^{j+1}}{(r-|w|)^{j+1}} r^n$$

pero $\sum_{n=0}^{N} |a_n| r^n \leq \sum_{n=0}^{N} A(\frac{r}{p})^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} A (\frac{r}{p})^n = S$

(puesto que $\frac{r}{p} < 1$ esa serie converge).

Finalmente:

$$d_N \leq \frac{|z-w|^{j+1}}{(r-|w|)^{j+1}} S$$

Cuando $N \to \infty$, $d_N \to |f(z) - \sum_{k=0}^{j} b_k (z-w)^k|$ entonces para todo z tal que $|z-w| < r-|w|$

$$|f(z) - \sum_{k=0}^{j} b_k (z-w)^k| \leq S \frac{|z-w|^{j+1}}{(r-|w|)^{j+1}}$$

Esto demuestra que para todo $z \in \mathcal{D}(w, r-|w|)$

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-w)^k \text{ converge.}$$

y su suma es $f(z)$. (ya que $S(\frac{|z-w|}{r-|w|})^{j+1} \to 0$, cuando $j \to \infty$, entonces $|f(z) - \sum_{k=0}^{j} b_k(z-w)^k| \to 0$, cuando $j \to \infty$, y por lo tanto - - $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-w)^k$)

SECCION 4: Un Lema Técnico.

En el próximo párrafo vamos a enunciar un Lema Técnico que será utilizado en los próximos capítulos.

LEMA 3: Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es una serie convergente en un disco $D(0,r)$, entonces existe una constante C tal que:

$$|\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n| \leq C\,|z|^j$$

para todo $z \in \overline{D(0,\frac{r}{2})}$, y j es cualquier entero tal que $a_n = 0$ si $n < j$.

DEMOSTRACION: Como $D(0,\frac{3}{4}r) \subset D(0,r)$, entonces por la parte (a) del corolario del Teorema 1 del Capítulo 1, existe una -- constante $A \geq 0$ tal que:

$$|a_n| \leq \frac{A.4^n}{3^n r^n}, \text{ para toda } n..$$

De allí resulta que:

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right| = \left|\sum_{n=j}^{\infty} a_n z^n\right| \leq \text{(ya que } a_n = 0 \text{ si } n < j\text{)}$$

$$\leq \sum_{n=j}^{\infty} |a_n||z|^n \leq \sum_{n=j}^{\infty} \frac{A.4^n}{3^n.r^n}|z|^n = \frac{A.4^j|z|^j}{3^j r^j} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{3^n.r^n}|z|^n \leq$$

$$\leq \frac{A.4^j|z|^j}{3^j r^j} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n.r^n}{3^n.r^n.2^n} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n\right] \frac{A.4^j}{3^j r^j}|z|^j$$

Para todo $z \in \overline{\mathcal{D}(0,\frac{r}{2})}$, entonces $C = \frac{A.4^j}{3^j r^j} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$, lo cual demuestra el Lema.

SECCION 5: Ejemplos concretos de funciones holomorfas.

(a) La función $\frac{1}{z} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $z \to \frac{1}{z}$ $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}-\{0\}$:

Sea $w \in \mathbb{C}^*$, y para todo $z \in \mathcal{D}(w,|w|)$

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-w)^n}{w^{n+1}}$$

(b) La función $\frac{1}{z-a} : \mathbb{C} - \{a\} \to \mathbb{C}$, $z \to \frac{1}{z-a}$: resulta de (a) arriba y de la proposición 4(a);

Veremos mas tarde que todo polinomio P puede ser repre-- sentado como un producto:

$$a_0(Z-w_1)\ (Z-w_2).....(Z-w_k)$$

de la proposición 3

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{a_0} \cdot \frac{1}{Z-w_1}\ \frac{1}{Z-w_2}\ \cdots\cdots \frac{1}{Z-w_k}$$

y por lo arriba mencionado será holomorfo en

$$\Omega = \mathbb{C} - \{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$$

(c) La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge en todo $\mathbb{C}$ y de la proposi-- ción 5 su suma para cada $x \in \mathbb{C}$ es holomorfa, o sea la función que a cada punto x de $\mathbb{C}$ le asocia $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ es holomorfa, ésta función será estudiada en el Capítulo 5.

APENDICE 2

DEMOSTRACION REFERENTE A LA PROPOSICION 1:

Sea $L = \{a_0 + a_1 (Z-\omega) + \ldots + a_r (Z-\omega)^r \mid r \geq 0,\ a_0, a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{C}\}$

Demostrare que L es una subálgebra de $C(\mathbb{C})$:

(1) $L \subset C(\mathbb{C})$

Ya que la función $(Z-\omega)$ es continua, tenemos que:

$$a_0 + a_1 (Z-\omega) + \ldots + a_r (Z-\omega)^r \text{ es continua}$$

(2) Si P_1 y $P_2 \in L$, con

$$P_1 = a_0 + a_1 (Z-\omega) + \ldots + a_r (Z-\omega)^r$$

$$P_2 = b_0 + b_1 (Z-\omega) + \ldots + b_s (Z-\omega)^s$$

Supongamos $r \leq s$.

$$P_1 + P_2 = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)(Z-\omega) + \ldots + (a_r + b_r)(Z-\omega)^r + \ldots + b_s (Z-\omega)^s$$

el cual claramente es un elemento de L.

(3) $P_1 P_2$ con P_1 y P_2 definidos en (2) será igual a:

$$a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)(Z-\omega) + \ldots + (a_r b_s)(Z-\omega)^{r+s}$$

el cual también es un elemento de L.

(4) Si $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\lambda P_1 = \lambda a_0 + \lambda a_1 (Z-\omega) + \ldots\ldots + \lambda a_r (Z-\omega)^r \in L.$$

y por lo tanto L es una subálgebra de $C(\mathbb{C})$.

DEMOSTRACION DE LA PROPOSICION 4:

(a) Primero demostraremos que $\Omega - \{a\}$ es abierto:

Sea $x \in \Omega - \{a\}$, $x + a \in \Omega$ y como Ω es abierto, existe $\mathcal{D}(x+a,r) \subset \Omega$; hay que demostrar que $\mathcal{D}(x,r) \subset \Omega - \{a\}$.

Sea $z \in \mathcal{D}(x,r)$, entonces $|z-x| < r$, o sea $|z+a-(x+a)| < r$, lo cual quiere decir $z+a \in \mathcal{D}(x+a,r)$ y por lo tanto - - $z+a \in \Omega$ (ya que $\mathcal{D}(x+a,r) \subset \Omega$), lo cual quiere decir - que $z \in \Omega - \{a\}$ de donde $\mathcal{D}(x,r) \subset \Omega - \{a\}$, y por lo - tanto $\Omega - \{a\}$ es abierto .

Ahora demostraremos que $f_a : \Omega - \{a\} \to \mathbb{C}$ es holomorfa, siendo que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa:

Sea $\omega \in \Omega - \{a\}$, $\omega+a \in \Omega$; por ser f holomorfa existe $\mathcal{D}(\omega+a,r) \subset \Omega$, y una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ asociada a f en - $\omega+a$ convergente en $\mathcal{D}(0,r)$ y tal que para todo - - $z \in \mathcal{D}(\omega+a,r)$.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-(\omega+a))^n$$

Como $\mathcal{D}(\omega+a,r) \subset \Omega$, por lo arriba demostrado

$$\mathcal{D}(\omega,r) \subset \Omega - \{a\}$$

Ahora si $z \in \mathcal{D}(\omega,r)$, $z+a \in \mathcal{D}(\omega+a,r)$ y por lo tanto:

$$f(z+a) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (z+a-(\omega+a))^n,$$

o sea que para todo $z \in \mathcal{D}(\omega,r)$ $f_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (z-\omega)^n$ de lo cual concluimos que f_a es holomorfa en $\Omega - \{a\}$.

(b) Si $f: \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa y $\Omega' \subset \Omega$ entonces la restricción $f \mid \Omega': \Omega' \to \mathbb{C}$ es holomorfa.

Sea $\omega \in \Omega'$, como $\Omega' \subset \Omega$, $\omega \in \Omega$; como f es holomorfa en Ω existe $\mathcal{D}(\omega, r) \subset \Omega$ y una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ convergente en $\mathcal{D}(0,r)$ y tal que para todo $z \in \mathcal{D}(\omega,r)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (z-\omega)^n$$

Como Ω, es abierto existe r', tal que $\mathcal{D}(\omega,r') \subset \Omega'$.

Sea $R = \min \{r, r'\}$ tendremos $\mathcal{D}(\omega, R) \subset \mathcal{D}(\omega, r)$ y $\mathcal{D}(\omega,R) \subset \Omega'$; y por lo tanto para toda $z \in \mathcal{D}(\omega, R)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (z-\omega)^n$$

de lo cual concluimos que

$$f \mid \Omega' \text{ es holomorfa.}$$

(c) Por demostrar que f es holomorfa

Primero Ω es abierto pues es unión de abiertos.

Sea $\omega \in \Omega$, entonces $\omega \in \Omega_\alpha$ para alguna α por (1).

Por (2) existe $\mathcal{D}(\omega, r) \subset \Omega_\alpha \subset \Omega$ y una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ convergente en $\mathcal{D}(0,r)$ y tal que para todo $z \in \mathcal{D}(\omega,r)$

$$f \mid \Omega_\alpha (z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\omega)^n$$

entonces $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\omega)^n$, para toda $z \in \mathcal{D}(\omega,r)$, y por lo tanto f es holomorfa en Ω.

CAPITULO 3

PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LAS FUNCIONES HOLOMORFAS

SECCION 1: Ceros de las funciones holomorfas.

TEOREMA 1: Sea Ω un abierto conexo y $f:\Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa no idénticamente nula. El conjunto $z(f)$ de los ceros de f es un conjunto aislado en Ω (Definición 10-(b) Capítulo 0).

En particular $z(f)$ es numerable.

Finalmente si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ representa a f en un cero ω_0 existe un entero $q \geq 1$ tal que $a_n = 0$ si $n < q$; y $a_q \neq 0$.

COROLARIO 1: Sea $a \in \mathbb{C}$ tal que f no sea idénticamente igual al complejo a. El conjunto:

$$z(f,a) = \{z \mid z \in \Omega, f(z) = a\} \text{ es aislado en } \Omega.$$

COLORARIO 2: Si Ω es conexo y si $f,g:\Omega \to \mathbb{C}$ son holomorfas y $f=g$ en un disco $\mathcal{D}(\omega,r)$, entonces:

$$f=g \text{ en } \Omega$$

OBSERVACION: Si Ω no es conexo el teorema es falso, ya que por ejemplo si $\Omega=\mathcal{D}(0,1) \cup \mathcal{D}(3,1)$ y sea $f:\Omega \to \mathbb{C}$ la función -- igual a 0 en $\mathcal{D}(0,1)$ e igual a 1 en $\mathcal{D}(3,1)$, entonces $z(f)$ no sería aislado.

Antes de demostrar el teorema vamos a enunciar y demostrar el siguiente lema:

LEMA 1: Si $\omega\in\Omega$ es un cero de f, entonces existe un disco abierto $\mathcal{D}(\omega,r) \subset\Omega$ tal que:

(1) El único cero de f en $\mathcal{D}(\omega,r)$ es ω, o bien

(2) Todos los puntos de $\mathcal{D}(\omega,r)$ son ceros de f.

DEMOSTRACION: Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ la serie de potencias que repre-- senta f en ω: existe un disco $\mathcal{D}(\omega,\rho)$ tal que la serie converge en $\mathcal{D}(0,\rho)$ y si $z\in \mathcal{D}(\omega,\rho)$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\omega)^n$$

$a_0= f(\omega)=0$ tenemos dos casos:

CASO (1): Existe un entero $q\geq 1$ tal que $a_n= 0$ para $n<q$ y $a_q\neq 0$. Para todo $z\in \mathcal{D}(\omega,\rho)$

$$f(z)= a_q(z-\omega)^q + \sum_{n=q+1}^{\infty} a_n(z-\omega)^n$$

Por el Lema técnico de la Sección 4 del Capítulo 2; existe una constante C tal que para todo $z\in \overline{\mathcal{D}(\omega,\frac{\rho}{2})}$

$$\left| \sum_{n=q+1}^{\infty} a_n(z-\omega)^n \right| \leq C \ |z-\omega|^{q+1}$$

Entonces para todo $z\in \overline{\mathcal{D}(\omega,\frac{\rho}{2})}$:

$$|f(z)| \geq |a_q(z-\omega)^q| - C|z-\omega|^{q+1}$$

Sea $r = \inf \left(\frac{\rho}{2}, \frac{|a_q|}{2C}\right)$, si $z \in \mathcal{D}(\omega,r)$

$|f(z) \geq \frac{|a_q|}{2} |z-\omega|^q$. Y por lo tanto ω es el único cero en $\mathcal{D}(\omega,r)$

CASO (2): $a_n = 0$ para todos los n. Entonces f es nula -- en $\mathcal{D}(\omega,\rho)$

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 1: En el Apéndice 3

DEMOSTRACION DEL COROLARIO 1: En el Apéndice 3

DEMOSTRACION DEL COROLARIO 2: En el Apéndice 3

SECCION 2: PRINCIPIOS DEL MAXIMO Y MINIMO

DEFINICION 1: Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y $\psi: \Omega \to \mathbb{R}$ una función que tiene como contra dominio a los reales. Un punto -- $\omega_o \in \Omega$ se llama punto máximo (respectivamente mínimo) local de ψ, si existe un disco abierto $\mathcal{D}(\omega_o,r) \subset \Omega$ tal que:

$$\psi(\omega_o) \geq \psi(\omega)$$

(respectivamente $\psi(\omega_o) \leq \psi(\omega)$)

para todo $\omega \in \mathcal{D}(\omega_o,r)$

OBSERVACION: Los puntos de máximo de $-\psi$ son los puntos de mínimo de ψ.

TEOREMA 2: Sea $f: \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa definida en

el abierto conexo Ω y no constante:

(a) La función $|f|:\Omega \to \mathbb{R}_+$, $z \to |f(z)|$ no tiene puntos de máximo local.

(b) Los puntos de mínimo local de $|f|$ son los ceros de f.

DEMOSTRACION: En el apéndice 3.

COROLARIO 1: Si Ω es un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y $f:\Omega\to\mathbb{C}$ una función holomorfa no constante, tal que:

$$\sup_{z\in\Omega} |f(z)| < +\infty \quad \text{(respectivamente } \inf_{z\in\Omega} |f(z)| > 0\text{)}.$$

Entonces para todo $\omega\in\Omega$:

$$|f(\omega)| < \sup_{z\in\Omega} |f(z)| \quad \text{(respectivamente } |f(\omega)| > \inf_{z\in\Omega} |f(z)|\text{)}$$

COROLARIO 2: Sea Ω un abierto conexo y acotado, y sea $\bar{\Omega}$ la cerradura de Ω. Sea $f,\bar{\Omega} \to \mathbb{C}$ una función continua no constante tal que la restricción $f|\Omega$ de f a Ω es holomorfa.

Si $\partial\Omega=\bar{\Omega} - \Omega$ es la frontera de Ω, entonces:

$$\sup_{z\in\Omega} |f(z)| = \sup_{z\in\bar{\Omega}} |f(z)| = \sup_{z\in\partial\Omega} |f(z)|$$

y si $\inf_{z\in\Omega} |f(z)| > 0$ entonces:

$$\inf_{z\in\Omega} |f(z)| = \inf_{z\in\bar{\Omega}} |f(z)| = \inf_{z\in\partial\Omega} |f(z)|$$

DEMOSTRACION DEL COROLARIO 1: En el apéndice 3.

DEMOSTRACION DEL COROLARIO 2: En el Apéndice 3

NOTA 1: El Teorema 2 no es cierto si no pedimos que Ω sea conexo; ya que si $\Omega = \mathcal{D}(0,1) \cup \mathcal{D}(3,1)$ y $f: \Omega \to \mathbb{C}$ la función definida como 1 sobre $\mathcal{D}(0,1)$ y como 2 sobre $\mathcal{D}(3,1)$, tenemos que f es holomorfa, no constante y sin embargo sí tendrá máximo y mínimo local.

NOTA 2: Los corolarios 1y 2 no serán ciertos si $\inf_{z\in\Omega} |f(z)| = 0$:

Sea $\mathcal{D}(0,1) = \Omega$ y $f: \bar{\Omega} = \overline{\mathcal{D}(0,1)} \to \mathbb{C}$ la función $f(z) = z$ para todo $z\in\bar{\Omega}$. En este caso $\inf_{z\in\Omega} |f(z)| = 0 = |f(0)|$ y el --

$$\inf_{z\in\partial\Omega} |f(z)| = \inf \{z \,||z| = 1\} = 1 > \inf_{z\in\Omega} |f(z)|$$

TEOREMA 3: Sea Ω un abierto conexo y $f: \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa no constante.

Si θ es un abierto de Ω, $f(\theta)$ es abierto.

OBSERVACION: Si Ω no es conexo, el teorema no es cierto, Contraejemplo: Sea $\Omega = \mathcal{D}(0,1) \cup \mathcal{D}(3,1)$ y $f: \Omega \to \mathbb{C}$ la función igual a 1 sobre $\mathcal{D}(0,1)$ y a 2 sobre $\mathcal{D}(3,1)$.

Antes de demostrar el Teorema vamos a enunciar un Lema.

LEMA 2: Con las hipótesis del Teorema 3 si $\omega\in\Omega$ y si -- $\mathcal{D}(\omega,r) \subset \Omega$, entonces $f(\mathcal{D}(\omega,r))$ contiene un disco de centro $f(\omega)$.

DEMOSTRACION DEL LEMA 2: En el Apéndice 3.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 3: En el Apéndice 3.

SECCION 4: ALGUNAS APLICACIONES DE LOS ULTIMOS TEOREMAS.

PROPOSICION 1: Si Ω es un abierto conexo $\mathcal{H}(\Omega)$ no tiene divisores de cero. En otros términos si $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ y si $fg=0$ esto nos implica que $f=0$ ó $g=0$ o las dos nulas.

DEMOSTRACION: Supongamos que f no es nula. Existe una $\omega \in \Omega$ tal que $f(\omega) \neq 0$. Como f es continua, existe un disco $\mathcal{D}(\omega, r) \subset \Omega$ tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathcal{D}(\omega, r)$. Como $f(z)g(z)=0$ entonces $g(z)=0$ para todo $z \in \mathcal{D}(\omega, r)$. Por el corolario 2 del Teorema 1 g es nula en Ω.

PROPOSICION 2: (Teorema de Liouville).

Sea $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa y acotada, entonces f es constante.

DEMOSTRACION: En el Apéndice 3.

PROPOSICION 3: (Teorema fundamental del álgebra).

Si P es un polinomio de grado $n \geq 1$ con coeficientes en $\mathbb{C}$; y si a_n es el coeficiente de Z^n en la representación de P como suma de potencias de la función Z^n (ver Capítulo 2 Proposición 1), existen n números complejos:

$$z_1, z_2, \ldots\ldots, z_n$$

no necesariamente distintos, tales que:

$$P = a_o (Z - z_1)\ (Z - z_2) \ldots\ldots (Z - z_n)$$

Recordemos que por la definición 0 del Capítulo 2 $Z; \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

es la función: $Z(a) = a$. Para todo $a \in \mathbb{C}$.

Antes de demostrar la proposición, vamos a demostrar un - Lema.

LEMA 3: Todo polinomio de grado ≥ 1, tiene por lo menos un cero.

DEMOSTRACION DEL LEMA 3: Por reducción al absurdo.

Sea P un polinomio de grado ≥ 1 sin ceros

$$P = a_o + a_1 Z + \ldots\ldots + a_n Z^n \quad \text{con} \quad a_n \neq 0$$

Sea $M = \text{Sup} \ (|a_o|, |a_1|, \ldots\ldots, |a_{n-1}|)$.

Para todo $z \in \mathbb{C}$:

$$|P(z)| = |a_o + a_1 z + \ldots\ldots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n| =$$

$$= |a_n z^n - (-a_o - a_1 z - \ldots\ldots - a_{n-1} z^{n-1})| \geq$$

$$\geq |a_n||z|^n - |-(a_o + a_1 z + \ldots\ldots + a_{n-1} z^{n-1})| =$$

$$= |a_n||z|^n - |a_o + a_1 z + \ldots\ldots + a_{n-1} z^{n-1}| \geq$$

$$\geq |a_n||z|^n - (|a_o| + |a_1||z| + \ldots\ldots + |a_{n-1}||z|^{n-1}) \geq$$

$$\geq |a_n||z|^n - M\,(1 + |z| + \ldots\ldots + |z|^{n-1})$$

por lo tanto:

$$|P(z)| \geq |a_n||z|^n - M\,(1 + |z| + \ldots + |z|^{n-1})$$

Si $|z| \geq 1$, $|z|^j \leq |z|^{n-1}$ para todo $0 \leq j \leq n-1$ y entonces:

$$|P(z)| \geq |a_n|\,|z|^n - n\,M\,|z|^{n-1}$$

Sea ahora un punto $\omega \in \mathbb{C}$ y $R > |\omega| + 1$

Aplicaremos el Corolario 2 del Teorema 2 al abierto -- $\Omega = \mathcal{D}(0,R)$ y a la restricción de P a $\bar{\Omega} = \overline{\mathcal{D}(0,R)}$. Como P es continua y $\bar{\Omega}$ es compacto, existe un $z_o \in \overline{\mathcal{D}(0,R)}$ tal que:

$$\inf_{z\in\bar{\Omega}} |P(z)| = |P(z_o)|$$

Como P no tiene ceros

$$\inf_{z\in\bar{\Omega}} |P(z)| > 0$$

Y por el Corolario 2 del Teorema 2

$$|P(\omega)| \geq \inf_{z\in\bar{\Omega}} |P(z)| = \inf_{z\in\Omega} |P(z)|$$

$$\partial\Omega = S(0,R) = \{z \,|\, |z| = R\}$$

Si $z \in S(0,R)$ como $R > 1 + |\omega| \geq 1$ $(R = |z| \geq 1)$

TENEMOS: $|P(z)| \geq |a_n|\,|z|^n - n\,M\,|z|^{n-1} = R^{n-1}\,(|a_n|R - nM)$

Entonces si $R > \dfrac{2n\,M}{|a_n|}$

$$|P(z)| \geq R^{n-1} \left(|a_n| R - n M\right) \geq R^{n-1} \left(|a_n| R - R \frac{|a_n|}{2}\right)$$

y por lo tanto

$$|P(z)| \geq \frac{|a_n|}{2} R^n$$

entonces $\inf_{z \in \partial\Omega} |P(z)| \geq \frac{|a_n|}{2} R^n$

Resulta de allí que para todo R tal que $R > 1+|\omega|$ y $R > \frac{2n M}{|a_n|}$

$$|P(\omega)| \geq \inf_{z \in \Omega} |P(z)| = \inf_{z \in \partial\Omega} |P(z)| \geq \frac{|a_n| R^n}{2}$$

ó sea $|P(\omega)| \geq \frac{|a_n| R^n}{2}$

entonces $|P(\omega)| \geq \sup \left\{ \frac{|a_n|}{2} R^n \;\middle|\; R > 1+|\omega|, \frac{2n M}{|a_n|} \right\} = +\infty$

esto es un absurdo; y por lo tanto P tiene por lo menos un cero.

DEMOSTRACION DE LA PROPOSICION 3: Sea $P(z)$ un polinomio de grado $n \geq 1$

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_o, \text{ con } a_n \neq o$$

$$P(z) = a_n \left(z^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} z^{n-1} + \ldots + \frac{a_2}{a_n} z^2 + \frac{a_1}{a_n} z + \frac{a_o}{a_n}\right) = a_n P_1(z)$$

Ahora $P_1(z)$ es un polinomio de grado $n \geq 1$, entonces

por el Lema, $P_1(z)$ tiene al menos un cero; sea z_1 ése cero de $P_1(z)$.

Por el algoritmo de la división

$$P_1(z) = (z-z_1)\ P_2(z) + R_1(z), \text{ grado } R_1(z) < \text{grado } (z-z_1)$$

como $P_1(z_1) = R_1(z_1)$ y $P_1(z_1) = 0 \quad R_1(z_1) = 0$

y por lo tanto:

$$P_1(z) = (z-z_1)\ P_2(z)$$

Continuando el proceso de la misma manera, sea $P_2(z)$ ahora un polinomio de grado $n-1$, entonces por el Lema tiene por lo menos un cero; (si $P_2(z)$ es de grado cero ya terminamos) sea z_2 dicho cero y tendremos:

$$P_2(z) = (z-z_2)\ P_3(z)$$

Continuando el proceso obtendremos:

$$P(z) = a_n(z-z_1)\ (z-z_2)\ \ldots\ldots\ (z-z_n)$$

OBSERVACION: El Teorema 3 puede servir para demostrar que ciertas funciones no son holomorfas .

EJEMPLOS: Resulta inmediatamente del Teorema 3 que si una función holomorfa tiene solamente valores reales, esa función es constante. Y por lo tanto las funciones $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$; $z \to R_e(z)$, $z \to \mathrm{Im}(z)$ no pueden ser holomorfas.

En general toda función $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de la forma $z=(x+iy) \to P(x,y)$

donde $P(x,y)$ es un polinomio de 2 variables x,y con coeficientes reales (ejemplos: x^2+y^2, x^3-y^2, $x^5+3x^2y + y^6$) no es holomorfa; esto demuestra que no se deben confundir funciones polinomiales tratadas en la difinición 1 del Capítulo 2 con los polinomios de dos variables reales.

APENDICE 3

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 1: Sea Ω_1 el conjunto de los $\omega\in\Omega$ tales que existe un disco $\mathcal{D}(\omega,r) \subset \Omega$ donde f no tiene ceros o tiene un único cero en ω. Claramente Ω_1 es abierto; ya que si $z\in\Omega_1$ entonces existe un disco $\mathcal{D}(z,\rho) \subset \Omega$ donde; -

(i) si f no tiene ceros en ese disco; como los discos - son abiertos, para cada z^1 en ese disco existe un disco contenido en Ω donde todos los puntos no son ceros de f y, por lo tanto, cada z^1 es un punto de Ω_1 o sea $\mathcal{D}(z,\rho) \subset \Omega_1$ y por lo tanto z es un punto interior de Ω_1.

(ii) si f tiene un único cero en z con $\mathcal{D}(z,\rho) \subset \Omega$, - entonces también $\mathcal{D}(z,\rho) \subset \Omega_1$ pues para cada punto $z'\in \mathcal{D}(z,\rho)$ existe una vecindad contenida en Ω, donde si $z'\neq z$, esa ve-- cindad no contiene ceros de f, y si $z'=z$ dicha vecindad contiene como único cero a z;z es punto interior de Ω_1 por lo tanto Ω_1 es abierto.

Sea $\Omega_2 = \Omega-\Omega_1$; si $\omega\in\Omega_2$, ω es cero de f pues si no - lo fuera existiría un disco $\mathcal{D}(\omega,r) \subset \Omega$ donde f no tendría - ceros, (ya que dada cualquier vecindad de ω, si ésta tuviera ceros, podríamos construir una sucesión de ceros que tendería a ω y como f es continua, entonces $f(\omega)$ tambien tendría que ser cero), y entonces $\omega\in\Omega_1$. Utilizando los resultados del Lema 1, para ω sucede el caso (2) del Lema 1, y por lo tanto -- existe un disco $\mathcal{D}(\omega,r) \subset \Omega$ donde f es nula. Todos los puntos de $\mathcal{D}(\omega,r)$ pertenecen al caso (2) del Lema 1, y en conse-- cuencia $\mathcal{D}(\omega,r) \subset \Omega_1\ \Omega_2$ es abierto.

Como $\Omega = \Omega_1\cup\Omega_2$ y $\Omega_1\cap\Omega_2 = \phi$ y como por hipótesis Ω

es conexo, $\Omega = \Omega_1$ ó $\Omega = \Omega_2$.

En el caso $\Omega = \Omega_1$, todos los ceros de f son aislados y como un punto de acumulación de ceros de f es un cero de f, el conjunto de los ceros de f es aislado en Ω. Si $\Omega = \Omega_2$ f sería nula en Ω contrariamente a la hipótesis.

$z(f)$ es numerable, ya que dado cualquier punto ω de $z(f)$ existe una vecindad donde el único punto de $z(f)$ es ω. Entonces para todo $\omega \in z(f)$, podemos encontrar un punto de coordenadas racionales que se encuentre en la vecindad donde sólo ω es un elemento de $z(f)$, y de éste modo hacer una correspondencia biunívoca entre los puntos de $z(f)$ y un subconjunto de el conjunto de elementos con coordenadas racionales, el cual es numerable y por lo tanto $z(f)$ es numerable. Y finalmente por el caso (1) del Lema 1 queda aclarado que si $\sum_{n=o}^{\infty} a_n x^n$ representa f en un cero ω_o, existe un $q \geq 1$ tal que $a_n = 0$ si $n < q$ y $a_q \neq 0$.

DEMOSTRACION DEL COROLARIO 1: Basta notar que $z(f,a)$ es el conjunto de ceros de la función $f-a$.

DEMOSTRACION DEL COROLARIO 2: Como $f=g$ en $\mathcal{D}(\omega,r)$, por la demostración del Teorema 1, en este caso considerando que $f-g$ es holomorfa y Ω conexo como $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ y $\Omega = \Omega_1$ ó $\Omega = \Omega_2$ y $\Omega_2 \neq \phi$, se tiene que $\Omega = \Omega_2$ y por lo tanto $f-g=0$ en todo Ω ó sea $f=g$ en Ω.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 2: Sea $\omega \in \Omega$ un punto que no sea cero de f. Y sea $\sum_{n=o}^{\infty} a_n x^n$ la serie que representa f en ω.

Existe un disco $\mathcal{D}(\omega,r) \subset \Omega$ tal que la serie converge en $\mathcal{D}(o,r)$ y si $z \in \mathcal{D}(\omega,r)$

$$f(z) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n \ (z-\omega)^n$$

Como $a_o = f(\omega), a_o \neq 0$ (pues ω no es cero), existe un entero $j \geq 1$ tal que $a_n = 0$ si $1 \leq n < j$ y $a_j \neq 0$; pues de lo contrario $a_n = 0$ para todos los $n \geq 1$ y tendríamos f idénticamente igual a $f(\omega_o)$ en $\mathcal{D}(\omega, r)$, ó sea $\mathcal{D}(\omega, r) \subset Z\ (f, f(\omega_o))$ lo cual contradice el Corolario 1 del Teorema 1.

Por el lema técnico de la Sección 4 del Capítulo 2 existe una constante C tal que si $z \in \overline{\mathcal{D}(\omega, \frac{r}{2})}$

$$\left| \sum_{n=j+1}^{\infty} a_n \ (z-\omega)^n \right| \leq C \left| z-\omega \right|^{j+1}$$

Como $f(z) = a_o + a_j \ (z-\omega)^j + \sum_{n=j+1}^{\infty} a_n \ (z-\omega)^n$

resulta que si $z \in \overline{\mathcal{D}(\omega, \frac{r}{2})}$

$$|a_o + a_j \ (z-\omega)^j| - C \ | z-\omega \ |^{j+1} \leq | \ f(z) \ |$$

y $| \ f(z) \ | \leq | \ a_o + a_j \ (z-\omega)^j \ | + C \ |z-\omega|^{j+1}$

Por el teorema 1 de la Sección 5 del Capítulo 0, existen números λ, μ tales que:

$$\lambda^j = \frac{a_o}{a_j} \quad y \quad \mu^j = -\frac{a_o}{a_j}$$

Sean $z_1(t) = \omega + t\lambda$ y $z_2(t) = \omega + t\mu$, $t \in R$ cuando

$$| \ t \ | < \frac{r}{2|\lambda|}, \frac{r}{2|\mu|} \qquad z_1(t), \ z_2(t) \in \overline{\mathcal{D}(\omega, \frac{r}{2})}$$

y $z_1(t), \ z_2(t) \to \omega$, cuando $t \to 0$,

Finalmente si $0 < t < \frac{r}{2|\lambda|}, \frac{r}{2|\mu|}$

$$|f(z_1(t))| \geq |a_o + a_j (z_1(t)-\omega)^j| - C|z_1(t)-\omega|^{j+1}$$

$$= |a_o| (1+t^j) - |\lambda|^{j+1} C t^{j+1}$$

$$|f(z_2(t))| \leq |a_o + a_j (z_2(t)-\omega)^j| + C|z_2(t)-\omega|^{j+1}$$

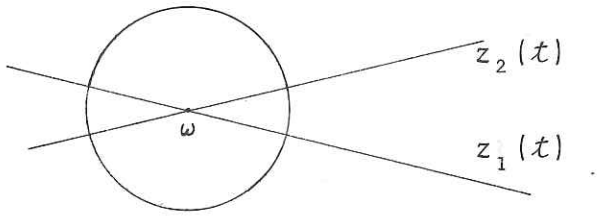
$$= |a_o| (1-t^j) + C|\mu|^{j+1} t^{j+1}$$

Resulta de allí que si

$$0 < t < \frac{r}{2|\lambda|}, \frac{r}{2|\mu|}, \frac{|a_o|}{2C|\lambda|^{j+1}}, \frac{|a_o|}{2C|\mu|^{j+1}}$$

$$|f(z_1(t))| \geq |a_o| (1+\frac{t^j}{2})$$

$$|f(z_2(t))| \leq |a_o| (1-\frac{t^j}{2})$$



Como $a_o = f(\omega)$, y por lo que representan $z_1(t)$ y $z_2(t)$ (ver fig.), las dos desigualdades implican que ω no puede ser punto máximo ó mínimo local.

Por otra parte si ω es un cero de f entonces $f(\omega)=0$, y dado cualquier disco $\mathcal{D}(\omega,r)$ se cumple que para todo $z \in \mathcal{D}(\omega,r)$

$$|f(z)| \geq |f(\omega)| = 0$$

Por lo tanto ω es un mínimo local, y ω no puede ser máximo local pues de serlo f valdría cero en una vecindad de ω y por el corolario 2 del teorema 1 f valdría cero en Ω ó sea f sería constante contrariamente a la hipótesis.

DEMOSTRACION DEL COROLARIO 1 DEL TEOREMA 2: Por el Teorema 2 sabemos que la función $|f|: \Omega \to \mathbb{R}_+$ no tiene máximo local.

Sabemos por definición de supremo que:

$$\sup_{z\in\Omega}|f(z)| \geq |f(\omega)|, \text{ con } \omega\in\Omega$$

Llamemos $M = \sup_{z\in\Omega}|f(z)| < +\infty$

No puede pasar que $M = |f(\omega)|$, $\omega\in\Omega$, ya que como Ω es abierto, existe $\mathcal{D}(\omega,r) \subset\Omega$ y en este disco se cumpliría que:

$|f(\omega)| \geq |f(z)|$ lo cual significa que ω es máximo local contrariamente al Teorema 2 por lo tanto:

$$|f(\omega)| < \sup_{z\in\Omega}|f(z)|$$

Por otro lado sabemos:

$$\inf_{z\in\Omega}|f(z)| \leq |f(\omega)|$$

Como $\inf_{z\in\Omega}|f(z)| > o$ entonces no puede pasar que para una $\omega\in\Omega$ $|f(\omega)| = \inf_{z\in\Omega}|f(z)|$ pues ω no sería un cero de f y sí sería un minimo local lo que es contrario al Teorema 2.

DEMOSTRACION DEL COROLARIO 2 DEL TEOREMA 2:

$\bar{\Omega}$ es acotado (ya que Ω lo es) y cerrado, en consecuencia $\bar{\Omega}$ es compacto (Proposición 8 del Capítulo 0) y como f es con-

tinua, $\sup_{z\in\bar{\Omega}}|f(z)| < +\infty$ y existe una $\omega\in\bar{\Omega}$ tal que:

$$|f(\omega)| = \sup_{z\in\bar{\Omega}}|f(z)|$$ (Corolario de la Proposición 11 del Capítulo 0).

Como $\Omega\subset\bar{\Omega}$, $\sup_{z\in\Omega}|f(z)| \leq \sup_{z\in\bar{\Omega}}|f(z)|$

Del Corolario 1 resulta entonces $\omega\notin\Omega$, o sea $\omega\in\partial\Omega$. Como $\partial\Omega\subset\bar{\Omega}$

$$\sup_{z\in\partial\Omega}|f(z)| \leq \sup_{z\in\bar{\Omega}}|f(z)|$$

Mas $\sup_{z\in\partial\Omega}|f(z)| \geq |f(\omega)| = \sup_{z\in\bar{\Omega}}|f(z)|$. De allí resulta que

$$\sup_{z\in\partial\Omega}|f(z)| = \sup_{z\in\bar{\Omega}}|f(z)|$$

Finalmente como $\omega\in\partial\Omega$ existe una sucesión $\{\omega_n \mid n\geq 1\}$ contenida en Ω convergente a ω,

$$|f(\omega_n)| < \sup_{z\in\Omega}|f(z)|, \quad \text{para todos los } n.$$

Como $|f|$ es continua

$$|f(\omega)| = \lim_{n\to\infty}|f(\omega_n)| \leq \sup_{z\in\Omega}|f\ z\ |$$

Como ya sabemos que

$$\sup_{z\in\Omega}|f(z)| \leq \sup_{z\in\bar{\Omega}}|f(z)| = |f(\omega)|$$

se tiene

$$\sup_{z\in\Omega}|\mathcal{G}(z)| = \sup_{z\in\bar{\Omega}}|\mathcal{G}(z)|$$

Demostraremos ahora que si $\inf_{z\in\Omega}|\mathcal{G}(z)| > 0$

$$\inf_{z\in\Omega}|\mathcal{G}(z)| = \inf_{z\in\bar{\Omega}}|\mathcal{G}(z)| = \inf_{z\in\partial\Omega}|\mathcal{G}(z)|$$

Por el Corolario de la Proposición 11 del Capítulo 0, por - ser $\bar{\Omega}$ compacto y $\mathcal{G}$ contínua existe $\omega_o\in\bar{\Omega}$, tal que:

$$|\mathcal{G}(\omega_o)| = \inf_{z\in\bar{\Omega}}|\mathcal{G}(z)|$$

Como $\Omega\subset\bar{\Omega}$ tenemos que

$$\inf_{z\in\bar{\Omega}}|\mathcal{G}(z)| \leqslant \inf_{z\in\Omega}|\mathcal{G}(z)|$$

Como $\inf_{z\in\Omega}|\mathcal{G}(z)| > 0$, del Corolario 1, $\omega_o\notin\Omega$, entonces -- $\omega_o\in\partial\Omega$. Además $\partial\Omega\subset\bar{\Omega}$, entonces

$$\inf_{z\in\bar{\Omega}}|\mathcal{G}(z)| \leqslant \inf_{z\in\partial\Omega}|\mathcal{G}(z)|$$

Pero $\inf_{z\in\partial\Omega}|\mathcal{G}(z)| \leqslant |\mathcal{G}(\omega_o)| = \inf_{z\in\bar{\Omega}}|\mathcal{G}(z)|$;

de allí resulta que

$$\inf_{z\in\partial\Omega}|\mathcal{G}(z)| = \inf_{z\in\bar{\Omega}}|\mathcal{G}(z)|$$

Finalmente como $\omega_o \in \partial\Omega$ existe una sucesión $\{\omega_n \mid n \geq 1\}$ contenida en Ω y convergente a ω_o y tal que:

$$\inf_{z\in\Omega} |f(z)| \leq |f(\omega_n)| \quad \text{para todos los } n,$$

y por ser $|f|$ continua tenemos que:

$$|f(\omega_o)| = \lim_{n\to\infty} |f(\omega_n)| \geq \inf_{z\in\Omega} |f(z)|$$

Con esto y por lo que ya teníamos $(|f(\omega_o)| = \inf_{z\in\bar{\Omega}} |f(z)| \leq \inf_{z\in\Omega} |f(z)|)$

concluimos $\inf_{z\in\Omega} |f(z)| = \inf_{z\in\bar{\Omega}} |f(z)|$

lo cual demuestra el corolario.

