

#103

SERIE  
**MATEMÁTICAS**

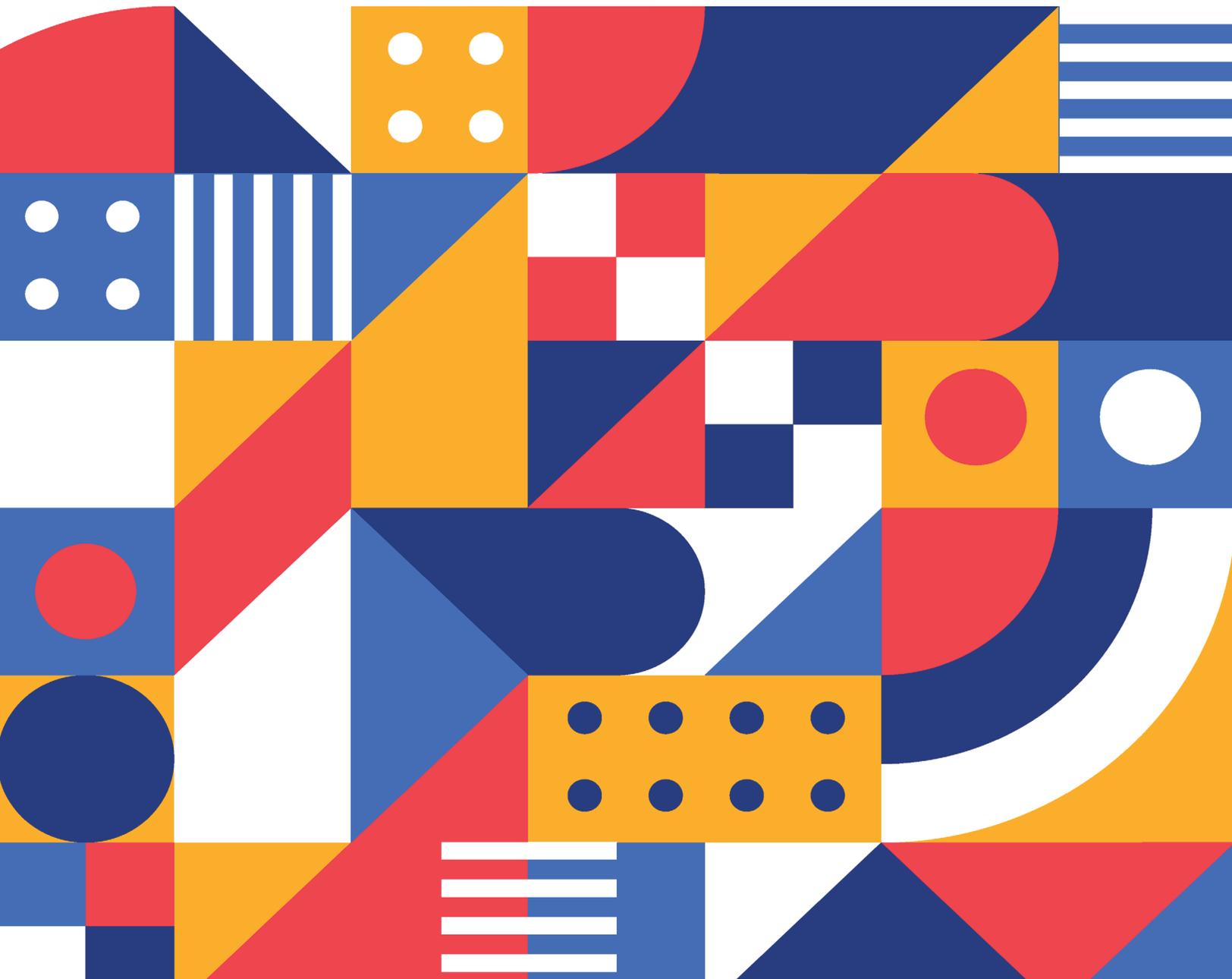
---

José Guerrero Grajeda y Rosa Margarita Álvarez G.

# Geometría analítica: Un enfoque vectorial con apoyo computacional de Matlab

## 3ra parte

AÑO  
**2007**



# Vínculos matemáticos



## Geometría analítica: un enfoque vectorial con apoyo computacional de Matlab

(Tercera parte)

---

**José Guerrero Grajeda\***

**Rosa Margarita Álvarez González\*\***

**Nº 103. 2014**

---

\* Profesora del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM

\*\* Universidad Autónoma de la Ciudad de México

Impreso en la Coordinación de Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM.

# Vínculos matemáticos



## Geometría analítica: un enfoque vectorial con apoyo computacional de Matlab

(Tercera parte)

---

**José Guerrero Grajeda\***

**Rosa Margarita Álvarez González\*\***

**Nº 103. 2014**

---

\* Profesora del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM

\*\* Universidad Autónoma de la Ciudad de México

Impreso en la Coordinación de Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM.

Geometría Analítica: un enfoque vectorial con apoyo  
computacional de Matlab

(Tercera parte)

José Guerrero Grajeda. UNAM  
Rosa Margarita Álvarez González. UACM

## PRÓLOGO

El propósito fundamental de esta parte consiste en introducir un nuevo tipo de transformación en el espacio bidimensional: las **rotaciones**, mostrando su importancia en el estudio de la ecuación general de segundo grado en dos variables. También en este contexto, se presenta una introducción al tema de **valores y vectores propios**, de gran relevancia en matemáticas.

Siguen siendo bienvenidas las críticas, sugerencias y comentarios a las direcciones de correo:

[rmalvarezmx@yahoo.com.mx](mailto:rmalvarezmx@yahoo.com.mx) y [grajeda@ciencias.unam.mx](mailto:grajeda@ciencias.unam.mx)

## CONTENIDO

<b>Capítulo IV</b>	<b>Las cónicas revisitadas</b>	
IV.1	Parábolas, elipses e hipérbolas: segunda variación.	4
IV.2	Rotaciones en $E_2$ .	8
<b>Capítulo V</b>	<b>La ecuación de segundo grado en dos variables</b>	
V.1	Formulación general.	17
V.2	Ecuaciones cuadráticas, rotaciones y el problema De valores y vectores propios.	21
V.3	Clasificación de las cónicas.	28
<b>Ejercicios</b>		36
<b>Bibliografía</b>		37

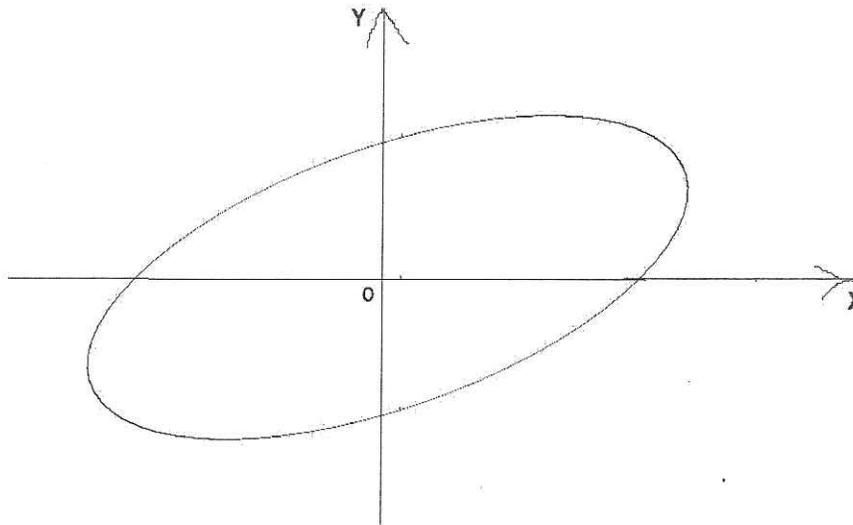
## CAPÍTULO IV

### Las cónicas revisitadas

#### IV.1 Parábolas, elipses e hipérbolas: segunda variación.

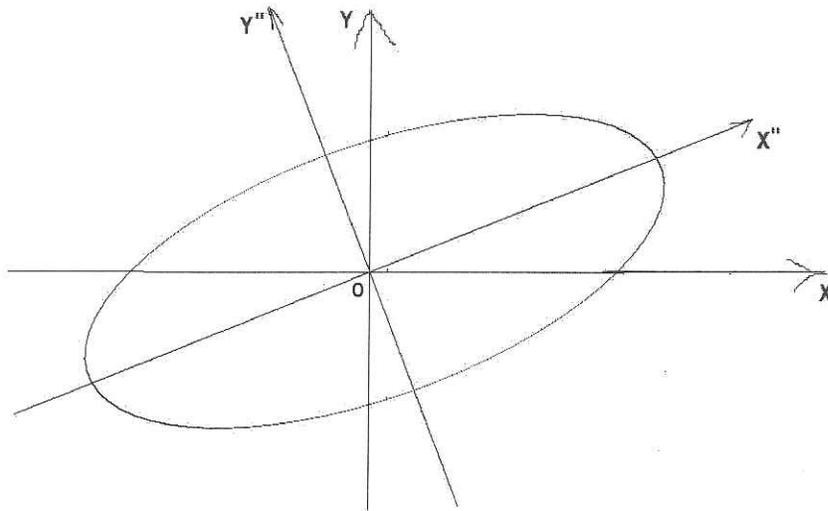
Para los propósitos de esta sección, trabajaremos sólo con la elipse, pues el estudio que haremos de ella puede generalizarse a las otras cónicas.

