

# El Método de Newton Truncado para la Generación de Mallas Estructuradas.

Presentado por: Javier de Jesús Cortés Aguirre.  
Asesor: Dr. Pablo Barrera Sánchez

29 de octubre de 2007

# Índice

<b>1. Introducción.</b>	<b>1</b>
<b>2. Mallas estructuradas continuas.</b>	<b>2</b>
<b>3. Mallas estructuradas discretas.</b>	<b>4</b>
<b>4. Generación variacional.</b>	<b>5</b>
4.1. Generación variacional continua. . . . .	5
4.2. Generación variacional discreta. . . . .	6
4.2.1. Funcionales discretos para el mapeo bilineal. . . . .	9
4.2.2. Expresiones para los funcionales discretos. . . . .	11
4.3. Mallas convexas. . . . .	14
4.3.1. $\epsilon$ -convexidad. . . . .	14
<b>5. El método de Newton Truncado.</b>	<b>15</b>
5.1. Descripción básica del método. . . . .	15
5.2. Terminación del algoritmo lineal. . . . .	16
5.3. Elección de $\eta_k$ . . . . .	16
5.4. Método de Newton truncado con región de confianza. . . . .	17
<b>6. Implementación del método de Newton Truncado al sistema UNAMALLA.</b>	<b>18</b>
6.1. Ejemplos de mallas generadas numericamente. . . . .	19
<b>7. Conclusiones.</b>	<b>24</b>
<b>8. Bibliografía</b>	<b>25</b>

## 1. Introducción.

El sistema UNAMALLA es un software de generación numérica de mallas sobre regiones irregulares desarrollado en la Facultad de Ciencias de la UNAM a lo largo de muchos años de esfuerzo y trabajo conjunto con instituciones de México y del extranjero.

La idea principal del sistema es tomar la región física en la que se esta trabajando y efectuar una transformación para llevarla al cuadrado unitario. Ya ahí, es posible atacar el problema desde el punto de vista variacional eligiendo una funcional que refleje las propiedades geométricas que se desea tener en la malla. Sin embargo es necesario tener un control más directo sobre los puntos de la malla, para ello se trabaja con funcionales discretas, las cuales transforman el problema de generación numérica de mallas en un problema de optimización no lineal, de gran escala, sin restricciones.

De entre los posibles métodos de optimización que pueden aplicarse para resolver este problema, será de nuestro particular interés el método de Newton truncado con región de confianza, el cual evita el almacenamiento completo de la matriz Hessiana mediante la utilización interna del método de gradiente congugado, esto permite disminuir significativamente la cantidad de calculos realizados computacionalmente.

El principal objetivo del presente trabajo consiste en actualizar el módulo de optimización del sistema UNAMALLA, implementando el método de Newton Truncado con región de confianza; para ello ilustraremos brevemente la teoría básica de la generación de mallas, junto con su formulación variacional, para luego describir el método de Newton Truncado y presentar algunos ejemplos ilustrativos de la implementación del método al sistema UNAMALLA.

## 2. Mallas estructuradas continuas.

En el caso continuo, una malla puede definirse como un mapeo que nos permita llevar al cuadrado unitario a una región más compleja  $\Omega$  en  $\mathbb{R}^2$ ; es decir:

**Definición 1.** Una malla  $X(\xi, \eta)$  sobre una región  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  es una función continua

$$X : R \rightarrow \Omega \quad (1)$$

donde  $R$  es el cuadrado unitario  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

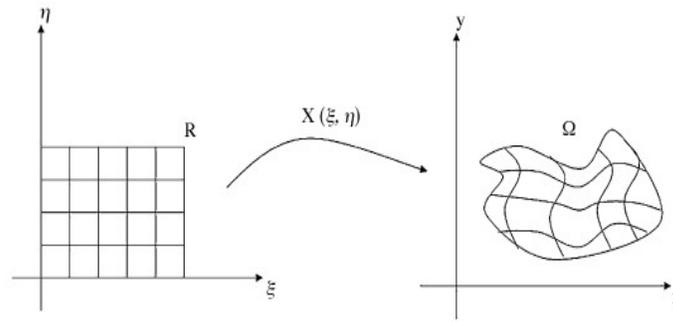


Figura 1: Mapeo entre  $R$  y  $\Omega$ .

Se restringirá la atención a funciones tales que

$$X(\partial R) = \partial \Omega \quad (2)$$

es decir, aquellas que se ajustan a la frontera, o que conforman a ésta.

De las posibles mallas existentes en  $\Omega$  que se ajustan a la frontera, serán de interés aquellas que cumplan con ciertas propiedades:

1. Se requiere que diferentes puntos en  $R$  tengan como imagen puntos diferentes en  $\Omega$ ; esto implica que diferentes líneas coordenadas que no se cruzan en  $R$ , tendrán imágenes que no se cruzan en  $\Omega$ . Se requiere pues que  $x$  sea 1-1.
2. También es necesario que  $x$  llene a  $\Omega$ ; es decir  $x$  debe ser un mapeo sobre.
3. Por otro lado, también es deseable que la imagen de una curva suave en  $R$  sea una curva suave en  $\Omega$ .

Las mallas que tienen las dos primeras propiedades se denominan mallas convexas.

Otra condición importante es que el mapeo  $X(\xi, \eta)$  tenga un Jacobiano de rango completo y de determinante positivo, con el fin de preservar la orientación sobre  $R$  y  $\Omega$  definida por la frontera, además de obtener convexidad en las celdas de la malla. Por tanto, el problema a resolver es el siguiente:

**Problema.** Dada una región simple  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  cuya frontera es una curva poligonal y dado  $\varphi : \partial R \rightarrow \partial\Omega$  un homeomorfismo, encontrar un mapeo  $X : R \rightarrow \Omega$  tal que:

- $X$  es una extensión de  $\varphi$ .
- $X$  es un homeomorfismo.
- $J(\xi, \eta) > 0, \quad \forall(\xi, \eta) \in R$ .

El siguiente teorema nos garantiza que bajo ciertas condiciones  $X$  es un homeomorfismo de  $R$  en  $\Omega$ .

**Teorema 2.1.** Si se cumplen las siguientes condiciones:

- a)  $X : R \rightarrow \Omega$ .
- b)  $X|_{\partial R} = \partial\Omega$ .
- c)  $J(\xi, \eta) > 0, \quad \forall(\xi, \eta) \in R$ .

Entonces  $X(\xi, \eta)$  es un homeomorfismo de  $R$  en  $\Omega$ .

Además debemos presentar un teorema similar, pero tomando en cuenta las celdas en que es dividida la malla, tal resultado es el siguiente.

**Teorema 2.2.** Sea  $R$  el cuadrado unitario, el cual es dividido en  $n$  dominios  $R_i$  tales que

$$R = \bigcup_{i=1}^n R_i$$

Si se cumplen las siguientes condiciones:

- a)  $X : R \rightarrow \Omega$  continua.
- b)  $X$  suave para cada  $R_i$ .
- c)  $X_i = X|_{R_i}$ .
- d)  $X : \partial R = \partial\Omega$  es un homeomorfismo.
- e)  $J_i(\xi, \eta) > 0, \quad \forall(\xi, \eta) \in R_i, \quad \forall i = 1, \dots, n$

Entonces  $X(\xi, \eta)$  es un homeomorfismo de  $R$  en  $\Omega$ .