DEMOSTRACION DEL LEMA 2: Sea $\omega\in\Omega$ y sea $\mathcal{D}(\omega,\rho)$ un disco de centro en ω. Por el corolario 1 del teorema 1 como $f(z)$ no es constante, dado $f(\omega)\in\mathbb{C}$ existe un disco (que se puede considerar cerrado) $\overline{\mathcal{D}(\omega,r)}$, $r > 0$ contenido en $\mathcal{D}(\omega,\rho)$ y tal que el único $z \in \overline{\mathcal{D}(\omega,r)}$ tal que $f(z) = f(\omega)$ sea $z=\omega$ (ya que $Z(f,f(\omega))$ es aislado en $\mathcal{D}(\omega,\rho)$ y como $\omega \in Z(f,f(\omega))$ entonces existe tal disco).

Resulta de allí que $f(\omega) \notin f(s(\omega,r))$ (donde $S(\omega,r)=\{z \mid |z-\omega|=r\}$)

Como $S(\omega,r)$ es compacto y la función:

$$S(\omega,r)\to\mathbb{R}_+, \quad z\to |f(z) - f(\omega)|$$

es continua y no toma el valor cero, por el corolario de la proposición 11 del Capítulo 0,

$$\inf \{|f(z) - f(\omega)| \ | z \in S(\omega,r)\} > 0$$

(este ínfimo es la mínima distancia de $f(\omega)$ a $f(S(\omega,r))$).

Si $f(\overline{\mathcal{D}(\omega,r)})$ no contiene un disco abierto de centro $f(\omega)$ existe un $a \in \mathbb{C} - f(\overline{\mathcal{D}(\omega,r)})$ tal que $|a - f(\omega)| < \frac{1}{3} \inf \{|f(z) - f(\omega)| \ | z \in S(\omega,r)\}$

Sea ahora $g: \overline{\mathcal{D}(\omega,r)} \to \mathbb{C}$ la función definida $z \to f(z) - a$ la cual es continua en $\overline{\mathcal{D}(\omega,r)}$ y holomorfa sobre $\mathcal{D}(\omega,r)$. Además g no toma el valor de cero porque $a \notin f(\overline{\mathcal{D}(\omega,r)})$. Del Corolario de la Proposición 11 del Capítulo 0 resulta que:

$$\inf \{|g(z)| \ | z \in \overline{\mathcal{D}(\omega,r)}\} > 0$$

Del Corolario 2 del Teorema 2 resulta que:

$$\inf \{|g(z)| \ | z \in \overline{\mathcal{D}(\omega,r)}\} = \inf \{|g(z)| \ | z \in S(\omega,r)\}$$

Como $\omega \in \overline{\mathcal{D}(\omega,r)}$

$$|f(\omega) - a| = |g(\omega)| > \inf \{|g(z)| \ | z \in S(\omega,r)\}$$

Pero si $z \in S(\omega,r)$, tendremos

$$|g(z)| = |f(z) - a| \geqslant |f(z) - f(\omega)| - |f(\omega) - a|$$

$$\geqslant \inf\{|f(z) - f(\omega)| z \in S(\omega,r)\} - |f(\omega) - a|$$

entonces:

$$\inf \{|g(z)| \ | z \in S(\omega,r)\} \geqslant \inf \{|f(z) - f(\omega)| \ | z \in S(\omega,r)\} - |f(\omega) - a|$$

de allí:

$$|f(\omega)-a| \geq \inf \{|f(z)-f(\omega)| \,|\, z\in S(\omega,r)\} - |f(\omega)-a|$$

o sea $2|f(\omega)-a| \geq \inf \{|f(z)-f(\omega)| \,|\, z\in S(\omega,r)\}$

Sin embargo escogimos a $\underline{a}$ de tal manera que:

$$|f(\omega)-a| < \tfrac{1}{3} \inf \{|f(z)-f(\omega)| \,|\, z\in S(\omega,r)\}$$

lo que es una contradicción. Y con esto queda demostrado el Lema.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 3: Sea τ un punto de $f(\theta)$ Existe un $\omega\in\theta$ tal que $\tau=f(\omega)$ y ya que θ es abierto existe un disco $\mathcal{D}(\omega,r)$ contenido en θ. Por el lema 2 $f(\mathcal{D}(\omega,r))$ contiene un disco abierto $\mathcal{D}(\tau,\varepsilon)$ de centro $\tau= f(\omega)$. Como -- $f(\mathcal{D}(\omega,r)) \subset f(\theta)$ y $\mathcal{D}(\tau,\varepsilon) \subset f(\mathcal{D}(\omega,r))$ vemos que:

$$\mathcal{D}(\tau,\varepsilon) \subset f(\theta)$$

Y por lo tanto $f(\theta)$ es abierto.

DEMOSTRACION DE LA PROPOSICION 2: Sea M una constante tal que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Sea $\sum_{n=o}^{\infty} a_n x^n$ la serie de potencias que representa f en $\underline{0}$. Sea $g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la fun-- ción definida como sigue:

$$g(z)= \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(0)}{z}, & \text{si } z\neq 0 \\ a_1 \qquad\qquad , & \text{si } z=0 \end{cases}$$

En $\mathbb{C}^*= \mathbb{C} - \{0\}$ las funciones $f - f(0)$ y $\frac{1}{z}$ son ho-

lomorfas, y por lo tanto g es holomorfa en $\mathbb{C}^*$.

En un disco abierto $\mathcal{D}(o,r)$:

$$f(z) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n z^n, \quad \text{para todo} \quad z \in \mathcal{D}(o,r).$$

Entonces si $z \in \mathcal{D}(o,r)$:

$$g(z) = \sum_{n=o}^{\infty} a_{n+1} z^n \quad \text{y por lo tanto } g \text{ es}$$

holomorfa en o también.

Sea ω un punto cualquiera en $\mathbb{C}$ y sea $R > |\omega|$, por el corolario 2 del Teorema 2 aplicado a $\Omega = \mathcal{D}(o,R)$ y a la restricción de g a $\overline{\mathcal{D}(o,R)}$.

$$|g(\omega)| \leq \text{Sup } \{|g(z)| \mid z \in \overline{\mathcal{D}(o,R)}\} = \text{Sup } \{|g(z)| \mid |z| = R\}$$

Pero como $|z| = R$, tendremos

$$|g(z)| = \frac{|f(z) - f(o)|}{|z|} \leq \frac{2M}{R}$$

Resulta de allí que:

$$|g(\omega)| \leq \frac{2M}{R}, \quad \text{para todo} \quad R > |\omega|$$

$$|g(\omega)| \leq \inf \{ \frac{2M}{R} \mid R > |\omega| \} = o.$$

Entonces $g(\omega) = o$; lo cual implica que:

$$f(z) = f(o) \quad \text{para todo} \quad z \in \mathbb{C}, \quad \text{o sea } f \quad \text{es constante.}$$

CAPITULO 4

DIFERENCIABILIDAD - TRANSFORMACIONES CONFORMES

SECCION 0: Formas $\mathbb{R}$ - lineales y $\mathbb{C}$ - lineales.

DEFINICION 0:

(a) Una función $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es llamada $\mathbb{C}$ - lineal si:

(1) Para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $f(z_1+z_2) = f(z_1)+f(z_2)$.

(2) Para todo $z \in \mathbb{C}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, $f(\lambda z) = \lambda f(z)$.

(b) Una función $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es llamada $\mathbb{R}$ - lineal si:

(1) Para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $f(z_1+z_2) = f(z_1)+f(z_2)$.

(2) Para todo $z \in \mathbb{C}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda z) = \lambda f(z)$.

OBSERVACIONES: Se ve que la diferencia entre $\mathbb{C}$ - lineales y - $\mathbb{R}$ - lineales esta en la propiedad 2. Se ve también que toda - función $\mathbb{C}$ - lineal es también $\mathbb{R}$ - lineal.

PROPOSICION 1:

(a) Una función $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es $\mathbb{C}$ - lineal si y solamente si existe un número complejo a tal que $f(z) = a\,z$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

$a = f(1)$ está unívocamente determiando por la función f.

(b) Una función $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es $\mathbb{R}$ - lineal si y solamente si existen dos números a y $b \in \mathbb{C}$, tal que $f(z) = a\,z + b\,\bar{z}$, para - todo $z \in \mathbb{C}$, donde $\bar{z}$ es el complejo conjugado de z (si $z=x+iy$, - $\bar{z}=x-iy$), y $\underline{a}$ y $\underline{b}$ quedan unívocamente determinados por la función f:

$$a = \frac{f(1) - i f(i)}{2} \qquad b = \frac{f(1) + i f(i)}{2}$$

(c) La correspondencia $h \to \vec{h}$ entre funciones de variable compleja y las aplicaciones reales asociadas (Ver Nota (e) Sección 4 Capítulo 0) realiza una correspondencia biunívoca entre las funciones $\mathbb{R}$ - lineales y las transformaciones lineales de - $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

DEMOSTRACION: En el Apéndice 4.

SECCION 1: Funciones $\mathbb{R}$ - diferenciables y $\mathbb{C}$ - diferenciables

DEFINICION 1:

(a) Sea $f: \Omega \to \mathbb{C}$ una función definida en un abierto Ω, f es llamada $\mathbb{R}$ - *diferenciable* en un punto $\omega \in \Omega$ si existe una - función $\mathbb{R}$ - lineal $h: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y tal que:

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \neq 0}} \frac{f(\omega+z) - f(\omega) - h(z)}{z} = 0$$

En otros términos: Si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta(\varepsilon) > o$ tal que $\mathcal{D}(\omega, \delta(\varepsilon)) \subset \Omega$ y tal que si $z \in \mathcal{D}(0, \delta(\varepsilon))$

$$| f(\omega+z) - f(\omega) - h(z) | < \varepsilon |z|$$

(b) Sea $f: \Omega \to \mathbb{C}$ una función definida en un abierto Ω, f es llamada $\mathbb{C}$ - diferenciable en un punto $\omega \in \Omega$ si existe una - función $h: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$ - lineal tal que:

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \neq 0}} \frac{f(\omega+z) - f(\omega) - h(z)}{z} = 0$$

En otros términos: Si para toda $\varepsilon > 0$ existe una $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que $\mathcal{D}(\omega, \delta(\varepsilon)) \subset \Omega$ y tal que si $z \in \mathcal{D}(0, \delta(\varepsilon))$

$$| f(\omega+z) - f(\omega) - h(z) | < \varepsilon |z|$$

NOTA: Es claro que toda función $\mathbb{C}$ - diferenciable es $\mathbb{R}$ - diferenciable.

En la siguiente definición vamos a recordar una noción clásica:

DEFINICION 2: Sea $f: \Omega \to \mathbb{C}$ una función, y sea $\omega \in \Omega$. Se llama derivada parcial de f respecto de x en ω al límite:

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t \text{ real}}} \frac{f(\omega+t)-f(\omega)}{t}$$

cuando éste existe. Esta derivada parcial se denota $\frac{\partial f}{\partial x}(\omega)$.

Se llama derivada parcial de f respecto de y en ω al limite

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t \text{ real}}} \frac{f(\omega+it)-f(\omega)}{t}$$

cuando éste existe. Y a ésta otra derivada parcial se denota $\frac{\partial f}{\partial y}(\omega)$.

PROPOSICION 2: Si $f: \Omega \to \mathbb{C}$ es $\mathbb{R}$ - diferenciable ó $\mathbb{C}$ - diferenciable en $\omega \in \Omega$ entonces:

(a) La función $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ - lineal de la definición 1 es única

(b) f es continua en ω.

(c) Las derivadas de f respecto x y y en ω existen

(d) Si f es $\mathbb{R}$ - diferenciable $h(z)=\frac{\partial f}{\partial z}(\omega)z+\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\omega)\bar{z}$. f es $\mathbb{C}$ diferenciable si y solamente si f es $\mathbb{R}$ - diferenciable $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\omega)=0$, y $\frac{\partial f}{\partial z}(\omega)z=h(z)$

donde:

$$\frac{\partial f}{\partial z}(\omega) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\omega) - i \frac{\partial f}{\partial y}(\omega) \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\omega) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\omega) + i \frac{\partial f}{\partial y}(\omega) \right)$$

DEMOSTRACION: En el Apéndice 4.

NOTACIONES:

(a) En el caso $\mathbb{R}$ - diferenciable la diferencial $\underline{h}$ en ω se denota df_ω y se llama diferencial de f en ω.

(b) En el caso $\mathbb{C}$ - diferenciable, $\frac{\partial f}{\partial z}(\omega)$ se denota $\frac{df}{dz}(\omega)$ y se llama derivada de f en ω.

(c) El operador diferencial $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ se llama operador de Cauchy - Riemann u operador ∂ - barra. - Este operador es muy importante en el estudio de las funciones de Variable Compleja.

OBSERVACION IMPORTANTE: Dada una función $f: \Omega \to \mathbb{C}$ definida sobre un abierto Ω, el hecho de que $\underline{f}$ sea $\mathbb{R}$ - diferenciable en un punto $\omega = u + iv$ es equivalente a que la aplicación $\vec{f}: \Omega \to \mathbb{R}^2$ asociada a f (Ver Capítulo 0, Sección 4, Nota (e)) sea diferenciable en (u, v) y la diferencial de $\vec{f}$ en (u, v) (por definición una aplicación lineal $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$) sea la aplicación $\vec{h}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ asociada a la función $\mathbb{R}$ - lineal $\underline{h}$, diferencial de f en ω

SECCION 2: Funciones $\mathbb{C}$ - diferenciables y funciones holomorfas.

En el siguiente párrafo demostraremos el teorema fundamental.

TEOREMA 1: Una función $f: \Omega \to \mathbb{C}$ definida en un abierto Ω es

holomorfa si y solamente si f es $\mathbb{C}$ - diferenciable en todos los puntos de Ω.

COROLARIO: *(Condiciones de Cauchy - Riemann).*

Una función $f: \Omega \to \mathbb{C}$ definida en el abierto Ω es holomorfa si y solamente si f es $\mathbb{R}$ - diferenciable en todos los puntos de Ω y $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ en Ω.

DEMOSTRACION DEL COROLARIO:

CONDICION NECESARIA:

Supongamos f es holomorfa en Ω entonces por el Teorema 1 la función f es $\mathbb{C}$ - diferenciable en todo punto $\omega \in \Omega$ y por lo tanto $\mathbb{R}$ - diferenciable en Ω; además por la proposición 2 -*(d)* se tiene que $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ para todo $\omega \in \Omega$ por ser f $\mathbb{C}$ - diferenciable.

CONDICION SUFICIENTE:

Si f es $\mathbb{R}$ - diferenciable en $\omega \in \Omega$ entonces por la Proposición 2 - *(d)*:

$$h(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(\omega) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\omega)\bar{z}, \quad \text{para todo } \omega \in \Omega \text{ como}$$

$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\omega) = 0$ para todo $\omega \in \Omega$, tenemos que

$$h(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(\omega)\, z \quad \text{y de nuevo por la proposición}$$

2 - *(d)* f es $\mathbb{C}$ - diferenciable en todo punto $\omega \in \Omega$.

La demostración del Teorema 1 es larga y va a resultar de algunos lemas.

DEFINICIONES Y NOTACIONES AUXILIARES:

(a) Sea G el conjunto de todos los rectángulos cerrados - del plano.

(b) Si Q es un rectángulo $[a,b] \times [c,d]$ (Ver Capítulo 0 - definición 4 (b)). El perímetro de Q, Per (Q) es - $2(b-a) + 2(d-c)$

(c) Si Ω es una abierto del plano, $G(\Omega)$ designará el conjunto de todos los rectángulos cerrados de Q, tales - que la frontera de Q esté en Ω.

(d) DEFINICION: Sea I: $C(\Omega) \times G(\Omega) \to \mathbb{C}$ la aplicación definida de la manera siguiente:

Si $f \in C(\Omega)$ y $Q \in G(\Omega)$, con $Q = [a,b] \times [c,d]$

$$I(f,Q) = \int_a^b [f(x+ic) - f(x+id)]\,dx + i \int_c^d [f(b+iy) - f(a+iy)]\,dy$$

Estas integrales tienen sentido puesto que f es continua - en Ω y consecuentemente las funciones:

$$[a,b] \to \mathbb{C} \qquad (x \longrightarrow f(x+ic) - f(x+id))$$

$$[c,d] \to \mathbb{C} \qquad (y \longrightarrow f(b+iy) - f(a+iy))$$

son continuas.

De las propiedades clásicas de la integral resulta que:

(1) I es lineal respecto de f.

(2) Si $M = Sup\{|f(z)| \mid z \in \partial Q$ (*frontera de* Q)$\}$, en-

tonces $| I(f, Q) | \leq M \, Per\,(Q)$

(e) Si Q es el rectángulo $[a,b] \times [c,d]$, entonces se llama partición de Q al conjunto de rectángulos

$$\{ Q(k,j) \mid 1 \leq k \leq p+1, \; 1 \leq j \leq q+1 \}$$

asociado a Q de la manera siguiente: sean

$$a_0 = a < a_1 < a_2 < \ldots < a_p < b = a_{p+1}$$

$$c_0 = c < c_1 < c_2 < \ldots < c_q < d = c_{q+1}$$

dos particiones de $[a,b]$ y $[c,d]$ respectivamente, entonces $Q(k,j) = [a_{k-1}, a_k] \times [c_{j-1}, c_j]$

Si $p = q = 1$ y si $a_1 = \frac{a+b}{2}$, $c_1 = \frac{c+d}{2}$, la partición se llama canónica.

LEMA 1: Si $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una función de la forma $Az + B$ (con A y B constantes) y $Q = [a,b] \times [c,d]$ tendremos que

$$I(f, Q) = 0$$

DEMOSTRACION: En el Apéndice 4.

LEMA 2: Si $f \in C(\Omega)$, Q es un rectángulo cerrado contenido en Ω y además

$$\{ Q(k,j) \mid 1 \leq k \leq p+1, \; 1 \leq j \leq q+1 \}$$

es una partición de Q, entonces

$$I\ (f,Q) = \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{j=1}^{q+1} I\ (f, Q\ (k,j))$$

DEMOSTRACION: En el Apéndice 4

LEMA 3: Si $f \in C\ (\Omega)$, si Q es un rectángulo cerrado contenido en Ω y si $I\ (f,Q) \neq 0$ entonces existe una sucesión $\{Qn \mid n \geq 0\}$ de rectángulos cerrados tales que:

(1) $Q_0 = Q$, $Q_n \supset Q_{n+1}$, para todos los n.

(2) $\text{Per}\ (Q_n) = \frac{1}{2^n}\ \text{Per}\ (Q)$

(3) $|\ I\ (f,Q_n)\ | \geq \frac{1}{4^n}\ |\ I\ (f,Q)\ |$.

DEMOSTRACION: En el Apéndice 4.

LEMA 4: Si $f: \Omega \to \mathbb{C}$ es $\mathbb{C}$ - diferenciable en todos los puntos de Ω y si Q es un rectángulo cerrado contenido en Ω, $I\ (f,Q) = 0$.

DEMOSTRACION: En el Apéndice 4.

LEMA 5: Sea $f: \Omega \to \mathbb{C}$ continua y $\mathbb{C}$ - diferenciable en todos los puntos de Ω con excepción del punto $\omega \in \Omega$. Entonces para todo rectángulo cerrado Q contenido en Ω, $I\ (f,Q) = 0$.

DEMOSTRACION: En el Apéndice 4.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 1:
CONDICION SUFICIENTE:

Sea f: $\Omega \to \mathbb{C}$, $\mathbb{C}$ - diferenciable en todos los puntos de - Ω. Vamos a demostrar que si un rectángulo cerrado Q está contenido en Ω, y si ω está en el interior de Q:

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi i} I\left(\frac{f}{z-\omega}, Q\right), \text{ en donde } \pi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$$

Sea $g: \Omega \to \mathbb{C}$ la función:

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(\omega)}{z-\omega} & si\ z \neq \omega \\ \dfrac{df}{dz}(\omega) & si\ z = \omega \end{cases}$$

Es fácil ver que g es continua y $\mathbb{C}$ - diferenciable en $\Omega - \{\omega\}$ (Basta verificar que la función $\mathbb{C} - \{\omega\} \to \mathbb{C}$, $z \to \frac{1}{z-\omega}$ es $\mathbb{C}$ - diferenciable).

Del lema 5 resulta que:

$$I(g, Q) = 0.$$

Sobre la frontera de Q:

$$g(z) = \frac{f(z)}{z-\omega} - \frac{f(\omega)}{z-\omega}, \text{ entonces}$$

$$I\left(\frac{f(\omega)}{z-\omega}, Q\right) = I\left(\frac{f}{z-\omega}, Q\right)$$

y además $I\left(\frac{f(\omega)}{z-\omega}, Q\right) = f(\omega)\, I\left(\frac{1}{z-\omega}, Q\right)$ ---- (1) vamos a evaluar $I\left(\frac{1}{z-\omega}, Q\right)$.

LEMA 6: $I\left(\frac{1}{z-\omega}, Q\right) = 2\pi i$, donde $\pi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$, si ω está en el interior de Q.

DEMOSTRACION: En el Apéndice 4.

Por el lema 6, $I\left(\frac{1}{z-\omega}, Q\right) = 2\pi i$ si ω está en el interior

de Ω.

Sea ahora ω_0 un punto cualquiera de Ω y Q un rectángulo - cerrado de centro ω_0 contenido en Ω

$$Q = [u_0 - r,\ u_0 + r] \quad x \quad [v_0 - r,\ v_0 + r]$$

$(\omega_0 = u_0 + iv_0)$.

Para todo punto ω en el interior de Q

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi i} I\left[\frac{f}{z-\omega},\ Q\right] \text{ (por (1) y lema 6).}$$

Para todo entero N:

$$\frac{1}{z-\omega} = \sum_{n=0}^{N} \frac{(\omega-\omega_0)^n}{(z-\omega_0)^{n+1}} + r_N(z)$$

donde $$r_N(z) = \frac{(\omega-\omega_0)^{N+1}}{(z-\omega_0)^{N+1}(z-\omega)}$$

Resulta de allí:

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi i} I\left(\frac{f}{z-\omega},\ Q\right) = \frac{1}{2\pi i} I\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{(\omega-\omega_0)^n f}{(z-\omega_0)^{n+1}} + r_N(z), Q\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{N} (\omega-\omega_0)^n I\left(\frac{f}{(z-\omega_0)^{n+1}}, Q\right) + \frac{1}{2\pi i} I(r_N(z), Q)$$

Sea $$a_n = \frac{1}{2\pi i} I\left(\frac{f}{(z-\omega_0)^{n+1}},\ Q\right),\ n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Si $\omega \in D\left(\omega_0, \frac{r}{2}\right)$ y $z \in \partial Q$

$$\left| \frac{\omega-\omega_0}{z-\omega_0} \right| \leq \frac{r}{2} \cdot \frac{1}{r} = \frac{1}{2} \quad y \quad |z-\omega| \geq \frac{r}{2}$$

Entonces:

$$\text{Sup} \{ |r_N(z)| \mid z \in \partial Q \} \leq \frac{1}{2^{N+1}} \cdot \frac{2}{r} = \frac{1}{r 2^N}$$

si $\omega \in \mathcal{D}(\omega_0, \frac{r}{2})$

De allí:

$$|f(\omega) - \sum_{n=0}^{N} a_n (\omega-\omega_0)^n| = \left| \frac{1}{2\pi i} I(r_N, Q) \right| \leq$$

$$\leq \frac{Per(Q)}{r \cdot 2^N \cdot 2\pi}$$

Por la propiedad (2) de I.

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi^n$ converge en el disco $\mathcal{D}(0, \frac{r}{2})$ y para todo $\omega \in \mathcal{D}(\omega_0, \frac{r}{2})$

$$f(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\omega-\omega_0)^n$$

Como ω_0 es arbitrario en Ω, f es holomorfa.

Hemos demostrado la condición suficiente del Teorema 1.

CONDICION NECESARIA:

Sea ahora $f: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa y sea $\omega \in \Omega$. Como f es holo-

morfa en ω, sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi^n$ la serie de potencias que representa f en ω y sea $\mathcal{D}(\omega, r) \subset \Omega$ el disco donde para toda $z \in \mathcal{D}(\omega, r)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\omega)^n$$

$$f(z) - f(\omega) - a_1 (z-\omega) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z-\omega)^n$$

Por el lema técnico de la Sección 4 del Capítulo 2 existe una constante C tal que si $z \in \mathcal{D}(\omega, \frac{r}{2})$

$$\left| \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z-\omega)^n \right| \leq C |z-\omega|^2$$

Resulta de allí que:

$$|f(z) - f(\omega) - a_1 (z-\omega)| \leq C |z-\omega|^2$$

Para todo $z \in \mathcal{D}(\omega, \frac{r}{2})$, entonces f es $\mathbb{C}$ - diferenciable en ω y $\frac{df}{dz}(\omega) = a_1$.

El Teorema 1 tiene muchos consecuencias importantes que enunciamos a continuación:

PROPOSICION 3:

(a) Si $f: \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa, $\frac{df}{dz} : \Omega \to \mathbb{C}$ es también holomorfa. Si $\omega \in \Omega$ y si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi^n$ es la serie de potencia que representa f en ω, la serie de potencias que representa $\frac{df}{dz}$ en ω es la serie derivada $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} \chi^n$.

(b) La aplicación $\frac{d}{dz}$: $\mathcal{H}(\Omega) \to \mathcal{H}(\Omega)$ es lineal; y si $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$:

$$\frac{d}{dz}(fg) = \frac{df}{dz}\, g + f\, \frac{dg}{dz}$$

Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y no toma el valor cero; $\frac{1}{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{1}{f^2} \cdot \frac{df}{dz}$

(c) Si Ω es conexo el núcleo de $\frac{d}{dz}$ es formado por las funciones constantes. En otros términos si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $\frac{df}{dz} = 0$ entonces f es constante en Ω.

(d) Si $f: \Omega \to \mathbb{C}$ y $g: \Omega' \to \mathbb{C}$ son dos funciones holomorfas tales que $f(\Omega) \subset \Omega'$, entonces la composición $h = g \circ f: \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa y $\frac{dh}{dz} = \left(\frac{dg}{dz} \circ f\right) \frac{df}{dz}$

(e) Si $f: \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa, si $\omega \in \Omega$ y si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi^n$ es la serie de potencias que representa f en ω entonces:

$$a_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dz^n}(\omega), \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

OBSERVACIONES:

(1) La parte (c) de la Proposición 3 es falsa si Ω no es conexo.

(2) En general $\frac{d}{dz}$ no es suprayectiva, o en otros términos hay funciones en $\mathcal{H}(\Omega)$ que no son derivadas de funciones de $\mathcal{H}(\Omega)$. Volveremos a éste problema en el Capítulo 6, en el problema de la existencia de primitivas.

DEMOSTRACION DE LA PROPOSICION 3:

(a) Sea $\omega_0 \in \Omega$ y sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi^n$ la serie de potencias que representa f en ω. Existe un disco $\mathcal{D}(\omega_0, r) \subset \Omega$ tal que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi^n$ converge en $\mathcal{D}(0, r)$, y si $z \in \mathcal{D}(\omega_0, r)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\omega_0)^n.$$

Si R es el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi^n$, $R > r$, y si $g: \mathcal{D}(\omega_0, R) \to \mathbb{C}$ es la función:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\omega_0)^n,$$

tendremos que f y g coinciden en $\mathcal{D}(\omega_0, r)$.

Sea ω un punto cualquiera de $\mathcal{D}(\omega_0, r)$.

De la proposición 5 del Capítulo 2 se tiene que g es holomorfa en ω, entonces sea $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \chi^n$ la serie que representa g en ω, y además también por dicha proposición:

$$b_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n (\omega-\omega_0)^{n-1}$$

y por el final de la demostración del Teorema 1

$$b_1 = \frac{dg}{dz}(\omega).$$

Como f y g conciden en $\mathcal{D}(\omega_0, r)$ y $\omega \in \mathcal{D}(\omega_0, r)$, f y g coinciden en un disco de centro ω, en consecuencia:

$$b_1 = \frac{df}{dz}(\omega)$$

Resulta de allí que para todo $\omega \in \mathcal{D}(\omega_0, r)$

$$\frac{df}{dz}(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1} (\omega-\omega_0)^n.$$

y como ω_0 era arbitario en Ω, $\frac{df}{dz}$ es holomorfa en Ω y además la serie que representa $\frac{df}{dz}$ en ω_0 es la serie - derivada de la serie que representa f en ω_0.

(b) Si $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $\omega \in \Omega$; Sean $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \chi^n$ las series que representan a f y a g en ω respectivamente. Por el final de la demostración del Teorema 1; tenemos que:

$$\frac{df}{dz}(\omega) = a_1 \quad y \quad \frac{dg}{dz}(\omega) = b_1 .$$

Ahora por la proposición 3 del Capítulo 2 $f+g \in \mathcal{H}(\Omega)$ y la serie que representa a $f+g$ en ω es $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)\chi^n$; y de nuevo por el final de la demostración del Teorema 1.

$$\frac{d(f+g)}{dz}(\omega) = a_1 + b_1$$

de lo cual concluimos $\frac{d(f+g)}{dz} = \frac{df}{dz} + \frac{dg}{dz}$.

Análogamente por la Proposición 3 del Capítulo 2, si - $\lambda \in \mathbb{C}$ entonces $\lambda f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y la serie que representa a λf en ω es $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n \chi^n$, y por el final de la demostración del Teorema 1

$$\frac{d(\lambda f)}{dz}(\omega) = \lambda a_1 ,$$

y por lo tanto $\frac{d(\lambda f)}{dz} = \lambda \frac{df}{dz}$.

Ahora por la misma proposición 3 del Capítulo 2, -- $f g \in \mathcal{H}(\Omega)$ y la serie que representa a $f g$ en ω es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \chi^n, \quad \text{donde} \quad C_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

y por lo tanto $\frac{d(fg)}{dz}(\omega) = C_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$ o sea $\frac{d(fg)}{dz}(\omega) = f(\omega)\frac{dg}{dz}(\omega) + g(\omega)\frac{df}{dz}(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega$.

Finalmente demostraremos que $\frac{1}{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$ ó lo equivalente a que $\frac{1}{f}$ sea $\mathbb{C}$ - diferenciable si f nunca toma el valor cero (Por lo mencionado anteriormente $\frac{df}{dz}(\omega) = a_1$).

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(\omega+z) - f(\omega) - a_1 z}{z} = 0, \text{ o lo mismo que}$$

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(\omega+z) - f(\omega)}{z} = a_1$$

entonces:

$$\lim_{z\to 0} \frac{\frac{1}{f(\omega+z)} - \frac{1}{f(\omega)} - \left(-\frac{a_1}{f^2(\omega)}\right)}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{f(\omega) - f(\omega+z)}{z f(\omega+z) f(\omega)} + \frac{a_1}{f^2(\omega)} =$$

$$= \lim_{z\to 0} -\frac{f(\omega+z) - f(\omega)}{z} \cdot \frac{1}{f(\omega+z) f(\omega)} + \frac{a_1}{f^2(\omega)} =$$

$$= -\frac{a_1}{f^2(\omega)} + \frac{a_1}{f^2(\omega)} = 0 \text{ , ésto por ser } f \text{ continua en } \omega;$$

De aquí concluimos que $\frac{1}{f}$ es $\mathbb{C}$ - diferenciable y por el Teorema 1 es holomorfa, y además:

$$\frac{d\left(\frac{1}{f}\right)}{dz}(\omega) = \frac{-a_1}{f^2(\omega)} = -\frac{1}{f^2(\omega)} \cdot \frac{df}{dz}$$

(c) Sea $f: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa y tal que $\frac{df}{dz} = 0$. Vamos a mostrar que f es localmente constante.

Sea $\omega \in \Omega$ y sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi^n$ la serie que representa f en ω. Existe un disco $\mathcal{D}(\omega, r) \subset \Omega$, tal que si $z \in \mathcal{D}(\omega, r)$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\omega)^n.$$

Ahora por la parte (a) la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} \chi^n$ representa $\frac{df}{dz}$ en ω, lo cual implica que existe un disco $\mathcal{D}(\omega,\varepsilon) \subset \Omega$, tal que para todo $z \in \mathcal{D}(\omega,\varepsilon)$

$$\frac{df}{dz}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1}\, (z-\omega)^n = 0$$

De la proposición 2 del Capítulo 2 $a_n = 0$ para todo $n \geq 1$. Entonces si $z \in \mathcal{D}(\omega, r)$

$$f(z) = a_0 = f(\omega)$$

Lo que quiere decir que f es localmente constante en Ω. Como Ω es conexo, tenemos que f es constante (Por el Corolario 2 del Teorema 1 del Capítulo 3).

(d) Sea $\omega \in \Omega$. Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta_1(\varepsilon)$, $\delta_2(\varepsilon) > 0$ tales que:

$$|f(z)-f(\omega)-a(z-\omega)| < \varepsilon |z-\omega|, \text{ si } z \in \mathcal{D}(\omega, \delta_1(\varepsilon))$$

y $|g(\sigma)-g(f(\omega))-b(\sigma-f(\omega))| < \varepsilon|\sigma-f(\omega)|$, si

$\sigma \in \mathcal{D}(f(\omega), \delta_2(\varepsilon))$, donde $a = \frac{df}{dz}(\omega)$ y $b = \frac{dg}{dz}(f(\omega))$

Como f es continua existe un $\delta_3(\varepsilon) > 0$ (para cada $\varepsilon > 0$) tal que

$$f(\mathcal{D}(\omega, \delta_3(\varepsilon))) \subset \mathcal{D}(f(\omega), \delta_2(\varepsilon))$$

entonces si $|z-\omega| < \delta_1(\varepsilon), \delta_3(\varepsilon)$

$$|f(z)-f(\omega)-a(z-\omega)| < \varepsilon |z-\omega|$$

$$|g(f(z))-g(f(\omega))-b(f(z)-f(\omega))| < \varepsilon\,|f(z)-f(\omega)|$$

Entonces:

$$|\,h(z)-h(\omega)-ab(z-\omega)\,| \leqslant$$

$$\leqslant |g(f(z))-g(f(\omega))-b(f(z)-f(\omega))|+|b(f(z)-f(\omega))-ab(z-\omega)| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon\,|\,f(z)-f(\omega)\,|+|\,b\,|\,\varepsilon\,|z-\omega|$$

Ahora como $|f(z)-f(\omega)-a(z-\omega)| < \varepsilon\,|z-\omega|$

$$|f(z)-f(\omega)|-|a||z-\omega| \leqslant |f(z)-f(\omega)-a(z-\omega)| < \varepsilon\,|z-\omega|,$$

o sea $|f(z)-f(\omega)| < (\varepsilon+|a|)|z-\omega|$ si $|z-\omega| < \delta_1(\varepsilon)$

y por lo tanto:

$$|h(z)-h(\omega)-ab(z-\omega)| \leqslant \varepsilon\,|f(z)-f(\omega)|+|b|\varepsilon|z-\omega| <$$

$$< \varepsilon\,(\varepsilon+|a|)|z-\omega|+|b|\varepsilon|z-\omega| =$$

$$= (\varepsilon^2+(|a|+|b|)\,\varepsilon)\,|z-\omega|$$

para todo z tal que $|z-\omega| < inf\{\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\}$.

Resulta de allí que h es $\mathbb{C}$ - diferenciable en Ω y por el Teorema 1 será holomorfa, y además:

$$\frac{dh}{dz}(\omega) = ab = \frac{dg}{dz}(f(\omega))\cdot\frac{df}{dz}(\omega) \text{ para todo } \omega\in\Omega$$

ó sea $\frac{dh}{dz} = (\frac{dg}{dz}\circ f)\,\frac{df}{dz}$

(e) Por la parte (a) sabemos que si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi^n$ es la serie que representa a ϕ en ω, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n \chi^{n-1}$ es la serie que representa a $\frac{d\phi}{dz}$ en ω.

Demostremos por inducción que en general la serie que representa a $\frac{d^k\phi}{dz^k}$ en ω es

$$\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1).....(n-k+1)\, a_n \chi^{n-k}$$

(i) Para $k = 1$ es cierto pues ya está demostrado en la parte (a).

(ii) Supongamos que la afirmación vale para k, o sea que la serie que representa a $\frac{d^k\phi}{dz^k}$ en ω es

$$\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1).....(n-k+1)\, a_n \chi^{n-k} \quad - - - \ (j)$$

y demostrémosla para $k + 1$.

De nuevo por la parte (a) y si se tiene (j) tendremos que la serie que representa a $\frac{d^{k+1}\phi}{dz^{k+1}}$ en ω será:

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} (n-k)\, n(n-1).....(n-k+1)\, a_n \chi^{n-k-1}$$

ó sea $\sum_{n=k+1}^{\infty} n(n-1).....(n-k)\, a_n \chi^{n-(k+1)}$

lo cual quiere decir que la afirmación es válida para todo entero positivo k.