Iniciemos con la siguiente gráfica:



Gráfica IV.1.1

Es claro que a esta elipse no le corresponde ninguna de las ecuaciones asociadas a ella, que hemos estudiado antes; sin embargo, si la consideramos en el marco del sistema  $S'' \equiv [0, e_1'', e_2'']$  como se muestra enseguida:

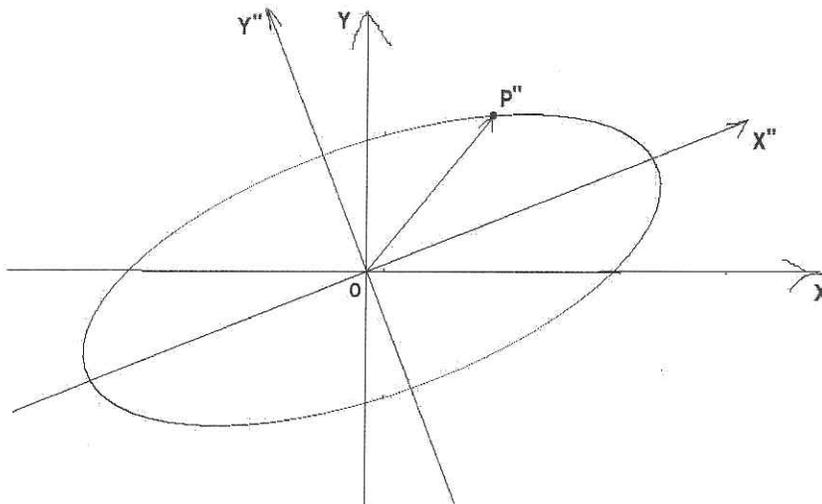


Gráfica IV.1.2

resulta que la ecuación de la elipse con respecto a  $S''$  es :

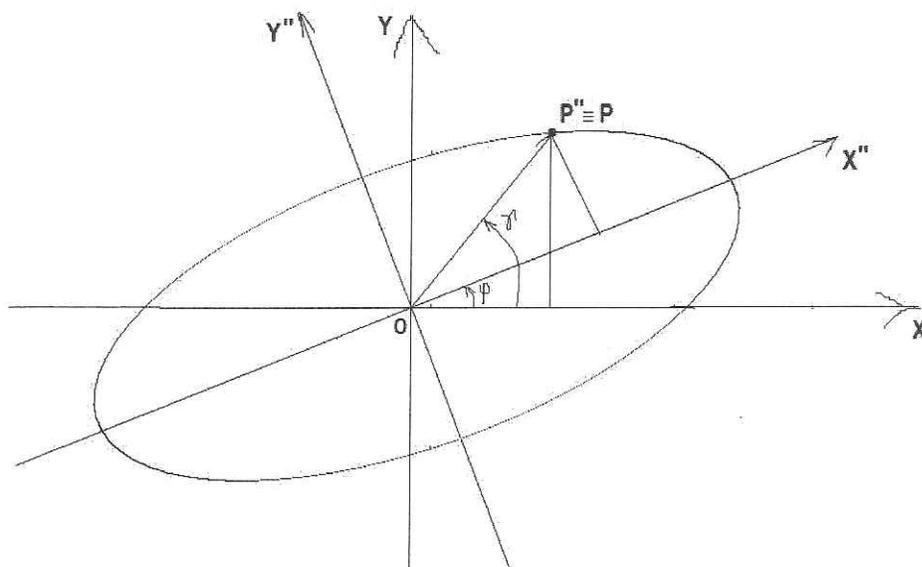
$$\zeta'' : \frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1 \quad \text{IV.1.1}$$

Pregunta: ¿qué ecuación tiene  $\zeta''$  con respecto al sistema  $S \equiv [0, e_1, e_2]$ ? Para responder esto, tomemos un punto  $P''(x'', y'') \in \zeta''$ , como se ilustra a continuación:



Gráfica IV.1.3

Establezcamos ahora la forma de las coordenadas de  $P''$  en relación con los sistemas  $S$  y  $S''$ . Para ello, consideremos el esquema siguiente:



Gráfica IV.1.4

A  $P''$  lo llamaremos  $P$ , considerado en el contexto del sistema  $S \equiv [0, e_1, e_2]$ . Si hacemos  $\|P''\| = r$ , y dado que  $\varphi$  es el ángulo formado por los ejes de ambos sistemas y  $\gamma$  el ángulo formado por  $P''$  con respecto al eje  $x$ , resulta que:

Si  $P''(x'', y'') \in S'' \equiv P(x, y) \in S$ , entonces

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\gamma) \\ y &= r \operatorname{sen}(\gamma) \end{aligned} \tag{IV.1.2}$$

y

$$\begin{aligned} x'' &= r \cos(\gamma - \varphi) \\ y'' &= r \operatorname{sen}(\gamma - \varphi). \end{aligned} \tag{IV.1.3}$$

Pero:

$$\begin{aligned} \cos(\gamma - \varphi) &= \cos(\gamma)\cos(\varphi) + \operatorname{sen}(\gamma)\operatorname{sen}(\varphi) \quad \text{y} \\ \operatorname{sen}(\gamma - \varphi) &= \operatorname{sen}(\gamma)\cos(\varphi) - \cos(\gamma)\operatorname{sen}(\varphi). \end{aligned}$$

Sustituyendo esto en IV.1.3, tenemos:

$$\begin{aligned}
 x'' &= r \cos(\gamma) \cos(\varphi) + r \operatorname{sen}(\gamma) \operatorname{sen}(\varphi) \\
 y'' &= r \operatorname{sen}(\gamma) \cos(\varphi) - r \cos(\gamma) \operatorname{sen}(\varphi)
 \end{aligned}$$

Ahora, usando IV.1.2, llegamos a:

$$\begin{aligned}
 x'' &= x \cos(\varphi) + y \operatorname{sen}(\varphi) \\
 y'' &= -x \operatorname{sen}(\varphi) + y \cos(\varphi)
 \end{aligned}
 \tag{IV.1.4}$$

Si en IV.1.4 consideramos conocidos  $\varphi$ ,  $x''$  y  $y''$  y resolvemos para  $x$  y  $y$ , resulta:

$$\begin{aligned}
 x &= x'' \cos(\varphi) - y'' \operatorname{sen}(\varphi) \\
 y &= x'' \operatorname{sen}(\varphi) + y'' \cos(\varphi)
 \end{aligned}
 \tag{IV.1.5}$$

Si sustituimos ahora IV.1.4 en IV.1.1, se tiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{(x \cos(\varphi) + y \operatorname{sen}(\varphi))^2}{a^2} + \frac{(-x \operatorname{sen}(\varphi) + y \cos(\varphi))^2}{b^2} &= 1 \quad \Leftrightarrow \\
 b^2(x \cos(\varphi) + y \operatorname{sen}(\varphi))^2 + a^2(-x \operatorname{sen}(\varphi) + y \cos(\varphi))^2 - a^2 b^2 &= 0 \quad \Leftrightarrow \\
 b^2(x^2 \cos^2(\varphi) + 2xy \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\varphi) + y^2 \operatorname{sen}^2(\varphi)) + \\
 a^2(x^2 \operatorname{sen}^2(\varphi) - 2xy \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\varphi) + y^2 \cos^2(\varphi)) - a^2 b^2 &= 0 \quad \Leftrightarrow \\
 (a^2 \operatorname{sen}^2(\varphi) + b^2 \cos^2(\varphi))x^2 + 2(b^2 \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\varphi) - a^2 \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\varphi))xy + \\
 (b^2 \operatorname{sen}^2(\varphi) + a^2 \cos^2(\varphi))y^2 - a^2 b^2 &= 0
 \end{aligned}$$

Que podemos reescribir como:

$$\zeta : Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + F = 0 \tag{IV.1.6}$$

De igual manera, a partir de IV.1.1 se tiene:

$$b^2 x''^2 + a^2 y''^2 - 1 = 0 \quad , \text{ o bien:}$$

$$\zeta'' : A''x''^2 + Cy''^2 + F'' = 0 \quad \text{IV.1.7}$$

Así, las ecuaciones IV.1.6 y IV.1.7 representan a la elipse ilustrada en la gráfica IV.1.3, referida a los sistemas  $S \equiv [0, e_1, e_2]$  y  $S'' \equiv [0, e_1'', e_2'']$ , respectivamente.

De manera análoga, si se parte de la hipérbola dada por:

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} - 1 = 0,$$

se llega nuevamente a una ecuación de la forma IV.1.6, mientras que si partimos de la parábola cuya ecuación es

$$x''^2 = 4cy'', \text{ en } S'',$$

se obtiene una en  $S$ , de la forma:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = 0.$$

## IV.2 Rotaciones en $E_2$

Lo anterior podemos resumirlo como sigue: Dados los sistemas  $S$  y  $S''$  de  $E_2$ , tales que  $\angle(e_1, e_1'') = \angle(e_2, e_2'') = \varphi$ , existe una transformación  $R : E_2 \rightarrow E_2$  que llamaremos rotación, tal que si  $P''(x'', y'') \in E_2$ , entonces  $RP'' = P(x, y)$ ; esto es,  $R$  transforma las coordenadas  $(x'', y'')$  de  $P''$  consideradas con respecto al sistema  $S''$ , en las coordenadas  $(x, y)$ , consideradas en referencia al sistema  $S$ , vía las ecuaciones IV.1.5.