A las imágenes del homeomorfismo aplicado sobre el cuadrado unitario uniforme se les denomina mallas estructuradas continuas, sin embargo, estamos interesados en la generación numérica de mallas; para ello utilizaremos mallas estructuradas discretas.

### 3. Mallas estructuradas discretas.

Las mallas estructuradas discretas nos permitirán identificar de manera rápida y práctica los nodos de la malla. En este trabajo estamos interesados en aquellas que tienen la propiedad de que todas sus celdas son convexas.

Si consideramos una región  $\Omega$  en el plano, definida por una curva poligonal  $\delta$  simple, cerrada y orientada en el sentido contrario de las manecillas del reloj, cuyos vértices están dados por  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_q\}$ , definimos a una malla estructurada discreta como sigue.

**Definición 2.** Sean  $m$  y  $n$  números naturales mayores que 2. Decimos que el conjunto de puntos del plano

$$G = \{P_{i,j} | i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n\} \quad (3)$$

con fronteras

$$\begin{aligned} L_1(G) &= \{P_{i,1} | i = 1, \dots, m\} \\ L_2(G) &= \{P_{m,j} | j = 1, \dots, n\} \\ L_3(G) &= \{P_{i,n} | i = 1, \dots, m\} \\ L_4(G) &= \{P_{1,j} | j = 1, \dots, n\} \end{aligned}$$

es una malla estructurada admisible y discreta de orden  $m \times n$  para  $\Omega$ , si se satisface que

$$V \subseteq \bigcup_{i=1}^4 L_i(G). \quad (4)$$

Decimos además que la malla  $G$  es convexa si cada uno de los  $(m-1)(n-1)$  cuadriláteros (o celdas)  $c_{i,j}$  con vértices  $\{P_{i,j}, P_{i+1,j}, P_{i,j+1}, P_{i+1,j+1}\}$ , con  $1 \leq i < m$  y  $1 \leq j < n$ , es convexo.

A continuación ilustraremos los procedimientos usuales para la generación de mallas estructuradas usando métodos variacionales continuos, así como el método general para obtener la discretización de los funcionales continuos aplicados mediante este enfoque; seguiremos el método utilizado por Ivanenko para la discretización del funcional de suavidad [14].

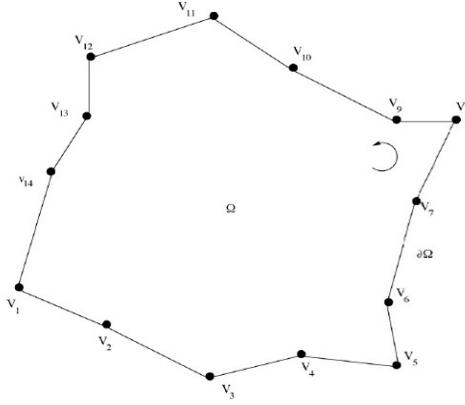


Figura 2: Un ejemplo de una malla estructurada.

## 4. Generación variacional.

### 4.1. Generación variacional continua.

Aunque la noción de funcional continuo es mucho más amplia, para los fines que nos ocupan se entenderá por un funcional continuo a una función de la forma

$$I(X) = \int_0^1 \int_0^1 L(\xi, \eta, x, y, x_\xi, x_\eta, y_\xi, y_\eta) d\eta d\xi \quad (5)$$

que a cada malla

$$X : R \rightarrow \Omega$$

le asocia un número real. De hecho, la mayoría de los funcionales que serán considerados tienen una forma más simple,

$$I(X) = \int_0^1 \int_0^1 L(x_\xi, x_\eta, y_\xi, y_\eta) d\eta d\xi \quad (6)$$

donde  $L$  es una función que contendrá información acerca de ciertas propiedades geométricas que se desean controlar con el objeto de generar mallas adecuadas y que conformen a la frontera de  $\Omega$ .

El problema de la generación variacional continua de mallas consiste en encontrar  $X^*$  tal que conforme la frontera y que haga mínimo el valor de  $I(X)$ ; además  $X$  debe tener un valor predeterminado sobre la frontera de  $R$ . Del cálculo de variaciones ([12],[13]) se sigue que  $X$  debe ser solución del problema con valores a la frontera

$$\frac{d}{d\xi} \left( \frac{\partial L}{\partial x_\xi} \right) + \frac{d}{d\eta} \left( \frac{\partial L}{\partial x_\eta} \right) = 0$$

$$\frac{d}{d\xi} \left( \frac{\partial L}{\partial y_\xi} \right) + \frac{d}{d\eta} \left( \frac{\partial L}{\partial y_\eta} \right) = 0$$

con

$$X(\partial R) = \partial \Omega$$

el cual consta de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales, comúnmente acoplado y no lineal con condiciones a la frontera dadas por el valor de la malla en la frontera. Estas condiciones son llamadas en conjunto Ecuaciones de Euler-Lagrange.

Existen un buen número de funcionales continuos que pueden aplicarse al problema de generación de mallas, véase [18] para más detalles acerca de estos funcionales; a continuación presentaremos el procedimiento para obtener funcionales discretas a partir de ellos.

## 4.2. Generación variacional discreta.

Si tomamos a  $L = f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$  o más y a  $X = d(\xi, \eta) = (x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$ , el funcional continuo con el que trabajaremos esta dado por:

$$\begin{aligned} I(d) &= \int_0^1 \int_0^1 f(x_\xi, x_\eta, y_\xi, y_\eta) d\eta d\xi \\ &= \int_0^1 \int_0^1 f(d_\xi, d_\eta, J(\xi, \eta)) d\eta d\xi. \end{aligned} \quad (7)$$

donde  $J(\xi, \eta)$  representa al Jacobiano sobre cada punto del cuadrado unitario.

Para hacer la discretización de este funcional, podemos considerar el caso especial cuando  $\Omega$  es un cuadrilátero con vértices  $P, Q, R, S$ .

La forma más natural de mapear un cuadrado en un cuadrilátero es mediante una función bilineal

$$r(\xi, \eta) = A + B\xi + C\eta + D\xi\eta, \quad (8)$$

donde los vectores  $A, B, C$  y  $D$  se determinan a partir de los valores de  $r(\xi, \eta)$  en los vértices del cuadrado, es decir, deben satisfacer las condiciones:

$$\begin{aligned} r(0, 0) &= P, & r(1, 0) &= Q, \\ r(0, 1) &= S, & r(1, 1) &= R, \end{aligned}$$

luego

$$r(\xi, \eta) = P + (Q - P)\xi + (S - P)\eta + [(R - Q) + (P - S)]\xi\eta, \quad (9)$$

y

$$r_\xi = (Q - P) + [(R - Q) + (P - S)]\eta, \quad (10)$$

$$r_\eta = (S - P) + [(R - Q) + (P - S)]\xi, \quad (11)$$

de donde

$$\begin{aligned}
r_\xi(0, 0) &= Q - P, & r_\xi(1, 0) &= Q - P \\
r_\eta(0, 0) &= S - P, & r_\eta(1, 0) &= R - Q, \\
r_\xi(0, 1) &= R - S, & r_\xi(1, 1) &= R - S, \\
r_\eta(0, 1) &= S - P, & r_\eta(1, 1) &= R - Q,
\end{aligned} \tag{12}$$

Es importante notar que  $r_\xi(0, 0)$  y  $r_\eta(0, 0)$  dependen solamente de los puntos S, P y Q, esto es del triángulo  $\Delta SPQ$ . Análogamente  $r_\xi(1, 0)$  y  $r_\eta(1, 0)$  dependen sólo del triángulo  $\Delta PQR$  y así sucesivamente.