Por ser holomorfa $\frac{d^k\phi}{dz^k}$ en ω existe $\mathcal{D}(\omega, r)$ tal que para todo $z \in \mathcal{D}(\omega, r)$:

$$\frac{d^k f}{dz^k}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1).....(n-k+1)\ a_n (z-\omega)^{n-k}$$

cuando $z = \omega$:

$$\frac{d^k f}{dz^k}(\omega) = k(k-1).....1\ a_k = k!\ a_k$$

ó sea $a_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k f}{dz^k}(\omega)$ para toda k.

SECCION 3: Transformaciones conformes.

DEFINICION 3: Una transformación lineal $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se llama similitud si élla preserva los ángulos. En términos más precisos, si denotamos por $\vec{z}_1 \cdot \vec{z}_2$ el producto escalar de dos vectores $\vec{z}_1$, $\vec{z}_2$ de $\mathbb{R}^2$, A es una similitud, si existe una constante $k \neq 0$, tal que:

$$A\vec{z}_1 \cdot A\vec{z}_2 = k\,(\vec{z}_1 \cdot \vec{z}_2) \quad \text{para todos los pares}$$

$(\vec{z}_1, \vec{z}_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$

DEFINICION 4: Una aplicación $T: \Omega \to \mathbb{R}^2$ de un abierto Ω de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ es llamada una transformación conforme si:

(1) T es diferenciable en todos los puntos $\vec{z} \in \Omega$ y su diferencial es invertible.

(2) En todo punto $\vec{z} \in \Omega$ la diferencial de T es una similitud.

En términos más geométricos, una transformación $T: \Omega \to \mathbb{R}^2$ es conforme si dadas dos curvas γ_1 y γ_2 en Ω que se cortan en un pun

to P, sus transformadas $T\gamma_1$ y $T\gamma_2$ bajo T; se cortan en $T(P)$ con el mismo ángulo con que se cortan γ_1 y γ_2 en P.

La proposición siguiente caracteriza a las transformaciones conformes.

PROPOSICION 4:

(a) Sea $f: \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa tal que $\frac{df}{dz}(\omega) \neq 0$, para todos los $\omega \in \Omega$. Entonces la aplicación $\vec{f}: \Omega \to \mathbb{R}^2$ asociada a f (ver Nota (e) de la Sección 4 del Capítulo 0) es una transformación conforme.

(b) Si $T: \Omega \to \mathbb{R}^2$ es una transformación conforme tal que en todo punto $\vec{\omega} \in \Omega$ el determinante de la diferencial de T en $\vec{\omega}$ es positivo (respectivamente negativo), la función de una variable compleja con valores complejos - $f: \Omega \to \mathbb{C}$ asociada a T (esto es $T = \vec{f}$) es una función - holomorfa, tal que $\frac{df}{dz}(\omega) \neq 0$ para todo $\omega \in \Omega$ (respectivamente la función $\bar{f}: \Omega \to \mathbb{C}$, $\bar{f}(z) = \overline{f(z)}$ = complejo conjugado de $f(z)$ es holomorfa y $\frac{d\bar{f}}{dz}(\omega) \neq 0$, para todo $\omega \in \Omega$).

La demostración de la Proposición 4 necesitará del siguiente Lema:

LEMA 7:

(a) Una transformación lineal $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una similitud si y solamente si la función compleja $h: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ asociada a T (ver Nota (e) de la Sección 4 del Capítulo 0), es $\mathbb{C}$ - lineal y ésta es de la forma $z \to a\,z$ ó $\mathbb{C}$ - antilineal y esto es de la forma $z \to a\,\bar{z}$.

(b) Si h es de la forma $z \to a\,z$ el determinante de T es > 0.
Si h es de la forma $z \to a\,\bar{z}$ el determinante de T es < 0.

DEMOSTRACION DEL LEMA 7:

(a) CONDICION NECESARIA.

Sean z_1, z_2 dos números complejos y $\vec{z}_1$, $\vec{z}_2$ sus vectores asociados en $\mathbb{R}^2$ respectivamente.

Entonces:

$$\vec{z}_1 \cdot \vec{z}_2 = Re\ (z_1 \bar{z}_2) = Re\ (\bar{z}_1 z_2)$$

Por ser T una similitud existe una constante $k \neq 0$ tal que:

$$T\vec{z}_1 \cdot T\vec{z}_2 = k(\vec{z}_1 \cdot \vec{z}_2), \text{ para todo } \vec{z}_1, \vec{z}_2 \in \mathbb{R}^2$$

Más aún $T\vec{z}_1 = \overrightarrow{h(z_1)}$ y $T(\vec{z}_2) = \overrightarrow{h(z_2)}$, por definición de h.

Entonces el que T sea similitud es equivalente a:

$$Re\ (h(z_1)\ \overline{h(z_2)}) = k\ Re\ (z_1 \bar{z}_2), \text{ para todo } z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Ahora h es $\mathbb{R}$ - lineal y por la proposición 1 (b) existen dos constantes a y b, tales que:

$$h(z) = az + b\bar{z}, \text{ para todo } z \in \mathbb{C},$$

entonces:

$$Re\,(h(z_1)\,\overline{h(z_2)}) = Re\,[(az_1+b\bar{z}_1)(\bar{a}\bar{z}_2+\bar{b}z_2)] =$$

$$= Re\,(a\bar{a}\,z_1\bar{z}_2+b\bar{b}\,\bar{z}_1 z_2+a\bar{b}\,z_1 z_2+b\bar{a}\,\bar{z}_1\bar{z}_2)$$

(y como $a\bar{a} = |a|^2$, $b\bar{b} = |b|^2$, $b\bar{a}\,\bar{z}_1\bar{z}_2 = \overline{(a\bar{b}\,z_1 z_2)}$ y $z_1\bar{z}_2 = \overline{(\bar{z}_1 z_2)}$)

se tiene:

$$Re\,(h(z_1)\,\overline{h(z_2)}) = Re\,(|a|^2 z_1\bar{z}_2+|b|^2\overline{(z_1\bar{z}_2)}+2\,Re\,(a\bar{b}\,z_1 z_2)) =$$

$$= (|a|^2+|b|^2)\,Re\,(z_1\bar{z}_2)+2\,Re\,(a\bar{b}\,z_1 z_2)$$

Entonces para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$(|a|^2+|b|^2)\,Re\,(z_1\bar{z}_2)+2\,Re\,(a\bar{b}\,z_1 z_2) = k\,Re\,(z_1\bar{z}_2)$$

Tomando $z_2 = iz_1$

$$Re\,(z_1\bar{z}_2) = Re\,(-i\,|z_1|^2) = 0$$

entonces:

$$2\,Re\,(ia\bar{b}\,z_1^2) = 0 \text{ para todo } z_1 \in \mathbb{C}.$$

Por el Teorema 1 del Capítulo 0, existe un número λ, tal que $\lambda^2 = (i\,a\,\bar{b}) = -i\bar{a}\,b$, tomando $z_1 = \lambda$:

$$0 = 2\,Re\,(ia\bar{b}\,\lambda^2) = 2\,Re\,(ia\bar{b}(-i)\,\bar{a}\,b) = 2\,|a|^2\,|b|^2$$

de aquí $a = 0$ ó $b = 0$.

Si $b = 0$, h es de la forma:

$z \to az$ ó sea es $\mathbb{C}$ - lineal, y para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$Re\,(h(z_1)\,\overline{h(z_2)}) = Re\,(az_1\,\overline{a}\,\overline{z_2}) = Re\,|a|^2(z_1\overline{z_2}) =$$

$$= |a|^2\,Re\,(z_1\,\overline{z}_2)\,.$$

Y si $a = 0$, h es de la forma:

$$z \to b\overline{z}\,,\ \text{ó sea } \mathbb{C}\text{ - Antilineal}$$

y para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$Re\,(h(z_1)\,\overline{h(z_2)}) = Re\,(b\overline{z}_1\,\overline{b}\,z_2) = Re\,(|b|^2\,\overline{z}_1 z_2) =$$

$$= |b|^2\,Re\,(z_1\,\bar{z}_2).$$

CONDICION SUFICIENTE:

Supongamos $h(z) = az$, y demostremos que la transformación T asociada a h es una similitud.

T es lineal (ya que h es $\mathbb{C}$ - lineal).

Y si $z = x+iy$ y $a = a_1+ia_2$ entonces:

$$T(\vec{z}) = (Re\,h(z),\ I\,m\,h(z)) = (Re\,(az),\ I\,m(az)) =$$

$$= (a_1x - a_2y,\ a_2x + a_1y)$$

Por lo tanto:

$$T(\vec{z}_1).\,T(\vec{z}_2) = (a_1x_1 - a_2y_1,\ a_2x_1 + a_1y_1).(a_1x_2 - a_2y_2, a_2x_2 + a_1y_2) =$$

$$= a_1^2 x_1 x_2 - a_1 a_2 x_1 y_2 - a_2 a_1 x_2 y_1 + a_2^2 y_1 y_2 + a_2^2 x_1 x_2 + a_2 a_1 x_1 y_2 + a_1 a_2 x_2 y_1 + a_1^2 y_1 y_2 =$$

$$= (a_1^2 + a_2^2)(x_1 x_2 + y_1 y_2) = k(x_1 x_2 + y_1 y_2) = k(\vec{z}_1 \cdot \vec{z}_2)$$

Como $a \neq 0$, $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$ y $k \neq 0$ y por lo tanto T es similitud.

Análogamente se demuestra en el caso $h(z) = b\bar{z}$.

(b) Si h es de la forma $z \to az$, $a = a_1 + ia_2$, $z = x + iy$

$$T(x,y) = (Re\, h(z), Im\, h(z)) = (a_1 x - a_2 y, a_1 y + a_2 x) =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}$$

y $|T| = a_1^2 + a_2^2 > 0$, ya que $a \neq 0$.

Si h es de la forma $z \to a\bar{z}$ entonces

$$T(x\ y) = (a_1 x + a_2 y,\ a_2 x - a_1 y) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

y $|T| = -a_1^2 - a_2^2 < 0$.

DEMOSTRACION DE LA PROPOSICION 4:

(a) Por la nota final de la Sección 1, f es $\mathbb{R}$ - diferenciable en ω, si y solamente si $\vec{f}$ es diferenciable en $\vec{\omega}$ y la diferencial de $\vec{f}$ en $\vec{\omega}$ es la aplicación $d\vec{f}_{\omega}$ asociada a la diferencial df_{ω} de f en ω.

Para ver que $\vec{f}$ es conforme comprobaremos las partes (1) y (2) de la definición 4.

1. Como f es holomorfa, por el Teorema 1 f es $\mathbb{C}$ - diferenciable y por lo tanto $\mathbb{R}$ - diferenciable. Entonces T es diferenciable en todos los puntos $\vec{z} \in \Omega$ y como $\frac{df}{dz}(\omega) \neq 0$, para toda $\omega \in \Omega$, entonces $\overrightarrow{df}_{\omega} \neq 0$ y por lo tanto es invertible.

2. Sabemos $df_{\omega} = \frac{\partial f}{\partial z}(\omega)\, z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\omega)\, \bar{z}$, pero como f es $\mathbb{C}$ - diferenciable $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\omega) = 0$ (por la proposición 2(d)) y $df_{\omega} = \frac{\partial f}{\partial z}(\omega)\, z = az$, y por el lema 7 $\overrightarrow{df}_{\omega}$ es una similitud.

De 1 y 2 se deduce que $\vec{f}$ es una transformación conforme.

(b) Si T es conforme para todo $\vec{z} \in \Omega$, entonces f es $\mathbb{R}$ - diferenciable en todo $z \in \Omega$.

Pero como la diferencial de $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una similitud tendremos por el lema 7 que: $h: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, es tal que

$$h(z) = az \quad \text{ó} \quad h(z) = a\bar{z}$$

Como f es $\mathbb{R}$ - diferenciable en $\omega \in \Omega$

$$h(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(\omega)\, z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\omega)\, \bar{z}$$

y $h(z) = az$ entonces $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ y por el corolario del Teorema 1 f es holomorfa.

Y como $\frac{df}{dz}(\omega) = a \neq 0$, entonces $\frac{df}{dz}(\omega) \neq 0$, para todo $\omega \in \Omega$.

Si $h(z) = a\bar{z}$, por ser f $\mathbb{R}$ - diferenciable, también - $\bar{f}$ lo es. Y si $h(z)$ es la diferencial de f, entonces $\bar{h}(z)$ es la diferencial de $\bar{f}$; Pero $\bar{h}(z) = \bar{a}\, z$ y entonces por el mismo razonamiento anterior $\bar{f}$ es holomorfa y $\frac{\overline{df}}{dz}(\omega) \neq 0$, para todo $\omega \in \Omega$.

SECCION 4: El Algebra $\mathcal{H}(\Omega)$ (ver Capítulo 2 Proposición 3).

La siguiente proposición es un complemento a la Proposición 3 del Capítulo 2.

PROPOSICION 5:

(a) Si Ω es un abierto conexo, $\mathcal{H}(\Omega)$ no tiene divisores de cero. En otros términos si f, $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $fg = 0$, entonces $f = 0$ ó $g = 0$.

(b) Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y si f no toma el valor cero, entonces - $\frac{1}{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$. En particular si $g \in \mathcal{H}(\Omega)$, $\frac{g}{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$.

DEMOSTRACION:

(a) Es símplemente la Proposición 1 del Capítulo 3.

(b) Ya se demostró en la proposición 3(c). Y por la proposición 3 del Capítulo 2, si $\frac{1}{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ - entonces $\frac{g}{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$.

APENDICE 4

DEMOSTRACION DE LA PROPOSICION 1 :

(a) CONDICION NECESARIA: Si δ es $\mathbb{C}$ - lineal, entonces por la condición (a) (2) de la definición 0:

$$\delta(z) = \delta(z\cdot 1) = z\,\delta(1) = z\cdot a,\quad a = \delta(1)$$

CONDICION SUFICIENTE: Si $\delta(z) = z\cdot a$; demostraremos - que δ es $\mathbb{C}$ - lineal; comprobemos las condiciones (a) - (1) y (a) (2) de la definición 0

(a) (1) $\delta(z_1+z_2) = a(z_1+z_2) = az_1+az_2 = \delta(z_1)+\delta(z_2)$

(a) (2) $\delta(\lambda z) = a(\lambda z) = \lambda(az) = \lambda\delta(z)$

(b) CONDICION NECESARIA: Si δ es $\mathbb{R}$ - lineal entonces por las condiciones (b) (1) y (b) (2) de la definición 0 - se tiene:

Si $z = x+iy$, $\delta(z) = \delta(x) + \delta(iy) = x\delta(1) + y\delta(i)$

como $x = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$, $y = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$

entonces:

$$\delta(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}\,\delta(1) + \frac{z-\bar{z}}{2i}\,\delta(i) = \frac{1}{2}\left[\delta(1) + \frac{\delta(i)}{i}\right] z + \frac{1}{2}\left[\delta(1) - \frac{\delta(i)}{i}\right]\bar{z} =$$

$$= az + b\bar{z}$$

donde $a = \dfrac{1}{2}\left[\delta(1) + \dfrac{\delta(i)}{i}\right]$, $b = \dfrac{1}{2}\left[\delta(1) - \dfrac{\delta(i)}{i}\right]$

lo mismo que: $a = \frac{f(1)-if(i)}{2}$, $b = \frac{f(1)+if(i)}{2}$.

CONDICION SUFICIENTE : Si $f(z) = az + b\bar{z}$ demostraremos que f es $\mathbb{R}$ - lineal; para ello comprobemos las condiciones (b) (1) y (b) (2) de la definición 0:

(b) (1) $f(z_1+z_2)=a(z_1+z_2)+b(\overline{z_1+z_2})=a(z_1+z_2)+b(\bar{z}_1+\bar{z}_2) =$

$= az_1+b\bar{z}_1+az_2+b\bar{z}_2 = f(z_1) + f(z_2)$

(b) (2) Si $\lambda \in \mathbb{R}$: $f(\lambda z) = a(\lambda z)+b(\overline{\lambda z}) = \lambda(az)+\lambda(b\bar{z}) =$

$= \lambda(az + b\bar{z}) = \lambda f(z)$.

(c) Sea h una función $\mathbb{R}$ - lineal $h: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, asociemos, mediante T, a h la transformación $\vec{h}$ con $\vec{h}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y definida:

$$\vec{h}(\vec{z}) = (Re\ h(z),\ Im\ h(z))$$

Esta transformación $\vec{h}$ es lineal ya que:

(1) $\vec{h}(\vec{z}_1+\vec{z}_2)=(Re\ h(z_1+z_2),\ Im\ h(z_1+z_2))=(Re(h(z_1)+h(z_2)),Im(h(z_1)+h(z_2)))$

$=(Re\ h(z_1),\ Im\ h(z_1))+(Re\ h(z_2),\ Im\ h(z_2)) =$

$= \vec{h}(\vec{z}_1) + \vec{h}(\vec{z}_2)$

(2) $\vec{h}(\lambda(\vec{z}_1)) = (Re\,h(\lambda z_1),\ Im\ h(\lambda z_1)) = (Re\ \lambda h(z_1),\ Im\ \lambda h(z_1)) =$

$= \lambda(Re\ h(z_1),\ Im\ h(z_1)) = \lambda\ \vec{h}(\vec{z}_1)$

Demostremos ahora que la correspondencia que bajo T -

manda h en $\vec{h}$ es biunivoca, para lo cual en la parte - (i) demostraremos que T es inyectiva y en la (ii) que es suprayectiva.

(i) Supongamos $T(h_1) = T(h_2)$
entonces $\vec{h}_1 = \vec{h}_2$
o sea $\vec{h}_1(\vec{z}) = \vec{h}_2(\vec{z})$ para todo $\vec{z} \in \mathbb{R}^2$

$(Re\ h_1(z),\ Im\ h_1(z)) = (Re\ h_2(z),\ Im\ h_2(z))$ para todo $z \in \mathbb{C}$

por lo tanto

$$Re\ h_1(z) = Re\ h_2(z)$$
$$Im\ h_1(z) = Im\ h_2(z) \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{C}$$

o sea $h_1(z) = h_2(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$

de lo cual concluimos $h_1 = h_2$

(ii) Sea $\vec{h}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal entonces si consideramos

$$\vec{h}(\vec{z}) = (u(x,y),\ v(x,y))$$

basta tomar $h(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ la cual será una función $\mathbb{R}$ - lineal y tal que:

$$\vec{h}(\vec{z}) = (Re\ h(z),\ Im\ h(z))$$

DEMOSTRACION DE LA PROPOSICION 2:

(a) Supongamos que existen dos funciones $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ - lineales -- $h_1, h_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tales que:

$$\lim_{\substack{z\to 0 \\ z\neq 0}} \frac{f(\omega+z)-f(\omega)-h_j(z)}{z} = 0 \qquad j = 1,2.$$

Entonces dado $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existe $\delta_1(\varepsilon) > 0$ tal que $\mathcal{D}(\omega, \delta_1(\varepsilon)) \subset \Omega$ y para todo $z \in \mathcal{D}(0, \delta_1(\varepsilon))$

$$|f(\omega+z) - f(\omega) - h_1(z)| < \frac{\varepsilon}{2}|z|$$

Y análogamente dado $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existe $\delta_2(\varepsilon) > 0$ tal que - $\mathcal{D}(\omega, \delta_2(\varepsilon)) \subset \Omega$ y para todo $z \in \mathcal{D}(0, \delta_2(\varepsilon))$

$$|f(\omega+z) - f(\omega) - h_2(z)| < \frac{\varepsilon}{2}|z|$$

Por lo tanto para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ - tal que:

$$|h_1(z)-h_2(z)| = |f(\omega+z)-f(\omega)-h_2(z)-(f(\omega+z)-f(\omega)-h_1(z))| \leq$$

$$\leq |f(\omega+z)-f(\omega)-h_2(z)| + |f(\omega+z)-f(\omega)-h_1(z)| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2}|z| + \frac{\varepsilon}{2}|z| = \varepsilon|z| \text{ , para todo } z \in \mathcal{D}(0,\delta).$$

Por lo tanto $\frac{h_1(z)-h_2(z)}{z} \to 0$ cuando $z \to 0$.

Vamos a demostrar que $h_1(x) = h_2(x)$, para todo $x \in \mathbb{C}^*$.

Fijemos a x; como $tx \to 0$ cuando $t \to 0$ con $t \in \mathbb{R}$ entonces por lo arriba demostrado:

$$0 = \lim_{tx\to 0} \frac{h_1(tx)-h_2(tx)}{tx} = \lim_{tx\to 0} \frac{t(h_1(x)-h_2(x))}{tx} =$$

$$= \frac{h_1(x)-h_2(x)}{x}$$

Como $x \neq 0$ entonces $h_1(x) = h_2(x)$ para todo $x \in \mathbb{C}^*$.

(b) De la defincion de diferenciabilidad tomamos $\varepsilon = 1$, y sea $\delta = \delta(1)$, entonces para z tal que $|z| < \delta$

$$|f(\omega+z)-f(\omega)| = |f(\omega+z)-f(\omega)+h(z)-h(z)| \leq$$

$$\leq |f(\omega+z)-f(\omega)-h(z)| + |h(z)| \leq$$

$$\leq |h(z)| + |z|$$

Como h es continua y $h(0) = 0$, (ya que $h(0) = h(0\cdot 1) = 0h(1) = 0$) entonces cuando $z \to 0$, $h(z) \to 0$ y por lo tanto

$$|h(z)| \to 0 \text{ y } |z| \to 0 \quad \text{cuando } z \to 0$$

lo cual quiere decir que f es continua en ω.

(c) y (d) De la definición de diferenciabilidad resulta que:

$$\lim_{\substack{t\to 0 \\ t\neq 0}} \frac{f(\omega+t)-f(\omega)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{h(t)}{t} + \lim_{t\to 0} \frac{f(\omega+t)-f(\omega)-h(t)}{t}$$

con $t \in \mathbb{R}$ y como $h(t) = th(1)$

tenemos que $\frac{\partial f}{\partial x}(\omega) = h(1)$

también:

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f(\omega+it)-f(\omega)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{h(it)}{t} + \lim_{t\to 0} \frac{f(\omega+it)-f(\omega)-h(it)}{t}$$

con $t \in \mathbb{R}$ entonces como $h(it) = th(i)$

se tiene que $\frac{\partial f}{\partial y}(\omega) = h(i)$

Con esto queda demostrada la parte (c).

Ahora demostraremos la parte (d) del Teorema.

Como existen

$$\frac{\partial f}{\partial z}(\omega) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\omega) - \frac{i\partial f}{\partial y}(\omega)\right) = \frac{1}{2}\left(h(1) - ih(i)\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\omega) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\omega) + \frac{i\partial f}{\partial y}(\omega)\right) = \frac{1}{2}\left(h(1) + ih(i)\right)$$

entonces de esas dos igualdades, y de la proposición 1 - (b) se tiene que:

$$h(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(\omega)z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\omega)\,\bar{z}, \text{ si } f \text{ es } \mathbb{R}\text{ - diferenciable}$$

Vamos a demostrar ahora:

f es $\mathbb{C}$ - diferenciable en ω si y solamente si f es $\mathbb{R}$ - diferenciable en ω, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\omega) = 0$ y $h(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(\omega)\,z$.

CONDICION NECESARIA:

Como $\frac{\partial f}{\partial z}(\omega) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\omega) - \frac{i\partial f}{\partial y}(\omega)\right) = \frac{1}{2}\left(h(1) - ih(i)\right)$ por ser f $\mathbb{C}$ - diferenciable existe h $\mathbb{C}$ - lineal y tal que $h(i) = ih(1)$; o sea $\frac{\partial f}{\partial z}(\omega) = \frac{1}{2}\left(h(1)+h(1)\right) = h(1)$

Entonces por la proposición 1 - (a):

$$h(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(\omega)\, z$$

Y además en este caso, de la demostración de la parte (b) de esta proposición

$$\frac{\partial f}{\partial y} = h(i) = ih(1) = \frac{i\partial f}{\partial x}(\omega),$$

lo cual implica:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\omega) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\omega) + \frac{i\partial f}{\partial y}(\omega)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\omega) + i^2\frac{\partial f}{\partial x}(\omega)\right]$$

y por lo tanto $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\omega) = 0$

CONDICION SUFICIENTE:

Sea $\omega = x+iy$, $z = h+ik$ y $f = u+iv$. Por ser f $\mathbb{R}$ - diferenciable entonces u y v son diferenciables.

f es $\mathbb{C}$ - diferenciable en ω si existe $h(z)$ $\mathbb{C}$ - lineal y tal que:

$$\lim_{\substack{z\to 0 \\ z\neq 0}} \frac{f(\omega+z)-f(\omega)-h(z)}{z} = 0$$

Como estamos suponiendo que $h(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(\omega)\cdot z$

(la cual es claramente $\mathbb{C}$ - lineal), entonces bastaría demostrar que lo siguiente es cierto:

$$\lim_{\substack{z\to 0 \\ z\neq 0}} \frac{f(\omega+z)-f(\omega)}{z} = \frac{\partial f}{\partial z}(\omega)$$

pero por hipótesis $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\omega) = 0$, $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\omega) + \frac{i\partial f}{\partial y}(\omega)\right) = 0$, por tanto $\frac{\partial f}{\partial x}(\omega) = -\frac{i\partial f}{\partial y}(\omega)$, lo mismo que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \qquad \text{----------(1)}$$

entonces $\frac{\partial f}{\partial z}(\omega) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\omega) - \frac{i\partial f}{\partial y}(\omega)\right) = \frac{\partial f}{\partial x}(\omega) = \frac{\partial u}{\partial x}(\omega) + \frac{i\partial v}{\partial x}(\omega)$

de aquí concluimos que para que f sea $\mathbb{C}$ - diferenciable basta comprobar:

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(\omega+z)-f(\omega)}{z} = \frac{\partial u}{\partial x}(\omega) + \frac{i\partial v}{\partial x}(\omega)$$

u y v tienen derivadas parciales de primer orden continuas (por ser f $\mathbb{R}$ - diferenciable) entonces por un resultado de Cálculo:

$$u(x+h, y+k) - u(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}h + \frac{\partial u}{\partial y}k + \varepsilon_1$$

$$v(x+h, y+k) - v(x,y) = \frac{\partial v}{\partial x}h + \frac{\partial v}{\partial y}k + \varepsilon_2$$

donde los restos ε_1 y ε_2 tienden a cero más rápido que $h+ik$ en el sentido que $\varepsilon_1/_{h+ik} \to 0$ y $\varepsilon_2/_{h+ik} \to 0$ - cuando $h+ik \to 0$. Como $f(\omega) = u(x,y)+iv(x,y)$ obtenemos usando (1) que:

$$f(\omega+z) - f(\omega) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{i\partial v}{\partial x}\right)(h+ik) + \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$$

y por tanto $\lim_{z\to 0} \frac{f(\omega+z)-f(\omega)}{z} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{i\partial v}{\partial x}$.

DEMOSTRACION DEL LEMA 1:

$$I(f,Q) \stackrel{def}{=} \int_a^b [f(x+ic)-f(x+id)]\,dx + i\int_c^d [f(b+iy)-f(a+iy)]\,dy =$$

$$= \int_a^b [A(x+ic)+B-A(x+id)-B]\,dx + i\int_c^d [A(b+iy)+B-A(a+iy)-B]\,dy =$$

$$= A\int_a^b i(c-d)\,dx + iA\int_c^d (b-a)\,dy =$$

$$= Ai\,(c-d)(b-a) + iA\,(b-a)(d-c) =$$

$$= Ai\,(c-d)(b-a) - iA\,(b-a)(c-d) = 0$$

DEMOSTRACION DEL LEMA 2:

Sean $a_0 = a < a_1 < a_2 < \cdots < a_p < a_{p+1} = b$

$$c_0 = c < c_1 < c_2 < \cdots < c_q < c_{q+1} = d$$

dos particiones de los intervalos $[a,b]$ y $[c,d]$ respectivamente demostraremos por medio de una inducción doble

$$I(f,Q) = \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{j=1}^{q+1} I(f,Q(k,j))$$

(1) Demostremos la igualdad para $q = 1$ y p fijo.

$$\sum_{k=1}^{p+1} \sum_{j=1}^{2} I(f,Q(k,j)) =$$

$$= I\ (f, Q\ (1,1)) + I(f, Q\ (2,1)) + \ldots\ldots + I(f, Q(p+1,1)) +$$

$$+ I\ (f, Q\ (1,2)) + I(f, Q\ (2,2)) + \ldots\ldots + I(f, Q(p+1,2)) =$$

$$= \int_{a_0}^{a_1} [f(x+ic_0) - f(x+ic_1)]\,dx + i \int_{c_0=c}^{c_1} [f(a_1+iy) - f(a_0+iy)]\ dy +$$

$$+ \int_{a_1}^{a_2} [f(x+ic_0) - f(x+ic_1)]\,dx + i \int_{c_0=c}^{c_1} [f(a_2+iy) - f(a_1+iy)]\ dy +$$

$$\ldots\ldots\ldots + \int_{a_p}^{b} [f(x+ic_0) - f(x+ic_1)]\,dx + i \int_{c_0}^{c_1} [f(b+iy) - f(a_p+iy)]\ dy +$$

$$+ \int_{a_0}^{a_1} [f(x+ic_1) - f(x+ic_2)]\,dx + i \int_{c_1}^{c_2=d} [f(a_1+iy) - f(a_0+iy)]\ dy +$$

$$+ \int_{a_1}^{a_2} [f(x+ic_1) - f(x+ic_2)]\,dx + i \int_{c_1}^{c_2=d} [f(a_2+iy) - f(a_1+iy)]\ dy +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$+ \int_{a_p}^{b} [f(x+ic_1) - f(x+ic_2)]\,dx + i \int_{c_1}^{c_2=d} [f(b+iy) - f(a_p+iy)]\ dy =$$

$$= \int_{a}^{b} [f(x+ic) - f(x+id)]\,dx + i \int_{c}^{d} [f(b+iy) - f(a+iy)]\ dy =$$

$$= I\ (f, Q)$$

(2) Supongamos que la fórmula vale para q y la demostraremos para $q + 1$

Sea $c_0 = c < c_1 < c_2 < \ldots < c_{q-1} < c_q < c_{q+1} = d$

Sabemos por hipótesis de inducción:

$$\sum_{k=1}^{p+1} [I(f,Q(k,1)) + \ldots\ldots + I(f,Q(k,q-1)) + I(f,Q(k,q+1))] =$$

$$= I(f, Q)$$

pero observemos que $I(f,Q(k,q-1))+I(f,Q(k,q)) +$

$+ I(f,Q(k,q+1)) = I(f,Q(k,q-1))+I(f,Q(k,q+1))$

para cualquier k.

Por lo tanto la fórmula vale para toda q; Un razonamiento análogo se hace para demostrar que la fórmula vale para toda p y por lo cual concluimos que

$$I(f,Q) = \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{j=1}^{q+1} I(f,Q(k,j))$$

DEMOSTRACION DEL LEMA 3: Por inducción.

Sea $\{Q(1,1), Q(1,2), Q(2,1), Q(2,2)\}$ la partición canónica de Q.

$$\text{Per}\,(Q(i,j)) = \frac{1}{2} \text{Per}\,(Q) \text{ para todo } i=1,2 \quad j=1,2$$

Por el Lema 2:

$$I(f,Q) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} I(f,Q(i,j))$$

entonces existe un $Q(i,j)$ el cual llamaremos Q_1 y tal que

$$|I(\delta, Q(i,j))| \geq \frac{1}{4} |I(\delta, Q)|$$

Repitamos este proceso ahora con Q_1 para así obtener Q_2. Y siguiendo este proceso obtenemos $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$.

Sea $\{Q_k(i,j) \mid i=1,2,\ j=1,2\}$ la partición canónica de Q_k, entonces

$$\text{Per}(Q_k(i,j)) = \frac{1}{2} \text{Per}(Q_k) = \frac{1}{2^{k+1}} \text{Per}(Q)$$

ahora por el razonamiento anterior dado Q_k existe $Q_k(i,j)$ tal - que

$$|I(\delta, Q_k(i,j))| \geq \frac{1}{4} |I(\delta, Q_k)| \text{ entonces}$$

a ese $Q_k(i,j)$ le llamaremos Q_{k+1}

$$\text{o sea } |I(\delta, Q_{k+1})| \geq \frac{1}{4} |I(\delta, Q_k)| \geq \frac{1}{4^{k+1}} |I(\delta, Q)|$$

entonces hemos encontrado una sucesión $\{Q_n \mid n \geq 0\}$ de rectángulos cerrados tales que $Q_0 = Q$, $Q_n \supset Q_{n+1}$ para todo n

$$\text{Per}(Q_n) = \frac{1}{2^n} \text{Per}(Q)$$

$$|I(\delta, Q_n)| \geq \frac{1}{4^n} |I(\delta, Q)|$$

DEMOSTRACION DEL LEMA 4: Por reducción al absurdo

Sea Q un rectángulo cerrado contenido en Ω y tal que $I(f,Q) \neq 0$. Sea $a = |I(f,Q)| > 0$, por el Lema 3 existe una sucesión $\{Q_n \mid n \geq 0\}$ de rectángulos cerrados tales que:

(1) $Q_0 = Q$, $Q_n \supset Q_{n+1}$ para todo n.

(2) $\text{Per}(Q_n) = \frac{1}{2^n} \text{Per}(Q)$

(3) $|I(f,Q_n)| \geq \frac{a}{4^n}$

Como los Q_n son compactos existe un $\omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n$ (éste es un hecho conocido, cuya demostración daremos mas adelante).

Sea $K: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función

$$K(z) = f(\omega) + \frac{df}{dz}(\omega)(z-\omega)$$

$$I(f,Q_n) = I(K,Q_n) + I(f-K,Q_n) \text{ para toda } n.$$

Por el Lema 1: $I(K,Q_n) = 0$, entonces

$$I(f,Q_n) = I(f-K,Q_n)$$

Sea $M_n = Sup\{|f(z)-K(z)| \mid z \in Q_n\}$, de la propiedad (2) de I:

$$|I(f-K,Q_n)| \leq M_n \; Per(Q_n)$$

y entonces $|I(f,Q_n)| \leq M_n \; Per(Q_n)$ para todo n.

Sea $\varepsilon = \dfrac{a}{(Per(Q))^2}$. Llamaremos, para simplificar, δ al número $\delta(\varepsilon)$ que la definición 1-(b) asocia a f, ω y ε.

Es fácil ver que si $z \in Q_n$, $|z-\omega| \leq \frac{1}{2} Per\,(Q_n)$, entonces si n es tan grande como para que

$$\frac{Per\,(Q)}{2^{n+1}} < \delta, \text{ entonces para todo } z \in Q_n$$

$$|f(z)-K(z)| = |f(z)-f(\omega)-\frac{df}{dz}(\omega)(z-\omega)| < \varepsilon|z-\omega| \leq \frac{\varepsilon}{2} Per(Q_n).$$

De allí resulta que $M_n < \frac{\varepsilon}{2} Per\,(Q_n)$ y

$$|I(f,Q_n)| \leq \frac{\varepsilon}{2} (Per\,(Q_n))^2 =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2 \cdot 4^n} (Per\,(Q))^2 =$$

$$= \frac{a}{2 \cdot 4^n}$$

para n suficientemente grande.

Por otro lado

$$|I(f,Q_n)| \geq \frac{a}{4^n} > \frac{a}{2 \cdot 4^n} \text{ para todos los } n,$$

lo cual es una contradicción.

DEMOSTRACION DEL LEMA 5:

Si $\omega \notin Q$, resultado del lema 4 que $I(f,Q) = 0$.

Supongamos ahora que ω está en el interior de Q, $Q = [a,b] \times [c,d]$, $\omega = u+iv$, $a < u < b$, $c < v < d$.

Sea ε un número tal que:

$$\varepsilon < min \{|u-a|, |u-b|, |v-c|, |v-d|.\}$$

Y sea $\{Q(k,j) | \ | \leq k \leq 3, \ 1 \leq j \leq 3\}$ la partición de Q asociada a las particiones:

$$a < u-\varepsilon < u+\varepsilon < b \quad \text{de} \quad [a,b]$$

$$c < v-\varepsilon < v+\varepsilon < d \quad \text{de} \quad [c,d].$$

Por el Lema 2

$$I(f,Q) = \sum_{k=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} I(f,Q(k,j))$$

Mas el único $Q(k,j)$ que contine a ω es $Q(2,2)$entonces si $(k,j) \neq (2,2)$ por el lema 4

$$I\ (f,Q(k,j)) = 0$$

por lo tanto $I(f,Q) = I(f,Q(2,2))$.

Sea $M = Sup \{|f(z)| \ | \ z \in Q\}$. De la propiedad 2 de I resulta que:

$$|I(f,Q(2,2))| \leq M \ Per\ (Q(2,2)) = 8\varepsilon M$$

entonces $|I(f,Q)| \leq 8\varepsilon M$, como ε es arbitrario sujeto a - - -

$\varepsilon < |u-a|, |u-b|, |v-c|, |v-d|$

entonces $I(\gamma, Q) = 0$

Si ω pertenece a la frontera de Q la demostración es similar.

DEMOSTRACION DEL LEMA 6:

Sea $Q = [a,b] \times [c,d]$, $\omega = u+iv$, $a < u < b$ y $c < v < d$.

Sea ε un número positivo menor que $|v-c|$ y $|v-d|$ y sea - - $\{Q(1), Q(2), Q(3)\}$ la partición de Q asociada a la partición.