Análogamente, las ecuaciones IV.1.4 corresponden a la rotación, denotada como  $R^T$ , que asocia a las coordenadas  $(x, y)$  de  $P$ , tomadas con respecto al sistema  $S$ , las coordenadas  $(x'', y'')$ , correspondientes al sistema  $S''$ ; esto es,  $R^T P = P''(x'', y'')$ .

**Observación importante.** Tanto  $P$  como  $P''$  son el mismo punto de  $E_2$ , esto es,  $P(x, y) = P''(x'', y'')$ , sólo que lo llamamos  $P$  cuando está pensado en el contexto del sistema  $S \equiv [0, e_1, e_2]$ , y  $P''$  cuando lo consideramos en relación con  $S'' \equiv [0, e_1'', e_2'']$ .

### Forma matricial de las rotaciones en $E_2$

Utilizando el lenguaje de las matrices, las ecuaciones IV.1.4 y IV.1.5 pueden escribirse como:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ -\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix},$$

o bien

$$R^T P = P'' \quad \text{IV.2.1}$$

y

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

o

$$R P'' = P. \quad \text{IV.2.2}$$

Así, las matrices  $R$  y  $R^T$  representan a las rotaciones dadas por las ecuaciones IV.1.4 y IV.1.5 respectivamente.

Veamos ahora algunas propiedades de  $R$  y  $R^T$ , aunque sólo trabajaremos con  $R$ , la cual reescribiremos como  $R = (r_1, r_2)$ , donde  $r_1$  es la primer columna de  $R$  y  $r_2$  la segunda.

**PR.1**  $r_1$  y  $r_2$  son ortonormales.

La prueba es inmediata.

$$\text{PR.2 } \det(R) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = 1.$$

**Definición IV.2.1** Una matriz cuadrada con columnas ortonormales y determinante igual a uno, se dice que es una matriz de rotación, o que representa a una rotación.

Así pues, tanto  $R$  como  $R^T$  representan rotaciones. Pero hay más.

**PR.3** Si  $P_1$  y  $P_2 \in E_2$ , entonces  $d(P_1, P_2) = d(RP_1, RP_2)$ , y se dice que la rotación dada por  $R$  es una isometría. Veamos:

Sean  $P_1(x_1, y_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2)$ . Entonces:

$$RP_1 = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\operatorname{sen} \varphi \\ \operatorname{sen} \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cos \varphi - y_1 \operatorname{sen} \varphi \\ x_1 \operatorname{sen} \varphi + y_1 \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$RP_2 = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\operatorname{sen} \varphi \\ \operatorname{sen} \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \cos \varphi - y_2 \operatorname{sen} \varphi \\ x_2 \operatorname{sen} \varphi + y_2 \cos \varphi \end{pmatrix}, \text{ de donde:}$$

$$RP_2 - RP_1 = \begin{pmatrix} (x_2 - x_1) \cos \varphi - (y_2 - y_1) \operatorname{sen} \varphi \\ (x_2 - x_1) \operatorname{sen} \varphi + (y_2 - y_1) \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Ahora:

$$d(RP_1, RP_2) = \|RP_2 - RP_1\| = \left\| \begin{pmatrix} (x_2 - x_1) \cos \varphi - (y_2 - y_1) \operatorname{sen} \varphi \\ (x_2 - x_1) \operatorname{sen} \varphi + (y_2 - y_1) \cos \varphi \end{pmatrix} \right\| = \dots =$$

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 (\operatorname{sen}^2 \varphi + \cos^2 \varphi) + (y_2 - y_1)^2 (\operatorname{sen}^2 \varphi + \cos^2 \varphi)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} =$$

$$\|P_2 - P_1\| = d(P_1, P_2).$$

**PR.4** Dados  $P_1$  y  $P_2 \in E_2$  y  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathfrak{R}$ , se cumple:  $R(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2) = \alpha_1 RP_1 + \alpha_2 RP_2$ , y se dice que la rotación dada por  $R$  es una transformación lineal.

Para probar esto, tomemos  $P_1$  y  $P_2 \in E_2$  y  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathfrak{R}$ . Entonces:

$$R(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\operatorname{sen} \varphi \\ \operatorname{sen} \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \\ \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 \cos \varphi + \alpha_2 x_2 \cos \varphi - \alpha_1 y_1 \operatorname{sen} \varphi - \alpha_2 y_2 \operatorname{sen} \varphi \\ \alpha_1 x_1 \operatorname{sen} \varphi + \alpha_2 x_2 \operatorname{sen} \varphi - \alpha_1 y_1 \cos \varphi - \alpha_2 y_2 \cos \varphi \end{pmatrix} =$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} x_1 \cos \varphi - y_1 \operatorname{sen} \varphi \\ x_1 \operatorname{sen} \varphi + y_1 \cos \varphi \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} x_2 \cos \varphi - y_2 \operatorname{sen} \varphi \\ x_2 \operatorname{sen} \varphi + y_2 \cos \varphi \end{pmatrix} =$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} \cos \varphi - \operatorname{sen} \varphi \\ \operatorname{sen} \varphi + \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \cos \varphi - \operatorname{sen} \varphi \\ \operatorname{sen} \varphi + \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} =$$

$$\alpha_1 RP_1 + \alpha_2 RP_2 . \quad \therefore R \text{ es lineal.}$$

**Nota.** El concepto de transformación lineal se refiere no solamente a las rotaciones, que constituyen un caso especial en el ámbito de las transformaciones lineales.

**PR.5**  $RR^T = R^T R = I$ , esto es,  $R$  y  $R^T$  son inversas una de la otra.  
La prueba es inmediata.

**EIV.2.1** Consideremos que nuestra elipse en  $S''$  tiene por ecuación:

$$\zeta'' : \frac{x''^2}{9} + \frac{y''^2}{4} = 1 \quad \equiv \quad 4x''^2 + 9y''^2 - 36 = 0 \quad \text{IV.2.3}$$

Si queremos “ver” a  $\zeta''$  desde la perspectiva del sistema  $S$ , sustituyamos en  $\zeta''$  las ecuaciones IV.1.4. Tenemos entonces, si suponemos que  $\varphi = 45^\circ$ :

$$4 \left( \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y \right)^2 + 9 \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y \right)^2 - 36 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$4 \left( \frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2 \right) + 9 \left( \frac{1}{2}x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 \right) - 36 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{13}{2}x^2 - 5xy + \frac{13}{2}y^2 - 36 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\zeta : 13x^2 - 10xy + 13y^2 - 72 = 0. \quad \text{IV.2.4}$$

IV.2.4 es la ecuación de la elipse en el sistema  $S$ .

En términos matriciales, este proceso puede verse como sigue:

$$\zeta'' : 4x''^2 + 9y''^2 - 36 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(x'' \ y'') \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} - 36 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$P''^T Q'' P'' - 36 = 0, \text{ donde } Q'' = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Ahora, usando IV.2.1, resulta

$$(R^T P)^T Q'' R^T P - 36 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$P^T (R^T)^T Q'' R^T P - 36 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$P^T R Q'' R^T P - 36 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(x \ y) \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\operatorname{sen} \varphi \\ \operatorname{sen} \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \operatorname{sen} \varphi \\ -\operatorname{sen} \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 36 = 0.$$

Como elegimos  $\varphi = 45^\circ$ , se tiene:

$$(x \ y) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 36 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(x \ y) \begin{pmatrix} \frac{13}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{13}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 36 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(x \ y) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ \frac{9}{\sqrt{2}} & \frac{9}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 36 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(x \ y) \begin{pmatrix} \frac{13}{2}x & -\frac{5}{2}y \\ -\frac{5}{2}x & \frac{13}{2}y \end{pmatrix} - 36 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{13}{2}x^2 - \frac{5}{2}xy - \frac{5}{2}xy + \frac{13}{2}y^2 - 36 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$13x^2 - 10xy + 13y^2 - 72 = 0,$$

que es exactamente la ecuación de  $\zeta$  dada por IV.2.4, y puede escribirse en forma matricial como  $P^T Q P - 72 = 0$ , donde  $Q = \begin{pmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 13 \end{pmatrix}$ .

**Nota:** el proceso anterior lo simbolizaremos como

$$R^T(\zeta'') = \zeta \quad \text{IV.2.5}$$

Cabe ahora preguntar: ¿si queremos recorrer el camino inverso, esto es, partir de  $\zeta$  para recuperar  $\zeta''$ , qué debemos hacer?

La respuesta natural parte de suponer que, si usando  $R^T$  transformamos  $\zeta''$  en  $\zeta$ , aplicando ahora  $R$  a  $\zeta$  debemos recuperar  $\zeta''$  pues, según sabemos:  $RR^T = I$ . Con base en esto, partimos ahora de  $\zeta: 13x^2 - 10xy + 13y^2 - 72 = 0$  que, como ya vimos, puede escribirse en forma matricial como  $P^T Q P - 72 = 0$ , donde  $Q = \begin{pmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 13 \end{pmatrix}$ .