El jacobiano de  $r$  es la magnitud

$$\begin{aligned}
J(\xi, \eta) &= r_\xi^t J_2 r_\eta \\
&= (Q - P)^t J_2 (S - P) + (R - Q)^t J_2 (S - P) \xi \\
&+ (Q - P)^t J_2 (R - S) \eta
\end{aligned}$$

donde

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

Por tanto, los Jacobianos en cada vértice pueden expresarse como

$$\begin{aligned}
J(0, 0) &= 2\text{area}(\Delta SPQ), \\
J(1, 0) &= 2\text{area}(\Delta PQR), \\
J(1, 1) &= 2\text{area}(\Delta QRS), \\
J(0, 1) &= 2\text{area}(\Delta RSP).
\end{aligned} \tag{14}$$

Donde, como vimos en la sección 1, para obtener convexidad en las celdas es necesario que  $J(\xi, \eta) > 0$ , es decir, necesitamos que todas las áreas de los triángulos mencionados sean positivas.

Además, tomando el triángulo orientado con vértices  $Q, P, R \in \mathbb{R}^2$ , definimos a las funciones  $\lambda$  y  $\alpha$  como sigue

$$\begin{aligned}
\lambda(\Delta(Q, P, R)) &= \|P - Q\|^2 + \|P - R\|^2 \\
\alpha(\Delta(Q, P, R)) &= (P - Q)^t J_2 (P - R) = 2\text{area}(\Delta(Q, P, R))
\end{aligned} \tag{15}$$

Ahora, si aproximamos a  $d(\xi, \eta)$  por  $r(\xi, \eta)$ , entonces:

$$f(d_\xi, d_\eta) \approx f(r_\xi, r_\eta), \tag{16}$$

$$f(d_\xi, d_\eta, J(d(\xi, \eta))) \approx f(r_\xi, r_\eta, J(r(\xi, \eta))), \tag{17}$$

y usando (9)-(12) se tiene que:

$$\begin{aligned}
J(r(\xi, \eta)) &= \{(x_Q - x_P) + [(x_R - x_Q) + (x_P - x_S)]\eta\} \{y_S - y_P\} + \{(y_R - y_Q) + (y_R + y_S)\}\xi \\
&- \{(y_Q - y_P) + [(y_R - y_Q) + (y_P - y_S)]\eta\} \{x_S - x_P\} + \{(x_R - x_Q) + (x_R + x_S)\}\xi
\end{aligned}$$

con esto podemos construir una aproximación de  $I[d]$  usando una regla de cuadratura, en nuestro caso proponemos:

$$I[d] \approx \frac{1}{4}[f(r_\xi(0, 0), r_\eta(0, 0), J(r(0, 0))) + f(r_\xi(1, 0), r_\eta(1, 0), J(r(1, 0))) \\ + f(r_\xi(1, 1), r_\eta(1, 1), J(r(1, 1))) + f(r_\xi(0, 1), r_\eta(0, 1), J(r(0, 1)))].$$

Si llamamos  $f_d(P, Q, R, S)$  a esta aproximación, tenemos:

$$f_d(P, Q, R, S) \approx \frac{1}{4}[f(Q - P, S - P, \text{area}(\Delta SPQ)) + f(Q - P, R - Q, \text{area}(\Delta PQR)) \\ + f(R - S, R - Q, \text{area}(\Delta QRS)) + f(R - S, S - P, \text{area}(\Delta RSP))].$$

Finalmente, obtenemos una funcional discreta sobre una malla  $\{P_{i,j}\}$  de  $m \times n$  como la suma de todas las celdas  $c_{i,j}$  de la malla

$$I_d[\{P_{i,j}\}] = \sum_{i,j} f_d(P_{i,j}, P_{i+1,j}, P_{i+1,j+1}, P_{i,j+1}). \quad (18)$$

Así, tenemos la siguiente definición.

**Definición 3.** Una funcional discreta sobre una malla  $\{P_{i,j}\}$  es una función de la forma

$$I[\{P_{i,j}\}] = \sum_{i,j} f(c_{i,j}), \quad (19)$$

donde  $c_{i,j}$  denota a la  $ij$ -ésima celda de la malla y

$$f(c_{i,j}) = f(P_{i,j}, P_{i+1,j}, P_{i+1,j+1}, P_{i,j+1}), \quad (20)$$

es una función que mide alguna propiedad geométrica de la red.

Por tanto el problema discreto de generación de mallas puede ser expresado, en general, como el problema de optimización de gran escala:

**Problema.**

$$\text{Obtener : } G^* = \arg \min_G \sum_{q=1}^N f(\Delta_q) \quad (21)$$

sobre el conjunto de mallas admisibles para una región.

A continuación se mostrarán las expresiones de algunos de los funcionales discretos, asociados a los funcionales continuos más conocidos y reportados en la literatura, utilizando el mapeo bilineal.

### 4.2.1. Funcionales discretos para el mapeo bilineal.

#### Funcional de Longitud.

Esta funcional es una de las propuestas por Steinberg y Roache [18], permite tener control sobre las líneas verticales y horizontales de la malla.

$$I_l[d] = \int_0^1 \int_0^1 [(x_\xi^2 + x_\eta^2) + (y_\xi^2 + y_\eta^2)] d\xi d\eta, \quad (22)$$

en este caso se tiene

$$f(d(\xi, \eta)) = x_\xi^2 + x_\eta^2 + y_\xi^2 + y_\eta^2, \quad (23)$$

de donde

$$\begin{aligned} f(r(0, 0)) &= \|Q - P\|^2 + \|S - P\|^2, & f(r(1, 0)) &= \|Q - P\|^2 + \|R - Q\|^2, \\ f(r(0, 1)) &= \|R - S\|^2 + \|S - P\|^2, & f(r(1, 1)) &= \|R - S\|^2 + \|R - Q\|^2, \end{aligned}$$

por lo que, el valor para cada celda está dado por:

$$\begin{aligned} f_l(P, Q, R, S) &= \frac{1}{2} [\|Q - P\|^2 + \|S - P\|^2 + \|R - S\|^2 + \|R - Q\|^2] \\ &= \frac{1}{4} [\lambda(\Delta SPQ) + \lambda(\Delta PQR) + \lambda(\Delta QRS) + \lambda(\Delta RSP)] \end{aligned} \quad (24)$$

#### Funcional de Área.

La formulación variacional propuesta por Steinberg y Roache [18] para controlar el área de las celdas está dada por

$$I_a[d] = \int_0^1 \int_0^1 J^2 d\xi d\eta, \quad (25)$$

donde

$$f(d(\xi, \eta)) = (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)^2, \quad (26)$$

y por tanto, para cada celda el valor esta dado por:

$$\begin{aligned} f_a(P, Q, R, S) &= \frac{1}{4} [J^2(r(0, 0)) + J^2(r(1, 0)) + J^2(r(1, 1)) + J^2(r(0, 1))] \\ &= \frac{1}{4} [\alpha^2(\Delta SPQ) + \alpha^2(\Delta PQR) + \alpha^2(\Delta QRS) + \alpha^2(\Delta RSP)] \end{aligned} \quad (27)$$