$c < v-\varepsilon < v+\varepsilon < d$ de $[c,d]$ y la partición

$a < b$ de $[a,b]$ o sea:

$Q(1) = [a,b] \times [c, v-\varepsilon]$

$Q(2) = [a,b] \times [v-\varepsilon, v+\varepsilon]$

$Q(3) = [a,b] \times [v+\varepsilon, d]$

Es fácil verificar que la función $\mathbb{C} - \{\omega\} \to \mathbb{C}$, $z \to \frac{1}{z-\omega}$ es $\mathbb{C}$ - diferenciable en $\mathbb{C} - \{\omega\}$, ya que si $\omega_0 \in \mathbb{C}-\{\omega\}$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial z}(\omega_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial x}(\omega_0) - \frac{i\partial \gamma}{\partial y}(\omega_0)\right)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x}(\omega_0) = \lim_{t\to 0} \frac{\gamma(\omega_0+t)-\gamma(\omega_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{\omega_0+t-\omega} - \frac{1}{\omega_0-\omega}}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{-1}{(\omega_0 + t - \omega)(\omega_0 - \omega)} = -\frac{1}{(\omega_0 - \omega)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\omega_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\omega_0 + it) - f(\omega_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{\omega_0 + it - \omega} - \frac{1}{\omega_0 - \omega}}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{-i}{(\omega_0 + it - \omega)(\omega_0 - \omega)} = \frac{-i}{(\omega_0 - \omega)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(\omega_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{(\omega_0 - \omega)^2} - \frac{i(-i)}{(\omega_0 - \omega)^2}\right) = \frac{-1}{(\omega_0 - \omega)^2}$$

$$y \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\omega_0) = 0 .$$

Y si $h(z) = \frac{-1}{(\omega_0 - \omega)^2} z$

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(\omega_0 + z) - f(\omega_0) - h(z)}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{\frac{1}{\omega_0 + z - \omega} - \frac{1}{\omega_0 - \omega} + \frac{1}{(\omega_0 - \omega)^2} z}{z} =$$

$$= \lim_{z\to 0} \left[\frac{-1}{(\omega_0 + z - \omega)(\omega_0 - \omega)} + \frac{1}{(\omega_0 - \omega)^2}\right] = 0.$$

Por lo tanto $z \to \frac{1}{z-\omega}$ es $\mathbb{C}$ - diferenciable en $\mathbb{C} - \{\omega\}$ por la proposición 2 - (d)

$$\left(\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z-\omega}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{z-\omega}\right) = -\frac{1}{(z-\omega)^2}\right)$$

Como $I\left(\frac{1}{z-\omega}, Q\right) = \sum_{k=1}^{3} I(f, Q(K))$ y $0 = I(f, Q(1)) = I(f, Q(3))$, pues ω no pertenece a $Q(1)$ y $Q(3)$. Resulta de allí que:

$$I\left(\frac{1}{z-\omega}\,,\ Q\right) = I\left(\frac{1}{z-\omega}\,,\ Q(2)\right)$$

$$I\left(\frac{1}{z-\omega}\,,\ Q(2)\right) = \int_a^b \left[\frac{1}{x-u-i\varepsilon} - \frac{1}{x-u+i\varepsilon}\right] dx + \int_{v-\varepsilon}^{v+\varepsilon} \left[\frac{1}{b-u+i(y-v)} - \frac{1}{a-u+i(y-v)}\right] dy$$

$$= \int_a^b \frac{2i\varepsilon dx}{(x-u)^2+\varepsilon^2} + \int_{v-\varepsilon}^{v+\varepsilon} \frac{(a-b)\ dy}{(b-u+i(y-v))(a-u+i(y-v))}$$

$$\left| \frac{a-b}{(b-u+i(y-v))(a-u+i(y-v))} \right| \leqslant \frac{|a-b|}{|a-u|\,|u-b|}$$

(esto ya que $|b-u+i(y-v)|\ |a-u+i(y-v)| =$

$$= \sqrt{(b-u)^2+(y-v)^2}\ \sqrt{(a-u)^2+(y-v)^2} =$$

$$= \sqrt{(b-u)^2(a-u)^2+(b-u)^2(y-v)^2+(a-u)^2(y-v)^2+(y-v)^4} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt{(b-u)^2(a-u)^2} = |b-u|\ |a-u|\ )$$

Resulta de allí que:

$$\left| \int_{v-\varepsilon}^{v+\varepsilon} \frac{(a-b)\ dy}{(b-u+i(y-v))(a-u+i(y-v))} \right| \leqslant \int_{v-\varepsilon}^{v+\varepsilon} \frac{|a-b|\ dy}{|(b-u+i(y-v))(a-u+i(y-v))|} \leqslant$$

$$\leqslant \int_{v-\varepsilon}^{v+\varepsilon} \frac{|a-b|\ dy}{|u-a|\ |u-b|} = \frac{2\ \varepsilon\ (b-a)}{|u-a|\ |u-b|}$$

entonces: $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{v-\varepsilon}^{v+\varepsilon} \frac{(a-b)\ dy}{(b-u+i(y-v))\ (a-u+i(y-v))} = 0$

$$\int_a^b \frac{2\,i\,\varepsilon\,dx}{(x-u)^2+\varepsilon^2} = 2i \int_{\frac{a-u}{\varepsilon}}^{\frac{b-u}{\varepsilon}} \frac{dt}{t^2+1} \quad \text{si } t = \frac{x-u}{\varepsilon}$$

Resulta de allí que:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^b \frac{2\,i\,\varepsilon\,dx}{(x-u)^2+\varepsilon^2} = 2i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = 2\,\pi\,i$$

Como $I\,(\frac{1}{z-\omega}\,,\,Q(2)) = I\,(\frac{1}{z-\omega}\,,\,Q)$ para todo $\varepsilon < |v-c|,|v-d|$

y $\lim_{\varepsilon\to 0} I\,(\frac{1}{z-\omega}\,,\,Q(2)) = I\,(\frac{1}{z-\omega}\,,\,Q)$ por lo tanto $I(\frac{1}{z-\omega}\,,\,Q) =$

$= 2\,\pi\,i.$

CAPITULO 5

LA FUNCION EXPONENCIAL

SECCION 0: Homomorfismos de $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$

Recordaremos, antes de empezar este Capítulo, que $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ es un grupo conmutativo respecto de la multiplicación por números complejos.

NOTACION:

(a) Sea E el conjunto de todos los homomorfismos continuos de $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, esto es de todas las funciones $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, tales que $f(z_1+z_2) = f(z_1)\, f(z_2)$, para todos los $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

(b) Sea H el subconjunto de E formado por todos los homomorfismos holomorfos.

PROPOSICION 1: Con respecto a la multiplicación de funciones E es un grupo conmutativo y H es un subgrupo.

DEMOSTRACION: Sean $f, g \in E$ y $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, entonces

$$(f \cdot g)(z_1+z_2) = f(z_1+z_2)g(z_1+z_2) = f(z_1)f(z_2)g(z_1)g(z_2) =$$

$$= f(z_1)g(z_1)f(z_2)g(z_2) = (f \cdot g)(z_1)\ (f \cdot g)(z_2)$$

por lo tanto $f\ g \in E$.

El elemento neutro es la función constante igual a 1; ya que si h es tal que $h(z) = 1$, para todo $z \in \mathbb{C}$:

$$h(z_1+z_2) = 1 = h(z_1)\, h(z_2)$$

lo cual significa que $h \in E$.

Sea $f \in E$; como f nunca toma el valor cero entonces $\frac{1}{f}$ está bien definida y además

$$\left(\frac{1}{f}\right)(z_1+z_2) = \frac{1}{f(z_1+z_2)} = \frac{1}{f(z_1)\, f(z_2)} = \left(\frac{1}{f}\right)(z_1)\left(\frac{1}{f}\right)(z_2)$$

y por lo tanto $\frac{1}{f} \in E$.

De esto se deduce que E es un grupo.

Ahora, H es un subgrupo de E, puesto que si f y $g \in H$, (por la proposición 3 del Capítulo 2) entonces $f\, g \in H$, y ya que f es un homomorfismo no toma el valor cero y entonces (por la proposición 5 (b) del Capítulo 4) $\frac{1}{f}$ es holomorfa, y por lo tanto H es un subgrupo de E.

SECCION 1: La función exponencial.

La función exponencial es el ejemplo más importante de homomorfismo holomorfo de $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$.

TEOREMA 1:

(a) El radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{n!}$ (donde -

$0! = 1$) es ∞.

(b) Si $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, entonces $\exp(z)$ es una función holomorfa en todo el plano y tal que

$$\frac{d\,exp}{dz} = exp$$

(c) $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es un homomorfismo y $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$.

(d) Si $z = x+iy$. $|exp(z)| = exp(x)$. Si $x \in \mathbb{R}$, $exp(x)$ es real y positivo, tal que:

$$Si\ x > 0, \quad exp(x) > 1$$
$$Si\ x < 0, \quad exp(x) < 1$$

(e) Núcleo de exp = $2\pi i\,\mathbb{Z}$, donde $\pi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$
(Núcleo de exp = $\{z \mid exp(z) = 1\}$)

DEMOSTRACION:

(a) Sea r un número positivo cualquiera y sea K el menor entero mayor que $2r$.

Si $n > K$:

$$\frac{r^n}{n!} = \frac{r^k}{K!} \cdot \frac{r}{K+1} \cdot \frac{r}{K+2} \cdots \frac{r}{n}$$

Si $j > K$, $\frac{r}{j} < \frac{r}{K} \leq \frac{1}{2}$ (ya que $2r \leq K$).

Entonces, si $n > K$:

$$\frac{r^n}{n!} \leq \frac{r^k}{k!} \cdot \frac{1}{2^{n-k}}$$

Resulta de aquí que la serie de términos positivos - $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{n!}$ converge (Por el Coralario (b) de la Proposición 4 del Capítulo 1).

Ya que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{n!}$ converge , entonces $r \in$ Conv $(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!})$ y como $r > 0$ tendremos que $D(0,r) \subset$ Conv $(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!})$ - (esto por el Lema 1 del Capítulo 1); y esto quiere - decir que el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ es mayor o igual a r, y por ser r arbitrario concluimos que el radio de convergencia es ∞.

(b) exp (z) es holomorfa por la Proposición 5 del Capítulo 2.

De la Proposición 3 (a) del Capítulo 4 resulta que la serie que representa a $\frac{d\ exp}{dz}$ en 0 es $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{(n+1)!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. En consecuencia existe un - disco $D(0,r)$ donde exp y $\frac{d\ exp}{dz}$ coinciden.

Como ambas están definidas en $\mathbb{C}$, resulta que la fun- - ción: $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, tal que $f = exp - \frac{d\ exp}{dz}$ es holomorfa y nula en $D(0,r)$. Por el Corolario 2 del Teorema 1 del Capítulo 3, f es nula en todo $\mathbb{C}$, y por lo tanto:

$$exp = d\ \frac{exp}{dz}\ en\ \mathbb{C}.$$

(c) Vamos a demostrar primero que exp es un homomorfismo:

Sea $\omega \in \mathbb{C}$ y sea $\delta: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función definida de la siguiente manera:

$$\delta(z) = exp\ (z+\omega)\ exp\ (-z)$$

δ es holomorfa, ya que: $z \to exp\ (z+\omega)$ es holomorfa - (Por Proposición 4 (a) del Capítulo 2) y como $z \to exp\ z$, $z \to -z$ son dos funciones holomorfas, su composición $z \to exp\ (-z)$ también lo es (por Proposición 3 (d) del Capítulo 4); Por último la multiplicación de dos holomorfas es holomorfa, por lo tanto δ es holomorfa.

Vamos a calcular la deriv ada de δ:

$$\frac{d\delta}{dz}(z) = \frac{d\ exp(z+\omega)}{dz}\ exp(-z)+exp(z+\omega)\ \frac{d}{dz}\ (exp(-z)) =$$

$$= exp(z+\omega)\ exp(-z) + exp(z+\omega)(-exp(-z)) = 0$$

Por la Proposición 3 - (c) del Capítulo 4 δ es constante en $\mathbb{C}$. Su valor será:

$$\delta(0) = exp(\omega)\ exp(0) = exp(\omega)\ (pues\ exp\ (0) = 1)$$

Entonces para todos los $z, \omega \in \mathbb{C}$:

$$exp(z+\omega)\ exp(-z) = exp(\omega),$$

tomando $z = -z_2$, $\omega = z_1+z_2$ resulta:

$$exp(z_1)\ exp(z_2) = exp(z_1+z_2),$$

de lo cual se deduce que exp es un homomorfismo holomorfo.

Sea ahora Ω la imagen de exp, ó sea

$$\Omega = exp\ (\mathbb{C})\ ;$$

$\Omega \subset \mathbb{C}^*$, pues si existiera $\omega \in \mathbb{C}$ tal que $exp(\omega) = 0$, entonces para todo $z \in \mathbb{C}$:

$$exp(z) = exp(z-\omega)\ exp(\omega) = 0 \qquad y$$

por lo tanto exp sería idénticamente nula pero de la definición de $exp(x)$ tenemos $exp(0) = 1$, y por lo tanto $\Omega \subset \mathbb{C}^*$.

Por el teorema 3 del Capítulo 3, Ω es abierto.

Vamos a demostrar que Ω es cerrado en $\mathbb{C}^*$ (Ω no es cerrado en $\mathbb{C}$).

Como $1 \in \Omega$ existe un disco $\mathcal{D}(1,\varepsilon) \subset \Omega$.

Sea ahora ω un punto de acumulación de Ω en $\mathbb{C}^*$; como $\omega \neq 0$, entonces

$$\mathcal{D}\ (\omega,\ \varepsilon\ |\omega|\ ) \neq \phi$$

Sea $t \in \mathbb{C}$, tal que $exp(t) \in \mathcal{D}(\omega,\ \varepsilon\ |\omega|)$,

si $\sigma = \dfrac{exp\ (t)}{\omega}$, $|\sigma-1| = \left| \dfrac{exp\ (t)-\omega}{\omega} \right| < \dfrac{\varepsilon|\omega|}{|\omega|} = \varepsilon$,

$\sigma \in \mathcal{D}(1,\in)$ y como $\mathcal{D}(1,\in) \subset \Omega$, existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\sigma = exp(\alpha)$; entonces $w = \frac{exp(t)}{exp(\alpha)} = exp(t-\alpha) \in \Omega$ y Ω es cerrado en $\mathbb{C}^*$. Como Ω es abierto y $\mathbb{C}^*$ es conexo, $\Omega = \mathbb{C}^*$.

(d) Si $x \in \mathbb{R}$ $exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ es real. Si $x > 0$,

$$exp(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > 1.$$

Si $x < 0$, $-x > 0$ y como

$$exp(x)\ exp(-x) = exp(x-x) = 1,$$

$$exp(x) = \frac{1}{exp(-x)} < 1. \quad Y$$

$$exp(x) > 0.$$

Ahora,

$$exp(\bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\bar{z})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{(z^n)}}{n!} = \overline{\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right)} = \overline{exp(z)}$$

Si $z = x + iy$,

$$(exp(z))^2 = exp(z)\ \overline{exp(z)} = exp(z)\ exp(\bar{z}) =$$

$$= exp(z+\bar{z}) = exp(2x)$$

y como $exp(x) > 0$, $|exp(z)| = exp(x)$.

(e) Sea K = núcleo exp y sea $L = \{z \mid exp(z) = -1\}$ como $exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$, L no es vacío.

Si $z \in L$; $\bar{z}$ y $-z$ pertenecen a L, ya que:

$$exp(-z)\ exp(z) = exp(z-z) = 1;\ \text{como } exp(z) = -1,$$

tendremos $exp(-z) = -1$.

Y $exp(\bar{z}) = (\overline{exp(z)}) = (\overline{-1}) = -1$.

Si $z \in K$; $\bar{z} \in K$ pues:

$$exp(\bar{z}) = (\overline{exp(z)}) = (\overline{1}) = 1$$

Sea $z \in L$ ó K y sea $x = Re\ (z)$:

$$exp(2x) = exp(z+\bar{z}) = exp(z)\ exp(\bar{z}) = 1.$$

Como $2x$ es real, por la parte (d) $x = 0$.

Resulta de allí que $K, L \subset i\,\mathbb{R}$; Como exp es continua (por ser holomorfa), L es cerrado (puesto que el punto -1 es cerrado).

Y esto implica que si

$$a = inf\ \{y \mid y > 0,\ i\,y \in L\} \text{ entonces } i\,a \in L.$$

Tenemos $exp(ia) = -1$ y $a \neq 0$.

$K = 2ia\mathbb{Z}$ ya que:

Si $R \in \mathbb{Z}$ $exp(2iRa) = (exp(ia))^{2R} = (-1)^{2R} = 1$, y por lo tanto $2ia\,\mathbb{Z} \subset \mathbf{K}$.

Sea $i\,b \in \mathbf{K}$, y supongamos $i\,b \notin 2ia\,\mathbb{Z}$, entonces existe un entero $q \in \mathbb{Z}$, tal que:

$$2qa < b < 2(q+1)\,a$$

Sea $c = b - 2qa$

$$exp(ic) = exp(ib-2iqa) = exp(ib)\ exp(-2iqa) = 1 \cdot 1 = 1$$

y $0 < c < 2a$

Ahora: $(^{exp}\ (\frac{ic}{2}))^2 = exp\ (\frac{ic}{2} + \frac{ic}{2}) = exp\ (ic) = 1$ entonces $exp(\frac{ic}{2}) = 1$ ó -1.

Que $exp(\frac{ic}{2})$ sea -1 es imposible ya que $0 < \frac{c}{2} < a$ y $a = inf\ \{y \mid y > 0,\ i\,y \in L\} \leqslant \frac{c}{2}$.

Si $exp\ (\frac{ic}{2}) = 1$ implica que si $v = a - \frac{c}{2}$ $0 < v < a$ y:

$$exp(iv) = exp(ia-\frac{ic}{2}) = exp(ia)\ exp(-\frac{ic}{2}) = (-1) \cdot \frac{1}{1} = -1$$

Mas de nuevo: $a = inf\ \{y \mid y > 0,\ i\,y \in L\} \leqslant v < a$ lo cual es una contradicción y por lo tanto

$$\text{Núcleo } exp = 2ia\ \mathbb{Z}\ .$$

Demostraremos ahora que $a = \pi$. Por la definición de a si $0 \leqslant y < a$

$$exp(iy) + 1 \neq 0$$

Sea φ: $[0, \frac{a}{2}[\to \mathbb{R}$ la función:

$$\varphi(t) = \frac{e^{2it}-1}{i(e^{2it}+1)}$$

Como $\varphi(t) = \frac{(e^{2it}-1)e^{-it}}{i(e^{2it}+1)e^{-it}} = \frac{e^{it}-e^{-it}}{i(e^{it}+e^{-it})} = \frac{2iIm(e^{it})}{2iRe(e^{it})} =$

$= \frac{Im(e^{it})}{Re(e^{it})}$, (esto ya que $\overline{(exp(it))} = exp(\overline{(it)}) =$

$= exp(-it)$), entonces φ es real y $\varphi(0) = 0$.

Además: $\varphi(t) \to \infty$ cuando $t \to \frac{a}{2}$ acercándose por la izquierda ya que $e^{2it}+1 \to 0$ y $e^{2it}-1 \to -2$, cuando $t \to \frac{a}{2}$; φ es continuamente diferenciable y su derivada es:

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = \frac{i(e^{2it}+1)\ 2ie^{2it} - (e^{2it}-1)\ i2ie^{2it}}{i^2\ (e^{2it}+1)^2} =$$

$$= \frac{-2e^{4it}-2e^{2it}+2e^{4it}-2e^{2it}}{-(e^{2it}+1)^2} =$$

$$= \frac{4e^{2it}}{(e^{2it}+1)^2} = 1 + \varphi(t)^2, \text{ ya que:}$$

$$1+\varphi(t)^2 = 1+\frac{(e^{2it}-1)^2}{i^2(e^{2it}+1)^2} = \frac{-e^{4it}-2e^{2it}-1+e^{4it}-2e^{2it}+1}{-(e^{2it}+1)^2} =$$

$$= \frac{4\ e^{2it}}{(e^{2it}+1)^2}$$

entonces: $\frac{d\varphi}{dt}(t) = 1+\varphi(t)^2 > 0$, por tanto φ es crecien<u>te</u> y manda al intervalo $[0, \frac{a}{2}[$ sobre $[0, +\infty[$.

Sea ψ: $[0, +\infty[\to [0, \frac{a}{2}[$ la función inversa de φ (esto es $\varphi(\psi(t)) = t$ para todo $t \in [0, \infty[$ y $\psi(\varphi(t)) = t$ para todo $t \in [0, \frac{a}{2}[$

$$\frac{a}{2} = \lim_{S\to\infty} \psi(S) = \lim_{S\to\infty} \left(\psi(S) - \psi(0) \right) =$$

$$= \lim_{S\to\infty} \int_0^S \frac{d\psi}{dt}(t)\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{d\psi}{dt}(t)\, dt$$

Pero $\varphi'(\psi(t)) \frac{d\psi}{dt}(t) = 1$, por lo tanto:

$$\frac{d\psi}{dt}(t) = \frac{1}{\varphi'(\psi(t))} \text{ , y además}$$

$$\varphi'(\psi(t)) = 1 + \varphi\ (\psi(t))^2 = 1+t^2$$

$$\frac{a}{2} = \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} \text{ , ó sea } a = 2\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \pi$$

SECCION 3: Aplicación de la función exp a la representación de números complejos.

PROPOSICION 2: Dado cualquier número real $\underline{a}$, sea $B(a)$ la banda de $\underline{a}$ definida como sigue:

$$B(a) = \{z \mid a \leqslant Im(z) < a+2\pi\}$$

La restricción de exp a $B(a)$ es una aplicación biyectiva de $B(a)$ sobre $\mathbb{C}^*$.

DEMOSTRACION: Dado $\omega \in \mathbb{C}^*$ existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $exp(z_0)=\omega$

(Por el Teorema 1 - (c)),

Sea $exp^{-1}(\omega) = \{z \mid exp(z) = \omega\}$, demostraremos que - - -

$exp^{-1}(\omega) = \{z \mid \text{existe } k \in Z \text{ y } z = z_0 + 2k\pi i\} = z_0 + 2\pi i Z$

Utilizaremos en lo que sigue que Núcleo $exp = 2\pi i Z$

Primero $z_0 + 2\pi i Z \subset exp^{-1}(\omega)$, ya que si $q \in Z$ y - - -

$z_0 + 2q\pi i \in z_0 + 2\pi i Z$ entonces:

$$exp(z_0 + 2\pi iq) = exp(z_0)\, exp(2\pi iq) = exp(z_0) \cdot 1 = \omega$$

por lo tanto $z_0 + 2\pi iq \in exp^{-1}(z_0)$.

Y segundo: Dado cualquier punto z que cumpla con $exp(z)=\omega$, ó sea que $z \in exp^{-1}(\omega)$ se tiene que:

$$exp(z-z_0) = exp(z)\, exp(-z_0) = exp(z)\, \frac{1}{exp(z_0)} = \frac{\omega}{\omega} = 1,$$

y entonces por el Teorema 1 - (e), $z-z_0 = 2\pi iq$, para alguna - $q \in Z$; ó sea $z = z_0 + 2\pi iq$, entonces $z \in z_0 + 2\pi i Z$.

Finalmente concluímos:

$$exp^{-1}(\omega) = z_0 + 2\pi i Z .$$

Sea $X_0 = Re(z_0)$, $y_0 = Im(z_0)$; existe una $k \in Z$, tal que: $y_0 + 2k\pi \in [a, a+2\pi[$.

Si $z = x_0 + iy_0 + 2k\pi i$, $exp(z) = \omega$ y $z \in B(a)$ entonces:

$$exp\,(B[a]) = \mathbb{C}^*$$

Si $z_1, z_2 \in B[a]$ y si $exp[z_1] = exp[z_2]$, entonces $exp[z_1 - z_2] = 1$; y por el Teorema 1 - (e) existe una $k \in \mathbb{Z}$, tal que $z_1 - z_2 = 2k\pi i$.

Sean: $y_1 = Im\,[z_1]$, $y_2 = Im\,[z_2]$, $x_1 = Re\,[z_1]$, $x_2 = Re\,[z_2]$

$$x_1 + iy_1 - x_2 - iy_2 = 2k\pi i;\ \text{entonces } x_1 = x_2$$

Y además $iy_1 - iy_2 = 2k\pi i;$

Si $k \neq 0$ $|y_1 - y_2| = |2k\pi| \geq 2\pi,$

pero $a < y_1, y_2 < a + 2\pi$ lo cual hace imposible la desigualdad anterior, por lo tanto $k = 0$ ó sea $z_1 = z_2$; de allí concluimos - que $exp \mid B[a]$ es inyectiva, y como $exp\,(B[a]) = \mathbb{C}^*$, también - $exp \mid B[a]$ es suprayectiva y por lo tanto biyectiva.

DEFINICION 1:

(a) Si z es un número complejo no nulo, se llama argumento de z y, se denota $arg\,[z]$ a un número real θ, tal que $z = |z|\ exp[i\theta]$, ésta representación de z se llama representación polar.

(b) Resulta del Teorema 1 parte (c) y (e), que todo $z \neq 0$ tiene argumento y si θ es un argumento cualquiera de - z, el conjunto de los argumentos de z es el conjunto:

$$\theta + 2\pi\mathbb{Z} = \{\theta + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

(c) De la Proposición 2 resulta que dado un número real a cualquiera, todo $z \neq 0$ tiene un único argumento contenido en $[a, a + 2\pi[$.

NOTACION: La notación *exp* es muchas veces pesada; por ésta razón se denota $exp(z)$ en general como e^z como en el caso real.

Con esta notación la representación polar de un número complejo z es $z = r\, e^{i\theta}$, donde $r = |z|$.

REPRESENTACION PARAMETRICA DEL CIRCULO:

Sea $S = S(0,1) = \{z \mid |z| = 1\}$. Este conjunto es llamado comunmente círculo, es un subgrupo de $\mathbb{C}^*$ con respecto a la multiplicación de complejos.

Vamos a determinar $exp^{-1}(S)$; Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$, tal que $exp(z) \in S$. Entonces por el Teorema 1 - (d) $exp(x) = |exp(z)| = 1$ por lo cual $x = 0$ $exp^{-1}(S) \subset i\,\mathbb{R}$.

Pero también dado $i\,b \in i\,\mathbb{R}$, $i\,b \in exp^{-1}(S)$, ya que $|exp(ib)| = exp\ 0 = 1$, concluimos que $i\,\mathbb{R} \subset exp^{-1}(S)$ y final mente $i\,\mathbb{R} = exp^{-1}(S)$. *exp* realiza un homomorfismo del grupo aditivo $i\,\mathbb{R}$ sobre S, el núcleo de ese homomorfismo es $2\pi i\mathbb{Z}$ (por el Teorema 1 - (e)).

De aquí resulta que la aplicación $[0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\theta \to e^{i\theta}$ cubre todo el círculo S y cubre cada punto una vez solamente, con excepción del 1 que es cubierto 2 veces por el 0 y 2π.

SECCION 4: Estructura del grupo de homomorfismos de $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$

TEOREMA 2:

(a) Existe un isomorfismo F del grupo aditivo $\mathbb{C}^2$ sobre el grupo E de todos los homomorfismos continuos $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ - definido de la siguiente manera:

$$\text{Si } [a,b] \in \mathbb{C}^2 \quad F[a,b]: \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$$

$$F[a,b]\ [z] = exp[az+b\bar{z}]$$

(donde $\bar{z}$ es el complejo conjugado de z).

(b) El subgrupo de $\mathbb{C}^2$ que corresponde a los homomorfismos holomorfos es el subgrupo $\mathbb{C} \times \{0\}$. Todos los homomorfismos holomorfos de $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ son de la forma

$$z \to exp\ [a\ z]$$

con a constante. Esto implica la importancia de la - función *exp*.

(c) $F[a,b]: \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ es suprayectiva si y solamente si

$$a+b \neq 0 \quad y \quad Re\ (\frac{a-b}{a+b}) \neq 0$$

En este caso el núcleo de $F[a,b]$ es isomorfo a $\mathbb{Z}$.

(d) En el caso que $F[a,b]$ no es suprayectiva sucede que - $a + b = 0$ ó $a + b \neq 0$ y $Re\ (\frac{a-b}{a+b}) = 0$ $F[a,b]$ es - inyectiva si $a + b \neq 0$ y $Re\ (\frac{a-b}{a+b}) = 0$ y ab es un - número real positivo.

DEMOSTRACION : En el Apéndice 5.

APENDICE 5

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 2 :

(a) $F(a,b)$ es continua ya que $az + b\bar{z}$ es una función continua al igual que $exp(z)$ y por tanto la composición de éstas dos también es continua, donde dicha composición es $exp(az+b\bar{z})$.

Demostraremos ahora que $F: \mathbb{C}^2 \to E$ definida $F(a,b)[z] = exp(az + b\bar{z})$ es un homomorfismo donde $\mathbb{C}^2$ es un grupo aditivo y E un grupo multiplicativo, ó sea

$$F[(a_1,b_1) + (a_2,b_2)] = F(a_1,b_1) \cdot F(a_2,b_2),$$

esto es cierto ya que:

$$F[(a_1,b_1) + (a_2,b_2)] = F(a_1+a_2, b_1+b_2) = exp((a_1+a_2)z+(b_1+b_2)\bar{z}) =$$

$$= exp(a_1 z+b_1\bar{z} + a_2 z+b_2\bar{z}) = exp(a_1 z+b_1\bar{z})\ exp(a_2 z+b_2\bar{z}) =$$

$$= F(a_1, b_1)\ F(a_2, b_2)$$

A continuación demostraremos que $F: \mathbb{C}^2 \to E$ es inyectiva, ó sea

supongamos $F(a,b) = F(a_1,b_1)$, entonces

$$F(a,b)\ [z] = F(a_1,b_1)\ [z] \text{ para todo } z \in \mathbb{C},$$

por tanto

$$exp(az+b\bar{z}) = exp(a_1 z+b_1 \bar{z}),$$

$$exp(az+b\bar{z} - a_1 z - b_1 \bar{z}) = 1$$

y por el Teorema 1 - (e)

$$az+b\bar{z} - a_1 z-b_1 \bar{z} = 2k\pi i \quad \text{con } k \in \mathbb{Z} \text{ y para todo } z \in \mathbb{C}$$

Sea $z = x+iy$, entonces:

$$(1)\text{----------}\ a(x+iy) + b(x-iy) - a_1 (x+iy) - b_1 (x-iy) = 2k\pi i$$

Como esta igualdad es válida para toda $z \in \mathbb{C}$ entonces lo es para $z = 0+0\cdot i$; Aplicando $0+0\cdot i$ a (1) podemos - concluir que k tiene que tomar el valor de cero, por - lo cual:

$$ax+bx - a_1 x-b_1 x + i(ay-by - a_1 y+b_1 y) = 0$$

Para $z = 0+i$ tenemos $a-b = a_1 -b_1$

$z = 1+0\cdot i$ tenemos $a+b = a_1 +b_1$

Sumando las dos últimas igualdades obtenemos que $2a = 2a_1$ y por tanto $a = a_1$, $b = b_1$ o sea $(a,b) = (a_1,b_1)$ y por tanto F es inyectiva.

Demostraremos ahora que F es suprayectiva;

Para demostrar esto último, sea $\phi: \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ un homomorfismo continuo elemento de E, demostraremos que existen a y b en $\mathbb{C}$ tales que

$$\phi(z) = exp(az + b\bar{z})$$

o lo mismo que $\phi(z) = exp(ax+bx+i(ay-by))$ si $z = x+iy$.

$\phi(0) = 1$ ya que $\phi(0) = \phi(0+0) = \phi(0)\ \phi(0)$ y como $\phi(0) \neq 0$ tendremos que $\phi(0) = 1$.

$$\phi(n) = \phi(1+1+\text{------}+1) = [\phi(1)]^n$$

n veces

y por tanto:

$$[\phi(1)]^n = \phi(n) = \phi(\tfrac{n}{m} + \tfrac{n}{m} + \text{------} + \tfrac{n}{m}) = [\phi(\tfrac{n}{m})]^m$$

m veces

o sea $\phi(\frac{n}{m}) = [\phi(1)]^{n/m}$

dado el complejo $\phi(1)$ existe por el Teorema 1 - (c) un $\alpha \in \mathbb{C}$, tal que $\phi(1) = e^{\alpha}$, de lo cual concluimos que.

$$\phi(\tfrac{n}{m}) = [\phi(1)]^{n/m} = e^{\frac{\alpha n}{m}}$$

Dado $x \in \mathbb{R}$ existe una sucesión de racionales $\{q_n \mid n \geq 0\}$, tal que $\lim_{n\to\infty} q_n = x$, y por ser ϕ continua $\lim_{n\to\infty} \phi(q_n) = \phi(x)$ y por tanto como también e es continua tendremos que co

mo

$$\lim_{n\to\infty} \alpha q_n = \alpha x \ , \quad \lim_{n\to\infty} e^{\alpha q_n} = e^{\alpha x},$$

pero $\phi(q_n) = e^{\alpha q_n}$, de lo cual concluimos que $\overline{/\phi(x) = e^{\alpha x}/}$

Un razonamiento análogo desarrollamos para concluir que $\overline{/\ \phi(iy) = e^{\beta y}/}$ con $\beta \in \mathbb{C}$, de las dos conclusiones anteriores tendremos que.

$$\phi(z) = \phi(x+iy) = \phi(x)\ \phi(iy) = e^{\alpha x}\ e^{\beta y} = e^{\alpha x+\beta y}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

Por encontrar a y b consideremos lo siguiente:

$$\alpha x+\beta y = a(x+iy) + b(x-iy)$$

si

$$\alpha_1 x+i\alpha_2 x+\beta_1 y+i\beta_2 y = a_1 x+ia_2 x+ia_1 y-a_2 y+b_1 x+ib_2 x-ib_1 y+b_2 y$$

$$\begin{cases} \alpha_1 x+\beta_1 y = a_1 x-a_2 y+b_1 x+b_2 y \\ \\ \alpha_2 x+\beta_2 y = a_2 x+a_1 y+b_2 x-b_1 y \end{cases}$$

para $x = 0 \quad y = 1$ $\qquad$ $x = 1 \quad y = 0$

$$\begin{cases} \beta_1 = b_2 - a_2 \\ \beta_2 = a_1 - b_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_1 = a_1 + b_1 \\ \alpha_2 = a_2 + b_2 \end{cases}$$

por tanto:

$$\alpha_2 + \beta_1 = 2\, b_2 \quad \text{o sea} \quad b_2 = \frac{\alpha_2 + \beta_1}{2}$$

$$\alpha_2 - \beta_1 = 2\, a_2 \quad \text{o sea} \quad a_2 = \frac{\alpha_2 - \beta_1}{2}$$

$$\alpha_1 + \beta_2 = 2\, a_1 \quad \text{o sea} \quad a_1 = \frac{\alpha_1 + \beta_2}{2}$$

$$\alpha_1 - \beta_2 = 2\, b_1 \quad \text{o sea} \quad b_1 = \frac{\alpha_1 - \beta_2}{2}$$

entonces $a = \left(\frac{\alpha_1 + \beta_2}{2}, \frac{\alpha_2 - \beta_1}{2}\right)$, $b = \left(\frac{\alpha_1 - \beta_2}{2}, \frac{\alpha_2 + \beta_1}{2}\right)$

ya que $exp(az+b\bar{z}) = exp\left(\frac{\alpha_1 + \beta_2}{2} x + \frac{\alpha_1 + \beta_2}{2} iy + i \frac{\alpha_2 - \beta_1}{2} x - \right.$

$$\left. - \frac{\alpha_2 - \beta_1}{2} y + \frac{\alpha_1 - \beta_2}{2} x - \frac{\alpha_1 - \beta_2}{2} iy + i \frac{\alpha_2 + \beta_1}{2} x + \frac{\alpha_2 + \beta_1}{2} y\right)$$

$$= exp(\alpha_1 x + i\alpha_2 x + \beta_1 y + i\beta_2 y) = exp(\alpha x + \beta y) = f(z)$$

por tanto F es suprayectiva.

(b) En la parte (a) se demostró que todos los homomorfismos continuos son de la forma

$$exp(az+b\bar{z}) \text{ con } a,\ b \in \mathbb{C}$$

Si f es homomorfismo holomorfo, f es $\mathbb{C}$ - diferenciable

y por tanto $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\omega) = 0$, para todo $\omega \in \mathbb{C}$,

Calculemos $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\omega)$; primero por definición

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\omega) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\omega) + i\,\frac{\partial f}{\partial y}(\omega)\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\omega) = \lim_{t\to 0}\frac{f(\omega+t)-f(\omega)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{e^{a(\omega+t)+b(\overline{\omega+t})}-e^{a\omega+b\bar{\omega}}}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{e^{a\omega+b\bar{\omega}}(e^{at+b\bar{t}}-1)}{t} = e^{a\omega+b\bar{\omega}}\,(a+b)$$

(ya que $e^{at+b\bar{t}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(at+b\bar{t})^n}{n!}$)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\omega) = \lim_{t\to 0}\frac{f(\omega+it)-f(\omega)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{e^{a(\omega+it)+b(\overline{\omega+it})}-e^{a\omega+b\bar{\omega}}}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{e^{a\omega+b\bar{\omega}}(e^{ait-bit}-1)}{t} = e^{a\omega+b\bar{\omega}}\,i(a-b)$$

entonces $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\omega) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\omega) + i\,\frac{\partial f}{\partial y}(\omega)\right) =$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{a\omega+b\bar{\omega}}(a+b) + ie^{a\omega+b\bar{\omega}}i(a-b)\right) = e^{a\omega+b\bar{\omega}}\cdot b$$

y por tanto $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\omega) = 0$ si y solamente si $b = 0$ de aquí concluimos que si f es un homomorismo holomorfo $f(z) = e^{az}$, y por lo tanto el subgrupo de $\mathbb{C}^2$ que corresponde a los homomorfismos holomorfos es $\mathbb{C} \times \{0\}$

(c) $F(a,b): \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ es suprayectiva si y solamente si - -

$a + b \neq 0$ y $Re\ (\frac{a-b}{a+b}) \neq 0$

$$F(a,\ b)\ [z] = exp(az + b\bar{z})$$

CONDICION NECESARIA:
Sea $\omega \in \mathbb{C}^*$, para que F sea suprayectiva, debe existir $z_1 \in \mathbb{C}$ tal que:

$$F(a,\ b)\ [z_1] = exp(az_1 + b\bar{z}_1) = \omega$$

Como $\omega \neq 0$, existe $\alpha \in \mathbb{C}$, tal que $e^{\alpha} = \omega$, por tanto

$$exp(az_1 + b\bar{z}_1 - \alpha) = 1$$

$$\text{o sea } az_1 + b\bar{z}_1 - \alpha = 2k\pi i \quad \text{con} \quad k \in Z$$

Si $a = a_1 + ia_2$ $z_1 = x_1 + iy_1$ $b = b_1 + ib_2$ $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$

tendremos:

$$(a_1 + ia_2)(x_1 + iy_1) + (b_1 + ib_2)(x_1 - iy_1) - \alpha_1 - i\alpha_2 = 2k\pi i$$

$$a_1x_1 + ia_1y_1 + ia_2x_1 - a_2y_1 + b_1x_1 - ib_1y_1 + ib_2x_1 + b_2y_1 - \alpha_1 - i\alpha_2 = 2k\pi i$$

o sea:

$$a_1x_1 - a_2y_1 + b_1x_1 + b_2y_1 = \alpha_1$$

y

$$a_1y_1 + a_2x_1 - b_1y_1 + b_2x_1 = \alpha_2 + 2k\pi$$

lo mismo que

$$(1)\text{---} \quad \begin{cases} x_1 (a_1 + b_1) + y_1 (b_2 - a_2) = \alpha_1 \\ \\ x_1 (a_2 + b_2) + y_1 (a_1 - b_1) = \alpha_2 + 2k\pi \end{cases}$$

entonces si suponemos que F es suprayectiva el sistema anterior tiene solución para (x_1, y_1) lo cual quiere decir que:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & b_2 - a_2 \\ \\ a_2 + b_2 & a_1 - b_1 \end{vmatrix} \neq 0$$

y $\quad \Delta = a_1^2 - b_1^2 - (b_2^2 - a_2^2) = a_1^2 + a_2^2 - (b_1^2 + b_2^2) =$

$$= |a|^2 - |b|^2$$

por tanto $a + b \neq 0$ pues si $a + b = 0 \quad \Delta = 0$

también $Re\ (\frac{a-b}{a+b})$ debe ser distinto de cero, ya que

$$Re\ (\frac{a-b}{a+b}) = Re\ \frac{a_1 - b_1 + i(a_2 - b_2)}{a_1 + b_1 + i(a_2 + b_2)} =$$

$$= Re\ \frac{[a_1 - b_1 + i(a_2 - b_2)]\,[a_1 + b_1 - i(a_2 + b_2)]}{[a_1 + b_1 + i(a_2 + b_2)]\,[a_1 + b_1 - i(a_2 + b_2)]} =$$

$$= Re\ \frac{(a_1 - b_1)(a_1 + b_1) - i(a_1 - b_1)(a_2 + b_2) + i(a_2 - b_2)(a_1 + b_1) + a_2^2 - b_2^2}{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2}$$

$$= Re\ \frac{a_2^2 - b_2^2\ a_1^2 - b_1^2 - ia_1 a_2 - ia_1 b_2 + ib_1 a_2 + ib_1 b_2 + ia_1 a_2 + ia_1 b_2 - ib_1 a_2 - ib_1 b_2}{|a + b|^2}$$

$$= Re\ \frac{a_1^2+a_2^2-(b_1^2+b_2^2)+i(2b_1a_2-2a_1b_2)}{|a+b|^2} =$$

$$= \frac{a_1^2+a_2^2-(b_1^2+b_2^2)}{|a+b|^2} = \frac{|a|^2-|b|^2}{|a+b|^2}$$

con esto queda demostrado la condición necesaria.