Ahora, aplicando IV.2.2 resulta:

$$(RP'')^T QRP'' - 72 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$P''^T R^T QRP'' - 72 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(x'' \ y'') \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} - 72 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(x'' \ y'') \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{8}{\sqrt{2}} & -\frac{18}{\sqrt{2}} \\ \frac{8}{\sqrt{2}} & \frac{18}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} - 72 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(x'' \ y'') \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} - 72 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(x'' \ y'') \begin{pmatrix} 8x'' \\ 18y'' \end{pmatrix} - 72 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$8x''^2 + 18y''^2 - 72 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

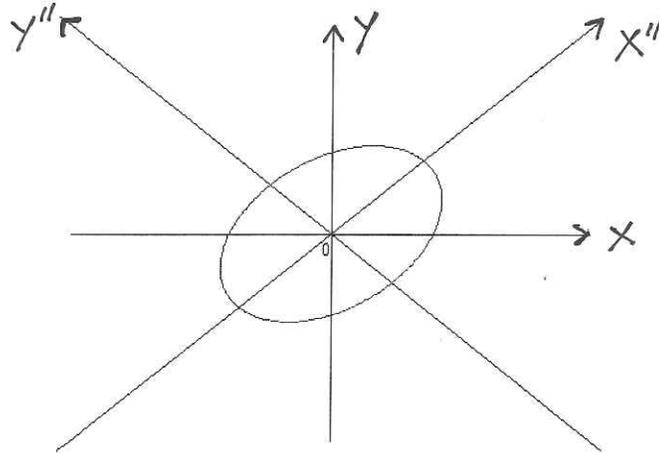
$$\zeta'' : 4x''^2 + 9y''^2 - 36 = 0,$$

que es nuestra ecuación de origen. Un programa en Matlab que ilustra lo anterior es:

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
% Programa que ilustra la rotación realizada
% respecto de la ecuación IV.2.3
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
ezplot('13*x.^2 -10*x.*y +13*y.^2 - 72')
hold on; fplot('0', [-6 6], 'k')
hold on; plot([0 0], [-6 6], 'k')
axis off
%
% Gráfica de ejes a 45 grados
%
hold on
fplot('x', [-6.3 6.3], 'k')
hold on
fplot('-x', [-6.3 6.3], 'k')
gtext('0')
print -dbitmap pruebal

```



Si adicionalmente aplicamos a  $\zeta''$  una traslación dada por las ecuaciones  $x'' = x' + 2$ ,  $y'' = y' + 1$ , obtenemos

$$4(x' + 2)^2 + 9(y' + 1)^2 - 36 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$4(x'^2 + 4x' + 4) + 9(y'^2 + 2y' + 1) - 36 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\zeta' : 4x'^2 + 9y'^2 + 16x' + 18y' - 11 = 0.$$

El programa y la gráfica correspondientes se muestran en seguida:

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
% Programa que ilustra las transformaciones realizadas
% respecto de la ecuación IV.2.3
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
ezplot('13*x.^2 -10*x.*y +13*y.^2 - 72')
hold on;fplot('0',[-6 6],'k')
hold on;plot([0 0],[-6 6],'k')
axis off
%
% dibujando ejes rotados a 45 grados
%
hold on
fplot('x',[-6.3 6.3],'k')
hold on
fplot('-x',[-6.3 6.3],'k')
%
% dibujando los otros ejes
%
fplot('x+1',[-6.3 6.3],'k')

```

## CAPÍTULO V

### La ecuación general de segundo grado en dos variables

#### V.1 Formulación general

De lo visto en los dos capítulos anteriores, resulta que cualquier circunferencia, parábola, elipse o hipérbola, tiene asociada una ecuación que es un caso particular de:

$$\zeta : Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \text{V.1.1}$$

También hemos mostrado que las ecuaciones de cualquiera de las curvas mencionadas adopta una forma más o menos simple o complicada, dependiendo del sistema de referencia desde el que se la mire, cuestión directamente relacionada con el uso de traslaciones y rotaciones. Para mostrar esto de forma panorámica te invitamos a acompañarnos en el siguiente recorrido:

**EV.1.1** Partiremos de la hipérbola con ecuación:

$$\zeta_h : \frac{x^2}{4} - y^2 = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 4y^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{V.1.2}$$

$$(x \ y) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

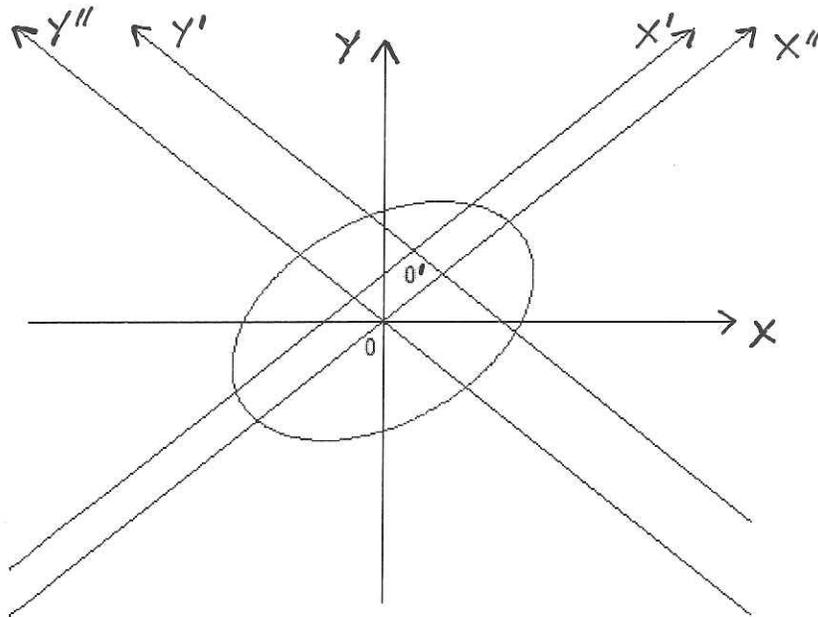
$$\zeta_h : P^T Q P - 4 = 0.$$

Ahora:

1. Construyamos la matriz de rotación  $R$  asociada al ángulo  $\varphi = 45^\circ$  y apliquémosla a  $\zeta_h$  para obtener  $R(\zeta_h) = \zeta'_h$ . Como ya sabemos, para este ángulo resulta:

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

```
hold on
fplot('-x+2',[-6.3 6.3],'k')
gtext('0');gtext('0')
print -dbitmap prueba1_2
```



Para obtener  $\zeta'_h$ , apliquemos la ecuación  $RP' = P$  que, al sustituirla en  $\zeta_h$  nos produce:

$$\begin{aligned}(RP')^T QRP' - 4 &= 0 && \Leftrightarrow \\ P'^T R^T QRP' - 4 &= 0 && \Leftrightarrow \\ \zeta'_h : P'^T Q'P' - 4 &= 0,\end{aligned}$$

donde

$$Q' = R^T QR = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo, obtenemos:

$$\zeta'_h : (x' \ y') \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\zeta'_h : -\frac{3}{2}x'^2 - 5x'y' - \frac{3}{2}y'^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{V.1.3}$$

$$\zeta'_h : 3x'^2 + 10x'y' + 3y'^2 + 8 = 0.$$

2. Ahora, dado el nuevo origen  $O'(1, 1)$ , apliquemos la traslación  $T$  dada por las ecuaciones  $x' = x'' + 1$ ,  $y' = y'' + 1$ , para obtener  $T(R(\zeta'_h)) = T(\zeta'_h) = \zeta''_h$ .

Veamos:

$$3(x''+1)^2 + 10(x''+1)(y''+1) + 3(y''+1)^2 + 8 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$3(x''^2 + 2x'' + 1) + 10(x''y'' + x'' + y'' + 1) + 3(y''^2 + 2y'' + 1) + 8 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\zeta''_h : 3x''^2 + 10x''y'' + 3y''^2 + 16x'' + 16y'' + 24 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{V.1.4}$$

$$(x'' \ y'') \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + (16 \ 16) \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + 24 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

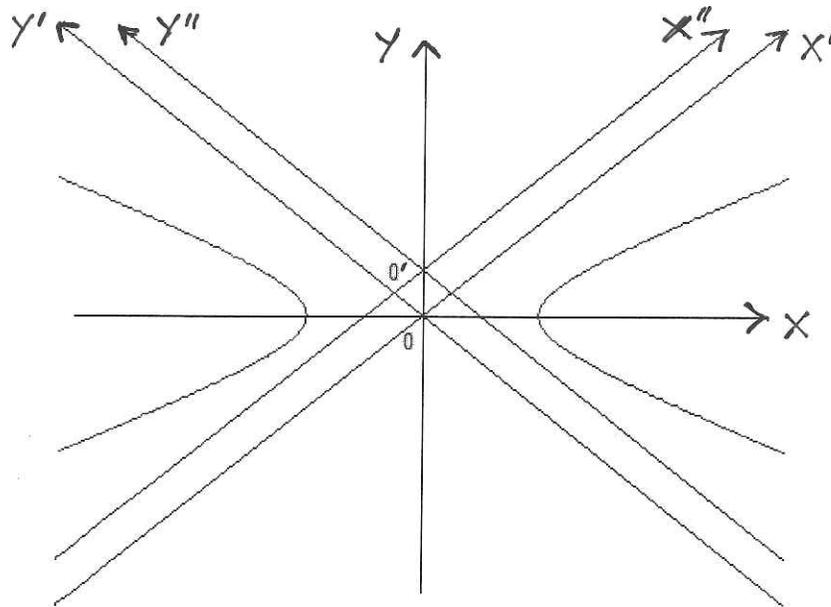
$$\zeta_h'' : P''^T Q'' P'' + S''^T P'' + 24 = 0$$