#### Funcional de Suavidad.

La funcional que proporciona suavidad a las líneas de la malla es la siguiente,

$$I_s[d] = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x_\xi^2 + y_\xi^2 + x_\eta^2 + y_\eta^2}{J} d\xi d\eta, \quad (28)$$

Empleando  $\alpha$  y  $\lambda$ , podemos escribir la expresión del funcional discreto de suavidad en un triángulo:

$$s(\Delta SPQ) = \frac{\lambda(\Delta SPQ)}{\alpha(\Delta SPQ)}, \quad (29)$$

que en la celda vale:

$$\begin{aligned} f_s(P, Q, R, S) &= \frac{1}{4} [s(0, 0) + s(1, 0) + s(0, 1) + s(1, 1)] \\ &= \frac{1}{4} [s(\Delta SPQ) + s(\Delta PQR) + s(\Delta QRS) + s(\Delta RSP)] \end{aligned} \quad (30)$$

### Funcional de Ortogonalidad.

La funcional que busca la ortogonalidad de las líneas de la malla es

$$I_{ort}[d] = \int_0^1 \int_0^1 (d_\xi \dot{d}_\eta)^2 d\xi d\eta = \int_0^1 \int_0^1 (x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta)^2 d\xi d\eta, \quad (31)$$

donde si definimos a  $o$  para el triángulo  $\Delta SPQ$  como

$$o(\Delta SPQ) = (S - P)^t(Q - P)$$

obtenemos la discretización del funcional  $f_{ort}$  como

$$\begin{aligned} f_{ort}(P, Q, R, S) &= \frac{1}{4} ((P - S)^t(Q - P))^2 + ((Q - P)^t(R - Q))^2 \\ &+ ((S - R)^t(P - S))^2 + ((R - Q)^t(S - R))^2 \\ &= \frac{1}{4} (o^2(\Delta SPQ) + o^2(\Delta PQR) \\ &+ o^2(\Delta RSP) + o^2(\Delta QRS)) \end{aligned} \quad (32)$$

### Funcional de Área-Ortogonalidad.

Si se combinan los funcionales de Área y de Ortogonalidad en la forma:

$$\frac{1}{2} I_a + \frac{1}{2} I_{ort}, \quad (33)$$

se obtiene la forma variacional del funcional de Área-Ortogonalidad que propone Knupp [16].

$$I_{ao}[d] = \int_0^1 \int_0^1 (x_\xi^2 + y_\xi^2)(x_\eta^2 + y_\eta^2) d\xi d\eta, \quad (34)$$

y su discretización queda como:

$$\begin{aligned} f(r(0, 0)) &= \|Q - P\|^2 \|S - P\|^2, & f(r(1, 0)) &= \|Q - P\|^2 \|R - Q\|^2, \\ f(r(0, 1)) &= \|R - S\|^2 \|S - P\|^2, & f(r(1, 1)) &= \|R - S\|^2 \|R - Q\|^2, \\ f_{ao}(P, Q, R, S) &= \frac{1}{4} [f_H(P, Q, R, S) \cdot f_V(P, Q, R, S)] \end{aligned} \quad (35)$$

donde

$$\begin{aligned} f_H &= \|Q - P\|^2 + \|S - R\|^2 \\ f_V &= \|R - Q\|^2 + \|P - S\|^2 \end{aligned}$$

## 4.2.2. Expresiones para los funcionales discretos.

Una vez definidos  $\alpha$ ,  $\lambda$  y  $o$  para triángulos, necesitamos escribir los funcionales discretos considerando los cuatro triángulos orientados en cada celda, lo cual nos permitirá tener control sobre la convexidad de las celdas de la malla. Para esto, denotemos los triángulos en la celda  $i, j$  con vértices  $P_{i,j}, Q_{i,j}, R_{i,j}, S_{i,j}$  como

$$\begin{aligned}\Delta S_{i,j}P_{i,j}Q_{i,j} &= \Delta_{i,j}^1 \\ \Delta Q_{i,j}R_{i,j}S_{i,j} &= \Delta_{i,j}^2 \\ \Delta P_{i,j}Q_{i,j}R_{i,j} &= \Delta_{i,j}^3 \\ \Delta R_{i,j}S_{i,j}P_{i,j} &= \Delta_{i,j}^4\end{aligned}$$

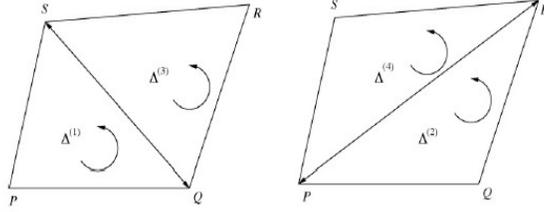


Figura 3: Los cuatro triángulos orientados en la celda de la malla.

De tal manera que el funcional discreto sobre una malla  $G$  sea

$$I(G) = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^4 f(\Delta_{i,j}^k). \quad (36)$$

Así el funcional de longitud  $F_L$ , el funcional de área  $F_A$ , el funcional de ortogonalidad  $F_O$  y el funcional de suavidad de Winslow  $F_S$  están dados como

$$\begin{aligned}F_L &= \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^4 \lambda(\Delta_{i,j}^k) \\ F_A &= \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^4 (\alpha(\Delta_{i,j}^k))^2 \\ F_O &= \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^4 (o(\Delta_{i,j}^k))^2 \\ F_S &= \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^4 \frac{\lambda(\Delta_{i,j}^k)}{\alpha(\Delta_{i,j}^k)}\end{aligned} \quad (37)$$

Al último funcional  $F_S$  también se le conoce como el funcional Discreto Armónico.

**Funcionales k-suavidad y k-área.**

Estos funcionales fueron propuestos por Tinoco ([6],[7]) y tienen la ventaja de generar mallas convexas de manera muy eficiente, incluso en regiones muy irregulares. Para facilitar la notación escribiremos los funcionales como:

$$I(G) = \sum_{q=1}^N f(\Delta_q) \quad (38)$$

en donde  $N = 4(m-1)(n-1)$  es el total de triángulos en la malla  $G$  y  $m, n$  son el número de puntos horizontales y verticales de sus lados.

**El funcional k-suavidad.**

Este funcional tiene como motivación principal el funcional de suavidad descrito por (30). En 1992, Barrera [2] estableció el funcional

$$f(\Delta) = \frac{\lambda(\Delta)}{\alpha(\Delta)}, \quad (39)$$

el cual alcanza su valor óptimo sobre el conjunto de triángulos con área orientada positiva, en el conjunto de triángulos rectángulos isóceles.

En 1996, Tinoco [6] extendió los resultados de Barrera e Ivanenko al establecer que el funcional

$$f(\Delta) = \frac{\lambda(\Delta) - 2\alpha(\Delta)}{k + \alpha(\Delta)}, \quad (40)$$

considerado sobre todos los triángulos  $\Delta$  donde  $\alpha(\Delta) > -k$ , alcanza su valor óptimo en cualquier triángulo rectángulo isóceles.

Empleando el funcional (40), se escribe al funcional k-suavidad para una malla  $G$  como

$$S_k(G) = \sum_{q=1}^N \frac{\lambda(\Delta_q) - 2\alpha(\Delta_q)}{k + \alpha(\Delta_q)}. \quad (41)$$

Aquí, la estrategia para generar mallas convexas con este funcional consiste en aproximarse a la región convexa empleando el parámetro  $k$ .