CONDICION SUFICIENTE:

Ahora si $Re\ (\frac{a-b}{a+b}) \neq 0$ con $a+b \neq 0$ quiere decir $\frac{|a|^2-|b|^2}{|a+b|^2} \neq 0$ y como $a+b \neq 0$ tendremos que $|a|^2-|b|^2 \neq 0$ lo cual quiere decir que el sistema (1) tiene solución única y por lo tanto F es suprayectiva, con lo cual queda demostrada la condición suficiente.

Sea ahora $k = \{z \mid F(a,b)[z] = 1\}$ demostraremos que, k es isomorfo a Z, dado que F es suprayectiva.

Sea $z_1 \in k$ tendremos:

$$exp(az_1 + b\bar{z}_1) = 1$$

Si $a = a_1 + ia_2$, $z_1 = x_1 + iy_1$, $b = b_1 + ib_2$, entonces:

$$x_1(a_1+b_1) + y_1(b_2-a_2) = 0$$

$$x_1(a_2+b_2) + y_1(a_1-b_1) = 2q_1\pi \quad \text{con } q_1 \in Z$$

lo mismo que:

$$x_1 = \frac{-2q_1\pi(b_2 - a_2)}{|a+b|^2}$$

$$y_1 = \frac{2q_1\pi(a_1 + b_1)}{|a+b|^2} \qquad \text{-------(2)}$$

entonces sea T la aplicación que a $z_1 \in k$ le asocia - $q_1 \in Z$, esta aplicación es inyectiva ya que si $z_1 \neq z_2$

$T(z_1) = q_1$ debe ser distinto a $T(z_2) = q_2$

puesto que si $q_1 = q_2$ de (2) concluiríamos $z_1 = z_2$, - por tanto $T(z_1) \neq T(z_2)$ y la aplicación es inyectiva.

Ahora demostraremos que es suprayectiva.

Sea $q \in Z$, como F es suprayectiva quiere decir que el siguiente sistema:

$$x_1(a_1 + b_1) + y_1(b_2 - a_2) = 0$$

$$x_1(a_2 + b_2) + y_1(a_1 - b_1) = 2q\pi$$

tiene solución para (x_1, y_1) y por tanto existe - - - $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{C}$, tal que $T(z_1) = q$.

(d) Demostremos ahora que si $a + b \neq 0$ y $Re\left(\frac{a-b}{a+b}\right) = 0$ y - ab es un número real positivo entonces $F(a,b)$ es inyectiva.

Supongamos $a = a_1 + ia_2$, $b = b_1 + ib_2$, $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$.

Ya vimos anteriormente $Re\ \frac{a-b}{a+b} = \frac{|a|^2-|b|^2}{|a+b|^2}$

Como $Re\ \frac{a-b}{a+b} = 0$ y $a + b \neq 0$ entonces $|a|^2-|b|^2 = 0$

además $ab = (a_1+ia_2)(b_1+ib_2) = a_1b_1-a_2b_2+i(a_1b_2+a_2b_1)$

$$y \quad a_1b_1 - a_2b_2 > 0,\ a_1b_2 + a_2b_1 = 0$$

Sea ahora $F(a,b)[z_1] = F(a,b)[z_2]$

entonces $exp(az_1 + b\bar{z}_1) = exp(az_2 + b\bar{z}_2)$

lo mismo que $az_1 + b\bar{z}_1 - az_2 - b\bar{z}_2 = 2k\pi i$

de lo cual obtenemos el siguiente sistema:

$$(a_1+b_1)(x_1-x_2)+(b_2-a_2)(y_1-y_2) = 0$$

$$(a_2+b_2)(x_1-x_2)+(a_1-b_1)(y_1-y_2) = 2k\pi$$

Multiplicando la primera igualdad por (a_1-b_1) y la segunda por (a_2-b_2) y sumándolas obtenemos

$$(a_1^2-b_1^2)(x_1-x_2) + (a_2^2-b_2^2)(x_1-x_2) = 2k\pi\ (a_2-b_2)$$

o sea $$(x_1-x_2)(|a|^2-|b|^2) = 2k\pi\ (a_2-b_2)$$

por tanto $2k\pi\,(a_2 - b_2) = 0$ pues $|a|^2 - |b|^2 = 0$

Si $a_2 - b_2 \neq 0$ concluimos que $k = 0$

Si $a_2 - b_2 = 0$ con $a_2 = 0 = b_2$ entonces

$$(a_1 - b_1)(y_1 - y_2) = 2k\pi$$ pero como $|a|^2 - |b|^2 = 0$

se tiene que $a_1^2 + a_2^2 - b_1^2 - b_2^2 = 0$ o sea tendríamos que $a_1^2 - b_1^2 = 0$, $a_1 = \pm\, b_1$

Si $a_1 = b_1$ entonces $2k\pi = 0$ y por tanto $k = 0$

Si $a_1 = -b_1$ nos lleva a una contradicción

ya que $a_1 b_1 - a_2 b_2 = a_1 b_1 = - b_1^2$ lo cual no sería mayor que cero.

La última posibilidad es que $a_2 - b_2 = 0$ con $a_2 = b_2 \neq 0$ entonces como

$$a_1 b_2 + a_2 b_1 = 0,$$ tendríamos

$$a_1 b_2 = - a_2 b_1,$$ y por tanto

$$a_1 = - b_1$$

lo cual no puede ser pues $a_1 b_1 - a_2 b_2 > 0$ por hipótesis y en este caso.

$$a_1 b_1 - a_2 b_2 = - b_1^2 - b_2^2$$

lo cual no es mayor que cero; esto nos implica que bajo nuestras hipótesis esta última posibilidad no se cumple y por tanto $k = 0$.

Finalmente tenemos un sistema homogéneo de ecuaciones:

$$(a_1 + b_1)(x_1 - x_2) + (b_2 - a_2)(y_1 - y_2) = 0$$

$$(a_2 + b_2)(x_1 - x_2) + (a_1 - b_1)(y_1 - y_2) = 0$$

donde $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & b_2 - a_2 \\ a_2 + b_2 & a_1 - b_1 \end{vmatrix} = |a|^2 - |b|^2 = 0$

por tanto sólo tiene la solución trivial

$$x_1 - x_2 = 0 \quad y_1 - y_2 = 0$$

donde $x_1 = x_2 \quad y_1 = y_2$ ó sea $z_1 = z_2$

de lo cual concluimos que bajo nuestras hipótesis - - $F(a, b)$ es inyectiva.

CAPITULO 6

TEOREMA Y FORMULA DE CAUCHY.

APLICACIONES. FUNCION LOGARITMO.

SECCION 0: Caminos, carreteras y homotopías.

DEFINICION Y NOTACIONES 1:

(a) Un *camino* es una aplicación continua γ de un intervalo cerrado $[a,b]$, de la recta numérica, en $\mathbb{C}$.

(b) Un camino $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ es llamado *carretera* si existe una partición

$$a_0 = a < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < b = a_{n+1}$$

de $[a,b]$, tal que para cada k, $k = 0,\ldots,n$ y cada $t \in]a_k, a_{k+1}[$

$$\gamma'(t) = \lim_{\substack{h\to 0 \\ h\neq 0}} \frac{\gamma(t+h)-\gamma(t)}{h} \qquad \text{existe,}$$

y existen también:

$$\gamma_+'(a_k) = \lim_{\substack{h\to 0 \\ h>0}} \frac{\gamma(a_k+h)-\gamma(a_k)}{h}, \gamma_-'(a_{k+1}) = \lim_{\substack{h\to 0 \\ h<0}} \frac{\gamma(a_{k+1}+h)-\gamma(a_{k+1})}{h}$$

Además la función $\gamma' : [a_k, a_{k+1}] \to \mathbb{C}$ definida por

$$\gamma'(t) = \begin{cases} \gamma'(t), & \text{si } a_k < t < a_{k+1} \\ \gamma_+'(a_k), & \text{si } t = a_k \\ \gamma_-'(a_{k+1}), & \text{si } t = a_{k+1} \end{cases}$$

es continua. Esto significa que γ es continuamente - diferenciable en todos los puntos de $[a,b]$ excepto en $a_1, \ldots, a_n$, y en dichos puntos las derivadas a la derecha e izquierda existen.

(c) Un camino $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ es llamdo cerrado si

$$\gamma(a) = \gamma(b)$$

(d) Un camino o carretera $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ es llamado *simple* si $t, t' \in [a,b]$, $t < t'$ implica $\gamma(t) \neq \gamma(t')$ excepto si $t = a$ y $t' = b$.

(e) Una carretera cerrada se llama *circuito*.

(f) Si $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ es un camino $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$ se llaman - extremos del camino, $\gamma(a)$ es el origen del camino y $\gamma(b)$ el fin.

DEFINICION 2: Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$.

(a) Los caminos $\gamma, \gamma_1 : [a,b] \to \Omega$ tales que $\gamma(a) = \gamma_1(a)$ y $\gamma(b) = \gamma_1(b)$ se llaman Ω - *homótopos*, si existe una -

aplicación $\varphi: [a,b] \times [0,1] \to \Omega$ *continua* y tal que:

$$\varphi(t,0) = \gamma(t) \quad y \quad \varphi(t,1) = \gamma_1(t) \text{ para todo } t \in [a,b].$$

$$\varphi(a,s) = \gamma(a) = \gamma_1(a) \quad y \; \varphi(b,s) = \gamma(b) = \gamma_1(b) \text{ para todo } s \in [0,1]$$

(b) Los caminos cerrados $\gamma, \gamma_1 : [a,b] \to \Omega$ se llaman Ω - *homótopos* si existe una *aplicación* $\varphi: [a,b] \times [0,1] \to \Omega$ - *continua* y tal que:

$$\varphi(t,0) = \gamma(t) \; y \; \varphi(t,1) = \gamma_1(t) \quad \text{para todo} \quad t \in [a,b].$$

$$\varphi(a,s) = \varphi(b,s) \quad \text{para todo} \quad s \in [0,1]$$

Un camino cerrado $\gamma: [a,b] \to \Omega$ se llama Ω - *homótopo* a 0 si γ es Ω - homótopo a un camino cerrado - - - $\gamma_1 : [a,b] \to \Omega$ constante, y esto es $\gamma_1(t) = \gamma_1(a) = \gamma_1(b)$ para todo $t \in [a,b]$

(c) Notación: Si $\gamma, \gamma_1 : [a,b] \to \Omega$, tales que $\gamma(a) = \gamma_1(a)$, $\gamma(b) = \gamma_1(b)$ son dos caminos Ω - homótopos en una homotopía $\varphi: [a,b] \times [0,1] \to \Omega$, el camino $\gamma_s [a,b] \to \Omega$, - $\gamma_s(t) = \varphi(t,s)$ se llama camino intermedio al tiempo s. Los γ_s tienen todos el mismo origen $\gamma(a)$ y el mismo fin $\gamma(b)$.

Si $\gamma, \gamma_1 : [a,b] \to \Omega$ son dos caminos cerrados Ω - homótopos en un homotopía $\varphi [a,b] \times [0,1] \to \Omega$, el camino - $\gamma_s : [a,b] \to \Omega$, $\gamma_s(t) = \varphi(t,s)$ se llama camino intermedio al tiempo s. Los γ_s son cerrados.

PROPOSICION 0:

(a) Si $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \to \Omega$ son tres caminos, tales que $\gamma(a) = \gamma_1(a) = \gamma_2(a)$ y $\gamma(b) = \gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ y si γ y γ_1 son Ω - homótopos, γ_1 y γ_2 son Ω - homótopos, entonces γ y γ_2 son Ω - homótopos.

(b) Si $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \to \Omega$ son 3 circuitos y por pares $\{\gamma, \gamma_1\}$ y $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ son Ω - homótopos entonces γ y γ_2 son Ω - homótopos.

DEMOSTRACION: En el Apéndice 6.

DEFINICION 3: *Composición de caminos*

Si $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ y $\gamma_2 : [b,c] \to \mathbb{C}$ son dos caminos, tales que $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, entonces se llama *composición* de γ_1 y γ_2 y se denota $\gamma_2 \gamma_1$, al camino $\gamma_3 : [a,c] \to \mathbb{C}$ definido por

$$\gamma_3(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{si } t \in [a,b] \\ \gamma_2(t) & \text{si } t \in [b,c] \end{cases}$$

PROPOSICION 1: Si $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [b,c] \to \mathbb{C}$ son dos carreteras, tales que $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, entonces la composición $\gamma_2 \gamma_1$ es también una carretera.

DEMOSTRACION: En el Apéndice 6.

NOTA SOBRE HOMOTOPIAS: En el caso (a) de la definición 2, si no se pide que $\varphi(a,s) = \gamma(a)$ y $\varphi(b,s) = \gamma(b)$ para todos los $s \in [0,1]$, definición es vacía porque cualesquiera dos caminos -

contenidos en Ω, serían Ω - homótopos. En el caso de (b) de la definición 2, si no se pide que $\varphi(a,s) = \varphi(b,s)$ para todos los $s \in [0,1]$, la definición también sería vacía, porque cualesquiera dos caminos serían Ω - homótopos.

SECCION 1: Integración sobre carretera.

Recordaremos primero la teoría de la integración de las funciones de una variable real.

DEFINICION 4: Una función $\varphi: [a,b] \to \mathbb{C}$ de una variable t con valores complejos, definida sobre el intervalo $[a,b]$ será llamada *reglada*, si existe una partición

$$a_0 = a < a_1 < a_2 < \ldots\ldots < a_r < b = a_{r+1},$$

tal que para cada $k = 0,1,2,\ldots,n$, $\varphi \mid]a_k, a_{k+1}[$ es continua, y además los límites $\lim_{\substack{t\to a_k \\ t>a_k}} \varphi(t)$ y $\lim_{\substack{t\to a_{k+1} \\ t<a_{k+1}}}$ existen. Y esto significa que φ es continua en todos los puntos de $[a,b]$ excepto - - $a_1,\ldots\ldots,a_n$, donde puede tomar valores arbitrarios, aunque en - esos puntos los límites por la derecha e izquierda existen. Sea $R(a,b)$ el conjunto de las funciones regladas sobre $[a,b]$.

PROPOSICION 2: El conjunto $R(a,b)$ es una ágebra sobre $\mathbb{C}$.

DEMOSTRACION: En el Apéndice 6.

DEFINICION - TEOREMA 5: Existe una aplicación lineal - - $R(a,b) \to \mathbb{C}$ llamada *integral*, definida como:

$\varphi \longrightarrow \int_a^b \varphi(t)\ dt$ y que tiene las propiedades siguientes.

(1) $\varphi \longrightarrow \int_a^b \varphi(t)\ dt$ es lineal

(2) Si $\varphi, \psi \in R(a,b)$, ψ es real positiva y si $|\varphi(t)| \leqslant \psi(t)$ en todos los puntos t donde φ y ψ son ambas continuas:

$$\left| \int_a^b \varphi(t)\ dt \right| \leqslant \int_a^b \psi(t)\ dt$$

En particular si $M = Sup\ \{|\ \varphi(t)\ |: t \in [a,b]$ y t punto de continuidad de $\varphi\}$,

$$\left| \int_a^b \varphi(t)\ dt \right| \leqslant (b-a)\ M.$$

(3) Si $a < c < b$, $\int_a^b \varphi(t)\ dt = \int_a^c \varphi(t)\ dt + \int_c^b \varphi(t)\ dt$

Es claro que si $\varphi \in R(a,b)$ entonces las restricciones de φ a $[a,c]$ y $[c,b]$ son regladas.

(4) Sea σ: $[c,d] \to \mathbb{R}$ una aplicación continuamente diferenciable y tal que $\frac{d\sigma}{dt}(t) \geqslant 0$ para todo $t \in [c,d]$.

Si $a = \sigma(c)$ y $b = \sigma(d)$, entonces

$$\int_a^b \varphi(s)\ ds = \int_c^d \varphi(\sigma(t))\ \frac{d\sigma}{dt}(t)\ dt$$

Ahora podemos introducir la integración sobre carreteras.

TEOREMA - DEFINICION 1: Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$ y $\gamma:[a,b]\to\Omega$ una carretera. Para todo $f \in C(\Omega)$ la función $[a,b] \to \mathbb{C}$, $t \to f(\gamma(t))\gamma'(t)$ es una función reglada. Denotemos por el símbolo $\int_\gamma f(z)\,dz$ a la integral $\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$ de esa función reglada. Entonces la aplicación $C(\Omega) \to \mathbb{C}$, definida como:

$$f \to \int_\gamma f(z)\,dz$$

tiene las siguientes propiedades:

(1') Es lineal.

(2') $\left| \int_\gamma f(z)\,dz \right| \leq M\, L(\gamma)$ donde

$$M = Sup\,\{|f(z)| : z = \gamma(t) \text{ para un } t \in [a,b]\}$$

y $$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$$

(3') Si $\gamma = \gamma_2\gamma_1$ donde $\gamma_1: [a,c] \to \Omega$ y $\gamma_2: [c,b] \to \Omega$ son dos carreteras tales que $\gamma_1(c) = \gamma_2(c)$ entonces:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

(4') Sea $\sigma: [c,d] \to \mathbb{R}$ una aplicación continuamente diferenciable y tal que $\frac{d\sigma}{dt}(t) \geq 0$ para todos los $t \in [c,d]$ y tal que $\sigma(c) = a$, $\sigma(d) = b$. Sea $\gamma_1: [c,d] \to \Omega$ el camino $\gamma_1(t) = \gamma(\sigma(t))$. Entonces γ_1 es una carretera y:

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma} f(z)\,dz$$

En el caso que $\frac{d\sigma}{dt}(t) \leq 0$ y $\sigma(c) = b$, $\sigma(d) = a$

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = -\int_{\gamma} f(z)\,dz$$

DEMOSTRACION: Como f es continua y γ es continua, entonces la función $f_0\,\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ definida como $t \to f(\gamma(t))$ es continua y por la definición de carretera la función $\gamma'\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ definida $t \to \gamma'(t)$ es reglada. La función γ' no fue definida en los puntos de descontinuidad $a_1,\ldots,a_n$ (ver la definición 1 - (b)), mas la definiremos en esos puntos de manera arbitraria, lo cual no tiene consecuencias en esto que estamos haciendo.

De la proposición 2 la función $[a,b] \to \mathbb{C}$ definida por $t \to f(\gamma(t))\,\gamma'(t)$ es reglada y entonces $\int_{\gamma} f(z)\,dz$ está bien definida.

Las propiedades, 1' - 4' son consecuencia de la Definición-Teorema 5.

(1') Sea $A(f) = \int_{\gamma} f(z)\,dz$.

Demostraremos: $A(f+g) = A(f)+A(g)$ y $A(\lambda f) = \lambda A(f)$ lo cual implicará que $f \to \int_{\gamma} f(z)\,dz$ es lineal.

$$A(f+g) = \int_{\gamma} (f+g)(z)\,dz = \int_a^b (f+g)(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt =$$

$$\int_a^b [f(\gamma(t))+g(\gamma(t))]\gamma'(t)\,dt = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt +$$

$$+ \int_a^b g(\gamma(t))\gamma'(t)\ dt = \int_\gamma f(z)\ dz + \int_\gamma g(z)\ dz =$$

$$= A(f) + A(g)$$

$$A(\lambda f) = \int_\gamma (\lambda f)(z)\ dz = \int_a^b (\lambda f)(\gamma(t))\gamma'(t)\ dt =$$

$$= \int_a^b \lambda f(\gamma(t))\gamma'(t)\ dt = \lambda \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\ dt =$$

$$= \lambda \int_\gamma f(z)\ dz = \lambda A(f)$$

NOTA: Aquí hemos utilizado la parte 1 de la definición - Teorema 5.

(2') Sea $M = Sup\ \{|f(z)| \mid z = \gamma(t)$ para una $t \in [a,b]\}$ entonces $|f(\gamma(t))| \leq M$ para todo $t \in [a,b]$ y por lo tanto $|f(\gamma(t))\gamma'(t)| \leq M\ |\gamma'(t)|$.

Como $M\ |\gamma'(t)|$ es real positiva y reglada, además - - $f(\gamma(t))\gamma'(t)$ es reglada entonces por la parte 2 de la Definición - Teorema 5:

$$\left| \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\ dt \right| \leq \int_a^b M\ |\gamma'(t)|\ dt$$

o sea $$\left| \int_\gamma f(z)\ dz \right| \leq M\ L(\gamma)$$

donde $$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\ dt$$

(3') Como $f(\gamma(t))\,\gamma'(t)$ es reglada y $a < c < b$ entonces - por la propiedad 3 de la Definición Teorema 5

$$\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_a^c f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt +$$

$$+ \int_c^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_a^c f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)\,dt +$$

$$+ \int_c^b f(\gamma_2(t))\gamma_2'(t)\,dt$$

por lo tanto $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$

(4') $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$, por la propiedad (4) la Definición - Teorema 5.

$$\int_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s)\,ds = \int_c^d f(\gamma(\sigma(t)))\,\gamma'(\sigma(t))\,\frac{d\sigma}{dt}(t)\,dt$$

Pero $\gamma_1(t) = \gamma(\sigma(t))$ $\gamma_1'(t) = \gamma'(\sigma(t))\,\frac{d\sigma}{dt}(t)$ en todo punto de continuidad de $\gamma'(t)$

$$\int_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s)\,ds = \int_c^d f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)\,dt =$$

$$= \int_{\gamma_1} f(z)\,dz$$

por lo tanto $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz$

DEFINICION 6: *Generalización de la composición de caminos.*

Si $\gamma_k: [a_k, b_k] \to \mathbb{C}$; $k = 1,\ldots,n$ son n caminos tales que $\gamma_k(b_k) = \gamma_{k+1}(a_{k+1})$ para todo $k = 1,\ldots,n-1$, entonces la composición $\gamma_n \gamma_{n-1} \ldots \gamma_1$ de $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ es el camino $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$, donde $a = a_1$ y $b = a + \ell_n$ donde a su vez:

$$\ell_1 = b_1 - a_1,\ \ell_2 = b_1 - a_1 + b_2 - a_2, \ldots, \ell_k = \sum_{j=1}^{k} (b_j - a_j)$$

(Es claro que $\ell_1 < \ell_2 < \ldots < \ell_n$) y $\gamma(t) = \gamma_k(t - a_1 - \ell_{k-1} + a_k)$ si $a + \ell_{k-1} \leq t \leq a + \ell_k$ con $2 \leq K \leq n-1$.

Es claro que si los $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ son carreteras, γ es una carretera y que si $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ son circuitos γ es un circuito.

PROPOSICION 3: *Generalización de la propiedad 3'.*

Sean Ω un abierto y $\gamma_k: [a_k, b_k] \to \Omega$; $k = 1,2,\ldots,n$, n carreteras tales que $\gamma_k(b_k) = \gamma_{k+1}(a_{k+1})$ para todo k, $1 \leq k \leq n-1$. Sea $\gamma: [a,b] \to \Omega$ la composición $\gamma_n \gamma_{n-1} \ldots \gamma_1$. Entonces si $f \in C(\Omega)$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)\,dz$$

DEMOSTRACION: Sea $\ell_k = \sum_{j=1}^{k} (b_j - a_j)$; $j = 1,\ldots,k$ y sea para todo $k = 1,\ldots,n$

$\tilde{\gamma}_k : [a_1 + \ell_{k-1}, a_1 + \ell_k] \to \Omega$ la carretera

$\tilde{\gamma}_k(t) = \gamma_k(t - a_1 - \ell_{k-1} + a_k)$. Entonces por la definición b: $\gamma = \tilde{\gamma}_n \tilde{\gamma}_{n-1} \ldots \tilde{\gamma}_1$, donde ahora la composición es en el sentido de la definición 3. Por la propiedad (3') del Teorema - Definición 1

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\tilde{\gamma}_k} f(z)\, dz$$

Más aun, por la propiedad (4') (en el caso k: $\sigma(t) = t - a_1 - \ell_{k-1} + a_k$)

$$\int_{\tilde{\gamma}_k} f(z)\, dz = \int_{\gamma_k} f(z)\, dz$$

por lo tanto $\int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)\, dz$

COMENTARIO : Esta proposición es muy útil en la práctica para integrar sobre carreteras formadas de pedazos cada uno parametrizado por si mismo independiente de los otros.

SECCION 2: *Teorema de Cauchy.*

En el próximo párrafo demostraremos el Teorema fundamental.

TEOREMA 2:

(a) Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y γ, $\gamma_1 : [a,b] \to \Omega$ dos carrete-

ras tales que $\gamma(a) = \gamma_1(a)$, $\gamma(b) = \gamma_1(b)$ y Ω - homóto pas. Si $f: \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa, entonces

$$\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = \int_{\gamma} f(z)\, dz$$

(b) Sean $\gamma, \gamma_1 : [a,b] \to \Omega$ dos circuitos Ω - homótopos. Si $f: \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa, entonces

$$\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = \int_{\gamma} f(z)\, dz$$

Antes de demostrar este Teorema enunciaremos algunos - lemas y proposiciones.

LEMA 1: Sea Ω un abierto y $\gamma, \gamma_1 : [a,b] \to \Omega$ dos carreteras continuamente diferenciables y tales que para todo $t \in [a,b]$ el segmento de recta $\overline{\gamma(t)\ \gamma_1(t)}$ de extremos $\gamma(t)$ y $\gamma_1(t)$ pertenece a Ω.

Entonces si $f: \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa.

$$\int_{\gamma_1} f(z)\, dz - \int_{\gamma} f(z)\, dz = \int_0^1 f((1-s)\gamma(b)+s\gamma_1(b))(\gamma_1(b)-\gamma(b))\, ds -$$

$$- \int_0^1 f((1-s)\gamma(a)+s\gamma_1(a))(\gamma_1(a)-\gamma(a))\, ds =$$

$$= (\gamma_1(b)-\gamma(b)) \int_0^1 f((1-s)\gamma(b)+s\gamma_1(b))\,ds - (\gamma_1(a)-\gamma(a)) \int_0^1 f((1-s)\gamma(a)+s\gamma_1(a))\,ds$$

DEMOSTRACION: En el Apéndice 6.

PROPOSICION 4:

(a) Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$; γ, δ: $[a,b] \to \Omega$ dos carreteras tales que $\gamma(a) = \delta(a)$, $\gamma(b) = \delta(b)$ y tales que para todo $t \in [a,b]$ el segmento de recta $\overline{\gamma(t)\ \delta(t)}$, de extremos $\gamma(t)$ y $\delta(t)$, pertenece a Ω y si f: $\Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa, entonces

$$\int_{\gamma} f(z)\ dz = \int_{\delta} f(z)\ dz$$

(b) Si γ, δ: $[a,b] \to \Omega$ son dos circuitos tales que para todo $t \in [a,b]$ el segmento de recta $\overline{\gamma(t)\ \delta(t)}$ pertenece a Ω y si f: $\Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa, entonces:

$$\int_{\gamma} f(z)\ dz = \int_{\delta} f(z)\ dz$$

DEMOSTRACION: En el Apéndice 6.

LEMA 2: Si Ω es un abierto de $\mathbb{C}$ y K un compacto contenido en Ω, existe un número positivo $r(K) > 0$ tal que para todo $z \in k$

$$D(z, r(K)) \subset \Omega$$

DEMOSTRACION: En el Apéndice 6.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 2:

Para demostrar el teorema 2 vamos a construir una familia $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_N$ de carreteras definidas de $[a,b] \to \Omega$ tales que $\delta_0 = \gamma$, $\delta_N = \gamma_1$ la proposición 3 sea aplicable a cada par (δ_k, δ_{k+1}) $k = 0,1,\ldots,N-1$.

En los casos (a) y (b) existe una aplicación continua - - $\varphi: [a,b] \times [0,1] \to \Omega$ tal que:

(1) $\varphi(t,0) = \gamma(t)$, $\varphi(t,1) = \gamma_1(t)$ para todo $t \in [a,b]$

(2) Caso (a):

$$\varphi(a,s) = \gamma(a) = \gamma_1(a) \text{ y } \varphi(b,s) = \gamma(b) = \gamma_1(b)$$

para todos los $s \in [0,1]$

Caso (b):

$$\varphi(a,s) = \varphi(b,s) \text{ para todos los } s \in [0,1]$$

Como $[a,b] \times [0,1]$ es compacto, el conjunto $K = \varphi([a,b]\times[0,1])$ es compacto. Sea r el número $r(K)$ que el lema 2 asocia a K.

Existe un entero $N > 1$ tal que si $(t,s), (t',s') \in [a,b] \times [0,1]$ y $|t-t'| \leq \frac{b-a}{N}$, $|s-s'| \leq \frac{1}{N}$ · entonces

$$|\varphi(t,s) - \varphi(t',s')| \leq \frac{r}{2} \cdot$$

Sea $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots\ldots < a_{N+1} < a_N = b$ la partición $a_k = a + \frac{(b-a)}{N} \cdot k$ de $[a,b]$. Para todo $k = 0,1,\ldots,N$ definamos la carretera $\delta_k: [a,b] \to \mathbb{C}$ así:

$$\delta_0 = \gamma \qquad \delta_N = \gamma_1$$

Para $1 \leq k \leq N - 1$

$$\delta_k(t) = \left(\frac{a_{j+1} - t}{a_{j+1} - a_j}\right) \varphi\left(a_j, \frac{k}{N}\right) + \left(\frac{t - a_j}{a_{j+1} - a_j}\right) \varphi\left(a_{j+1}, \frac{k}{N}\right)$$

Si $a_j \leq t \leq a_{j+1}$

δ_k es una linea poligonal que pasa por los puntos - - - $\{\varphi(a_j, \frac{k}{N}) \mid j = 0, 1, \ldots, N-1\}$, y por lo tanto es claro que es una carretera.

Veamos primero que todas las δ_k están contenidas en Ω; esto es claro para δ_0 y δ_N.

Si $t \in [a, b]$ existe una j tal que $a_j \leq t \leq a_{j+1}$ y - - -

$$\delta_k(t) - \varphi\left(a_j, \frac{k}{N}\right) = \left(\frac{t - a_j}{a_{j+1} - a_j}\right) \left[\varphi\left(a_{j+1}, \frac{k}{N}\right) - \varphi\left(a_j, \frac{k}{N}\right)\right]$$

Como $|t - a_j| \leq |a_{j+1} - a_j|$, entonces:

$$|\delta_k(t) - \varphi\left(a_j, \frac{k}{N}\right)| < |\varphi\left(a_{j+1}, \frac{k}{N}\right) - \varphi\left(a_j, \frac{k}{N}\right)|$$

y puesto que $|a_{j+1} - a_j| = \frac{b-a}{N}$ entonces:

$$|\delta_k(t) - \varphi\left(a_j, \frac{k}{N}\right)| \leq \frac{r}{2}, \text{como } \varphi\left(a_j, \frac{k}{N}\right) \in K$$

$$\delta_k(t) \in \mathcal{D}\left[\varphi\left(a_j, \frac{k}{N}\right), r\right] \subset \Omega$$

Lo segundo que vamos a ver es que todos los pares (δ_k, δ_{k+1});

$k = 0, 1, 2, \ldots, N - 1$ satisfacen las condiciones de la propiedad 4:

Sea $t \in [a, b]$, existe una $0 \leq j \leq N-1$ tal que $t \in [a_j, a_{j+1}]$. En el caso $1 \leq k \leq N - 2$

$$\delta_{k+1}(t) = \left(\frac{a_{j+1} - t}{a_{j+1} - a_j}\right) \varphi\left(a_j, \frac{k+1}{N}\right) + \left(\frac{t - a_j}{a_{j+1} - a_j}\right) \varphi\left(a_{j+1}, \frac{k+1}{N}\right)$$

$$\delta_k(t) = \left(\frac{a_{j+1} - t}{a_{j+1} - a_j}\right) \varphi\left(a_j, \frac{k}{N}\right) + \left(\frac{t - a_j}{a_{j+1} - a_j}\right) \varphi\left(a_{j+1}, \frac{k}{N}\right)$$

Los cuatro puntos $\varphi\left(a_j, \frac{k}{N}\right)$, $\varphi\left(a_{j+1}, \frac{k}{N}\right)$, $\varphi\left(a_j, \frac{k+1}{N}\right)$ y $\varphi\left(a_{j+1}, \frac{k+1}{N}\right)$ pertenecen al disco $\mathcal{D}\left(\varphi\left(a_j, \frac{k}{N}\right), \frac{r}{2}\right)$ entonces los dos puntos $\delta_k(t)$, $\delta_{k+1}(t)$ pertenecen a ese disco y en consecuencia el segmento $\overline{\delta_k(t)\ \delta_{k+1}(t)} \subset \mathcal{D}\left(\varphi\left(a_j, \frac{k}{N}\right), \frac{r}{2}\right) \subset \Omega$.

Si ahora $k = 0$

$$\delta_0(t) = \gamma(t) = \varphi(t, 0) \quad \text{y}$$

$$\delta_1(t) = \left(\frac{a_{j+1} - t}{a_{j+1} - a_j}\right) \varphi\left(a_j, \frac{1}{N}\right) + \left(\frac{t - a_j}{a_{j+1} - a_j}\right) \varphi\left(a_{j+1}, \frac{1}{N}\right)$$

Como los tres puntos $\varphi(t, 0)$, $\varphi\left(a_j, \frac{1}{N}\right)$ y $\varphi\left(a_{j+1}, \frac{1}{N}\right)$ pertenecen al disco $\mathcal{D}\left(\varphi\left(a_j, \frac{1}{N}\right), \frac{r}{2}\right)$, el segmento $\overline{\delta_0(t)\ \delta_1(t)}$ pertenece a ese disco y por lo tanto a Ω.

Análogamente se prueba que si $k = N - 1$ el segmento

$\overline{\delta_{N-1}(t)\ \delta_N(t)}$ está contenido en Ω.

Finalmente:

En el caso (a)

$$\delta_k(a) = \varphi(a, \frac{k}{N}) = \varphi(a, \frac{k+1}{N}) = \delta_{k+1}(a)$$

$$\delta_k(b) = \varphi(b, \frac{k}{N}) = \varphi(b, \frac{k+1}{N}) = \delta_{k+1}(b)$$

ó sea δ_k y δ_{k+1} tienen el mismo origen y el mismo fín.

En el caso (b)

$$\delta_k(a) = \varphi(a, \frac{k}{N}) = \varphi(b, \frac{k}{N}) = \delta_k(b)$$

para toda k, entonces los δ_k son circuitos.

Por lo tanto para caso (a) y (b) podemos aplicar la proposición 4 a los pares $(\delta_k , \delta_{k+1})$, $k = 0,1,\ldots,N-1$, y entonces

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\delta_0} f(z)\,dz = \int_{\delta_1} f(z)\,dz = \ldots\ldots =$$

$$= \int_{\delta_{N-1}} f(z)\,dz = \int_{\delta_N} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz$$

COROLARIO DEL TEOREMA 2: Caso particular de los circuitos

Ω - homótopos a 0.

Si $\gamma: [a,b] \to \Omega$ es un circuito Ω - homótopo a 0 y sí $f: \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa, entonces

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0$$

DEMOSTRACION:

Por la definición 2 (b) γ es Ω - homótopo a una función constante $\gamma_1: [a,b] \to \Omega$ tal que $\gamma_1(t) = \gamma(a) = \gamma(b)$ para todo $t \in [a,b]$.

Por el Teorema 2:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz =$$

$$= \int_a^b f(\gamma_1(t))\, \gamma_1'(t)\, dt = \int_a^b 0\, dt = 0$$

SECCION 3: *El Indice.*

DEFINICION 6: Si $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ es un circuito y si $\omega \in \mathbb{C} - \gamma$ el índice $I(\omega,\gamma)$ de ω respecto al circuito γ es el número $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-\omega}$.

En lo que sigue $\mathbb{C} - \gamma$, por abuso de notación denotará el conjunto $\{ z \mid$ no hay $t \in [a,b]$, $z = \gamma(t) \}$.

EJEMPLO:

$$\gamma: [0,2\pi] \to \mathbb{C} \quad , \quad \gamma(\sigma) = Re^{i\sigma} \quad , \quad R > 0$$

($Re^{i\sigma}$ es el círculo de radio $R > 0$ y centro en el origen, claramente es un circuito y $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$, además no existe $t \in [0,2\pi]$ tal que $\gamma(t) = 0$).

$$I(0,\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{1}{\gamma(\sigma)}\,\gamma'(\sigma)\,d\sigma =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{Ri\,e^{i\sigma}}{R\,e^{i\sigma}}\,d\sigma = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} i\,d\sigma = \frac{1}{2\pi i}(i2\pi - 0) = 1$$

PROPOSICION 5:

(a) La función $\mathbb{C} - \gamma \to \mathbb{C}$, $\omega \to I(\omega,\gamma)$ es constante sobre cada componente conexa de $\mathbb{C} - \gamma$.