Un programa en Matlab que permite ilustrar gráficamente el proceso llevado a cabo hasta ahora es el siguiente:

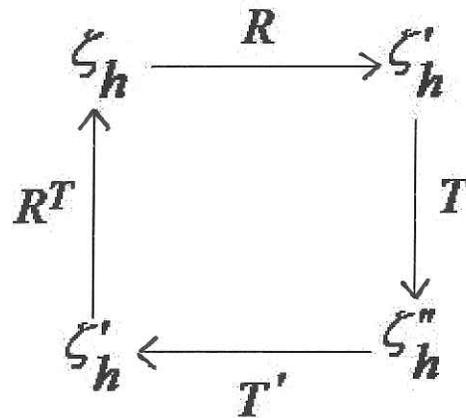
```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
% Programa que ilustra las transformaciones realizadas
% a partir de la ecuación del ejemplo EV.1.1
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
ezplot('x.^2 -4*y.^2 - 4')
hold on; fplot('0', [-6 6], 'k')
hold on; plot([0 0], [-6 6], 'k')
axis off
%
% dibujando ejes rotados a 45 grados
%
hold on
fplot('x', [-6.3 6.3], 'k')
hold on
fplot('-x', [-6.3 6.3], 'k')
%
fplot('x+1', [-6.3 6.3], 'k')
hold on
fplot('-x+1', [-6.3 6.3], 'k')
gtext('0'); gtext('0')
print -dbitmap prueba5_1

```



Llegados a este punto, la propuesta es recuperar  $\zeta_h$ , cosa que puede hacerse de más de una forma. La más fácil es, en forma esquemática:



Esquema V.1.1

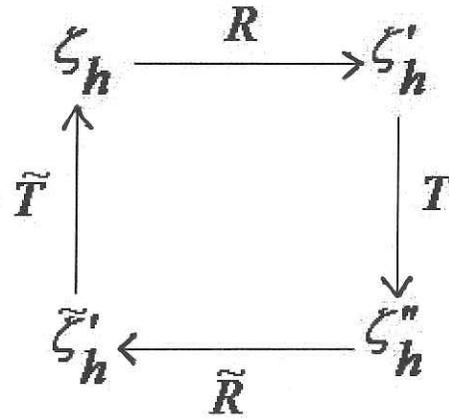
donde, de acuerdo a lo que ya sabemos:

$$T' : \begin{cases} x'' = x' - 1 \\ y'' = y' - 1 \end{cases}$$

y

$$R^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \text{ usando } R^T P = P'.$$

Te invitamos amigo lector a transitar por este camino, y por nuestra parte proponemos otra estrategia sintetizada en el diagrama:



Esquema V.1.2

En este caso, tanto  $\tilde{R}$  como  $\tilde{T}$  deberán ser determinadas, lo que requiere de un desarrollo cuya descripción general presentamos a continuación.

## V.2 Ecuaciones cuadráticas, rotaciones y el problema de valores y vectores propios

En esta parte describiremos una estrategia de carácter general para la construcción de la rotación  $\tilde{R}$ . Para ello, partiremos de la ecuación V.1.1, esto es:  $\zeta: Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ , y el problema es determinar la rotación  $\tilde{R}$  que permita eliminar el término  $xy$  de  $\zeta$ , o bien  $\tilde{R}(\zeta) = \zeta': A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$ . En lenguaje matricial tenemos:

$$\zeta: (x \ y) \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (D \ E) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + F = 0, \quad \text{o} \quad \zeta: P^T Q P + S^T P + F = 0,$$

y buscamos  $\tilde{R}$  que permita obtener

$$\zeta': (x' \ y') \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & C' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (D' \ E') \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + F' = 0, \quad \text{o} \quad \zeta': P'^T Q' P' + S'^T P' + F' = 0.$$

En síntesis: se trata de determinar la rotación  $\tilde{R}$  que permita diagonalizar la matriz  $Q$ . Para ello, usemos la ecuación  $\tilde{R}P' = P$ . Entonces:

$$\zeta : P^T Q P + S^T P + F = 0 \Leftrightarrow (\tilde{R}P')^T Q \tilde{R}P' + S^T \tilde{R}P' + F' = 0 \Leftrightarrow$$

$$P' \tilde{R}^T Q \tilde{R}P' + S^T \tilde{R}P' + F' = 0.$$

Hagamos  $Q' = \tilde{R}^T Q \tilde{R}$ . Nuestro problema es entonces lograr que  $\tilde{R}^T Q \tilde{R} = Q' = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & C' \end{pmatrix}$ .

Si hacemos  $\tilde{R} = (r_1 \ r_2)$  donde  $r_1$  y  $r_2$  son las columnas de  $\tilde{R}$  y multiplicamos la igualdad anterior por  $R$ , resulta:

$$Q\tilde{R} = \tilde{R} \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & C' \end{pmatrix} \Leftrightarrow Q(r_1 \ r_2) = (r_1 \ r_2) \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & C' \end{pmatrix} \Leftrightarrow (Qr_1 \ Qr_2) = (A'r_1 \ C'r_2) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} Qr_1 = A'r_1 \\ Qr_2 = C'r_2 \end{cases}$$

Obsérvese que estas últimas igualdades tienen la forma:

$$Qv = \lambda v, \tag{V.2.1}$$

La ecuación V.2.1 es de gran relevancia en matemáticas, pues es la formulación de un problema importante: **el problema de valores y vectores propios o característicos**, que en términos generales puede enunciarse como sigue: dada una transformación lineal (en nuestro caso representada por la matriz  $Q$ ), determinar la pareja  $\lambda$  y  $v$  que satisfacen V.2.1, con  $v \neq 0$ .

$\lambda$  y  $v$  se conocen como valor y vector propios o característicos asociados a la transformación lineal.

En términos geométricos de lo que se trata es de determinar el vector  $v$  que, al aplicarle  $Q$ , va a dar en un paralelo a sí mismo, por lo que este problema también puede interpretarse como el de determinar direcciones invariantes. Veamos un par de propiedades.

**P λ 1.** Si  $v$  es el vector propio asociado a  $\lambda$ , también  $tv$ , con  $t \in \mathfrak{R}$ , lo es, dado que  $Q(tv) = tQv = t\lambda v = \lambda(tv)$ .

**P λ2.** Si  $Qv_1 = \lambda_1 v_1$  y  $Qv_2 = \lambda_2 v_2$  con  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  y  $Q$  simétrica ( $Q = Q^T$ ), entonces  $v_1^T v_2 = 0$ .

Tenemos:

- a)  $Qv_1 = \lambda_1 v_1 \Leftrightarrow v_2^T Qv_1 = \lambda_1 v_2^T v_1$ . Pero:  
 b)  $v_2^T Qv_1 = (v_2^T Qv_1)^T = v_1^T Q^T v_2 = v_1^T Qv_2 = \lambda_2 v_1^T v_2$ .

De a) y b) se tiene  $\lambda_1 v_2^T v_1 = \lambda_1 v_1^T v_2 = \lambda_2 v_1^T v_2 \Leftrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)v_1^T v_2 = 0 \Rightarrow v_1^T v_2 = 0$ .

Ejemplos:

**EV.2.1** Si  $Q = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , el único valor propio es 1 y todo vector distinto de cero es vector propio, ya que  $Ir = r$ , esto es, toda dirección es invariante bajo  $I$ .

**EV.2.2** Si  $Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son valores propios de la transformación lineal representada por  $Q$ , y en este caso, las direcciones invariantes están dadas por los vectores canónicos  $e_1$  y  $e_2$ , ya que:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En este caso no hay más direcciones invariantes, ya que cualquier vector  $r$  no paralelo a  $e_1$  o  $e_2$  tiene la forma  $v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 v_x \\ \lambda_2 v_y \end{pmatrix} = v'$ , que no es de la forma  $\lambda_1 v$  o  $\lambda_2 v$ .

Como se observa, en los casos anteriores la forma de  $Q$  nos da directamente los valores propios y las direcciones invariantes; esto es, si  $Q$  es diagonal, tener sus valores y vectores propios o característicos es inmediato.

¿Qué pasa entonces para una  $Q$  en general, donde todos sus elementos sean distintos de cero? Para responder a esto, volvamos al sistema V.2.1. Tenemos que:

$$Qv = \lambda v \Leftrightarrow Qv - \lambda v = 0 \Leftrightarrow (Q - \lambda I)v = 0 \quad \text{V.2.2}$$

Se sabe que V.2.2 tiene solución distinta de cero, que es el caso que nos interesa, si y sólo si

$$\det(Q - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} A - \lambda & B \\ B & C - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda)(C - \lambda) - B^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 - (A + C)\lambda + (AC - B^2) = 0 \quad \text{V.2.3}$$

La expresión de la izquierda en V.2.3 se conoce como polinomio característico, se escribe

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (A + C)\lambda + (AC - B^2) = 0 \quad \text{V.2.4}$$

y sus raíces, que llamaremos  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son los valores propios de  $Q$  y al sustituirlos en V.2.1 nos permiten calcular los vectores propios  $v_1$  y  $v_2$  que nos dan las direcciones invariantes. Esto es, sustituyendo  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  en:

$$\begin{aligned} (A - \lambda)v_x + Bv_y &= 0 \\ Bv_x + (C - \lambda)v_y &= 0 \end{aligned} \quad \text{obtenemos } v_1 \text{ y } v_2.$$

Ahora, regresando a nuestro problema de construir  $\tilde{R} = (r_1 \ r_2)$ , ésta se obtiene normalizando  $v_1$  y  $v_2$  y colocándolos de tal forma que  $\det(\tilde{R}) = 1$ . Para aterrizar esto, volvamos a nuestro ejemplo EV.1.1, después de haber aplicado la rotación y la traslación antes vistas.