**El funcional k-área.**

En 1996, Tinoco [7] construyó un funcional de área basado en los denominadores  $k + \alpha$ , para el cual se cumplen resultados semejantes al funcional de k-suavidad, el funcional k-área:

$$A_k = \sum_{q=1}^N \frac{1}{k + \alpha_q}. \quad (42)$$

**El funcional  $S_\omega$ .**

Al realizar una análisis exhaustivo de una familia de funcionales discretos de área para resolver el problema de generación de mallas convexas, Barrera y Domínguez-Mota [4] probaron que si  $f$  es una función  $C^2$  estrictamente decreciente y acotada por abajo tal que  $f(\alpha) \rightarrow 0$  cuando  $\alpha \rightarrow \infty$ , entonces, si se considera a

$$S_\omega(G) = \sum_{q=1}^N f(\omega\alpha(\Delta q)) \quad (43)$$

como la función objetivo del problema de minimización (21), alcanza su mínimo en mallas convexas para  $\omega > 0$  suficientemente grande.

Es importante, por propósitos numéricos, hacer una elección muy económica para  $f$ . En este caso se toma

$$f(\alpha) = \begin{cases} (\alpha - 1)(\alpha - 2) + 1, & \alpha < 1 \\ 1/\alpha, & \alpha \geq 1 \end{cases}$$

**El funcional  $H_\omega$ .**

Barrera [4] propone un funcional Quasi-Armónico que depende de un parámetro  $\omega > 0$  tal que alcanza el óptimo en mallas convexas para  $\omega$  suficientemente pequeño. Este funcional está dado por:

$$H_\omega(G) = \sum_{q=1}^N \frac{\lambda(\Delta q)}{\phi_\omega(\Delta q)}, \quad (44)$$

La idea principal es elegir una función  $\phi_\omega$  capaz de acutar como una barrera continua, para fines numéricos se toma

$$\phi_\omega(\alpha) = \begin{cases} (2\omega - \alpha)/\omega^2, & \alpha < \omega \\ 1/\alpha, & \alpha \geq \omega \end{cases}$$

Se elige  $\omega > 0$  de tal forma que en el proceso de optimización, el valor del funcional sea siempre positivo, además cuando  $\omega$  es suficientemente pequeño, el funcional coincide con el funcional Armónico.

### 4.3. Mallas convexas.

Como ya hemos mencionado anteriormente, nuestro principal interés consiste en generar mallas que sean convexas, es decir mallas en las que cada una de sus celdas sea convexa. Este tipo de mallas tiene la ventaja de no presentar dobleces además de satisfacer la condición de que el Jacobiano debe ser positivo, la cual es una de las principales condiciones para garantizar la existencia del homeomorfismo que caracteriza a la malla  $G$ .

Sin embargo, la condición de que el Jacobiano sea mayor que cero no es una prueba numericamente estable, debido a que para algunas regiones irregulares el problema de generar mallas convexas puede ser visto en el sentido de que el valor crítico

$$\epsilon_c(\Omega) = \max \left\{ \frac{\alpha_-(G)}{\tilde{\alpha}(\Omega)} \mid G \in M(\Omega) \right\} \quad (45)$$

puede ser muy pequeño, donde

$$\alpha_-(G) = \min\{\alpha(\Delta_q) \mid q = 1, \dots, N\} \quad (46)$$

$$\alpha_+(G) = \max\{\alpha(\Delta_q) \mid q = 1, \dots, N\} \quad (47)$$

y

$$\tilde{\alpha}(\Omega) = \frac{1}{N} \sum_{q=1}^N \alpha(\Delta_q) = \frac{\text{Area}(\Omega)}{(m-1)(n-1)} \quad (48)$$

Por tal motivo debemos proporcionar una definición más robusta de convexidad, a esta definición le llamaremos  $\epsilon$ -convexidad.

#### 4.3.1. $\epsilon$ -convexidad.

Como para cualquier malla convexa  $G$  tenemos que

$$0 < \frac{\alpha_-(G)}{\tilde{\alpha}(\Omega)} \leq \epsilon_c \quad (49)$$

se sigue que para una malla  $G$  que satisface

$$\epsilon_c \geq \frac{\alpha_-(G)}{\tilde{\alpha}(\Omega)} \geq \epsilon \quad (50)$$

podemos establecer la siguiente definición

**Definición 4.** Una malla es  $\epsilon$ -convexa si y solo si

$$\min\{\alpha(\Delta_q) > \epsilon \cdot \tilde{\alpha}(\Omega) \mid q = 1, \dots, N\} \quad (51)$$

Note que esta definición es independiente de la escala.

## 5. El método de Newton Truncado.

El método de Newton es la base de muchos de los métodos de optimización, esto es, métodos que aproximan  $f$  localmente por una función cuadrática  $\Psi$ . Sin embargo, si el número de variables  $n$  es grande, entonces el método de Newton puede ser problemático ya que requiere del cálculo y almacenamiento de la matriz Hessiana lo cual representa un gran costo en problemas de gran escala.

En esta sección presentaremos una clase de métodos adecuados para problemas de gran escala llamados métodos de Newton Truncado. Un algoritmo de Newton Truncado se compone de dos subalgoritmos: un algoritmo externo no lineal que controla la minimización y un algoritmo interno lineal para minimizar aproximadamente  $\Psi$ .

Recordemos que la minimización de la cuadrática  $\Psi$ , que determina el paso básico de Newton  $p_k^N$  se obtiene resolviendo el sistema lineal simétrico de  $n \times n$

$$\nabla^2 f(x_k)p_k = -\nabla f(x_k) \quad (52)$$

el cual es conocido como las ecuaciones de Newton.

### 5.1. Descripción básica del método.

La idea del método de Newton truncado es resolver las ecuaciones de Newton con más exactitud en la medida en que estemos más cerca del óptimo, o lo que es lo mismo, en la medida que la función se parezca más a una cuadrática. Para ello, se han propuesto varios métodos para la iteración interna, el más recomendable para esta aplicación es el algoritmo de gradiente conjugado lineal debido a que tiene una convergencia en a lo más  $n$  pasos y no requiere del almacenamiento explícito de la matriz del sistema, solo es necesaria una rutina que realice el producto matriz-vector. Esta última característica es de gran importancia ya que usualmente, la minimización de los funcionales que vimos en la sección anterior producen matrices Hessianas sparse, es decir, matrices con un gran número de entradas igual a cero, por lo cual sería demasiado costoso calcular el producto completo.

Un requerimiento de este método es que la matriz de coeficientes debe ser positiva definida, se sabe que la matriz Hessiana tiene la garantía de ser positiva semi-definida en la solución del problema de minimización, pero puede ser indefinida en cualquier otro lugar; por tanto, el método iterativo debe ser capaz de detectar los sistemas indefinidos.

El método de Newton Truncado, al igual que el método de Newton estándar, converge localmente, sin embargo, es posible aplicar estrategias como búsqueda lineal y región de confianza para obtener convergencia global.