(b) Si $R = Sup\{\,|\gamma(t)| \;\big|\; t \in [a,b]\}$ (R es el radio del menor disco que contiene a γ)

Y si $|\omega| > R$, $I(\omega,\gamma) = 0$.

(c) $I(\omega,\gamma)$ toma solamente valores enteros.

(d) Si el circuito γ es la composición (en el sentido generalizado de la definición 6) de n circuitos $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n$, entonces si $\omega \in \mathbb{C} - \gamma$

$$I(\omega,\gamma) = \sum_{k=1}^{n} I(\omega,\gamma_k)$$

DEMOSTRACION: En el Apéndice 6

TEOREMA 3: *(Teorema de la curva de jordan).*

(a) Sea $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ un circuito *simple*. $\mathbb{C} - \gamma$ tiene exactamente dos componentes conexas; una acotada llamada interior de γ (NOTACION: $Int(\gamma)$) y la otra no acotada llamada exterior de γ (NOTACION $ext(\gamma)$)

(b) Si $\omega \in ext(\gamma)$: $\int_\gamma \frac{dz}{z-\omega} = 0$

Si $\omega \in Int(\gamma)$: $\int_\gamma \frac{dz}{z-\omega} = 2\pi i\, \sigma(\gamma)$

Donde $\sigma(\gamma)$ está definido de la manera siguiente:

Para todo $t \in [a,b]$ tal que $\gamma'(t)$ está definido y $Im(\gamma'(t)\,\gamma(t)^*) \neq 0$ existe un $\varepsilon(t)$ tal que el segmento $\{\gamma(t) + si\,\gamma'(t) \mid 0 < s < \varepsilon(t)\}$ está en una componente ω_+ de $\mathbb{C} - \gamma$ y el segmento $\{\gamma(t) + si\,\gamma'(t) \mid -\varepsilon(t) < s < 0\}$ esta en la otra componente ω_- de $\mathbb{C} - \gamma$. Las componentes ω_+ y ω_- son las mismas para todos los $t \in [a,b]$ tales que $\gamma'(t)$ existe y $Im(\gamma'(t)\,\gamma(t)^*) \neq 0$.

Si $\omega_+ = int(\gamma)$, $\sigma(\gamma) = 1$ y si $\omega_+ = ext(\gamma)$, $\sigma(\gamma) = -1$.

DEMOSTRACION: La demostración del Teorema 3 en el caso general es demasiado complicada para ser dada aquí. Daremos la demostración para una clase especial de circuitos que cubre muchos casos que aparecen en la práctica. Para esto necesitamos una definición auxiliar.

DEFINICION 7: Un camino simple $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ es llamado - *estrellado en un punto* $\omega \in \mathbb{C} - \gamma$ (ó simplemente estrellado) si toda semirecta de origen ω en $\mathbb{R}^2$ corta a γ en un único punto.

EJEMPLO: Si γ es convexo, entonces γ es estrellado en - cualquier punto ω de su envolvente convexa que no pertenece a γ.

Vamos a demostrar el Teorema 3 para los circuitos estrellados. Sea $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ un circuito estrellado en $\omega_0 \in \mathbb{C} - \gamma$.

DEMOSTRACION DE LA PARTE (a) DEL TEOREMA 3:

Sea $\pi: \mathbb{C} - \{\omega_0\} \to \gamma$ la aplicación definida de la manera siguiente:

Si $\omega \in \mathbb{C} - \gamma$ la semirrecta $\delta(\omega)$ de origen ω_0 que contiene a ω, $(\delta(\omega) = \{\omega_0 + t(\omega-\omega_0) \mid t > 0\})$ corta a γ en un único punto $\pi(\omega)$.

π es continua, ya que si $\{\omega_n \mid n \geq 1\} \subset \mathbb{C} - \{\omega_0\}$ converge a ω entonces la sucesión $\{\pi(\omega_n) \mid n \geq 1\}$ converge a $\pi(\omega)$, pues si esto no fuera cierto. Como $\{\pi(\omega_n) \mid n \geq 1\}$ pertenece a $\gamma([a,b])$ que es compacto, existiría una subsucesión $\{\pi(\omega_{n_k}) \mid k \geq 1\}$ que converge a un punto $q \in \gamma([a,b])$ y $q \neq \pi(\omega)$. Como $\omega_n \to \omega$ es claro que q tiene que pertenecer a $\delta(\omega)$, pero entonces $\delta(\omega)$ corta a γ en q y $\pi(\omega)$ lo cual es una contradicción.

Definamos Ω_1 y Ω_2 de la manera siguiente:

$$\Omega_1 = \{\omega \mid \omega \in \mathbb{C} - \gamma \quad |\omega-\omega_0| < |\pi(\omega)-\omega_0|\}$$

$$\Omega_2 = \{\omega \mid \omega \in \mathbb{C} - \gamma \quad |\omega-\omega_0| > |\pi(\omega)-\omega_0|\}$$

Como π es continua Ω_1 y Ω_2 son abiertos, además

$$\Omega_1 \cap \Omega_2 = \phi \qquad y \qquad \mathbb{C} - \gamma = \Omega_1 \cup \Omega_2$$

También es claro que Ω_1 es conexo y acotado: Si $\omega \in \Omega_1$ el el segmento $\overline{\omega\ \omega_0}$ pertenece a Ω_1, entonces dados ω y $\omega_1 \in \Omega_1$ la - poligonal $\overline{\omega\ \omega_0}$ y $\overline{\omega_0\ \omega_1}$ está contenida en Ω_1 y por lo tanto Ω_1 es conexo.

Si $R = Sup\ \{|\gamma(t)-\omega_0| \mid t \in [a,b]\}$, $\Omega_1 \subset \overline{D(\omega_0,R)}$ y por lo tanto Ω_1 es acotado.

Es también claro que Ω_2 no es acotado (ya que si $\omega \in \Omega_2$ la semirrecta $\{\omega_0 + t(\omega-\omega_0) \mid t > 1\}$ pertenece a Ω_2). Vamos a demostrar que Ω_2 es conexo: $\overline{\mathbb{C} - D(\omega_0,R)}$ es conexo. y si $\omega \in \Omega_2$ el camino $\gamma_1 : [0,1] \to \Omega_2$, $\gamma_1(s) = (1-s)\,\omega + 2s\,\frac{(\omega-\omega_0)}{|\omega-\omega_0|}R$ junta a ω - con el punto $\frac{2R(\omega-\omega_0)}{|\omega-\omega_0|}$ el cual está en $\mathbb{C} - \overline{D(\omega_0,R)}$.

Finalmente como conclusión tenemos que Ω_1 y Ω_2 son conexos, abiertos y ajenos, $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \mathbb{C} - \gamma$ por lo cual Ω_1 y Ω_2 son las - componenetes conexas de

$$\mathbb{C} - \gamma:\ \Omega_1 = int(\gamma) \ y\ \Omega_2 = ext(\gamma).$$

DEMOSTRACION DE LA PARTE (b) DEL TEOREMA (3):

Sea $R = Sup\ \{|\gamma(t) - \omega_0| \mid t \in [a,b]\}$, γ es hómotopo a 0 - en $\overline{D(\omega_0,R)}$ (La homotopía es $\varphi: [a,b] \times [0,1] \to \overline{D(\omega_0,R)}$, $\varphi(t,s) = (1-s)\,\gamma(t) + s\,\omega_0$; φ es continua, $\varphi(t,0) = \gamma(t)$, $\varphi(t,1) = \omega_0$ y -

$$\varphi(a,s) = (1-s)\,\gamma(a) + s\,\omega_0 = (1-s)\,\gamma(b) + s\,\omega_0 = \varphi(b,s)).$$

Si $\omega \in \mathbb{C} - \overline{D(\omega_0, R)}$, γ es $\mathbb{C} - \{\omega\}$ homótopo a 0 y como $z \to \frac{1}{z-\omega}$ es holomorfa en $\mathbb{C} - \{\omega\}$, entonces

$$I(\omega,\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-\omega} = 0$$

por el corolario del Teorema 2.

Ahora $\mathbb{C} - \overline{D(\omega_0, R)}$ siendo conexo y no acotado está contenido en el $ext(\gamma)$. Como $\omega \to I(\omega,\gamma)$ es constante sobre las componentes conexas de $\mathbb{C} - \gamma$ (ver la proposición 5 - (a)) $I(\omega,\gamma) = 0$ para todo $\omega \in ext(\gamma)$.

Para evaluar $I(\omega,\gamma)$ cuando $\omega \in Int(\gamma)$ vamos a mostrar primero que γ convenientemente reparametrizada es homótopa a

$$\gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}\ ,\ \gamma_2(\sigma) = \omega_0 + e^{i\sigma}$$

ó a $\quad \gamma_3 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}\ ,\ \gamma_3(\sigma) = \omega_0 + e^{-i\sigma}$

Sea $\bar{\gamma}: [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ el circuito $\bar{\gamma}(t) = \gamma[a + \frac{b-at}{2\pi}]$.

Por el teorema - definición 1 - (4')

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-\omega} = \int_{\bar{\gamma}} \frac{dz}{z-\omega} \quad \text{, para todo} \quad \omega \in \mathbb{C} - \gamma$$

El circuito $\bar{\gamma}$ es también estrellado en ω_0 porque

$$\gamma([a,b]) = \bar{\gamma}([0,2\pi])$$

y por lo tanto $\bar{\gamma}$ es simple también.

Resulta de allí que la aplicación $\bar{\gamma}(t) \to t$ de $\bar{\gamma}([0,2\pi]) \to [0,2\pi]$ es continua.

(Ver capítulo 0 por ser $[a,2\pi]$ compacto y $\bar{\gamma}$ continua).

Sea $\lambda: [0,2\pi] \to [0,2\pi]$ la aplicación composición de 3 aplicaciones:

$$\sigma \longrightarrow \omega_0 + e^{i\sigma} \quad , \quad [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{C} - \{\omega_0\} \; ;$$

$$\Pi: \mathbb{C} - \{\omega_0\} \longrightarrow \bar{\gamma} \quad y$$

$$\bar{\gamma}(t) \longrightarrow t \quad , \quad \bar{\gamma}[0,2\pi] \longrightarrow [0,2\pi] \; ,$$

λ está bien caracterizada por el hecho que para todo $\sigma \in [0,2\pi]$ $\bar{\gamma}(\lambda(\sigma))$ es el punto de $\bar{\gamma}$ donde la semirecta de origen ω_0, que pasa por $\omega_0 + e^{i\sigma}$ corta a $\bar{\gamma}$.

De allí resulta que $\lambda: [0,2\pi] \to [0,2\pi]$ es biyectiva.

Vamos a definir $\psi: [0,2\pi] \to [0,2\pi]$ de la manera siguiente: Si λ es creciente $\lambda(0) = 0$, $\lambda(2\pi) = 2\pi$ (ya que λ es biyectiva) y vamos a definir $\psi(\sigma) = \lambda(\sigma)$, entonces $\psi(0) = 0$ y $\psi(2\pi) = 2\pi$.

Si λ es decreciente $\lambda(0) = 2\pi$ y $\lambda(2\pi) = 0$, vamos a definir $\psi(\sigma) = \lambda(2\pi - \sigma)$, entonces de nuevo $\psi(0) = 0$ y $\psi(2\pi) = 2\pi$. Sea

$\bar{\gamma}_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} - \{\omega_0\}$ el camino cerrado $\bar{\gamma} \circ \psi$.

$\bar{\gamma}$ y $\bar{\gamma}_1$ son $\mathbb{C} - \{\omega_0\}$ - homótopos. La homotopía es la aplicación $\varphi: [0, 2\pi] \times [0, 1] \to \mathbb{C} - \{\omega_0\}$,

$$\varphi(\sigma, s) = \bar{\gamma}[(1-s)\sigma + s\psi(\sigma)], \quad \text{es claro que}$$

$$\varphi(\sigma, 0) = \bar{\gamma}(\sigma) \quad y \quad \varphi(0, 1) = \bar{\gamma}(\psi(\sigma)) = \bar{\gamma}_1(\sigma)$$

para todo σ, y

$$\varphi(0, s) = \bar{\gamma}(0), \qquad (\text{ya que } \psi(0) = 0)$$

$$\varphi(2\pi, s) = \bar{\gamma}(2\pi), \qquad (\text{ya que } \psi(2\pi) = 2\pi),$$

entonces $\varphi(0, s) = \bar{\gamma}(0) = \bar{\gamma}(2\pi) = \varphi(2\pi, s)$, para todo $s \in [0, 1]$ y φ es continua por ser composición de continuas.

Ahora si λ es creciente $\bar{\gamma}_1$ es $\mathbb{C} - \{\omega_0\}$ homótopo al circuito $\gamma_3 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} - \{\omega_0\}$

$$\gamma_3(\sigma) = \omega_0 + e^{i\sigma}$$

La homotopía es $\varphi_3 : [0, 2\pi] \times [0, 1] \to \mathbb{C} - \{\omega_0\}$

$$\varphi_3(\sigma, s) = (1-s)\, \bar{\gamma}_1(\sigma) + s\, \gamma_3(\sigma)$$

(por la definición de λ los puntos $\bar{\gamma}_1(\sigma)$ y $\omega_0 + e^{i\sigma}$ están sobre

la misma semirrecta de origen ω_0).

Si λ es decreciente $\bar{\gamma}_1$ es $\mathbb{C} - \{\omega_0\}$ homótopo al circuito - $\gamma_4 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} - \{\omega_0\}$, $\gamma_4(\sigma) = \omega_0 + e^{-i\sigma}$.

La homotopía es $\varphi_4 : [0, 2\pi] \times [0, 1] \to \mathbb{C} - \{\omega_0\}$,

$$\varphi_4(\sigma, s) = (1-s)\,\bar{\gamma}_1(\sigma) + s\,\gamma_4(\sigma)$$

(por la definición de λ los puntos $\bar{\gamma}_1(\sigma) = \bar{\gamma}(\lambda(2\pi-\sigma))$ y - - - $\omega_0 + e^{i(2\pi-\sigma)} = \omega_0 + e^{-i\sigma}$ están sobre la misma semirrecta de origen ω_0).

Resulta de la proposición 0 que en el caso λ creciente $\bar{\gamma}$ y $\bar{\gamma}_3$ son $\mathbb{C} - \{\omega_0\}$-homótopos y en el caso λ decreciente $\bar{\gamma}$ y $\bar{\gamma}_4$ son $\mathbb{C} - \{\omega_0\}$ - homótopos entonces de aquí, del hecho de que $z \to \frac{1}{z-\omega_0}$ definida por $\mathbb{C} - \{\omega_0\} \to \mathbb{C}$ es holomorfa y del Teorema 2:

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-\omega_0} = \int_{\bar{\gamma}} \frac{dz}{z-\omega_0} = \int_{\gamma_3} \frac{dz}{z-\omega_0} = 2\pi i \qquad \text{si } \lambda \text{ es creciente}$$

y $\int_\gamma \frac{dz}{z-\omega_0} = \int_\gamma \frac{dz}{z-\omega_0} = \int_{\gamma_4} \frac{dz}{z-\omega_0} = \int_0^{2\pi} \frac{-ie^{-i\sigma}}{e^{-i\sigma}}\, d\sigma = -2\pi i$ si λ es decreciente

Como $\omega \to I(\omega, \gamma)$ es constante en el $int(\gamma)$ y $\omega_0 \in int(\gamma)$

$$I(\omega, \gamma) = I(\omega_0, \gamma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda \text{ es creciente} \\ -1 & \text{si } \lambda \text{ es decreciente} \end{cases}$$

Ahora sea $t \in [a,b]$ un punto tal que $\gamma'(t)$ existe y $Im(\gamma'(t)\ \gamma(t)^*) \neq 0$. Sea $h > 0$ y tal que $t + h \in [a,b]$. Supongamos que $\sigma = \lambda^{-1}(t)$ y $\sigma(h) = \lambda^{-1}(t+h)$.

Si λ es creciente $\sigma(h) > \sigma$ $\gamma(t) = |\gamma(t)|\ e^{i\sigma}, \gamma(t+h) = |\gamma(t+h)|\ e^{i\sigma(h)}$, entonces:

$$\gamma(t+h) - \gamma(t) = (\rho\ e^{i(\sigma(h)-\sigma)} - 1)\ \gamma(t), \text{ donde } \rho = \frac{|\gamma(t+h)|}{|\gamma(t)|} > 0$$

De allí resulta que:

$$Im((\gamma(t+h) - \gamma(t))\ \gamma(t)^*) = Im((\rho\ e^{i(\sigma(h)-\sigma)} - 1)\ \gamma(t)\ \gamma(t)^*) =$$

$$= |\gamma(t)|^2\ Im(\rho\ e^{i(\sigma(h)-\sigma)} - 1) = |\gamma(t)|^2\ \rho\ sen\ (\sigma(h) - \sigma) > 0$$

Si h es suficientemente pequeño

$$Im(\gamma'(t)\ \gamma(t)^*) = \lim_{\substack{h\to 0 \\ h>0}} Im\ [\frac{\gamma(t+h)-\gamma(t)}{h}\ \gamma(t)^*]$$

entonces $Im\ (\gamma'(t)\ \gamma(t)^*) \geq 0$, como $Im\ (\gamma'(t)\ \gamma^*(t)) \neq 0$ tendremos $Im\ (\gamma'(t)\ \gamma(t)^*) > 0$.

Ahora si $\omega(s) = \gamma(t) + is\ \gamma'(t)$ con $s \in \mathbb{R}$

$$|\omega(s)|^2 = |\gamma(t)|^2 + s^2\ |\gamma'(t)|^2 + 2s\ Re(i\gamma'(t)\gamma(t)^*),$$

donde

$$Re[i\gamma'(t)\ \gamma(t)^*] = - Im[\gamma'(t)\ \gamma(t)^*] < 0$$

entonces para $\delta > 0$ y adecuadamente pequeño $|\omega(\delta)| < |\gamma(t)|$ y $\omega(\delta)$ está en el interior de γ, $\sigma(\gamma) = +1$.

Si λ es ahora decreciente $\sigma(h) < \sigma$ si $h > 0$, haciendo un razonamiento Análogo al anterior obtenemos $Im(\gamma'(t)\ \gamma(t)^*) < 0$. En este caso si $\delta > 0$ y bastante pequeño $|\omega(\delta)| > |\gamma(t)|$ y $\omega(\delta)$ está en $ext(\gamma)$, $\sigma(\gamma) = -1$.

Regla heurística para determinar $\sigma(\gamma)$: del Teorema 3 resulta que $\sigma(\gamma) = +1$ si un observador caminando sobre γ en el sentido de los t crecientes tiene el interior de γ a su izquierda y $\sigma(\gamma) = -1$ en el caso contrario.

METODO PARA DETERMINAR LOS INDICES:

Dado un circuito γ cualquiera uno intenta representar γ como composición (en el sentido generalizado de la definición 6) $\gamma_n\ \gamma_{n-1} \ldots\ldots \gamma_1$ de circuitos simples y de utilizar la fórmula

$$I(\omega,\gamma) = \sum_{k=1}^{n} I(\omega,\gamma_k) \quad \text{(Proposición 5 - (d))},$$

y en seguida los $I(\omega,\gamma_k)$ son determinados usando el Teorema 3.

SECCION 4: *Fórmula de Cauchy.*

TEOREMA 4: Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y γ, $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ dos - circuitos Ω - homótopos. Si $f: \Omega - \mathbb{C}$ es una función holomorfa - y si $\omega \in \Omega - (\gamma \cup \gamma_1)$

$$(I(\omega,\gamma) - I(\omega,\gamma_1))\,f(\omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{z-\omega}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(z)}{z-\omega}\,dz$$

COROLARIO 1: Si $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ es un circuito Ω - homótopo a 0 y si $\omega \in \mathbb{C} - \gamma$:

$$I(\omega,\gamma)\,f(\omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{z-\omega}\,dz$$

ésta última fórmula es la célebre fórmula de Cauchy.

COROLARIO 2: Si $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ es un circuito *simple* y si $int\,(\gamma) \subset \Omega$ y $\omega \in Int\,(\gamma)$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{z-\omega}\,dz$$

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 4:

Sea $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ la función:

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(\omega)}{z-\omega} & \text{si} \quad z \neq \omega \\ \dfrac{df}{dz}\,(\omega) & \text{si} \quad z = \omega \end{cases}$$

g es holomorfa en $\Omega - \{\omega\}$ ya que las funciones $f - f(\omega)$ y $z \to z - \omega$ son holomorfas y $z-\omega$ no toma el valor cero, y por tanto por la proposición 5 - b del Capítulo 4 $\frac{f-f(\omega)}{z-\omega}$ es holomorfa en $\Omega - \{\omega\}$.

En el punto ω, f es representada por una serie de potencias

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$; existe un disco $\mathcal{D}(\omega,r) \subset \Omega$ tal que para todo - - $z \in \mathcal{D}(\omega,r)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\omega)^n$$

De la proposición 3 - (e) del capítulo 4 $a_0 = f(\omega)$ $a_1 = \frac{df}{dz}(\omega)$, entonces para todo $z \in \mathcal{D}(\omega,r) - \{\omega\}$

$$\frac{f(z)-f(\omega)}{z-\omega} = \frac{df}{dz}(\omega) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z-\omega)^{n-1}$$

Resulta de allí que:

$$g(z) = \frac{df}{dz}(\omega) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z-\omega)^{n-1} \text{ para } z \in \mathcal{D}(\omega,r)$$

por tanto g es holomorfa (por proposición 4 - (c) del Capítulo 2 ya que $\Omega = (\Omega - \{\omega\}) \cup \mathcal{D}(\omega,r)$ y g es holomorfa en $\Omega - \{\omega\}$ y en $\mathcal{D}(\omega,r)$) entonces del Teorema 2 resulta que

$$\int_{\gamma} g(z)\, dz = \int_{\gamma_1} g(z)\, dz$$

Como $\omega \notin \gamma \cup \gamma_1$, γ y γ_1 están contenidos en $\Omega - \{\omega\}$ y por tanto:

$$\int_{\gamma} g(z)\, dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-\omega}\, dz - f(\omega) \int_{\gamma} \frac{dz}{z-\omega}$$

$$\int_{\gamma_1} g(z)\,dz = \int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z-\omega}\,dz - f(\omega)\int_{\gamma_1}\frac{dz}{z-\omega}$$

entonces:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{z-\omega}\,dz - f(\omega)\,I(\omega,\gamma) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(z)}{z-\omega}\,dz - f(\omega)\,I(\omega,\gamma_1)$$

DEMOSTRACION DEL COROLARIO 1:

Si γ es Ω - homótopo a 0, es Ω - homótopo a γ_1 constante, $\gamma_1(t) = \gamma(a) = \gamma(b)$; entonces:

$$I(\omega,\gamma_1) = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\gamma_1'(t)\,dt}{\gamma_1(t)-\omega} = 0$$

y $$\int_{\gamma_1}\frac{f(z)\,dz}{z-\omega} = \int_a^b \frac{f(\gamma_1(t))}{\gamma_1(t)-\omega}\,\gamma_1'(t)\,dt = 0$$

(pues $\gamma_1'(t) = 0$ por ser γ_1 constante).

Y por lo tanto: $I(\omega,\gamma)\,f(\omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{z-\omega}\,dz.$

DEMOSTRACION DEL COROLARIO 2 :

Consideraremos únicamente el caso de los circuitos estrellados como en el Teorema 3. Si $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ es un circuito estrellado en ω_0 y tal que $int\,(\gamma) \subset \Omega$, γ es Ω - homótopo a cero; -

esto se ve en la demostración del teorema 3, $\omega_0 \in int\,(\gamma)$ y para todo $t \in [a,b]$ el segmento $\overline{\omega_0 \gamma(t)}$ está contenido en $int\,(\gamma)$; La aplicación

$$\varphi: [a,b] \times [0,1] \longrightarrow Int(\gamma),\ \varphi(t,s) = (1-s)\,\gamma(t) + s\,\omega_0$$

es una Ω - homotopía de γ en el circuito constante $[a,b] \to \Omega$, $t \to \omega_0$. Por el corolario 1 del Teorema 2

$$I(\omega_0,\gamma)\,f(\omega_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-\omega_0}\,dz,$$

pero por el Teorema 3 - (b) $I(\omega_0,\gamma) = 1$, pues $\omega_0 \in Int\,(\gamma)$ y $\sigma(\gamma) = 1$.

SECCION 5: *Primitivas.*

DEFINICION 8:

Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa. - Una función $F: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $\frac{dF}{dz} = f$, es llamada *primitiva*.

NO SIEMPRE EXISTEN PRIMITIVAS:

Sea $\Omega = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$, y sea f la función $z \to \frac{1}{z}$ f es holomorfa en $\mathbb{C}^*$ y f no tiene primitivas, ya que si $F: \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ fuera primitiva y si $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}^*$ es una carretera continuamente diferenciable:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \int_a^b \frac{d}{dz} F[\gamma(t)]\cdot\gamma'(t)\,dt =$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt}\,(F\cdot\gamma)\,(t)\,dt, \quad \text{y por lo tanto:}$$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

En particular si γ es un circuito $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$

Ahora sea $\gamma_0 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}^*$ el circuito $\gamma_0(\sigma) = e^{i\sigma}$

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\sigma}}\, i\, e^{i\sigma}\,d\sigma = i\int_0^{2\pi} d\sigma = 2\pi i \neq 0$$

lo cual nos da una contradicción.

Este ejemplo nos demuestra también que las condiciones de Ω - homotopía en el Teorema 2 son necesarias. El circuito γ_0 arriba no es $\mathbb{C}^*$ - homótopo a cero.

El teorema siguiente da condiciones para la existencia de primitivas.

TEOREMA 5:

(a) Sea Ω un abierto conexo. Si una función holomorfa - $f: \Omega \to \mathbb{C}$ admite primitiva, dos primitivas difieren - por una constante.

(b) Sea Ω un abierto conexo y $f: \Omega \to \mathbb{C}$ una función holo-

morfa. Entonces f admite primitivas si y solamente si para todo circuito $\gamma: [a,b] \to \Omega$, $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$. Y esto caracteriza la imagen de $\frac{d}{dz} : \mathcal{H}(\Omega) \to \mathcal{H}(\Omega)$

DEMOSTRACION:

(a) Si F_1 y $F_2 : \Omega \to \mathbb{C}$ son dos primitivas de f. $F_1 - F_2 : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa y

$$\frac{d}{dz}(F_1 - F_2) = f - f = 0,$$

entonces por la proposición 3 - (c) del Capítulo 4 - $F_1 - F_2$ es constante.

(b) Si $F: \Omega \to \mathbb{C}$ es una primitiva de f:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t) =$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt}(F\circ\gamma)(t)\,dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0$$

ya que $\gamma(b) = \gamma(a)$, por lo tanto la condición (b) es necesaria.

Si ahora la función holomorfa $f: \Omega \to \mathbb{C}$ satisface que $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ para todo circuito γ.

Sean ω_0, $\omega \in \Omega$ y sea γ una carretera $[a,b] \to \Omega$, tal que $\gamma(a) = \omega_0$, $\gamma(b) = \omega$. Veremos que el número $\int_\gamma f(z)\,dz$ no depende de γ ; ya que si $\gamma_1 : [c,d] \to \Omega$ es

otra carretera tal que $\gamma_1(c) = \omega_0$, $\gamma_1(d) = \omega$; sea γ_2 el circuito composición de γ y de la carretera

$\bar{\gamma}_1 : [b, b+d-c] \to \Omega$, $\bar{\gamma}_1(t) = \gamma_1(d+b-t)$, entonces:

$$0 = \int_{\gamma_2} f(z)\, dz = \int_{\gamma} f(z)\, dz + \int_{\bar{\gamma}_1} f(z)\, dz$$

y

$$\int_{\bar{\gamma}_1} f(z)\, dz = \int_b^{b+d-c} f(\bar{\gamma}_1(t))\, \bar{\gamma}_1'(t)\, dt =$$

$$= \int_b^{b+d-c} f(\gamma_1(d+b-t))\, (-\gamma_1'(d+b-t))\, dt =$$

$$= -\int_c^b f(\gamma_1(s))\, \gamma_1'(s)\, ds = -\int_{\gamma_1} f(z)\, dz$$

y como

$$-\int_{\gamma} f(z)\, dz = \int_{\bar{\gamma}_1} f(z)\, dz$$

entonces

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz$$

Sea $F(\omega)$ el valor común de $\int_{\gamma} f(z)\, dz$ es fácil verificar que la función $F: \Omega \to \mathbb{C}$ $\omega \to F(\omega)$ es $\mathbb{C}$ - diferenciable y que $\frac{dF}{dz} = f$ (para esto ver la demostración

de la proposición 6 que mencionaremos mas adelante).

COROLARIO:

Si Ω es un abierto conexo tal que todo circuito en Ω es Ω - homótopo a cero, toda función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tiene una primitiva, en otros términos la aplicación $\frac{d}{dz} : \mathcal{H}(\Omega) \to \mathcal{H}(\Omega)$ es suprayectiva.

DEMOSTRACION:

Por el Corolario del Teorema 2 y por la hipótesis - - - $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$ para todo circuito γ, entonces por el Teorema - 5(b) f admite primitivas.

COMENTARIO:

El espacio vectorial $\mathcal{H}(\Omega)$ / Imagen de $\frac{d}{dz}$ (llamado conúcleo $\frac{d}{dz}$) es denominado también *grupo de cohomología* con valores en $\mathbb{C}$. Este grupo nos dá las restricciones para que las funciones de $\mathcal{H}(\Omega)$ admitan primitivas. Este espacio depende solamente de la topología de Ω.

Se puede demostrar un resultado más fuerte que el del Teorema 5- (b).

PROPOSICION 6: (Teorema de Morera) Si $f: \Omega \to \mathbb{C}$ es una función continua, tal que $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$ para todo circuito en Ω, y si Ω *es conexo*, entonces f es holomorfa y admite primitivas.

DEMOSTRACION: Sea ω_0 un punto cualquiera de Ω. Para to-

do ω y para toda carretera $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$, tal que $\gamma(a) = \omega_0$, $\gamma(b) = \omega$ el número complejo $\int_\gamma f(z)\,dz$ no depende de γ:

Sea $\gamma_1 : [c,d] \to \Omega$, $\gamma_1(c) = \omega_0$ $\gamma_1(d) = \omega$, otra carretera de origen ω_0 y de final ω y sea γ_2, $\gamma_2 : [a, b+d-c] \to \Omega$ el circuito:

$$\gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma(t), & si \quad a \leq t \leq b \\ \\ \gamma_1(d+b-t), & si \quad b \leq t \leq b+d-c \end{cases}$$

Por hipótesis $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$. Por la propiedad (3') del Teorema - definición 21:

$$0 = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz + \int_{\bar{\gamma}_1} f(z)\,dz$$

donde $\bar{\gamma}_1 : [b, b+d-c] \to \Omega$ está definida por

$$\bar{\gamma}_1(t) = \gamma_1(d+b-t)$$

De la propiedad (4') del Teorema - Definición 1

$$\int_{\bar{\gamma}_1} f(z)\,dz = -\int_{\gamma_1} f(z)\,dz \,, \quad \text{entonces}$$

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz$$

Definamos la función $F: \Omega \to \mathbb{C}$

$$F(\omega) = \int_{\gamma} f(z)\, dz ,$$

donde γ es cualquier carretera de origen ω_0 y final ω.

Vamos a mostrar que F es $\mathbb{C}$ - diferenciable y $\frac{dF}{dz} = f$.

Sea $\omega \in \Omega$, existe un disco $D(\omega, r) \subset \Omega$.

Sea h, tal que $|h| < r$; γ es una carretera de origen ω_0 y final ω, sea $\delta_h : [0,1] \to \Omega$ la carretera:

$$\delta_h(t) = (1-t)\ \omega + t(\omega+h) = \omega + th$$

Sea γ_h la composición de $\delta_h \gamma$; de las definiciones:

$$F(\omega+h) - F(\omega) = \int_{\gamma_h} f(z)\, dz - \int_{\gamma} f(z)\, dz$$

De la proposición 3:

$$\int_{\gamma_h} f(z)\, dz = \int_{\gamma} f(z)\, dz + \int_{\delta_h} f(z)\, dz$$

$$F(\omega+h) - F(\omega) = \int_{\delta_h} f(z)\, dz$$

Resulta de allí que:

$$F(\omega+h) - F(\omega) - f(\omega)\ h = \int_{\delta_h} (f(z)-f(\omega))\ dz$$

Sea $\varepsilon > 0$, como f es continua en ω existe una $\delta(\varepsilon) > 0$, - tal que $\mathcal{D}(\omega, \delta(\varepsilon)) \subset \Omega$ y si $z \in \mathcal{D}(\omega, \delta(\varepsilon))$ $|f(z) - f(\omega)| < \varepsilon$.

Si $|h| < \delta(\varepsilon)$, $sup\ \{|f(z) - f(\omega)| \mid z \in \delta_h\} < \varepsilon$

Por la propiedad (2') del Teorema - Definición 1.

Si $|h| < \delta(\varepsilon)$

$$\left| \int_{\delta_h} (f(z)-f(\omega))\ dz \right| < \varepsilon \int_0^1 |\delta_h'(t)|\ dt$$

o sea:

$$|F(\omega+h) - F(\omega) - f(\omega)\ h| < \varepsilon\ |h|$$

entonces F es $\mathbb{C}$ - deferenciable y por consecuencia holomorfa.

De la proposición 3 - (a) del Capítulo 4

$$\frac{dF}{dz} = f \quad \text{es también holomorfa.}$$

SECCION 6: *Aplicaciones del Teorema y de la fórmula de Cauchy.*

(A) *Desigualdades de Cauchy.*

PROPOSICION 7 :

(a) Sea $f: \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa y sea $\omega \in \Omega$; La serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ que representa a f en ω tiene un radio de convergencia mayor ó igual a $r(\omega)$, donde $r(\omega)$ es el radio del mayor disco abierto de centro ω contenido en Ω:

$$r(\omega) = inf_f \{ |z-\omega| \mid z \in \mathbb{C} - \Omega \}$$

y en ese disco la suma de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\omega)^n = f(z)$.

(b) *Desigualdades de Cauchy:* Para todo r tal que $\overline{D(\omega,r)}$ (disco cerrado) $\subset \Omega$, y para todo entero $n \geq 0$

$$|a_n| = \frac{1}{n!} \left| \frac{d^n f}{dz^n} (\omega) \right| \leq \frac{M(r)}{r^n} ,$$

donde $$M(r) = Sup \{ |f(z)| \mid |z-\omega| = r \} ,$$

en particular $$\left| \frac{d^n f}{dz^n} (\omega) \right| \leq \frac{M(r)\ n!}{r^n} .$$

(c) Para todo compacto $k \subset \Omega$, todo r tal que: $\bigcup_{\omega \in k} \overline{D(\omega,r)} \subset \Omega$ (discos cerrados), y para todo entero $n \geq 0$ existe una constante $M(k,f,r)$, tal que:

$$\left| \frac{d^n f}{dz^n} (\omega) \right| \leq \frac{n!\ M(k,f,r)}{r^n} , \quad \text{para todo } \omega \in k.$$

NOTA: En (b), el que $\overline{D(\omega,r)} \subset \Omega$ es equivalente a que - - $r < r(\omega)$; En general la parte (b) no es interesante para - - $r = r(\omega)$ por que $M(r(\omega))$ ó no existe ó es ∞, y en estos casos - las desigualdades son triviales.

DEMOSTRACION: Sea $0 < r < r(\omega)$ y sea

$$\gamma_r : [0, 2\pi] \to \Omega \quad \text{el circuito:}$$

$$\gamma_r(\sigma) = \omega + re^{i\sigma},$$

γ_r es Ω - homótopo a 0 (la homotopía es $\varphi: [0,2\pi] \times [0,1] \to \Omega$, - $\varphi(\sigma, s) = \omega + s\, r\, e^{i\sigma}$, ó usar el hecho de que γ_r es estrellado en ω y el Corolario 2 del Teorema 4).

De la fórmula de Cauchy y el Teorema 3 si $z \in D(\omega,r) = Int(\gamma_r)$.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\sigma)}{\sigma - z}\, d\sigma$$

Para todo $N \geq 1$.

$$\frac{1}{\sigma - z} = \sum_{k=0}^{N} \frac{(z-\omega)^k}{(\sigma-\omega)^{k+1}} + r_N(\sigma),$$

donde $r_n(\sigma) = \dfrac{(z-\omega)^{N+1}}{(\sigma-\omega)^{N+1}}\ (\sigma - z)$, entonces:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{N} (z-\omega)^k \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\sigma)}{(\sigma-\omega)^{k+1}}\, d\sigma \right) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} f(\sigma)\, r_N(\sigma)\, d\sigma$$

Sea $b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\sigma)}{(\sigma-\omega)^{n+1}} d\sigma$ y sea $R_N = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} f(\sigma) r_N(\sigma) d\sigma$

entonces $f(z) = \sum_{n=0}^{N} b_n (z-\omega)^n + R_N$.

Por el Teorema - Definición 1 propiedad (2')

$$|R_N| \leq Sup \{ |f(\sigma)\, r_N(\sigma)| \;\Big|\; |\sigma-\omega| = r \} \frac{1}{|2\pi i|} \cdot r 2\pi =$$

$$= Sup \{ |f(\sigma)\, r_N(\sigma)| \;\Big|\; |\sigma-\omega| = r \} \cdot r$$

Ahora $|f(\sigma)| \leq M(r)$ si $|\sigma-\omega| = r$ y

$$|r_N(\sigma)| = \frac{|z-\omega|^{N+1}}{|\sigma-\omega|^{N+1} |\sigma-z|} = \frac{|z-\omega|^{N+1}}{r^{N+1} |\sigma-z|} \leq$$

$$\leq \frac{|z-\omega|^{N+1}}{r^{N+1} (r-|z|-|\omega|)}$$

$$|R_N| \leq \frac{|z-\omega|^{N+1}}{r^{N+1}} \cdot \frac{M(r) \cdot r}{r-|z|-|\omega|}$$

Cuando $N \to \infty$, como $|z-\omega| < r$, $R_N \longrightarrow 0$

Y $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-\omega)^k$ para todo $z \in D(\omega, r)$

Como la serie que representa f en ω es única (Capítulo 2 proposición - definición 3)

$$a_n = b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\sigma)}{(\sigma-\omega)^{n+1}}\, d\sigma$$

Y la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ tiene un radio de convergencia mayor ó igual que r. Como r es arbitrario $< r(\omega)$ la parte (a) resulta de esto.