Tenemos la ecuación V.1.4 (página 18):

$$\begin{aligned} \zeta_h'' : 3x''^2 + 10x''y'' + 3y''^2 + 16x'' + 16y'' + 24 &= 0 \quad \Leftrightarrow \\ \begin{pmatrix} x'' & y'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + 24 &= 0 \quad \Leftrightarrow \\ \zeta_h'' : P''^T Q'' P'' + S''^T P'' + 24 &= 0. \end{aligned}$$

Se trata entonces de determinar  $\tilde{R}$  tal que  $\tilde{R}(\zeta_h'') = \zeta_h' : P'^T Q' P' + S'^T P' + F' = 0 \Leftrightarrow$

$$\zeta_h' : \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & C' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D' & E' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + F' = 0.$$

Para lograr esto, de lo visto anteriormente, debemos:

1) Calcular las raíces de

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} A-\lambda & B \\ B & C-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow P(\lambda) = (3-\lambda)(3-\lambda) - 25 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 - 6\lambda - 16 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 2)(\lambda - 8) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 8.$$

2) Usando estos valores de  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , resolver:

a) Para  $\lambda_1 = -2$ :

$$\begin{cases} 5v_x + 5v_y = 0 \\ 5v_x + 5v_y = 0 \end{cases} \Rightarrow v_x = -v_y.$$

Podemos tomar  $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ .

b) Para  $\lambda_2 = 8$ :

$$\begin{cases} -5v_x + 5v_y = 0 \\ 5v_x - 5v_y = 0 \end{cases} \Rightarrow v_x = v_y.$$

Tomemos  $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Ahora, las columnas de  $\tilde{R}$  las tenemos haciendo:

$$r_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad r_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

De esta manera obtenemos  $\tilde{R} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ , que satisface las condiciones de una matriz

de rotación.

Si volvemos ahora a la ecuación  $\zeta''_h : P''^T Q'' P'' + S''^T P'' + 24 = 0$ , y usamos  $\tilde{R} P' = P''$ , resulta:  $(\tilde{R} P')^T Q'' \tilde{R} P' + S''^T \tilde{R} P' + 24 = 0 \Leftrightarrow P'^T \tilde{R}^T Q'' \tilde{R} P' + S''^T \tilde{R} P' + 24 = 0 \Leftrightarrow \zeta'_h : P'^T Q' P' + S'^T P' + 24 = 0$ , donde

$$Q' = \tilde{R}^T Q'' P' = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad S'^T = S''^T R = (16 \quad 16) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Leftrightarrow S'^T = \left( 0 \quad \frac{32}{\sqrt{2}} \right).$$

Sustituyendo esto, resulta:

$$\zeta'_h : (x' \quad y') \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \left( 0 \quad \frac{32}{\sqrt{2}} \right) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 24 = 0 \Leftrightarrow \zeta'_h : -2x'^2 + 8y'^2 + \frac{32}{\sqrt{2}} y' + 24 = 0.$$

Finalmente debemos determinar las ecuaciones de la traslación  $\tilde{T}$  que nos permitan recuperar  $\zeta_h$ . Para ello propongamos  $\tilde{T} : x' = x - h, y' = y - k$ . Sustituyendo en  $\zeta'_h$ , obtenemos:

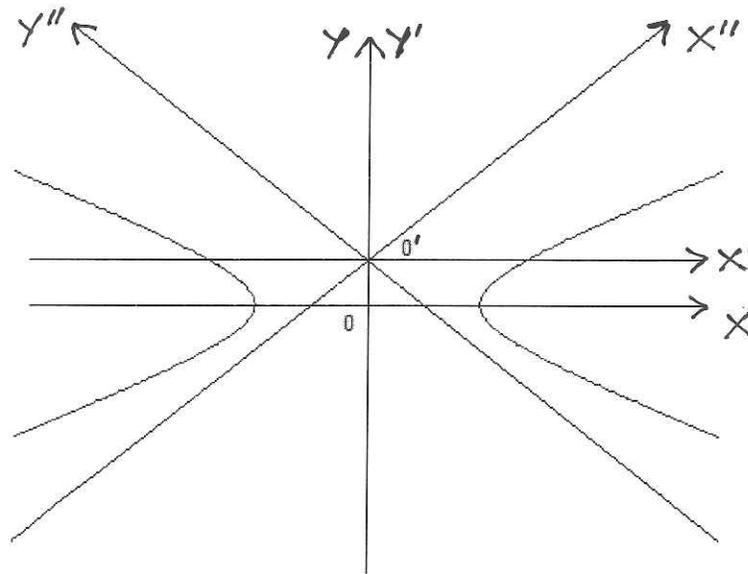
$$\begin{aligned} -2(x-h)^2 + 8(y-k)^2 + \frac{32}{\sqrt{2}}(y-k) + 24 &= 0 \Leftrightarrow \\ -2(x^2 - 2hx + h^2) + 8(y^2 - 2ky + k^2) + \frac{32}{\sqrt{2}}y - \frac{32}{\sqrt{2}}k + 24 &= 0 \Leftrightarrow \\ -2x^2 + 8y^2 + 4hx + \left( \frac{32}{\sqrt{2}} - 16k \right)y + \left( -2h^2 + 8k^2 - \frac{32}{\sqrt{2}}k + 24 \right) &= 0. \end{aligned}$$

Para que el coeficiente de  $y$  sea cero se necesita que  $\frac{32}{\sqrt{2}} = 16k \Rightarrow k = \frac{2}{\sqrt{2}}$ , y para que el coeficiente de  $x$  sea cero, debe tenerse  $h = 0$ . Sustituyendo estos valores, obtenemos:

$-2x^2 + 8y^2 + 8 = 0$ . Ahora, como al aplicar la rotación  $R$  a la ecuación V.1.2 para obtener V.2.3 multiplicamos por  $-2$  (pág. 18), si dividimos por  $-2$  obtenemos finalmente:  $\zeta_h : x^2 - 4y^2 - 4 = 0$ .

A continuación un programa y la gráfica correspondientes a este proceso.