## 5.2. Terminación del algoritmo lineal.

Una medida natural e independiente de la escala para terminar la iteración de las ecuaciones de Newton, es el residual relativo

$$\frac{\|r_k\|}{\|\nabla f(x_k)\|} \quad (53)$$

donde si  $p_k$  es la dirección de descenso, entonces  $r_k$  está dado por

$$r_k = \nabla^2 f(x_k)p_k + \nabla f(x_k) \quad (54)$$

El método de Newton truncado se basa en "truncar" la iteración que resuelve el sistema lineal cuando la solución aproximada satisface

$$\frac{\|r_k\|}{\|\nabla f(x_k)\|} \leq \eta_k \quad (55)$$

donde  $\{\eta_k\}$  es la llamada "forcing sequence", la cual controla la exactitud de la solución  $p_k$ .

## 5.3. Elección de $\eta_k$

La elección de  $\eta_k$  es importante ya que afecta directamente la razón de convergencia del método. Un primer resultado, tomado de [17], muestra que se puede obtener convergencia local si  $\{\eta_k\}$  es acotada y no tiende a 1.

**Teorema 5.1.** *Supongamos que  $\nabla f(x)$  es continuamente diferenciable en una vecindad del mínimo  $x^*$  y suponga que  $\nabla^2 f(x^*)$  es positiva definida. Considere la iteración  $x_{k+1} = x_k + p_k$  donde  $p_k$  satisface (55) y que  $\eta_k < \eta$  para alguna constante  $\eta \in [0, 1)$ . Entonces, si se parte de un punto inicial suficientemente cercano a  $x^*$ , la sucesión  $\{x_k\}$  converge linealmente a  $x^*$ . Esto es, para toda  $k$  suficientemente grande, tenemos que*

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq c\|x_k - x^*\|, \quad (56)$$

para alguna constante  $0 < c < 1$ .

Notemos que la condición de "forcing sequence"  $\{\eta_k\}$  no es muy restrictiva en el sentido de que si se debilita un poco, producirá un algoritmo que no converge. Específicamente, si se permiten  $\eta_k \geq 1$  el paso  $p_k = 0$  satisface (55) en cada iteración, pero el método producirá  $x_k = x_0$  para toda  $k$  y no habrá convergencia a la solución.

Ahora, ya que hemos garantizado que existe convergencia, el siguiente resultado (tomado también de [17]) nos proporciona la magnitud del radio de convergencia.

**Teorema 5.2.** *Si se cumplen las condiciones del teorema 5.1 y si las iteraciones  $x_k$  generadas por el método convergen a  $x^*$ . Entonces el radio de convergencia es superlineal si  $\eta_k \rightarrow 0$  y cuadrático si  $\eta_k = O(\|\nabla f(x_k)\|)$ .*

Por otro lado, como trabajamos con problemas de gran escala, usualmente no tendremos recursos disponibles para almacenar la matriz hessiana, sin embargo recordemos que la iteración de gradiente conjugado lineal solo necesita el producto matriz-vector, que en este caso se puede obtener aproximando las diferencias

$$\nabla^2 f(x_k)d = \frac{1}{\gamma}(\nabla f(x_k + \gamma d) - \nabla f(x_k))$$

donde  $\gamma$  se escoge tal que

$$\gamma = \frac{(\text{eps})^{1/2}}{\|d\|}$$

De esta forma no tendremos que almacenar la matriz hessiana, pero necesitaremos una evaluación extra del gradiente en cada iteración del algoritmo de gradiente conjugado.

#### 5.4. Método de Newton truncado con región de confianza.

Los métodos de región de confianza obtienen una dirección de búsqueda tal que sea la solución de las ecuaciones de Newton, solo cuando este vector se encuentre dentro de una bola de radio  $\nabla$  donde se confía que el modelo cuadrático aproxima bien la función no lineal, de no ser este el caso, se toma una dirección que sea una combinación lineal de la dirección de Newton y la de descenso más rápido, tal que su longitud sea igual al radio de la región de confianza. De esta manera, el problema a resolver en cada paso es

$$\min_{\|p\| \leq \nabla} \Psi(p) \tag{57}$$

La solución de (57) puede encontrarse utilizando un método de gradiente conjugado lineal modificado ya que el método de gradiente conjugado está diseñado para resolver sistemas positivos definidos, y que la Hessiana puede tener eigenvalores negativos lejos de la solución. Por tanto, la iteración de gradiente conjugado terminará tan pronto como se genere una dirección de curvatura negativa. Esta adaptación permite que la dirección  $p_k$  sea una dirección de descenso, y que el radio de convergencia del método normal de Newton sea preservado.

La iteración principal del método de Newton truncado con región de confianza puede escribirse de la siguiente forma.

**Iteración principal de Newton truncado con región de confianza.**

Dado  $x_0$  y  $\nabla > 0$

for  $k=0,1,2,\dots$

    Calcular una dirección de búsqueda  $p_k$  aplicando el método de gradiente

*conjugado a  $\nabla^2 f(x_k)p_k = -\nabla f(x_k)$ , partiendo de  $x^{(0)} = 0$ .*

*Termina cuando  $\|r_k\| \leq \min(0,5, \sqrt{\|\nabla f_k\|}) \|\nabla f(x_k)\|$ ,*

*ó si la curvatura es negativa.*

*Hacer  $x_{k+1} = x(k) + \alpha_k p_k$ , donde  $\alpha_k$  satisface las condiciones de Wolfe, Goldstein o Armijo.*

*end*

Donde por fines numéricos se toma  $\eta_k = \min(0,5, \sqrt{\|\nabla f_k\|})$ , ya que obtenemos una convergencia superlineal, sin embargo pueden elegirse otros valores.

Existe una rutina en Fortran desarrollada por Jorge Moré que aplica el método de Newton Truncado con región de confianza para la solución de problemas de gran escala sin restricciones, tal rutina es conocida como TRON. Esta rutina tiene también la ventaja de incorporar cotas en las variables, lo cual será de gran importancia en nuestro sistema.

A grandes rasgos, TRON utiliza un método de proyección de gradiente para generar un paso de Cauchy, un método de gradiente conjugado preconditionado con una factorización de Cholesky incompleta para generar una dirección, y una búsqueda de proyección para calcular el paso. Esto le permite a TRON examinar las caras del conjunto factible generando un menor número de iteraciones, aún para problemas con un gran número de variables, dando como resultado un algoritmo muy eficiente.

## **6. Implementación del método de Newton Truncado al sistema UNAMALLA.**

En esta sección presentaremos la implementación del método de Newton Truncado con región de confianza para resolver el problema de optimización:

$$\text{Obtener : } G^* = \arg \min_G \sum_{q=1}^N f(\Delta_q) \quad (58)$$

sobre el conjunto de mallas admisibles para una región.

Esta formulación tiene la ventaja de evitar restricciones en el problema, de tal forma que estaremos trabajando con un problema de minimización de gran escala sin restricciones, el cual es fácil y rápido de calcular. Además, los funcionales tienen matrices Hessianas sparse, lo cual permite un ahorro de memoria.

Para implementar el método se utilizará la minimización usual sobre todos los puntos de la malla, este proceso tiene la ventaja de que el método de Newton truncado con región de confianza es económico y muy rápido.