(b) De la formula que se dedujo en la parte (a)

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\sigma)}{(\sigma-\omega)^{n+1}}\, d\sigma,$$

y de la propiedad (2') del Teorema - definición 1 se demuestra que:

$$|a_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma_r} \frac{f(\sigma)}{(\sigma-\omega)^{n+1}}\, d\sigma \right| \leq \frac{1}{2\pi} \sup \left\{ \frac{|f(\sigma)|}{|\sigma-\omega|^{n+1}} \;\middle|\; |\sigma-\omega| = r \right\} \cdot$$

$$\cdot \int_0^{2\pi} |\gamma_r'(\sigma)|\, d\sigma = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi r \sup \left\{ \frac{|f(\sigma)|}{|\sigma-\omega|^{n+1}} \;\middle|\; |\sigma-\omega| = r \right\}$$

por tanto: $$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$$

De la Proposición 3 - (e) del Capítulo 4

$$\frac{d^n f}{dz^n}(\omega) = n!\, a_n$$

y por lo tanto:

$$| a_n | = \frac{1}{n!} \left| \frac{d^n f}{dz^n} (\omega) \right| \leq \frac{M(r)}{r^n}$$

ó sea $$\left| \frac{d^n f}{dz^n} (\omega) \right| \leq \frac{n! M(r)}{r^n}$$

(c) Sea $L = \bigcup_{\omega \in k} \overline{D(\omega, r)}$ por la parte (b) arriba demostrada si $\omega \in k$.

$$\left| \frac{d^n f}{dz^n} (\omega) \right| \leq \frac{n!}{r^n} \text{ Sup } \{ | f(z) | \; \big| \; | z-\omega | = r \} \leq$$

$$\leq \frac{n!}{r^n} \text{ Sup } \{ | f(z)| \;\; | \; z \in \overline{D(\omega,r)} \} \leq$$

$$\leq \frac{n!}{r^n} \text{ Sup } \{ | f(z)| \;\; | \; z \in L \}$$

Por el Lema 3 que demostraremos en seguida L es compacto y por tanto:

$$\text{Sup } \{ | f(z) | \;\; | \; z \in L \} < + \infty$$

de la cual obtenemos $M(f,k,r) = \text{Sup } \{ | f(z) | \;\; | \; z \in L \}$.

LEMA 3: Si Ω es un abierto y k un compacto contenido en Ω, entonces:

$$r(k) = \inf \{ | z-\omega | \;\; | \; \omega \in k \, , \; z \in \mathbb{C} - \Omega \} > 0$$

Para todo r, $0 < r < r(k)$ el conjunto $k(r) = \bigcup_{\omega \in k} \overline{D(\omega, r)}$

es compacto y contenido en Ω.

DEMOSTRACION:

Si $r(k) = 0$ entonces existen sucesiones $\{ z_n \mid n \geq 1 \}$ en $\mathbb{C} - \Omega$ y $\{ \omega_n \mid n \geq 1 \}$ en k tales que $| \omega_n - z_n | \leq \frac{1}{n}$ para todo n. Como k es compacto existe una subsucesión $\{\omega_{n_j} \mid j \geq 1\}$ de $\{ \omega_n \mid n \geq 1 \}$ convergente en un punto $\omega_o \in k$; ahora como

$$| \omega_o - z_{n_j} | \leq | \omega_o - \omega_{n_j} | + | \omega_{n_j} - z_{n_j} | = | \omega_o - \omega_{n_j} | + \frac{1}{n_j}$$

lo cual quiere decir $\lim_{j \to \infty} z_{n_j} = \omega_o$. Como $\{z_{n_j} \mid j \geq 1\} \subset \mathbb{C} - \Omega$ y $\mathbb{C} - \Omega$ es cerrado $\omega_o \in \mathbb{C} - \Omega$, lo cual contradice el hecho de que $\omega_o \in k \subset \Omega$; por lo tanto $r(k) > 0$.

Vamos a demostrar que $k(r)$ es cerrado y acotado.

$k(r)$ es cerrado, ya que sea $\{ z_n \mid n \geq 1 \}$ una sucesión de $k(r)$ convergente a un punto z_o. Para cada n existe una $\omega_n \in k$, tal que $z_n \in \overline{D(\omega_n, r)}$. Como k es compacto existe una subsucesión $\{ \omega_{n_j} \mid j \geq 1 \}$ de $\{ \omega_n \mid n \geq 1 \}$ que converge en un punto $\omega_o \in k$, ahora:

$$| z_o - \omega_o | = \lim_{j \to \infty} | z_{n_j} - \omega_{n_j} | \leq r$$

y por lo tanto $z_o \in \overline{D(\omega_o, r)} \subset k(r)$, ó sea $k(r)$ es cerrado.
$k(r)$ es acotado:

Como k es compacto existe una $R > 0$ tal que $k \subset \mathcal{D}(0,R)$, entonces $k(r) \subset \mathcal{D}(0,R+r)$.

Por último $k(r) \subset \Omega$, ya que si $z \in k(r)$ entonces existe $\omega \in k$ tal que $z \in \overline{\mathcal{D}(\omega,r)}$, si $z \in \mathbb{C} - \Omega$ entonces $|z-\omega| \geq r(k)$, lo cual contradice el hecho que:

$$|z-\omega| < r < r(k)$$

Y por lo tanto $z \in \Omega$, $k(r) \subset \Omega$.

(B) *Envolventes holomorfas.*

DEFINICION 9: Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y k un compacto contenido en Ω. El conjunto

$$\hat{k}(\Omega) = \{ \omega \mid \omega \in \Omega \mid |f(\omega)| \leq \text{Sup} \{ |f(z)| \mid z \in k \} \}$$

es llamado la envolvente holomorfa de k.

PROPOSICION 8. $\hat{k}(\Omega)$ es un conjunto compacto que contiene a k.

DEMOSTRACION: $k \subset \hat{k}(\Omega)$ ya que sea $\omega \in k$, como $k \subset \Omega$, $\omega \in \Omega$ y $|f(\omega)| \leq \text{Sup} \{ |f(z)| \mid z \in k \}$ por lo tanto $\omega \in \hat{k}(\Omega)$ y $k \subset \hat{k}(\Omega)$; además por la definición de $\hat{k}(\Omega)$ $\hat{k}(\Omega) \subset \Omega$ ó sea $k \subset \hat{k}(\Omega) \subset \Omega$.

Para cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ definiremos el número $\|f\|_k$ como:

$\|f\|_k = \text{Sup} \{ |f(z)| \mid z \in k \}$; por la definición de

$\hat{k}(\Omega)$

$$\hat{k}(\Omega) = \bigcap_{\phi \in \mathcal{H}(\Omega)} \{ z \mid |\phi(z)| \leq ||\phi||_k \}$$

Como cada conjunto $\{ z \mid |\phi(z)| \leq ||\phi||_k \}$ es cerrado en Ω (en general no es cerrado en $\mathbb{C}$) resulta de allí que -- $\hat{k}(\Omega)$ es cerrado en Ω.

También como k es compacto:

$$\text{Sup} \{ |z| \mid z \in k \} = ||Z||_k < +\infty$$

Como Z restringida a Ω pertenece a $\mathcal{H}(\Omega)$, $\hat{k}(\Omega) \subset \{ |z| \mid z \in \Omega, |z| \leq ||Z||_k \} \subset \overline{D(0, ||Z||_k)}$, por tanto $\hat{k}(\Omega)$ es acotado (aquí $Z: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es la función $z \to z$ de la definición 0 del Capítulo 2).

Para demostrar que $\hat{k}(\Omega)$ es compacto, basta probar que -- $\hat{k}(\Omega)$ es cerrado en $\mathbb{C}$ (ya sabemos que es cerrado en Ω). Y esto resultará del siguiente Lema.

LEMA 4:

Sean $r(k) = \inf\{|z-\omega| \mid \omega \in k, z \in \mathbb{C} - \Omega\}$ y $r(\hat{k}) = \inf\{|z-\omega| \mid \omega \in \hat{k}(\Omega), z \in \mathbb{C} - \Omega\}$. Entonces $r(k) = r(\hat{k})$

NOTA:

$r(k) = \sup\{r \mid$ para todo $\omega \in k$, $\overline{D(\omega, r)} \subset \Omega\}$ y para $r(\hat{k})$ se - tiene la misma definición.

DEMOSTRACION:

Para cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y cada $\omega \in \Omega$, sea $R(f,\omega)$ el radio de convergencia de la serie que representa a f en ω.

De la proposición 3 - (c) y la nota anterior, para todo - - $r < r(k)$ y toda $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, existe una constante $\mu(f,k,r)$ tal que

$$\left\| \frac{d^n f}{dz^n} \right\|_k \leq \frac{n!\ \mu(f,k,r)}{r^n} \quad , \text{ para toda } \quad n \geq 1$$

Sea ω_0 un punto de $\hat{k}(\Omega)$. Como $\frac{d^n f}{dz^n} \in \mathcal{H}(\Omega)$, de la definición de $\hat{k}(\Omega)$ resulta que

$$\left| \frac{d^n f}{dz^n}(w_0) \right| \leq \left\| \frac{d^n f}{dz^n} \right\| \leq \frac{n!\ \mu(f,k,r)}{r^n}$$

Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es la serie de potencia que representa a f en w_0, por la proposición 3 - (c) del capítulo 4,

$$a_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dz^n}(w_0)$$

Entonces $|a_n| \leq \frac{\mu(f,k,r)}{r^n}$ para toda $n \geq 1$.

De aqui resulta que el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $R(f,w) \geq r$ (Corolario (b) del Teorema 1 del Capítulo 1).

Entonces para todo $r < r(k)$ y todo $w \in \hat{k}(\Omega)$ $R(f,w) \geq r$. tenemos que $R(f,w) \geq r(k)$ para todo $w \in \hat{k}(\Omega)$

Como $k \subset \hat{k}(\Omega)$, $r(\hat{k}) \leq r(k)$. Supongamos que $r(\hat{k}) < r(k)$. Entonces existen $w_0 \in \hat{k}(\Omega)$ y $z_0 \in \mathbb{C} - \Omega$, tal que $r(\hat{k}) \leq |w_0 - z_0| < r(k)$.

Sea $\delta_o : \Omega \to \mathbb{C}$ la función restricción $\delta_o \mid \Omega$ es decir la función restricción de $z \to \frac{1}{z-z_o}$ a Ω.

La serie que representa δ_o en ω_o es:

$$-\sum_{n=o}^{\infty} \frac{(z-\omega_o)^n}{(n-1)!\ (z_o-\omega_o)^{n+1}}$$

y entonces:

$$R\ (\delta_o, \omega_o) = \{z \mid |z-\omega_o| < |z_o-\omega_o|\} = |z_o-\omega_o| < r(k)$$

lo cual contradice lo que demostramos arriba que $R(\delta_o, \omega_o) \geq r(k)$, por lo tanto:

$$r(\hat{k}) = r(k).$$

Finalmente vamos a demostrar que $\hat{k}(\Omega)$ es cerrado en $\mathbb{C}$.

Sea $\{ \omega_n \mid n \geq 1 \}$ una sucesión de $\hat{k}(\Omega)$ convergente en un punto $\omega_o \in \mathbb{C}$.

Si $\omega_o \in \Omega$ como $\hat{k}(\Omega)$ es cerrado en Ω entonces $\omega_o \in \hat{k}(\Omega)$.

Supongamos $\omega_o \in \mathbb{C} - \Omega$; como $\omega_n \in \hat{k}(\Omega)$ para todo n,

$$r(\hat{k}) = \inf \{|\omega-z| \mid \omega \in \hat{k}(\Omega) \text{ y } z \in \mathbb{C}-\Omega\} \leq$$

$$\leq \inf \{|\omega_n-\omega_o| \mid n \geq 1\} = 0. \quad \text{Pero } r(\hat{k}) = r(k) > 0$$

(por el Lema 4), esto es una contradicción y por lo tanto todos los puntos de acumulación de $\hat{k}(\Omega)$ pertenecen a $\hat{k}(\Omega)$.

COMENTARIO: Se puede caracterizar completamente $\hat{k}(\Omega)$: sea U la unión de todas las componentes conexas de $\mathbb{C} - k$ acotadas y contenidas en Ω:

$$\hat{k}(\Omega) = k \cup U$$

SECCION 7: *Ejemplo de Primitivas. La función logaritmo.*

NOTACION: Si A es un subconjunto de $\mathbb{C}$ y $a \in \mathbb{C}$:

$$A + a = \{ z+a \mid z \in A \}$$

NOTA: Si A es abierto (respectivamente conexo), $A + a$ es abierto (respectivamente conexo).

PROPOSICION 9: Sea Ω un abierto conexo contenido en $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{ o \}$ y tal que todo circuito en Ω es Ω- homótopo a o. Sea $\varphi: \Omega \to \mathbb{C}$ una primitiva de $\frac{1}{Z}$ (φ existe porque $\frac{1}{Z}$ es holomorfa en Ω y Ω satisface las condiciones del Corolario del Teorema 5).

Entonces existe una constante $a \in \mathbb{C}$ tal que:

(1) $\exp \circ \varphi = e^{-a} Z$

(2) $\exp^{-1}(\Omega) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (\varphi(\Omega) + a + 2\pi i k)$

y los conjuntos $\varphi(\Omega) + a + 2\pi i k$ son las componentes conexas de $\exp^{-1}(\Omega)$.

(3) $\varphi \circ \exp = Z - a - 2k\pi i$ sobre $\varphi(\Omega) + a + 2k\pi i$.

DEMOSTRACION:

Primero notaremos que si $z \in \exp^{-1}(\Omega)$, $z+2k\pi i \in \exp^{-1}(\Omega)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, esto resulta del teorema 1-(e) del Capítulo 5.

Sea $g: \Omega \to \mathbb{C}$ la función:

$$g(z) = z \exp(-\varphi(z)), \; g \text{ es holomorfa y:}$$

$$\frac{dg}{dz}(z) = \exp(-\varphi(z)) - z \exp(-\varphi(z)) \frac{d\varphi}{dz}(z)$$

o sea $\frac{dg}{dz}(z) = 0$, para todo $z \in \Omega$.

Como Ω es conexo g es constante.

Además por hipótesis $z \neq 0$, y por tanto dicha constante ω_o es no nula, entonces es de la forma $\exp(a)$, de allí resulta que:

$$\exp(a) = Z \exp(-\varphi)$$

o sea $\exp \circ \varphi = e^{-a} Z$ en Ω

(Z es la función de la definición 0 del Capítulo 2), lo cual demuestra (1).

Como $\varphi: \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa, $\varphi(\Omega)$ es abierto (por Teorema 3 del Capítulo 3) y como Ω es conexo $\varphi(\Omega)$ es conexo.

De la fórmula $\exp \circ \varphi = e^{-a} Z$ en Ω resulta que:

$$\varphi(\Omega) + a \subset \exp^{-1}(\Omega)$$

por lo tanto:

$$\varphi(\Omega) + a + 2\pi i k \subset \exp^{-1}(\Omega) \quad \text{para todo} \quad k \in \mathbb{Z},$$

entonces:

$$\exp^{-1}(\Omega) \supset \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (\varphi(\Omega) + a + 2\pi i k)$$

Por la nota que se mencionó, como Ω es abierto y conexo, $\varphi(\Omega) + a + 2\pi i k$ son todos abiertos y conexos. Para demostrar que ellas son las componentes conexas de $\exp^{-1}(\Omega)$, basta demostrar que ellas son ajenas y que $\exp^{-1}(\Omega)$ es la unión de ellas.

Supongamos $z \in (\varphi(\Omega) + a + 2k\pi i) \cap (\varphi(\Omega) + a + 2\ell\pi i)$

$$z = \varphi(\omega_1) + a + 2k\pi i = \varphi(\omega_2) + a + 2\ell\pi i$$

De ahí resulta que:

$$\exp(\varphi(\omega_1) + a + 2k\pi i) = \exp(z) = \exp(\varphi(\omega_2) + a + 2\ell\pi i)$$

y esto es:

$$\exp(\varphi(\omega_1) + a) = \exp(\varphi(\omega_2) + a).$$

Pero como $\exp \circ \varphi = e^{-a} Z$

$$e^{\varphi(\omega_1)} = e^{-a}\ \omega_1, \quad e^{\varphi(\omega_2)} = e^{-a}\ \omega_2$$

y como $e^{\varphi(\omega_1)+a} = e^{\varphi(\omega_2)+a}$

$$\omega_1 = \omega_2$$

y por lo tanto $k = \ell$; o sea $\varphi(\Omega) + a + 2k\pi i$ son ajenos.

Ahora sea $z \in \exp^{-1}(\Omega)$. Si $\omega = \exp(z)$, entonces como $\exp \rho \varphi = e^{-a} Z$.

$$e^{\varphi(\omega)+a} = \omega = e^{z}$$

Del teorema 1- (e) del Capítulo 5 resulta que:

$z = \varphi(\omega) + a + 2k\pi i$, para una $k \in Z$ y por lo tanto $z \in \varphi(\Omega) + a + 2k\pi i$, lo cual demuestra (2).

La composición φ_0 exp es holomorfa sobre $\exp^{-1}(\Omega)$. Su derivada es:

$$\frac{d(\varphi \circ \exp)}{dz} = \left(\frac{d\varphi}{dz} \circ \exp \right) \frac{d\exp}{dz} = \frac{1}{\exp} \exp = 1$$

Resulta del Teorema 5-(a) que sobre cada componente conexa.

$$\varphi \circ \exp - Z \quad \text{es constante}$$

Sea $z \in \varphi(\Omega) + a + 2k\pi i$, $z = \varphi(\omega) + a + 2k\pi i$

$$\varphi \circ \exp(z) = \varphi \circ \exp\ (\varphi(\omega) + a + 2k\pi i) = \varphi \circ \exp\ (\varphi(\omega) + a) =$$

$$= \varphi(\omega)$$

lo último por la parte (1).

Resulta de allí que:

$$\varphi \circ \exp(z) - z = \varphi(\omega) - (\varphi(\omega) + a + 2k\pi i) = -a - 2k\pi i$$

Sobre $z \in \varphi(\Omega) + a + 2k\pi i$

Y por tanto:

$$\varphi \circ \exp(z) = z - a - 2k\pi i$$

lo mismo que:

$\varphi \circ \exp = Z - a - 2k\pi i$ lo cual demuestra (3).

NOTACION: Una primitiva φ de $\frac{1}{Z}$ en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ tal que $1 \in \Omega$ y tal que $\varphi(1) = 0$ se llama función logaritmo y se denota log z.

COMENTARIO: El tipo de abierto más común al cual se le aplica la Proposición 9 es de la forma $\mathbb{C}$- semirrecta de origen 0.

Sea por ejemplo $\Omega = \mathbb{C}$- {números reales negativos ó cero}.

Este abierto satisface las condiciones de la Proposición 9 porque existe una aplicación continua:

$\varphi: \Omega \times [0,1]$ tal que $\varphi(z,o) = z$, para todo $z \in \Omega$ y $\varphi(z,1) = z_o =$ punto constante para todo $z \in \Omega$ (en el caso de $\mathbb{C}$ - {números $\leqslant o$} φ es $\varphi(z,S) = (1-S)z + S1$).

En esos abiertos llamados contractibles, todo circuito γ es Ω- homótopo a cero; la homotopía $\bar{\varphi}:[a,b] \times [0,1] \to \Omega$ de $\gamma:[a,b] \to \Omega$ a cero es

$$\bar{\varphi}\ (t,S) = \varphi(\gamma(t),S).$$

APENDICE 6

DEMOSTRACION DE LA PROPOSICION 0:

(a) Como γ y γ_1 son Ω- homótopos existe φ_1 continua con $\varphi_1 : [a,b] \times [o,1] \to \Omega$

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_1(t,o)=\gamma(t)\\ \varphi_1(t,1)=\gamma_1(t)\end{array}\right\} \text{ para todo } t\in[a,b] \quad \text{y} \quad \left.\begin{array}{l}\varphi_1(a,s)=\gamma(a)=\gamma_1(a)\\ \varphi_1(b,s)=\gamma(b)=\gamma_1(b)\end{array}\right\} \text{ para todo } s\in[o,1]$$

También γ_1 y γ_2 son Ω- homótopos, por tanto existe φ_2 continua: $\varphi_2 : [a,b] \times [o,1] \to \Omega$

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_2(t,o)=\gamma_1(t)\\ \varphi_2(t,1)=\gamma_2(t)\end{array}\right\} \text{ para todo } t\in[a,b] \quad \text{y} \quad \left.\begin{array}{l}\varphi_2(a,s)=\gamma_1(a)=\gamma_2(a)\\ \varphi_2(b,s)=\gamma_1(b)=\gamma_2(b)\end{array}\right\} \text{ para todo } s\in[o,1]$$

$$\text{Sea} \quad \varphi(t,s) = \begin{cases}\varphi_1(t,2s) & \text{si} \quad o \leq s \leq \frac{1}{2}\\ \varphi_2(t,2s-1) & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq s \leq 1\end{cases}$$

Como φ_1 y φ_2 con continuas, φ es continua ya que en $s=\frac{1}{2}$ $\varphi_1(t,2s) = \varphi_2(t,2s-1)$

(puesto que $\varphi_1(t,2s) = \varphi_1(t,1) = \gamma_1(t)$ y

$\varphi_2(t,2s-1) = \varphi_2(t,o) = \gamma_1(t)$).

$$\text{Además } \left.\begin{array}{l}\varphi(t,o) = \varphi_1(t,o) = \gamma(t)\\ \varphi(t,1) = \varphi_2(t,1) = \gamma_2(t)\end{array}\right\} \text{ para todo } t\in[a,b]$$

$$\text{Si } s\in[0,\tfrac{1}{2}] \quad \begin{cases} \varphi(a,s)=\varphi_1(a,2s)=\gamma(a)=\gamma_1(a)=\gamma_2(a) \\ \varphi(b,s)=\varphi_1(b,2s)=\gamma(b)=\gamma_1(b)=\gamma_2(b) \end{cases}$$

$$\text{Si } s\in[\tfrac{1}{2},1] \quad \begin{cases} \varphi(a,s)=\varphi_2(a,2s-1)=\gamma(a)=\gamma_1(a)=\gamma_2(a) \\ \varphi(b,s)=\varphi_2(b,2s-1)=\gamma(b)=\gamma_1(b)=\gamma_2(b) \end{cases}$$

Por lo tanto, γ y γ_2 son Ω- homótopos.

(b) Como γ y γ_1 son Ω- homótopos existe

$\varphi_1: [a,b] \times [0,1] \to \Omega$ continua tal que:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(t,0) &= \gamma(t) \\ \varphi_1(t,1) &= \gamma_1(t) \end{aligned}\right\} \quad \text{para todo } t\in[a,b]$$

y $\varphi_1(a,s) = \varphi_1(b,s)$ para $s\in[0,1]$.

Como γ_1 y γ_2 son Ω- homótopos existe.

$\varphi_2: [a,b] \times [0,1] \to \Omega$ continua

$$\left.\begin{aligned} \varphi_2(t,0) &= \gamma_1(t) \\ \varphi_2(t,1) &= \gamma_2(t) \end{aligned}\right\} \quad \text{para todo } t\in[a,b]$$

y $\varphi_2(a,s) = \varphi_2(b,s)$ para $s\in[0,1]$

Sea φ definida como en el caso (a) y tendremos que:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(t,0) &= \gamma(t) \\ \varphi(t,1) &= \gamma_2(t) \end{aligned}\right\} \quad \text{para todo } t\in[a,b]$$

si $0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}$ $\varphi(a,s)=\varphi_1(a,2s)=\varphi_1(b,2s)=\varphi(b,s)$

Si $\frac{1}{2} \leq s \leq 1$ $\varphi(a,s)=\varphi_2(a,2s-1)=\varphi_2(b,2s-1)=\varphi(b,s)$

entonces $\varphi(a,s) = \varphi(b,s)$ para todo $s\in [0,1]$

y φ es continua por lo mencionado en (a), por tanto γ y γ_2 son Ω- homótopos.

DEMOSTRACION DE LA PROPOSICION 1:

Ya que γ_1 y γ_2 son continuas en $[a,b]$ y $[b,c]$ respectivamente y coinciden en b, entonces $\gamma_2\,\gamma_1$ es continua.

Como γ_1 es carretera existe una partición $a=a_o<a_1<a_2<\cdots<a_n<b=a_{n+1}$ en donde se cumple la definición *1* (b); análogamente como γ_2 es carretera existe una partición

$$b=b_o<b_1<b_2< \cdots\cdots <b_m<c=b_{m+1}$$

en la cual se cumplen todas las condiciones de la definición *1* (b).

Entonces si tomamos la partición de $[a,c]$ $a=a_o<a_1< \cdots\cdots < a_{n+1}=b_o<b_1< \cdots\cdots <b_{m+1}= c$

$$\text{Como } \gamma_2\,\gamma_1 = \begin{cases} \gamma_1 & \text{en } [a,b] \\ \gamma_2 & \text{en } [b,c] \end{cases}$$

dada esa partición las condiciones de *1* (b) se satisfacen y por tanto $\gamma_2\,\gamma_1$ es una carretera.

DEMOSTRACION DE LA PROPOSICION 2:

Dadas f y $g \in \mathcal{R}(a,b)$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ se cumple que $f+g$, $f\,g$ y $\lambda f \in \mathcal{R}(a,b)$; ya que, por estar f y $g \in \mathcal{R}(a,b)$ existen dos par

ticiones en donde se cumple la definición 4, entonces tomando la unión de esas 2 particiones, vemos que, para dicha partición - $f \cdot g$ y $f + g \in \mathcal{R}(a,b)$.

Y en el caso que queremos demostrar, que $\lambda . f \in \mathcal{R}(a,b)$ basta tomar la partición para la cual $f \in \mathcal{R}(a,b)$.

Por lo tanto por la observación anterior y por el comportamiento en general de las funciones se tiene que $\mathcal{R}(a,b)$ es un álgebra sobre $\mathbb{C}$.

DEMOSTRACION DEL LEMA 1:

Para todo $s \in [0,1]$ sea $\gamma_s : [a,b] \to \mathbb{C}$ el camino

$$\gamma_s(t) = (1-s)\,\gamma(t) + s\,\gamma_1(t),$$

es claro que γ_s es una carretera continuamente diferenciable. Dadas las condiciones sobre γ y γ_1, γ_s está contenida en Ω para todo $s \in [0,1]$.

Sea $J : [0,1] \to \mathbb{C}$ la función:

$$J(s) = \int_{\gamma_s} f(z)\,dz, \quad \text{vamos a calcular}$$

la derivada de J. $J(s) = \int_a^b f(\gamma_s(t))\,\gamma_s'(t)\,dt$

Derivando dentro del simbolo $\int_a^b$:

$$\frac{dJ}{ds}(s) = \int_a^b \left[\frac{d}{ds} \left(f(\gamma_s(t)), \gamma_s'(t) + f(\gamma_s(t)) \right) \frac{d\gamma_s'(t)}{ds} \right] dt$$

y

$$\frac{d}{ds}\left(f(\gamma_s(t))\right) = \frac{df}{dz}(\gamma_s(t)) \cdot (\gamma_1(t) - \gamma(t))$$

$$\frac{d\gamma_s(t)}{ds} = \gamma_1'(t) - \gamma'(t)$$

o sea:

$$\frac{dJ}{ds} = \int_a^b \left[\frac{df}{dz}(\gamma_s(t))\gamma_s'(t)(\gamma_1(t)-\gamma(t)) + f(\gamma_s(t))(\gamma_1'(t)-\gamma'(t)) \right] dt$$

Pero es fácil ver que:

$$\frac{df}{dz}(\gamma_s(t))\ \gamma_s'(t) = \frac{d}{dt} f(\gamma_s(t))$$

entonces:

$$\frac{dJ}{ds}(s) = \int_a^b \left[\frac{d}{dt} f(\gamma_s(t))(\gamma_1(t)-\gamma(t)) + f(\gamma_s(t))(\gamma_1'(t)-\gamma'(t)) \right] dt$$

$$\frac{dJ}{ds}(s) = \int_a^b \frac{d}{dt} \left[f(\gamma_s(t))(\gamma_1(t)-\gamma(t) \right] dt$$

$$\frac{dJ}{ds}(s) = f(\gamma_s(b))(\gamma_1(b)-\gamma(b)) - f(\gamma_s(a))\ (\gamma_1(a)-\gamma(a))$$

De allí:

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{\gamma} f(z)dz = J(1) - J(o) = \int_o^1 \frac{dJ}{ds}(s)\ ds$$

y

$$\int_o^1 \frac{dJ}{ds}(s)ds = \int_o^1 f(\gamma_s(b))(\gamma_1(b)-\gamma(b))ds - \int_o^1 f(\gamma_s(a))(\gamma_1(a)-\gamma(a)ds$$

por lo tanto: Como $\int_o^1 \frac{dJ}{d(s)}(s)\ ds = J(1) - J(o)$

$$\int_{\gamma_1} f(z)\ dz - \int_{\gamma} f(z)\ dz =$$

$$= \int_o^1 f((1-s)\gamma(b)+s\gamma_1(b))(\gamma_1(b)-\gamma(b))ds - \int_o^1 f((1-s)\gamma(a)+s\gamma_1(a))(\gamma_1(a)-\gamma(a))\ ds$$

DEMOSTRACION DE LA PROPOSICION 4:

Sea $a_o = a < a_1 < a_2 < \ldots\ldots < a_n < b = a_{n+1}$ una partición de $[a,b]$ tal que para todo $k = o, 1, \ldots, n$ las restricciones $\gamma | [a_k, a_{k+1}]$ y $\delta | [a_k, a_{k+1}]$ sean continuamente diferenciables.

Llamamos $\gamma_k : [a_k, a_{k+1}] \to \mathbb{C}$ y $\delta_k : [a_k, a_{k+1}] \to \mathbb{C}$ a las restricciones de las carreteras γ y δ a $[a_k, a_{k+1}]$ respectivamente; $\gamma = \gamma_n \gamma_{n-1} \ldots\ldots \gamma_1$ y $\delta = \delta_n \delta_{n-1} \ldots . \delta_1$; entonces de la propiedad (3') del Teorema 1:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{k=o}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)\, dz \qquad y$$

$$\int_\delta f(z)\, dz = \sum_{k=o}^{n} \int_{\delta_k} f(z)\, dz$$

Ahora podemos aplicar el lema 1 a los pares (γ_k, δ_k) ; $k = o, \ldots\ldots, n$

Si $J_k = (\delta(a_k) - \gamma(a_k)) \int_o^1 f((1-s)\,\gamma(a_k) + s\delta(a_k))\, ds$

$$\int_{\delta_k} f(z)\, dz - \int_{\gamma_k} f(z)\, dz = J_{k+1} - J_k$$

Resulta de allí que:

$$\int_\delta f(z)\, dz - \int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{k=o}^{n} \left[\int_{\delta_k} f(z)\, dz - \int_{\gamma_k} f(z)\, dz \right] =$$

$$= \sum_{k=o}^{n} (J_{k+1} - J_k) =$$

$$= J_{n+1} - J_o$$

$$J_o = (\delta(a) - \gamma(a)) \int_o^1 f((1-s)\,\gamma(a) + s\delta(a))\; ds$$

$$J_{n+1} = (\delta(b) - \gamma(b)) \int_o^1 f((1-s)\,\gamma(b) + s\delta(b))\; ds$$

En el caso (a) $\delta(a) = \gamma(a)$, $\delta(b) = \gamma(b)$, y entonces $J_{n+1} = J_o = 0$

En el caso (b) $\delta(a) = \delta(b)$, $\gamma(a) = \gamma(b)$, y entonces $J_{n+1} = J_o$ y por lo tanto:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_\delta f(z)\, dz$$

DEMOSTRACION DE LEMA 2:

Por reducción al absurdo. Si el Lema no fuera cierto, para todo entero $n \geq 1$ existiría una $z_n \in K$ tal que $\mathcal{D}(z_n, \frac{1}{n}) \not\subset \Omega$. Esto significaría que existe ω_n tal que $\omega_n \in \mathcal{D}(z_n, \frac{1}{n}) \cap (\mathbb{C} - \Omega)$. Como K es compacto existe una subsucesión;

$$\{ z_k^1 \mid k \geq 1 \} \text{ de } \{ z_n \mid n \geq 1,\ z_k^1 = z_{n_k} \}$$

que converge a un punto $z^1 \in K$, sea $\omega_k^1 = \omega_{n_k}$, para todo $K \geq 1$

$| z_k^1 - \omega_k^1 | = | z_{n_k} - \omega_{n_k} | < \frac{1}{n_k}$ y por tanto $\omega_k^1 \to z^1$ cuando $K \to \infty$. Pero $\{ \omega_k^1 \mid k \geq 1 \} \subset \mathbb{C} - \Omega$ y como $\mathbb{C} - \Omega$ es cerrado $z^1 \in \mathbb{C} - \Omega$, pero $z^1 \in K \subset \Omega$, lo cual es una contradicción. Y por tanto el Lema 2 es cierto.

DEMOSTRACION DE LA PROPOSICION 5:

(a) Vamos a demostrar que la función $\omega \to I(\omega,\gamma)$ es localmente constante sobre $\mathbb{C} - \gamma$, lo cual resultará de esto:

$\mathbb{C} - \gamma$ es abierto porque es el complemento de $\gamma([a,b])$, que como imagen continua de un compacto $[a,b]$ es compacto y por lo tanto cerrado. Si $\omega \in \mathbb{C} - \gamma$ existe entonces un disco abierto $\mathcal{D}(\omega,d) \subset \mathbb{C} - \gamma$.

Si $\omega^1 \in \mathcal{D}(\omega,d)$:

$$I(\omega^1,\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-\omega^1} = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(t)\ dt}{\gamma(t)-\omega^1} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(t)\ dt}{\gamma(t)+(\omega-\omega^1)-\omega} = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\tilde{\gamma}'(t)}{\tilde{\gamma}(t)-\omega} = I(\omega,\tilde{\gamma})$$

Si $\tilde{\gamma}: [a,b] \to \Omega$, es el circuito

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t) + \omega-\omega^1.$$

Para todo $t \in [a,b]$ el segmento $\overline{\gamma(t)\ \tilde{\gamma}(t)}$ pertenece a $\mathbb{C} - \{\omega\}$, porque en el caso contrario existiría una $t \in [a,b]$ tal que $\omega \in \overline{\gamma(t)\ \tilde{\gamma}(t)}$. Mas entonces para una $s \in [0,1]$ $\omega = \gamma(t) + s(\omega-\omega^1)$ (ya que $\omega=(1-s)\gamma(t)+s\tilde{\gamma}(t)$), de allí:

$$|\ \omega-\gamma(t)\ | = s|\ \omega-\omega^1\ | \leqslant d,\ \gamma(t) \in \mathcal{D}(\omega,d) \subset \mathbb{C} - \gamma$$

lo cual es una contradicción.

Como la función $z \to \frac{1}{z-\omega}$ de $\mathbb{C} - \{\omega\}$ en $\mathbb{C}$ es holomorfa, por la proposición 4 entonces:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-\omega} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{dz}{z-\omega}$$

o lo mismo que:

$$I\ (\omega,\gamma) = I(\omega,\tilde{\gamma}) = I(\omega^1,\gamma)$$

ó sea $\omega \to I(\omega,\gamma)$ es constante en $\mathcal{D}(\omega,d)$.

(b) γ es homótopo a cero en $\mathbb{C} - \{ \omega \}$:
La homotopía es $\varphi: [a,b] \times [0,1] \to \mathbb{C} - \{ \omega \}, \varphi(t,s) = s\gamma(t)$.
Como $| \varphi(t,s) | \leq | \gamma(t) | \leq R$, para todos los pares (t,s), luego φ está contenida en $\overline{\mathcal{D}(0,R)} \subset \mathbb{C} - \{ \omega \}$.
Como $z \to \frac{1}{z-\omega}$ de $\mathbb{C} - \{ \omega \} \to \mathbb{C}$ es holomorfa por el corolario del Teorema 2:

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-\omega} = 0 \quad , \quad \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-\omega} = 0$$

ó sea $I(\omega,\gamma) = 0$

(c) Sea $\varphi [a,b] \to \mathbb{C}$ la función:

$$\varphi(s) = \int_a^s \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-\omega} \, dt$$

Vamos a mostrar que:

$$e^{\varphi(s)} = \frac{\gamma(s)-\omega}{\gamma(a)-\omega} \quad , \quad \text{para todo } s \in [a,b]$$

Sea $\psi: [a,b] \to \mathbb{C}$ la función.

$$\psi(s) = e^{-\varphi(s)} \quad (\gamma(s) - \omega)$$

Sean $a_1, \ldots, a_n$ los puntos de discontinuidad de γ'.
Si $s \in [a,b] - \{ a_1, \ldots, a_n \}$

$$\frac{d\psi}{ds}(s) = (\gamma(s)-\omega) \left(- \frac{d\varphi}{ds}(s) \, e^{-\varphi(s)} \right) + e^{-\varphi(s)} \, \gamma'(s)$$

$$\frac{d\psi}{ds}(s) = - \frac{\gamma'(s) \, e^{-\varphi(s)}}{\gamma(s) - \omega} \left(\gamma(s) - \omega \right) + e^{-\varphi(s)} \, \gamma'(s) = 0$$

Como ψ es continua, ψ es constante, y entonces

$\psi(s) = \psi(a) = e^{-\varphi(a)}$ $\quad (\gamma(a) - \omega) = (\gamma(a) - \omega)$

de allí resulta que:

$$e^{\varphi(s)} = \frac{\gamma(s)-\omega}{\gamma(a)-\omega}$$

Ahora $I(\omega,\gamma) = \frac{\varphi(b)}{2\pi i}$ y, $e^{\varphi(b)} = \frac{\gamma(b)-\omega}{\gamma(a)-\omega} = 1$,

ya que γ es un circuito.