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
% Programa que ilustra la aplicación del esquema V.1.2
% para recuperar la hipérbola del ejemplo EV.1.1
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
ezplot('x.^2 -4*y.^2 - 4')
hold on;fplot('0',[-6 6],'k')
hold on;plot([0 0],[-6 6],'k')
axis off
%
% dibujando nuevos ejes
%
hold on
fplot('1',[-6 6],'k')
hold on
%
fplot('x+1',[-6.3 6.3],'k')
hold on
fplot('-x+1',[-6.3 6.3],'k')
gtext('0');gtext('0')
print -dbitmap prueba6_1
```



### V.3 Clasificación de las cónicas

Para concluir este capítulo, volvamos a nuestra ya conocida ecuación V.1.1,

$\zeta : Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ , y preguntémosnos en general, ¿qué tipo de lugar geométrico representa?

Para avanzar en la respuesta, apliquemos a  $\zeta$  la rotación dada por las ecuaciones IV.1.5, esto es:

$$\begin{aligned} & A(x'' \cos(\varphi) - y'' \operatorname{sen}(\varphi))^2 + \\ & 2B(x'' \cos(\varphi) - y'' \operatorname{sen}(\varphi))(x'' \operatorname{sen}(\varphi) + y'' \cos(\varphi)) + C(x'' \operatorname{sen}(\varphi) + y'' \cos(\varphi))^2 + \\ & D(x'' \cos(\varphi) - y'' \operatorname{sen}(\varphi)) + E(x'' \operatorname{sen}(\varphi) + y'' \cos(\varphi)) + F = 0 \quad \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & A(x''^2 \cos^2 \varphi - 2x''y'' \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi + y''^2 \operatorname{sen}^2 \varphi) + \\ & 2B(x''^2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi + x''y'' \cos^2 \varphi - x''y'' \operatorname{sen}^2 \varphi - y''^2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi) + \\ & C(x''^2 \operatorname{sen}^2 \varphi + 2x''y'' \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi + y''^2 \cos^2 \varphi) + Dx'' \cos \varphi - Dy'' \operatorname{sen} \varphi + \\ & Ex'' \operatorname{sen} \varphi + Ey'' \cos \varphi + F = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dots \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (A \cos^2 \varphi + C \operatorname{sen}^2 \varphi + 2B \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi)x''^2 + \\ & (2B \cos^2 \varphi - 2B \operatorname{sen}^2 \varphi - 2A \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi + 2C \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi)x''y'' + \\ & (A \operatorname{sen}^2 \varphi - 2B \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi + C \cos^2 \varphi)y''^2 + \\ & (D \cos \varphi + E \operatorname{sen} \varphi)x'' + (E \cos \varphi - D \operatorname{sen} \varphi)y'' + F = 0 \quad \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$A''x''^2 + 2B''x''y'' + C''y''^2 + D''x'' + E''y'' + F'' = 0, \text{ donde:}$$

$$\begin{aligned}
A'' &= A \cos^2 \varphi + C \sin^2 \varphi + 2B \sin \varphi \cos \varphi, \\
B'' &= 2B \cos^2 \varphi - 2B \sin^2 \varphi - 2A \sin \varphi \cos \varphi + 2C \sin \varphi \cos \varphi \\
&= (C - A) \sin \varphi \cos \varphi + B(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi), \\
C'' &= A \sin^2 \varphi - 2B \sin \varphi \cos \varphi + C \cos^2 \varphi, \\
D'' &= D \cos \varphi + E \sin \varphi, \\
E'' &= E \cos \varphi - D \sin \varphi, \\
F'' &= F.
\end{aligned}
\tag{V.3.1}$$

Si nos planteamos ahora eliminar el término en  $x''y''$ , debemos hacer

$$B'' = 2B \cos^2 \varphi - 2B \sin^2 \varphi - 2A \sin \varphi \cos \varphi + 2C \sin \varphi \cos \varphi = 0. \tag{V.3.2}$$

**Nótese que si  $A = C$**  en la expresión para  $B''$  en V.3.1, resulta:

$$B(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = 0, \tag{V.3.3}$$

y si suponemos  $B \neq 0$  (que es lo natural en nuestro contexto), V.3.2 se satisface cuando, en particular,  $\varphi = 45^\circ \equiv \frac{\pi}{4}$ .

**Ahora, si  $A \neq C$**  y dividimos la expresión  $(C - A) \sin \varphi \cos \varphi + B(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = 0$  entre  $\cos^2 \varphi$ , resulta:

$$B \tan^2 \varphi + (A - C) \tan \varphi - B = 0, \tag{V.3.4}$$

que es una cuadrática en  $\tan \varphi$ , cuyas raíces pueden obtenerse de la conocida fórmula:

$$\tan \varphi = \frac{C - A \pm \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2}}{2B},$$

y como hemos supuesto  $B \neq 0$ , tenemos entonces que siempre es posible eliminar el coeficiente  $B''$  y transformar la ecuación V.1.1 en una del tipo

$$\zeta'' : A''x''^2 + C''y''^2 + D''x'' + E''y'' + F'' = 0 \tag{V.3.5}$$

y a partir de ésta, identificar la cónica de que se trate, lo que puede resumirse como sigue:

- a)  $\zeta''$  representa una circunferencia, un punto o ningún lugar geométrico real, si  $A'' = C''$ .
- b)  $\zeta''$  representa una parábola, dos rectas paralelas, una recta o ningún lugar geométrico real, si  $A''$  o  $C''$  son cero ( $A''C'' = 0$ ).
- c)  $\zeta''$  representa una elipse, un punto o ningún lugar geométrico real, si  $A'' \neq C''$  y  $A''C'' > 0$ .
- d)  $\zeta''$  representa una hipérbola o dos rectas que se cortan, si  $A''C'' < 0$ .

Veamos por ejemplo, la prueba correspondiente al inciso b). Tenemos  $A''C'' = 0$  y supondremos  $A'' = 0, C'' \neq 0$  ( El caso  $A'' \neq 0, C'' = 0$  es totalmente análogo). Entonces V.3.5 se torna en:

$$\begin{aligned}
 C''y''^2 + D''x'' + E''y'' + F'' &= 0 \Leftrightarrow \\
 C''\left(y''^2 + \frac{E''}{C''}y'' + \left(\frac{E''}{2C''}\right)^2\right) + D''x'' + F'' - \frac{E''^2}{4C''} &= 0 \Leftrightarrow \\
 \left(y''^2 + \frac{E''}{2C''}\right)^2 &= -\frac{D''}{C''}\left(x'' + F'' - \frac{E''^2}{4C''}\right).
 \end{aligned}$$

Claramente, la ecuación anterior tiene la forma  $(y'' - k)^2 = -4c(x'' - h)$  que como sabemos, corresponde a una parábola.

Ahora bien, si además de las hipótesis que hemos considerado agregamos la de que  $D'' = 0$ , entonces, directamente de V.3.5 se obtiene:  $C''y''^2 + E''y'' + F'' = 0$ , que es una cuadrática en  $y''$ . Si llamamos  $k_1$  y  $k_2$  a sus raíces, resulta que V.3.5 representa:

- a) Una recta, si  $k_1 = k_2 = k \in \mathfrak{R}$ , esto es, la recta  $y = k$ .
- b) Dos rectas paralelas si las raíces son reales.
- c) Dos rectas imaginarias si  $k_1$  y  $k_2$  son imaginarias.

La prueba de las demás afirmaciones la dejamos a nuestros lectores, y por nuestra parte veremos cómo identificar el tipo de lugar geométrico que representa la ecuación V.1.1, sin necesidad de llevarla a la forma V.3.4. Para ello volvamos a las igualdades V.3.1, de las que resulta:

$$A'' + C'' = A(\text{sen}^2 \varphi + \text{cos}^2 \varphi) + C(\text{sen}^2 \varphi + \text{cos}^2 \varphi) = A + C \quad . \quad \text{V.3.6}$$

También, haciendo algunas cuentas y usando identidades trigonométricas se llega a:

$$A''C'' - B''^2 = AC - B^2. \quad \text{V.3.7}$$

Tanto V.3.6 como V.3.7 nos “hablan” de expresiones que permanecen invariantes bajo rotaciones, lo que resulta importante en nuestro contexto pues ya hemos visto que siempre podemos hacer  $B'' = 0$ . Si hacemos esto, V.3.7 toma la forma:

$$A''C'' = AC - B^2,$$

y dado lo que ya sabemos con respecto a la ecuación V.3.5, expresado en los incisos b), c) y d) anteriores, tenemos entonces que V.1.1:

$$\zeta : Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \text{ es:}$$

- a) De tipo parabólico si  $AC - B^2 = 0$ .
- b) De tipo elíptico si  $AC - B^2 > 0$ .
- c) De tipo hiperbólico si  $AC - B^2 < 0$

En particular, la ecuación  $\zeta : 13x^2 - 10xy + 13y^2 - 72 = 0$  que aparece en el capítulo IV corresponde efectivamente a una elipse y satisface:  $13 * 13 - 10^2 > 0$ , mientras que la ecuación  $\zeta : 3x^2 + 10xy + 3y^2 + 16x + 16y + 24 = 0$  (ejemplo EV.1.1), representa una hipérbola y satisface:  $3 * 3 - 10^2 < 0$ .

En el lenguaje matricial de valores y vectores propios, si partimos de la ecuación V.1.1, escrita en la forma:

$$\zeta : (x \ y) \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (D \ E) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + F = 0 \Leftrightarrow P^T Q P + S P + F = 0$$

y usamos la rotación dada por  $R P'' = P$  para eliminar el término en  $xy$  siguiendo el procedimiento visto antes, se llega a:

$$\zeta'' : P''^T Q'' P'' + S'' P'' + F'' = 0$$

donde

$$Q'' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

siendo  $\lambda_1, \lambda_2$  los valores propios de  $Q$ .

La ecuación general de  $\zeta''$  es, en estos términos:

$$\zeta'' : \lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + D''x'' + E''y'' + F'' = 0,$$

que es de la forma V.3.5 y por lo tanto se tiene que  $\zeta''$  representa:

- a) Una circunferencia, un punto o ningún lugar geométrico real si  $\lambda_1 = \lambda_2$ .
- b) Una parábola, dos rectas paralelas, una recta o ningún lugar geométrico real si  $\lambda_1 \lambda_2 = 0$ .
- c) Una elipse, un punto o ningún lugar geométrico real si  $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ .
- d) Una hipérbola o dos rectas que se cortan si  $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ .

Veamos dos ejemplos.

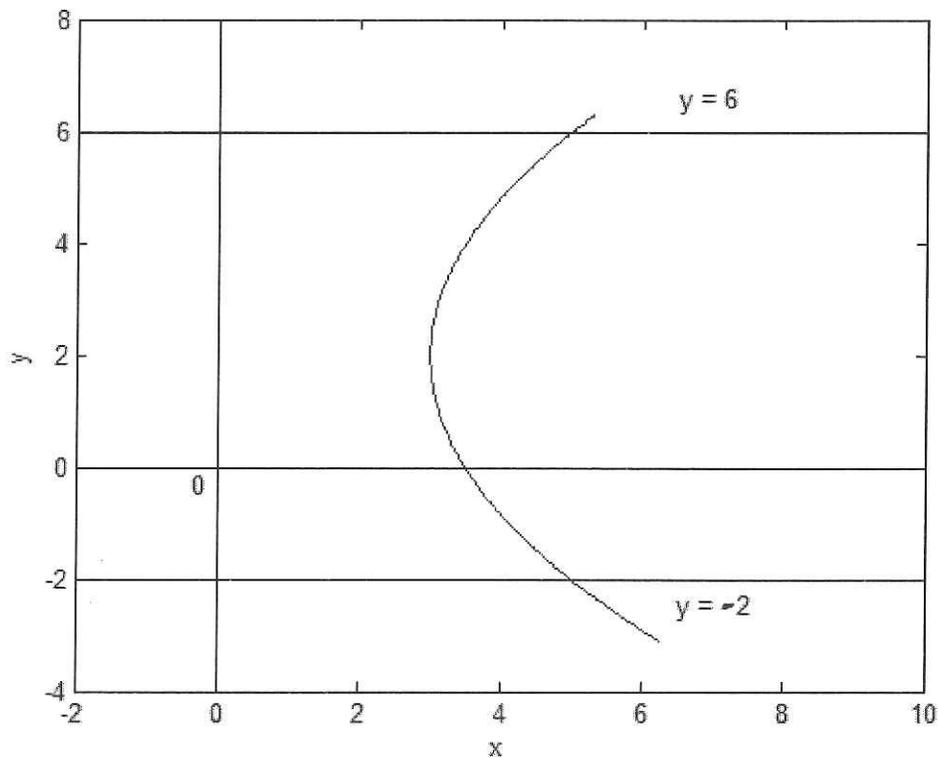
**EV.3.1** Sea:

- a)  $\zeta'' : y''^2 - 4y'' - 8x'' + 28 = 0$ . Tenemos que:  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \Rightarrow \lambda_1 \lambda_2 = 0$ .  
Ahora:  $y''^2 - 4y'' - 8x'' + 28 = 0 \Leftrightarrow (y'' - 2)^2 = 8(x'' - 3)$ , que es la ecuación de una parábola con vértice en  $(2, 3)$ .
- b) Si consideramos la variante  $\zeta'' : y''^2 - 4y'' + 28 = 0$ , tenemos el caso  $\lambda_1 \lambda_2 = 0, D'' = 0$ , de donde  $\zeta''$  debe representar dos rectas imaginarias, dado que las raíces de  $y''^2 - 4y'' + 28 = 0$  son imaginarias.
- c) Para el caso  $\zeta'' : y''^2 - 4y'' - 12 = 0$ , las correspondientes raíces son 6 y -2, dado que  $y''^2 - 4y'' - 12 = (y'' - 6)(y'' + 2)$ , de donde  $\zeta''$  representa las rectas paralelas:

$$r_1 : y'' = 6 \quad , \quad r_2 : y'' = -2.$$

A continuación un programa que ilustra los incisos a) y c).

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
% Programa que ilustra los incisos a) y c) del ejemplo
% EV.3.1
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
% Gráfica de la parábola
%
ezplot('y.^2-4*y-8*x+28')
hold on;fplot('0',[-2 10],'k')
hold on;plot([0 0],[-4 8],'k')
axis ([-2 10 -4 8])
%
% Gráficas de las rectas
%
hold on;fplot('6',[-2 10],'k')
hold on;fplot('-2',[-2 10],'k')
gtext('y = 6');gtext('y = - 2');gtext('0')
print -dbitmap prueba7
```