El sistema UNAMALLA es un software de generación de mallas que utiliza el proceso brevemente descrito en este trabajo. Existen varias versiones del sistema, entre las que destacan el UNAMALLA 2.0 para PC y Matlab 5.3. En la actualidad se están desarrollando nuevas versiones para PC y para Matlab 7, las cuales implementen los funcionales discretos más recientes y algunos métodos de optimización a gran escala como Newton Truncado y L-BFGS-B ([10], [15]). Para más referencia sobre la historia y detalles del sistema puede consultarse la página:

<http://www.mathmoo.unam.mx/unamalla/new/>

El funcionamiento básico del sistema es el siguiente: se elige una región, descrita por el usuario o predeterminada por el sistema, luego se utiliza interpolación transfinita [16] para generar la malla inicial, se ajustan las fronteras de ésta para después minimizar el funcional con las propiedades deseadas; así obtenemos como resultado la malla generada numericamente sobre la región.

Hasta este momento se ha realizado la implementación del método de Newton Truncado en la versión del sistema UNAMALLA que funciona bajo Matlab 5.3, y se está trabajando en la implementación del método bajo Matlab 7.0. Con el fin de ilustrar los avances realizados, presentaremos una serie de ejemplos de mallas generadas numericamente utilizando este método. El equipo utilizado fue una computadora genérica con un procesador Intel Pentium 4 a 2.40ghz y memoria ram de 512ghz.

## 6.1. Ejemplos de mallas generadas numericamente.

### Ejemplo 1: La Habana.

La primera malla con la que trabajaremos será la malla de La Habana, cuya malla inicial está dada por la siguiente figura.

El recuadro a la derecha nos muestra las propiedades de la malla inicial, ahí podemos observar las dimensiones de la malla, que en este caso es de  $30 \times 30$ , el número de celdas no convexas (209) y los valores de las áreas mínima y máxima de las celdas en la malla inicial. Podemos notar que como la malla no es convexa existe un valor negativo en el área mínima, esto debido a los dobleces obtenidos al generar la malla inicial mediante interpolación transfinita.

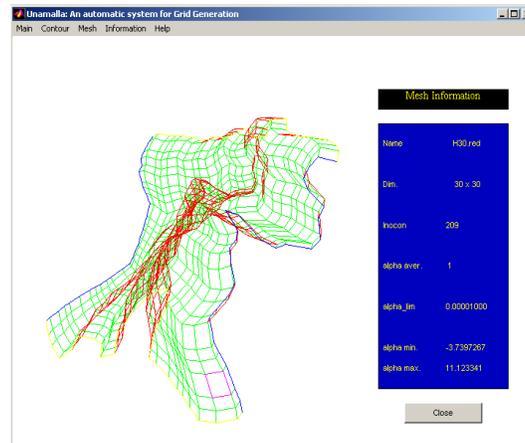


Figura 4: Malla inicial de La Habana.

El funcional que se utilizó en este caso es el siguiente

$$F = \sigma S_{\omega} + (1 - \sigma) f_{ao} \quad (59)$$

con  $\sigma = 0,5$ ; así la malla calculada está dada por:

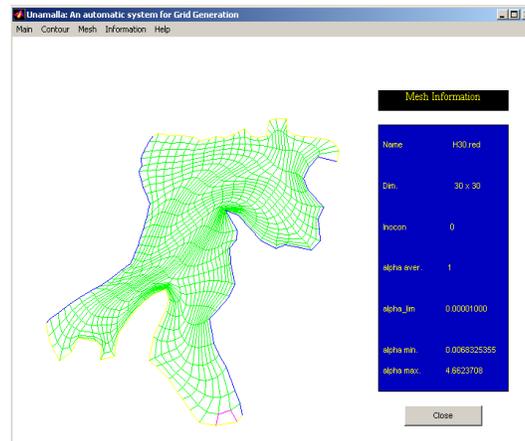


Figura 5: Malla de La Habana generada numericamente.

Obervemos que todas las celdas de la malla generada son convexas. En este caso el método tarda un poco menos de 1 minuto en optimizar la malla.

**Ejemplo 2: Rusia.**

En este caso trabajaremos con la malla de Rusia, su malla inicial está dada por la siguiente figura

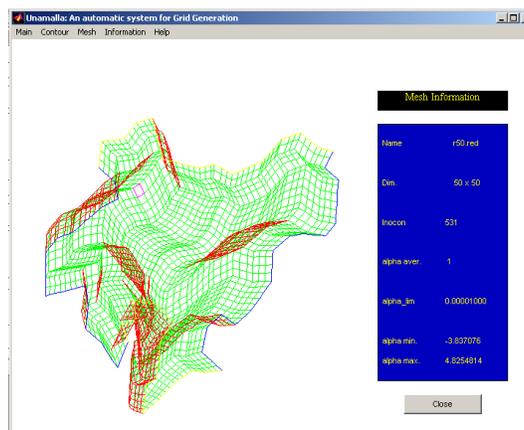


Figura 6: Malla inicial de Rusia.

En este caso tenemos 531 celdas no convexas, aplicando el funcional

$$F = \sigma S_\omega + (1 - \sigma)F_o \quad (60)$$

con  $\sigma = 0,3$  obtenemos la siguiente malla:

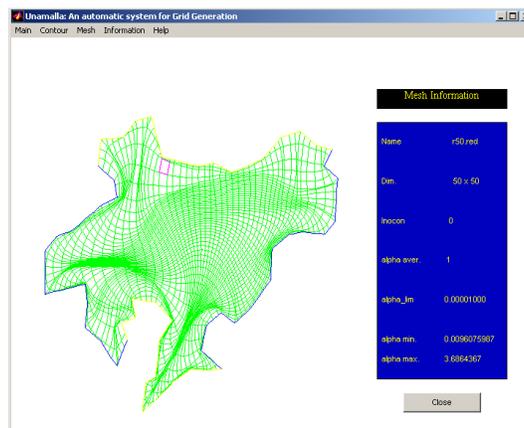


Figura 7: Malla de Rusia generada numericamente.

En este caso el funcional tarda un poco más de tiempo en optimizar la malla, un poco menos de 7 minutos, pero calcula una solución con todas las celdas convexas.

**Ejemplo 3: México.**

Ahora trabajaremos con la malla de México, su malla inicial está dada por la siguiente figura

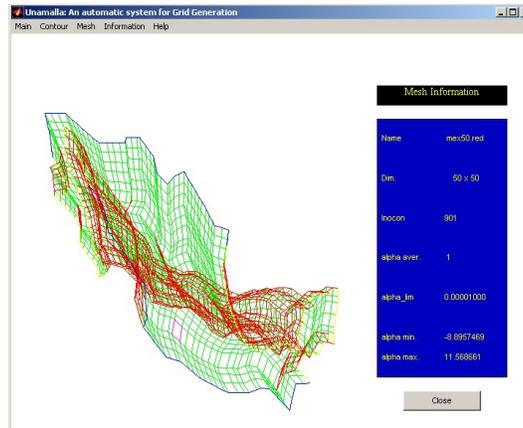


Figura 8: Malla inicial de México.