Por el Teorema 1 - (e) del Capítulo 5 existe una $K \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$\varphi(b) = 2\pi i\, K \quad \text{y por tanto:}$$

$$I(\omega,\gamma) = \frac{2\pi i K}{2\pi i} = K$$

(d) $\gamma_i : [a,b] \to \mathbb{C} - \{\omega\}$, $1 \leq i \leq n$, son n circuitos y por lo tanto carreteras, γ es la composición de ellos - en el sentido de la definición (6), entonces por ser --- $z \to \frac{1}{z-\omega}$ de $\mathbb{C} - \{\omega\} \to \mathbb{C}$ continua, por la proposición 3:

$$\int_\gamma \frac{1}{z-\omega}\, dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} \frac{1}{z-\omega}\, dz$$

y por tanto $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z-\omega}\, dz = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{1}{z-\omega}\, dz$

ó sea $I(\omega,\gamma) = \sum_{k=1}^{n} I(\omega,\gamma_k)$.

CAPITULO 7

PUNTOS SINGULARES - SERIES DE LAURENT - FUNCIONES MEROMORFAS - TEOREMA DE LOS RESIDUOS

SECCION 1: *Puntos singulares aislados.*

DEFINICION 1: Sea $f: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa y sea ω un punto aislado de $\mathbb{C} - \Omega$ (esto significa por la definición 6 (a) del Capítulo 0 que existe un disco abierto $\mathcal{D}(\omega,\varepsilon)$ tal que $\mathcal{D}(\omega,\varepsilon) \cap (\mathbb{C} - \Omega) = \{\omega\}$), ω es llamado *punto singular aislado* de f, si no hay función holomorfa $\tilde{f}: \Omega \cup \{\omega\} \to \mathbb{C}$ tal que:

$$\tilde{f} \mid \Omega = f$$

NOTA: Resulta de la definición de punto aislado que $\Omega \cup \{\omega\}$ es abierto.

TEOREMA 1:

(a) Si $f: \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa, ω_0 es un punto aislado de $\mathbb{C} - \Omega$ y si $\mathcal{D}(\omega_0, r_0)$ es el mayor disco de centro ω_0 contenido en el abierto $\Omega \cup \{\omega_0\}$ existen dos series de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} x^{-n}$ tales que la primera tiene un radio de convergencia mayor ó igual a r_0 y la segunda de radio de convergencia ∞, y tales que para todo $z \in \mathcal{D}(\omega_0, r_0)$ $z \neq \omega_0$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-\omega_0)^n,$$

y además para todo ρ; $0 < \rho < r_0$

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\omega_0 + \rho e^{i\sigma})\ e^{-in\sigma}}{\rho^n}\, d\sigma$$

(b) Si $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n$ son dos series de potencias tales que existe un disco $D(\omega_0, \varepsilon) \subset \Omega$ con la propiedad que para todo $z \in D(\omega_0, \varepsilon)$ con $z \neq \omega_0$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-\omega_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} C_n (z-\omega_0)^{-n}$$

(es parte de la hipótesis que esas series convergente para todo $z \in D(\omega_0, \varepsilon) - \{\omega_0\}$), entonces

$$b_n = a_n \text{ y } C_n = -a_{-n} \text{ para todo } n \geq 1 \text{ y } b_0 = a_0$$

COMENTARIO Y NOTACION: $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-\omega_0)^n$ significa la suma de las dos series:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\omega_0)^n \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-\omega_0)^n}$$

Las series formales del tipo $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n$ se llaman *series de Laurent*. Se puede hacer una teoría de estas series muy pa-

recida a la teoría de las series de potencias desarrollada en el Capítulo 1 y definir dominios de convergencia etc. No lo haremos aquí para no alargar la exposición.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 1:

La demostración de este Teorema es similar a la de la Proposición 7 - (a) del Capítulo 6.

Sean r y r_1 dos números cualesquiera tales que $0 < r_1 < r < r_0$; y sean $\gamma, \gamma_1 : [0, 2\pi] \to \Omega$ los circuitos:

$$\gamma(\sigma) = \omega_0 + re^{i\sigma}$$

$$\gamma_1(\sigma) = \omega_0 + r_1 e^{i\sigma}$$

γ y γ_1 son Ω - homótopos (La homotopía es $\varphi: [0,2\pi] \times [0,1] \to \Omega$;

$$\varphi(\sigma, s) = \omega_0 + [(1-s)\, r + s r_1]\, e^{i\sigma})$$

Del Teorema 4 del capítulo 6, resulta que si $\omega \in \Omega - (\gamma \cup \gamma_1)$:

$$((I(\omega,\gamma) - I(\gamma,\omega_1))\, f(\omega) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-\omega}\, dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z-\omega}\, dz$$

Del Teorema 3 del Capítulo 6 resulta que:

$$I(\omega,\gamma) = \begin{cases} 0 & si \quad |\omega - \omega_0| > r \\ \\ 1 & si \quad |\omega - \omega_0| < r \end{cases}$$

$$I(\omega,\gamma_1) = \begin{cases} 0 & si \quad |\omega - \omega_0| > r_1 \\ \\ 1 & si \quad |\omega - \omega_0| < r_1 \end{cases}$$

entonces:

$$I(\omega,\gamma) - I(\omega,\gamma_1) = \begin{cases} 1 & si \quad r_1 < |\omega-\omega_0| < r \\ \\ 0 & \text{en los otros casos} \end{cases}$$

Sea entonces ω tal que $r_1 < |\omega-\omega_0| < r$. Para todo entero $N \geq 1$:

$$\frac{1}{z-\omega} = \sum_{n=0}^{N} \frac{(\omega-\omega_0)^n}{(z-\omega_0)^{n+1}} + A_N(z)$$

$$\frac{1}{z-\omega} = -\sum_{n=0}^{N} \frac{(z-\omega_0)^n}{(\omega-\omega_0)^{n+1}} - B_N(z), \qquad \text{donde :}$$

$$A_N(z) = \frac{(\omega-\omega_0)^{N+1}}{(z-\omega_0)^{N+1}(z-\omega)} \qquad B_N(z) = -\frac{(z-\omega_0)^{N+1}}{(\omega-\omega_0)^{N+1}(z-\omega)}$$

Vamos a substituir la primera expansión de $\frac{1}{z-\omega}$ en la integral $\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{z-\omega}$ y la segunda en la integral $\int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z-\omega}\,dz$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-\omega}\,dz = \sum_{n=0}^{N}(\omega-\omega_0)^n \frac{1}{2\pi i}\cdot$$

$$\cdot \int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-\omega_0)^{n+1}} + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,A_N(z)\,dz$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z-\omega}\,dz = -\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{(\omega-\omega_0)^{n+1}}\frac{1}{2\pi i}\cdot$$

$$\cdot \int_{\gamma_1} f(z)(z-\omega_0)^n\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} f(z)\,B_N(z)$$

Si $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-\omega_0)^{n+1}}\,dz$ y $a_{-n} = \int_{\gamma_1} f(z)(z-\omega_0)^{n-1}\,dz$, para todo $n \geq 1$ y $a_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-\omega_0)}\,dz$, entonces:

$$f(\omega) = \sum_{n=-N-1}^{N} a_n(\omega-\omega_0)^n + \frac{1}{2\pi i}\cdot$$

$$\cdot \int_\gamma f(z)\,A_N(z)\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} B_N(z)\,f(z)\,dz$$

para todo ω tal que $r_1 < |\omega-\omega_0| < r$ y todo entero $N \geq 1$.

De la propiedad (2') del Teorema - Definición 1 del Capítulo 6:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z)\ A_N(z)\ dz \right| \leq r\ sup\ \{|f(z)\ A_N(z)| \ \Big|\ |z-\omega_0| = r\}$$

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(z)\ B_N(z)\ dz \right| \leq r_1\ sup\ \{|f(z)\ B_N(z)| \ \Big|\ |z-\omega_0| = r_1\}$$

Sea $M = sup\ \{|f(z)| \ \Big|\ r_1 \leq |z-\omega_0| \leq r\}$; Como el conjunto - $\{z \mid r_1 \leq |z-\omega_0| \leq r\}$ es compacto $M < +\infty$.

$$|A_N(z)| = \frac{|\omega-\omega_0|^{N+1}}{|z-\omega_0|^{N+1}|z-\omega|} \leq \frac{|\omega-\omega_0|^{N+1}}{r^{N+1}(r-|\omega-\omega_0|)} \quad \text{Si } |z-\omega_0| = r$$

$$|B_N(z)| = \frac{|z-\omega_0|^{N+1}}{|\omega-\omega_0|^{N+1}|z-\omega|} \leq \frac{r_1^{N+1}}{|\omega-\omega_0|^{N+1}(|\omega-\omega_0|-r_1)} \quad \text{Si } |z-\omega_0| = r_1$$

Resulta de allí:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z)\ A_N(z)\ dz \right| \leq \frac{|\omega-\omega_0|^{N+1} M}{r^N (r-|\omega-\omega_0|)}$$

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(z)\ B_N(z)\ dz \right| \leq \frac{r_1^{N+2} M}{|\omega-\omega_0|^{N+1}(|\omega-\omega_0|-r_1)}$$

Como $r_1 < |\omega-\omega_0| < r$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z)\ A_N(z)\ dz = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(z)\ B_N(z)\ dz = 0$$

De allí resulta que para todo ω tal que

$$r_1 < |\omega-\omega_0| < r$$

$$f(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (\omega-\omega_0)^n$$

Ahora vamos a demostrar que los a_n no dependen de r_1 ó r. Sea ρ tal que $0 < \rho < r_0$ y sea $\gamma_2 : [0,2\pi] \to \Omega$ el circuito - - $\gamma_2(\sigma) = \omega_0 + \rho e^{i\sigma}$ es fácil ver que γ_2 es $(\Omega-\{\omega_0\})$ - homótopo a γ y a γ_1 (las homotopías son:

$$\varphi : [0,2\pi] \times [0,1] \to \Omega - \{\omega_0\}$$

$$\varphi(\sigma,s) = \omega_0 + ((1-s)r + s\rho)\, e^{i\sigma}$$

y $\varphi_1 : [0,2\pi] \times [0,1] \to \Omega - \{\omega_0\}$

$$\varphi_1(\sigma,s) = \omega_0 + ((1-s)r_1 + s\rho)\, e^{i\sigma})$$

Del Teorema 2 - (b) del Capítulo 6 si $n \geq 0$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)\,dz}{(z-\omega_0)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(z)}{(z-\omega_0)^{n+1}}\, dz$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\omega_0+\rho e^{i\sigma})\ \gamma'(\sigma)\ d\sigma}{(\omega_0+\rho e^{i\sigma}-\omega_0)^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\omega_0 + \rho e^{i\sigma})}{(\rho e^{i\sigma})^{n+1}} \rho i e^{i\sigma} \, d\sigma$$

ó sea $$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\omega_0 + \rho e^{i\sigma})}{\rho^n} e^{-in\sigma} \, d\sigma$$

Si $n \geq 1$ $$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(z)(z-\omega_0)^{n-1} \, dz = \frac{1}{2\pi i} \cdot$$

$$\cdot \int_{\gamma_2} f(z) \, (z-\omega_0)^{n-1} \, dz$$

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega_0 + \rho e^{i\sigma}) \, \rho^n \, e^{+in\sigma} \, d\sigma$$

Entonces para todo ρ , $0 < \rho < r_0$ y todo $n \in Z$

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\omega_0 + \rho e^{i\sigma})}{\rho^n} e^{-in\sigma} \, d\sigma$$

Como para todo r , r_1 tales que $r_1 < r < r_0$ y para todo ω tal que $r_1 < |\omega - \omega_0| < r$, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (\omega-\omega_0)^n$ converge y su suma es $f(\omega)$, entonces para todo ω tal que $0 < |\omega - \omega_0| < r_0$

$$f(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (\omega-\omega_0)^n \; ;$$

Esto tiene las siguientes consecuencias: las series - - $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\omega-\omega_0)^n$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(\omega-\omega_0)^n}$ convergen para todo ω tal que - -

$0 < |\omega-\omega_0| < r_0$ entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ tiene un radio de convergencia mayor ó igual a r_0 y $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}x^n$ tiene un radio de convergencia ∞ (Ver Corolario (b) del Teorema 1 del Capítulo1).

(b) Para todo $z \in \mathcal{D}(\omega_0,\varepsilon)$ $z \neq \omega_0$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-\omega_0)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-\omega_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} C_n(z-\omega_0)^n$$

Entonces basta demostrar que si $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n x^n$ es una serie de Laurent tal que existe un disco $\mathcal{D}(0,\varepsilon)$ tal que $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n z^n = 0$ para todo $z \in \mathcal{D}(0,\varepsilon)$, $z \neq 0$, entonces $\alpha_n = 0$ para todo $n \in Z$.

La convergencia para $z = \frac{\varepsilon}{2}$ de $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{\varepsilon^n}{2^n}$ implica que $Sup\{|\alpha_n \frac{\varepsilon^n}{2^n}| \; n \geq 0\} < +\infty$, además tenemos la convergencia para $z = \frac{\varepsilon}{\delta}$ de $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \frac{\varepsilon^{-n}}{\delta^{-n}}$ lo cual implica que $Sup\{|\frac{\alpha_{-n}\delta^n}{\varepsilon^n}| \;\Big|\; n \geq 0\} < +\infty$.

Sea $M \geq Sup\{|\alpha_n \frac{\varepsilon^n}{2^n}| \;\Big|\; n \geq 0\}$, $sup\{|\frac{\alpha_{-n}\delta^n}{\varepsilon^n}| \;\Big|\; n \geq 1\}$

$$|\alpha_n| \leq \frac{2^n M}{\varepsilon^n} \; si \; n \geq 0 \qquad |\alpha_{-n}| \leq M\frac{\varepsilon^n}{\delta^n} \; si \; n \geq 1$$

Para todo z tal que $|z| = \frac{\varepsilon}{4}$ y para todo entero $N \geq 1$:

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha_n z^n \right| + \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha_{-n} z^{-n} \right| \leq$$

$$\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2^n M}{\varepsilon^n} \cdot \frac{\varepsilon^n}{4^n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} M \frac{\varepsilon^n}{8^n} \cdot \frac{4^n}{\varepsilon^n} =$$

$$= M \left[\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \right] = \frac{M}{2^{N-1}}$$

Ahora si los α_n no son todos cero, sea $q \in Z$ tal que $\alpha_q \neq 0$ Escogemos un entero $N > q$ tan grande como para que se cumpla.

$$\frac{M}{2^{N-1}} \leq \frac{|\alpha_q|}{2} \frac{\varepsilon^q}{4^q} \quad \acute{o} \quad 2^{N-1} \geq \frac{2M4^q}{|\alpha_q| \varepsilon^q}$$

tomando $z = \frac{\varepsilon}{4} e^{i\sigma} \in D(0,\varepsilon)$, de $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n z^n = 0$ resulta que:

$$\left| \sum_{n=-N}^{N} \alpha_n z^n \right| \leq \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha_n z^n \right| + \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha_{-n} z^{-n} \right| \leq$$

$$\leq \frac{M}{2^{N-1}} \leq \frac{|\alpha_q|}{2} \cdot \frac{\varepsilon^q}{4^q}$$

Sea I la integral:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=-N}^{N} \alpha_n \frac{\varepsilon^n}{4^n} e^{in\sigma} \right) e^{-iq\sigma} \, d\sigma$$

de lo anterior resulta:

$$|I| \leq \frac{|\alpha_q|}{2} \quad \frac{\varepsilon^q}{4^q}$$

pero:

$$I = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{+N} \alpha_n \frac{\varepsilon^n}{4^n} \int_0^{2\pi} e^{i(n-q)\sigma} \, d\sigma = \alpha_q \frac{\varepsilon^q}{4^q} ;$$

Esto resulta del LEMA 1 que demostraremos a continuación y se - tiene finalmente que

$$\left| \alpha_q \frac{\varepsilon^q}{4^q} \right| = |I| = \frac{|\alpha_q|}{2} \quad \frac{\varepsilon^q}{4^q} ,$$

lo cual es una contradicción y por tanto $\alpha_n = 0$ para toda n.

LEMA 1: Si $k \in Z$, $k \neq 0$ $\int_0^{2\pi} e^{ik\sigma} \, d\sigma = 0$

DEMOSTRACION:

Supongamos que $\int_0^{2\pi} e^{ik\sigma} \, d\sigma = I \neq 0$, haciendo el cambio - de variable $\sigma \to \sigma + \alpha$ con $\alpha \in R$:

$$I = \int_0^{2\pi} e^{ik\sigma} \, d\sigma = \int_{-\alpha}^{2\pi-\alpha} e^{ik(\sigma+\alpha)} \, d\sigma =$$

$$= e^{ik\alpha} \int_{-\alpha}^{2\pi-\alpha} e^{ik\sigma} \, d\sigma$$

y

$$\int_{-\alpha}^{2\pi-\alpha} e^{ik\sigma}\, d\sigma = \int_{0}^{2\pi-\alpha} e^{ik\sigma}\, d\sigma +$$

$$+ \int_{-\alpha}^{0} e^{ik\sigma}\, d\sigma$$

Haciendo un cambio de variable $\sigma \to \sigma - 2\pi$ en la última integral:

$$\int_{-\alpha}^{0} e^{ik\sigma}\, d\sigma = \int_{2\pi-\alpha}^{2\pi} e^{ik(\sigma-2\pi)}\, d\sigma =$$

$$= \int_{2\pi-\alpha}^{2\pi} e^{ik\sigma}\, d\sigma$$

(esto pues $e^{2\pi i} = 1$ ver Capítulo 5 del Teorema 1 - (e)), de - - allí:

$$\int_{-\alpha}^{2\pi-\alpha} e^{ik\sigma}\, d\sigma = \int_{0}^{2\pi-\alpha} e^{ik\sigma}\, d\sigma +$$

$$+ \int_{2\pi-\alpha}^{2\pi} e^{ik\sigma}\, d\sigma = I$$

y por tanto $I = e^{ik\alpha} I$ como α es arbitrario y $k \neq 0$

$$I = 0.$$

SECCION 2: *Polos, Singularidades esenciales, Teorema de Riemann.*

TEOREMA 2: (Teorema de Riemann)

Sea $f: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa y sea $\omega_0 \in \mathbb{C} - \Omega$ un punto aislado de $\mathbb{C} - \Omega$. Si existe un disco abierto $\mathcal{D}(\omega_0, \varepsilon) \subset \Omega \cup \{\omega_0\}$ tal que f sea acotada en $\mathcal{D}(\omega_0, \varepsilon) - \{\omega_0\}$, f tiene una extensión holomorfa al abierto $\Omega \cup \{\omega_0\}$.

DEMOSTRACION:

Por el Teorema 1 - (a) existe una serie de Laurent - - $\sum_{n=-\infty}^{\pm\infty} a_n x^n$ tal que si $\mathcal{D}(\omega_0, r_0)$ es el mayor disco abierto de - centro ω_0 contenido en $\Omega \cup \{\omega_0\}$ $\sum_{n=-\infty}^{\pm\infty} a_n (z-\omega_0)^n$ converge para - todo $z \in \mathcal{D}(\omega_0, r_0)$ con $z \neq \omega_0$, y su suma es $f(z)$; Además para todo ρ, $0 < \rho < r_0$ y $n \in \mathbb{Z}$:

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\omega_0 + \rho e^{i\sigma})}{\rho^n} e^{-in\sigma} \, d\sigma$$

Si M es una cota para f en $\mathcal{D}(\omega_0, r_0) - \{\omega_0\}$ tomando - - - $0 < \rho < \varepsilon$ $|a_n| \leq \frac{M}{\rho^n}$ ya que

$$\left| \frac{f(\omega_0 + \rho e^{i\sigma})}{\rho^n} e^{-in\sigma} \right| \leq \frac{M}{\rho^n}$$

entonces por Definición - Teorema 5 - (2) del Capítulo 6:

$$|a_n| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\omega_0 + \rho e^{i\sigma})}{\rho^n} e^{-in\sigma} \, d\sigma \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{M}{\rho^n} = \frac{M}{\rho^n}$$

Si $n < 0$ $|a_n| \leq inf \{ \frac{M}{\rho^n} \mid 0 < \rho < \varepsilon \} = 0$.

Resulta de allí que $a_n = 0$ *si* $n < 0$ y por lo tanto:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\omega_0)^n \text{ para todo } z \in \mathcal{D}(\omega_0, \varepsilon) - \{\omega_0\}$$

Si $\tilde{f}: \Omega \cup \{\omega_0\} \to \mathbb{C}$ es la función

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & si \quad z \neq \omega_0 \\ a_0 & si \quad z = \omega_0 \end{cases}$$

$\tilde{f}$ es una extensión holomorfa de f.

La demostración de este Teorema da como resultado el siguiente Corolario.

COROLARIO: En la situación del Teorema 1. Si $a_{-n} = 0$ para todo $n \geq 1$, f tiene una extensión holomorfa a $\Omega \cup \{\omega_0\}$.

DEFINICION 2:

Sea $f: \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa

Y sea ω_0 una singularidad aislada de f. La serie de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n$ que representa f en ω_0 por el Teorema 1, tiene $a_n \neq 0$ con $n < 0$ por el Corolario del Teorema 2. Si existe - - $q < 0$ tal que $a_n = 0$ para $n < q$ y $a_q \neq 0$, ω_0 es llamado polo de f de orden q.

Si ω_0 es polo, y esto es si existe una infinidad de $a_n \neq 0$ con $n < 0$, ω_0 es llamado punto singular (ó singularidad) esencial.

PROPOSICION 1:

Sea $f: \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa no nula y sea Z el conjunto de sus ceros. Si $\frac{1}{f}: \Omega - Z \to \mathbb{C}$ denota la función holomorfa $z \to \frac{1}{f(z)}$, todos los puntos de Z son los polos para $\frac{1}{f}$.

DEMOSTRACION: Por el Teorema 1 del Capítulo 3, el conjunto Z es aislado en Ω. Resulta de allí que si $\Omega^1 = \Omega - Z$, todos los puntos de Z son puntos aislados de $\mathbb{C} - \Omega^1$.

La restricción $\bar{f}$ de f al abierto $\Omega - Z$ (Z es cerrado en Ω) es holomorfa y no toma el valor cero. Resulta de la Proposición 5 del Capítulo 4 que $\frac{1}{\bar{f}} : \Omega^1 \to \mathbb{C}$ es holomorfa.

Sea $\omega_0 \in Z$ y sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ la serie que representa f en ω_0. Como ω_0 es un cero, $a_0 = f(\omega_0) = 0$. Sea q el entero ≥ 1 tal que $a_n = 0$ si $n < q$ y $a_q \neq 0$ (Teorema 1 del Capítulo 3).

Sea R el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y sea $h: \mathcal{D}(\omega_0, R) \to \mathbb{C}$ la función:

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+q}(z-\omega_0)^n,$$

por la Proposición 5 del Capítulo 2, h es holomorfa.

Además existe un disco $\mathcal{D}(\omega_0, \varepsilon) \subset \Omega$ tal que $f(z) = (z-\omega_0)^q h(z)$ para todo $z \in \mathcal{D}(\omega_0, \varepsilon)$.

Como $h(\omega_0) = a_q \neq 0$, existe un disco $\mathcal{D}(\omega_0, N) \subset \mathcal{D}(\omega_0, \varepsilon)$ tal que h no toma el valor 0 en $\mathcal{D}(\omega_0, N)$.

De la proposición 5 del Capítulo 4 si $\bar{h}$ es la restricción de h a $\mathcal{D}(\omega_0, N)$, $\frac{1}{\bar{h}}$ es holomorfa en $\mathcal{D}(\omega_0, N)$, entonces $\frac{1}{f}$ es holomorfa en $\mathcal{D}(\omega_0, N) - \{\omega_0\}$ y $\frac{1}{f} = \frac{1}{(z-\omega_0)^q} \cdot \frac{1}{\bar{h}}$.

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ la serie que representa $\frac{1}{\bar{h}}$ en ω_0, entonces $\frac{1}{f}$ es representado por la serie $\sum_{n=-q}^{\infty} b_{n+q} x^n$ en ω_0 y por lo tanto ω_0 es un polo de $\frac{1}{f}$.

TEOREMA 3: (Weierstrass Casorati)

(a) Si ω_0 es un punto singular aislado esencial de la función holomorfa $f: \Omega \to \mathbb{C}$, entonces para todo número $\sigma \in \mathbb{C}$ existe una sucesión $\{\omega_n \mid n \geq 1\}$ de puntos de Ω convergente a ω_0 y tal que $\lim_{n\to\infty} f(\omega_n) = \sigma$.

(b) ω_0 es un polo de f si y solamente si

$$\lim_{\substack{z\to\omega_0 \\ z\in\Omega}} |f(z)| = \infty$$

DEMOSTRACION:

(a) Sea $\mathcal{D}(\omega_0,\varepsilon)$ un disco abierto contenido en $\Omega \cup \{\omega_0\}$. - Vamos a mostrar que para todo n entero ≥ 1 existe - - $\omega_n \in \mathcal{D}(\omega_0, \frac{\varepsilon}{n}) - \{\omega_0\}$ tal que

$$|f(\omega_n) - \sigma| < \frac{1}{n} \quad ,$$

lo cual implicará (a).

Si un tal punto ω_n no existiera para un n, entonces - para todo $z \in \mathcal{D}(\omega_0, \frac{\varepsilon}{n}) - \{\omega_0\}$,

$$|f(z) - \sigma| \geq \frac{1}{n} \; ;$$

Sea $g\colon \mathcal{D}(\omega_0, \frac{\varepsilon}{n}) - \{\omega_0\} \to \mathbb{C}$, la función

$$g(z) = \frac{1}{f(z)-\sigma} \quad ,$$

como $f - \sigma$ restringida a $\mathcal{D}(\omega_0, \frac{\varepsilon}{n}) - \{\omega_0\}$ es holomorfa y no toma el valor cero, g es holomorfa (Proposición

5 del Capítulo 4); Además $|g|$ es acotada por n, y - por tanto por el Teorema 2 tendremos que g tiene una extensión $\tilde{g}$ a $\mathcal{D}(\omega_0, \frac{\varepsilon}{n})$. Ahora $f = \sigma + \frac{1}{\tilde{g}}$ en $\mathcal{D}(\omega_0, \frac{\varepsilon}{n}) - \{\omega_0\}$, y por la proposición 1 $\frac{1}{\tilde{g}}$ tiene un polo en ω_0, entonces f tiene un polo en ω_0 lo que contradice el hecho que ω_0 es una sigularidad esencial, y entonces para todo n existe $\omega_n \in \mathcal{D}(\omega_0, \frac{1}{n}) - \{\omega_0\}$ tal que

$$| f(\omega_n) - \sigma | < \frac{1}{n} ,$$

ó sea $\lim_{n\to\infty} f(\omega_n) = \sigma$.

(b) CONDICION SUFICIENTE:

Si ω_0 es punto singular aislado de f tal que - - - $\lim_{\substack{z\in\omega \\ z\in\Omega_0}} |f(z)| = +\infty$ entonces por la parte (a) ω_0 no puede ser esencial y por lo tanto ω_0 es un polo.

CONDICION NECESARIA:

Sea ω_0 un polo de f y sea $\sum_{n=-q}^{\infty} a_n x^n$ la serie que representa f en ω_0; En el mayor disco $\mathcal{D}(\omega_0, r_0)$ contenido en $\Omega \cup \{\omega_0\}$

$$f(z) = \sum_{n=-q}^{\infty} a_n (z-\omega_0)^n$$

(por el Teorema 1)

Sea $h: \mathcal{D}(\omega_0, r_0) \to \mathbb{C}$, la función:

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-q}(z-\omega_0)^n ,$$

por la proposición 5 del Capítulo 2 h es holomorfa y $h(\omega_0) = a_{-q}$, como

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-\omega_0)^q}$$

para todo $z \in \mathcal{D}(\omega_0, r_0) - \{\omega_0\}$

$$|f(z)| = \frac{|h(z)|}{|z-\omega_0|^q} ,$$

lo cual tiende a ∞ cuando z tiene a ω_0.

DEFINICION 3: Sea Ω un conjunto abierto de $\mathbb{C}$. Se llama función meromorfa en Ω una función f tal que existe un conjunto $Z \subset \Omega$, aislado en Ω tal que f sea definida y holomorfa en $\Omega - Z$, y que los puntos de Z sean polos de f.

NOTACION: Notaremos $M(\Omega)$ el conjunto de las funciones meromorfas en Ω.

TEOREMA 4: *(Teorema de Lindelöf).*

Si Ω es un abierto conexo, existe un isomorfismo canónico del campo de los cocientes de $\mathcal{H}(\Omega)$ sobre $M(\Omega)$

DEMOSTRACION:

Como Ω es conexo, $\mathcal{H}(\Omega)$ no tiene divisores de cero (Proposición 1, Capítulo 3). Entonces por un Teorema conocido de Algebra*, $\mathcal{H}(\Omega)$ se sumerge en su campo de cocientes $k(\Omega)$. El isomorfismo:

$$\varphi: k(\Omega) \to M(\Omega) ,$$

es definido de la manera siguiente: Sea $f \mid g \in k(\Omega)$, $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ y g no nula. Sea Z el conjunto de ceros de g. Por el Teorema 1 - del Capítulo 3, Z es aislado en Ω.

$\varphi(\frac{f}{g})$ sera la función definida en $\Omega - Z$ por la regla $z \to \frac{f(z)}{g(z)}$. Por la proposición 5 del Capítulo 4 esa función es holomorfa en $\Omega - Z$ y de la proposición 1, se sigue que los puntos de Z son - polos de esa función.

Es bastante claro que φ es homomorfismo de álgebras e inyectiva, y un poco más complicado el ver que φ es suprayectiva.

SECCION 3: *Residuos, Teorema de los Residuos.*

DEFINICION 4: Sea $f: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa y sea ω_0 un punto - singular aislado de f; Sea $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n$ la serie de Laurent que representa f en ω_0. Se llama residuo de f en ω_0 y se denota - por $Res(f, \omega_0)$ al coeficiente a_{-1} de la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x^n$.

* Este Teorema puede verse en el libro Algebra Moderna, del Autor Herstein (pág. 123).

El siguiente Teorema es una generalización del Teorema de Cauchy y de la fórmula de Cauchy.

TEOREMA 5: (Teorema de los residuos).

Sea Ω un abierto, Z un subconjunto aislado de Ω y - - - $f: \Omega - Z \to \mathbb{C}$ una función holomorfa; Si $\gamma, \gamma_1 : [a,b] \to \Omega - Z$ son dos circuitos $\underset{\equiv}{\Omega}$ - homótopos entonces:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z)\, dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(z)\, dz =$$

$$= \sum_{\omega \in Z} (I(\omega,\gamma) - I(\omega,\gamma_1))\ Res\ (f,\omega)$$

COROLARIO: Si $\gamma : [a,b] \to \Omega - Z$ es un circuito Ω - homóto po a cero:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z)\, dz = \sum_{\omega \in Z} I(\omega,\gamma)\ Res\ (f,\omega)$$

NOTA:

Por comodidad demostraremos primero el corolario y algun - lema que se necesita para la demostración del Teorema 5.

DEMOSTRACION DEL COROLARIO AL TEOREMA 5:

Es consecuencia inmediata del Teorema 5 y teoremas vistos en el Capítulo 6.

LEMA 2:

Sea $f: \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa y sea ω_0 un punto singular aislado; entonces existe una función holomorfa:

$$h: \mathbb{C} - \{\omega_0\} \to \mathbb{C} ,$$

tal que la función:

$$f - \frac{dh}{dz} - \frac{Res(f,\omega)}{z-\omega_0}$$

holomorfa en Ω tiene una extensión holomorfa a $\Omega \cup \{\omega_0\}$.

DEMOSTRACION DEL LEMA 2:

Sea $\sum_{n=-\infty}^{\pm\infty} a_n x^n$ la serie de Laurent que representa f en ω_0 Por el Teorema 1 - (a) la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} x^n$ tiene radio de convergencia ∞. En consecuencia la serie $\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} a_{-n-2} x^n$ tiene un radio de convergencia ∞. Si σ_1 es la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{-n-2}}{n+1} x^{n+1} \quad , \quad \frac{d\sigma_1}{dx} = \sigma ;$$

y por la proposición 7 - (a) del Capítulo 1, σ_1 tiene radio de convergencia ∞.

Sea $p: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función holomorfa suma de la serie σ_1 (Proposición 5 del Capítulo 2).

Sea $h: \mathbb{C} - \{\omega_0\} \to \mathbb{C}$ la composición de $-p$ con $\frac{1}{z-\omega_0}$, ó sea

$$h(z) = -p\left(\frac{1}{z-\omega_0}\right) \quad \text{para todo} \quad z \in \mathbb{C} - \{\omega_0\}$$

$$\frac{dh}{dz}(z) = \frac{dp}{dz}\left(\frac{1}{z-\omega_0}\right) \frac{1}{(z-\omega_0)^2}$$

$$\frac{dh}{dz}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{-n-2}(z-\omega_0)^{-n} \frac{1}{(z-\omega_0)^2} =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} a_{-n}(z-\omega_0)^{-n}$$

Por el Teorema 1 - (a) existe un disco $\mathcal{D}(\omega_0, r_0) \subset \Omega \cup \{\omega_0\}$ - tal que para todo $z \in \mathcal{D}(\omega_0, r_0) - \{\omega_0\}$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\omega_0)^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{-n}(z-\omega_0)^{-n} + \frac{a_{-1}}{z-\omega_0}$$

entonces si $z \in \mathcal{D}(\omega_0, r_0)$, $z \neq \omega_0$:

$$f(z) - \frac{dh}{dz}(z) - \frac{a_{-1}}{z-\omega_0} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\omega_0)^n$$

Por el corolario del Teorema 2, la función $f - \frac{dh}{dz} - \frac{a_{-1}}{z-\omega_0}$ tiene una extensión holomorfa a $\Omega \cup \{\omega_0\}$.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 5:

Vamos a suponer para empezar que Z es finito - - - - $Z = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\ldots, \omega_d\}$. Para cada k, $1 \leqslant k \leqslant d$ sea $h_k : \mathbb{C} - \{\omega_k\} \to \mathbb{C}$ la función holomorfa que el Lema 2 asocia a f y a ω_k y sea - $g : \Omega - Z \to \sigma$ la función holomorfa:

$$g = f - \sum_{j=1}^{d} \frac{dh_j}{dz} - \sum_{j=1}^{d} \frac{Res(f, \omega_j)}{z-\omega_j}$$

Por el lema 2 la función g tiene una extensión holomorfa:

$$\tilde{g} : \Omega \to \mathbb{C}.$$

Como $f = g + \sum_{k=1}^{d} \frac{dh_k}{dz} + \sum_{k=1}^{d} \frac{Res(f, \omega_k)}{z-\omega_k}$

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_\gamma g(z)\, dz + \sum_{k=1}^{d} \int_\gamma \frac{dh_k(z)}{dz}\, dz +$$

$$+ \sum_{k=1}^{d} Res(f, \omega_k) \int_\gamma \frac{1}{z-\omega_k}\, dz$$

y

$$\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} g(z)\, dz + \sum_{k=1}^{d} \int_{\gamma_1} \frac{dh_k(z)}{dz}\, dz +$$

$$+ \sum_{k=1}^{d} Res(f, \omega_k) \int_{\gamma_1} \frac{1}{z-\omega_k}\, dz$$

Ahora como γ y γ_1 son circuitos en $\Omega - Z$, $\frac{dh_k}{dz}$ tiene la pri-

mitiva h_k en $\mathbb{C} - \{\omega_k\} \supset \Omega - Z$ resulta del Teorema 5 - (b) del - Capítulo 6 que:

$$\int_\gamma \frac{dh_k}{dz}(z)\,dz = \int_{\gamma_1} \frac{dh_k(z)}{dz}\,dz = 0$$

para todo $k = 1, 2, \ldots\ldots, d$

Como g tiene una extensión holomorfa $\tilde{g}$ a Ω y γ, γ_1 son Ω - homótopos resulta del Teorema 2 - (b) del Capítulo 6 que:

$$\int_\gamma g(z)\,dz = \int_\gamma \tilde{g}(z)\,dz =$$

$$= \int_{\gamma_1} \tilde{g}(z)\,dz = \int_{\gamma_1} g(z)\,dz$$

de allí resulta que:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} f(z)\,dz =$$

$$= \sum_{k=1}^{d} Res(f, \omega_k)\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-\omega_k} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z-\omega_k}\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{d} \left[I(\omega_k, \gamma) - I(\omega_k, \gamma_1)\right] Res(f, \omega_k)$$

En el caso general sea $\varphi: [a,b] \times [0,1] \to \Omega$ la homotopía - entre γ y γ_1. Como $[a,b] \times [0,1]$ es compacto,

$k = \varphi([a,b] \times [0,1])$ es compacto.

Sea $r(k)$ como en el Lema 3 del Capítulo 6 y sea r un número cualquiera tal que $0 < r < r(k)$. Sea $\sigma = \bigcup_{\omega \in k} D(\omega, r)$ y $k(r) = \bigcup_{\omega \in k} \overline{D(\omega, r)}$

σ es abierto pues es la unión de abiertos y $k(r)$ es compacto por el Lema 3 del Capítulo 6

$$k \subset \sigma \subset k(r) \subset \Omega$$

Como $k = \varphi([a,b] \times [0,1])$, $\varphi: [a,b] \times [0,1] \to \sigma$ es una σ - homotopía entre γ y γ_1. $k(r)$ es compacto y Z aislado en Ω entonces $\Omega \cap k(r)$ es un conjunto finito.

Sea $Z' = Z \cap \sigma \subset Z \cap k(r)$, entonces Z' es finito. Podemos aplicar lo que hemos demostrado en el Párrafo anterior, tomando $Z = Z'$ y $\Omega = \sigma$ y la restricción de f a $\sigma - Z'$, entonces:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z)\, dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(z)\, dz =$$

$$= \sum_{\omega \in Z'} Res(f, \omega)\, (I(\omega, \gamma) - I(\omega, \gamma_1))$$

Para terminar la demostración basta mostrar que:

$$\sum_{\omega \in Z - Z'} Res(f, \omega) \left[I(\omega, \gamma) - I(\omega, \gamma_1) \right] = 0$$

Más si $\omega \in Z - Z'$, $\omega \notin \sigma$ (*pues* $Z' = Z \cap \sigma$) y entonces - - $\sigma \subset \mathbb{C} - \{\omega\}$ y como γ y γ_1 son σ - homótopos ellos son $(\mathbb{C} - \{\omega\})$ - homótopos y como la función $z \to \frac{1}{z-\omega}$ es holomorfa en $\mathbb{C} - \{\omega\}$, por el Teorema 2 - (b) del Capítulo 6

$$I(\omega,\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-\omega} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z-\omega} = I(\omega,\gamma_1)$$

Con lo cual el Teorema queda demostrado.

Mecanografiado: Mirna Ocampo Fdez. con ayuda de Espinosa M.L, Valdez P. y Zaragoza A.