**EV.3.2** Sea:

a)  $\zeta'' : 4x''^2 - 9y''^2 - 16x'' + 54y'' - 101 = 0$ . Se tiene que:

$$\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -9, \Rightarrow \lambda_1 \lambda_2 < 0.$$

Pero  $4x''^2 - 9y''^2 - 16x'' + 54y'' - 101 = 0 \Leftrightarrow \frac{(x''-2)^2}{9} - \frac{(y''-3)^2}{4} = 1$ , que es la ecuación de una hipérbola con centro en  $(2, 3)$ .

b) Si consideramos la variante de  $\zeta''$  con  $D'' = E'' = F'' = 0$ , se tiene:

$$\zeta'' : 4x''^2 - 9y''^2 = 0 \Leftrightarrow (2x'' + 3y'')(2x'' - 3y'') = 0 \Leftrightarrow 2x'' + 3y'' = 0, 2x'' - 3y'' = 0,$$

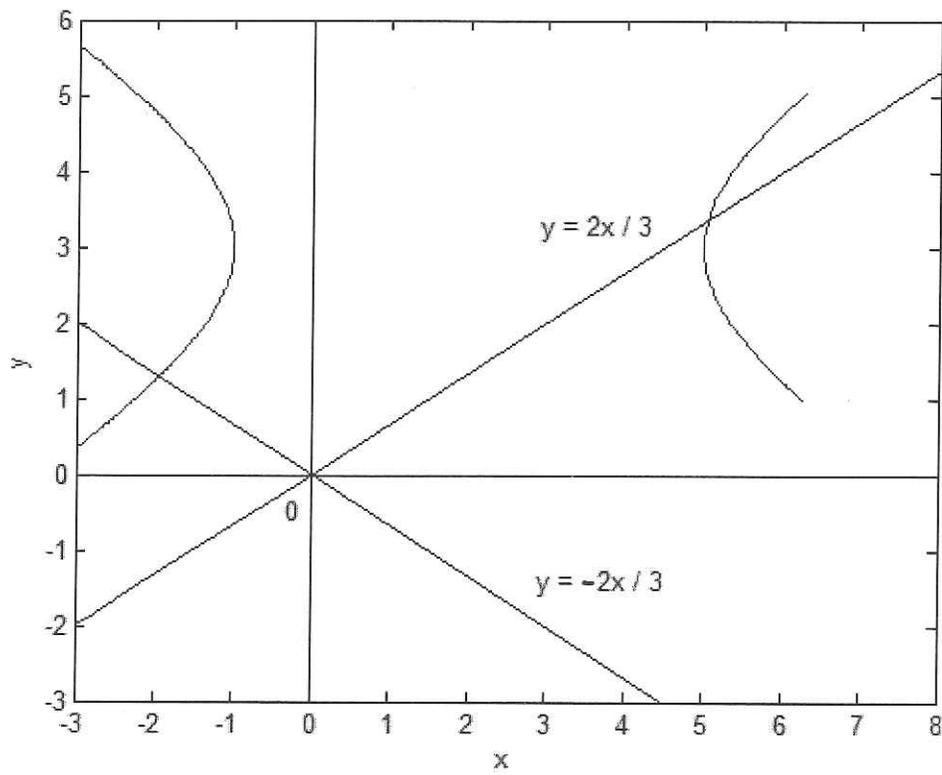
de donde,  $\zeta''$  representa las rectas:  $r_1 : y'' = \frac{2}{3}x''$ ,  $r_2 : y'' = -\frac{2}{3}x''$ .

Un programa que ilustra ambos incisos es:

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
% Programa que ilustra los incisos a) y b) del ejemplo
% EV.3.2
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
% Gráfica de la hipérbola
%
ezplot('4*x.^2-9*y.^2-16*x+54*y-101')
hold on;fplot('0',[-3 8],'k')
hold on;plot([0 0],[-4 6],'k')
axis ([-3 8 -3 6])
%
% Gráficas de las rectas
%
hold on;fplot('2*x/3',[-3 8],'k')
hold on;fplot('-2*x/3',[-3 8],'k')
gtext('y=2x/3');gtext('y=-2x/3');gtext('0')
print -dbitmap prueba8

```



## Ejercicios

1. Si  $R = (r_1 \ r_2)$  es la rotación dada por la ecuación IV.2.2, verifica que  $Re_1 = r_1$  y  $Re_2 = r_2$ .
2. Construye ejemplos que ilustren las propiedades PR3 y PR4 de las rotaciones.
3. Prueba que las traslaciones también son isométricas. Construye ejemplos.
4. Aplica el esquema V.1.1 para, a partir de la ecuación  $\zeta'' : 3x''^2 + 10x''y'' + 3y''^2 + 16x'' + 16y'' + 24 = 0$ , recuperar la ecuación original  $\zeta$  del ejemplo EV.1.1.
5. Dada la ecuación  $\zeta'' : A''x''^2 + C''y''^2 + D''x'' + E''y'' + F'' = 0$ , prueba que representa:
  - a) Una elipse, un punto o ningún lugar geométrico real, si  $A'' \neq C''$  y  $A''C'' > 0$ .
  - b) Una hipérbola o dos rectas que se cortan, si  $A''C'' < 0$ .
6. Partiendo de las ecuaciones V.3.1, prueba la igualdad V.3.7.
7. Da la ecuación de una parábola de la forma  $\zeta : y^2 = -4cx$  ; después:
  - a) Da un origen  $O'(h, k)$ , con  $h, k$  distintas de cero y construye las ecuaciones de la traslación  $T$  correspondiente.
  - b) Aplica  $T$  a  $\zeta$  para obtener  $T(\zeta) = \zeta'$ .
  - c) Da un ángulo  $\varphi$  que no sea de la forma  $\pm n\frac{\pi}{4}$  y construye la rotación  $R$  correspondiente.
  - d) Aplica  $R$  a  $\zeta'$  para obtener  $R(\zeta') = \zeta''$ .
  - e) Haz un dibujo que ilustre el proceso descrito en los incisos a) – d).
  - f) Aplica los esquemas V.1.1 y V.1.2 a  $\zeta''$  para recuperar  $\zeta$ .
8. Prueba que en general:  $T(R(P)) \neq R(T(P))$ . Construye ejemplos e incluye un dibujo para cada caso.

## Bibliografía

- Banchoff, Thomas, y Wermer, John, (1992), *Linear Algebra Through Geometry*, Springer-Verlag, USA.
- Clayton, W. D., (2004), *Euclidean Geometry and Transformations*, Dover Publications, Inc., USA.
- Copeland, A. H., (1962), *Geometry, Algebra, and Trigonometry by Vector Methods*, The Macmillan Company, USA.
- Meyer, Walter, (2006), *Geometry and Its Applications*, Elsevier Academic Press Publications, USA.
- Pettofrezzo, Anthony J., (1978), *Matrices and transformations*, Dover Publications, Inc., USA.
- Preston, G. C., y Lovaglia, A. R., (1971), *Modern Analytic Geometry*, Harper&Row, Publishers, Inc., USA.
- Wooton, W., Beckenbach, E. P. y Fleming, F.J., (1985), *Geometría Analítica Moderna*, Publicaciones Cultural, S.A. de C.V., México.