En este caso tenemos 901 celdas no convexas, aplicando el funcional

$$F = \sigma H_\omega + (1 - \sigma)F_o \quad (61)$$

con  $\sigma = 0,001$  obtenemos la siguiente malla:

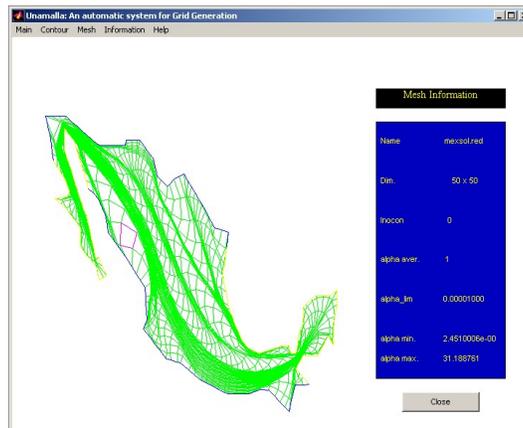


Figura 9: Malla de México generada numericamente.

Este es un caso más complicado debido al mayor número de celdas no convexas, sin embargo el método ofrece una malla óptima en un poco menos de 15 minutos aproximadamente.

**Ejemplo 4: Inglaterra.**

Por último trabajaremos con la malla de Inglaterra, su malla inicial está dada por la siguiente figura

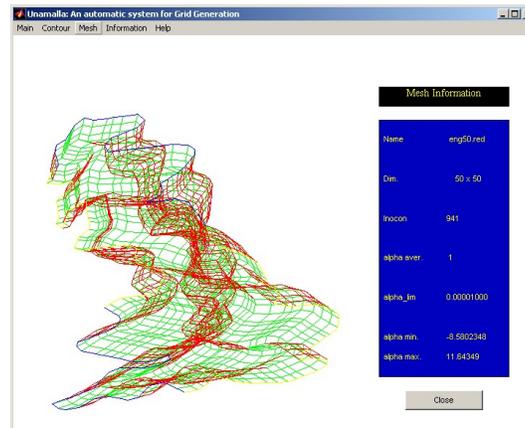


Figura 10: Malla inicial de Inglaterra.

En este caso tenemos 941 celdas no convexas, aplicando el funcional

$$F = \sigma H_\omega + (1 - \sigma) f_{ao} \quad (62)$$

con  $\sigma = 0,001$  obtenemos la siguiente malla:

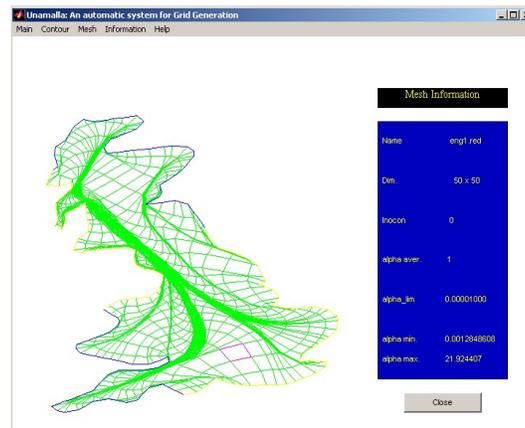


Figura 11: Malla de Inglaterra generada numericamente.

Este también es un caso complicado debido al gran número de celdas no convexas, sin embargo el método ofrece una malla óptima en un poco menos de 6 minutos aproximadamente.

## 7. Conclusiones.

Las conclusiones que podemos ofrecer en base a lo realizado en este trabajo son las siguientes:

1. La construcción de funcionales discretos a partir de su formulación continua puede realizarse de manera rápida y segura mediante un proceso que nos permita obtener ciertas propiedades deseadas sobre la malla generada numericamente.
2. Los funcionales con los que se trabajó proporcionan mallas convexas para valores de  $\sigma$  que sean adecuados, esto es de suma importancia ya que es el objetivo principal de la generación numérica de mallas.
3. El método de Newton truncado proporciona un herramienta de gran importancia computacional, debido al gran ahorro de cálculos numéricos que se llevan a cabo al tener en nuestro problema matrices Hessianas sparse y calcular solo el producto matriz vector correspondiente.
4. La aplicación del método de Newton truncado con región de confianza, al sistema UNAMALLA proporciona una forma eficiente de realizar la generación numérica de mallas en regiones irregulares, que aprovecha los beneficios del método para economizar la cantidad de cálculos realizados.

## 8. Bibliografía

- [1] Barrera P. y Castillo J.E., *A Large Scale Nonlinear Optimization Problem Arising from Grid Generation*, Tech. Rep. No. 1, Dept. of Math. and Stat., University of New Mexico, 1987.
- [2] Barrera P., Castellanos L. y Perez A., *A. Curvilinear coordinate system generation over plane irregular regions*. Reportes tecnicos de la Facultad de Ciencias, U.N.A.M., 1992.
- [3] Barrera P., Castellanos L. y Pérez A., *Métodos Variacionales Discretos para la Generación de Mallas*, Facultad de Ciencias, U.N.A.M., 1994.
- [4] Barrera P., Castellanos L., Domínguez-Mota, F.J., González G. y Pérez A., *Adaptive discrete harmonic grid generation*. Mathematics and Computer Simulation, 2007.
- [5] Barrera P. y Pérez A., *Numerical Grid Generation*, presentado en el III Congreso de la Sociedad Cubana de Matemática, 1988.
- [6] Barrera P. y Tinoco J.G., *Smooth and convex grid generation over general plane regions*. Mathematics and Computers in Simulation, 1998.
- [7] Barrera P. y Tinoco J.G., *Area control in generating smooth and convex grids over general plane regions*. Journal of Computational and Applied Mathematics, 1999.
- [8] Dembo R., Eissenstat S. y Steihaug T., *Truncated Newton Algorithms for large-scale optimization*, Math Programing vol.26., 1983.
- [9] Domínguez Mota F.J., *Sobre la Generación Variacional Discreta de Mallas Casiortogonales en el Plano*. Tesis Doctoral, Universidad Nacional Autónoma de México, 2005 .
- [10] Calvillo I. y Barrera P., *Optimización no lineal*. Publicado en el XXXIII Congreso de la SMM, Octubre del 2000.
- [11] Castellanos J.L., *Generación Numérica de Redes usando Newton Truncado* Tesis Doctoral, I.C.I.M.A.F., Ministerio de la Ciencia, Tecnología y el Medio ambiente, La Habana, Cuba, 1994.
- [12] Elsgotz L., *Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional*. Segunda Edición. Editorial MIR. Moscú 1977.
- [13] G'elfand I.M., y Formin S.V., *Calculus of Variations*. Prentice-Hall. Englewood Cliffs, N.J. 1963.
- [14] Ivanenko S.A. y Charakhch'yan A.A., *Curvilinear Grids of Convez Quadrilaterals*. U.S.S.R. Comput. Maths. Phys., Vol 28, No. 2, 1998.
- [15] Kelley C., *Iterative Methods for Optimization*. SIAM Publications, 1999.

- 
- [16] Knupp P.M., y Steinberg S., *The fundamentals of Grid Generation*. Willey & Sons, New York, 1993.
- [17] Nocedal J., y Wright J., *Numerical Optimization*, Springer Series in Operations Research, 1999.
- [18] Steinberg S. y Roache P.J., *Variational Grid Generation*, Num. Meth. for P.D.E.'s, pp.71-96, 1986.
- [19] Thompson J.F, Warsi Z.U.A., y Mastin C.W., *Numerical Grid Generation: Foundations and Applications*, North-Holland, Elsevier, New York, 1985.
- [20] Tinoco J.G., *Funcionales Discretos para la Generación de Mallas Suaves y Convexas sobre regiones Planas Irregulares*. Tesis Doctoral, CIMAT, 1997.