Breve introducción a la conjugación topológica .

Victor Manuel Grijalva Altamirano

Universidad Tecnólogica de la Mixteca

CONTENIDO

CONTENIDO

Definición

Sean X un espacio métrico y $f : X \to X$ una función continua que cumple con las siguientes propiedades:

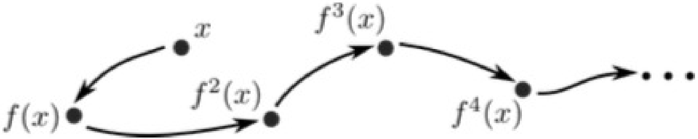
1. $f^0(x) = x$, para todo $x \in X$, esto es $f^0(x) = I_X$,
2. $f^n(f^m(x)) = f^{n+m}(x)$, para todo $m, n \in \mathbb{Z}$ y para todo $x \in X$.

Al par (X, f), constituido por el espacio métrico X y la función continua $f : X \to X$, se denomina *sistema dinámico discreto*.

Definición

Sean X un espacio métrico y $f : X \to X$ una función continua. Si $x \in X$, entonces *la órbita de x bajo f* es el conjunto:

$$\mathcal{O}(x,f) = \{f^k(x) : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$



Definición

Sea x un punto en X. Decimos que x es *un punto fijo* de f si $f(x) = x$; decimos que x es un *punto periódico* de f si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = x$. Al conjunto de todos los puntos periódicos de f lo denotaremos con $Per(f)$. Si $x \in Per(f)$, entonces

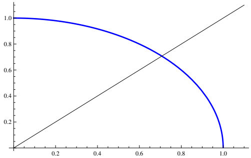
$$n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} : f^n(x) = x\}$$

es el periodo de x.

Observemos que si x_0 es un punto fijo de f, se tiene que $\mathcal{O}(x_0, f) = \{x_0\}$.

Ejemplo

Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ tal que $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

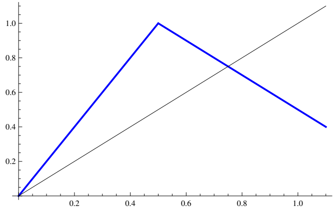


Usando álgebra se tiene que $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ es el único punto fijo de f en $[0,1]$. Además, $\mathcal{O}(x,f) = \{x, \sqrt{1-x^2}\}$

Ejemplo

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]; \\ \frac{3}{2} - x, & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

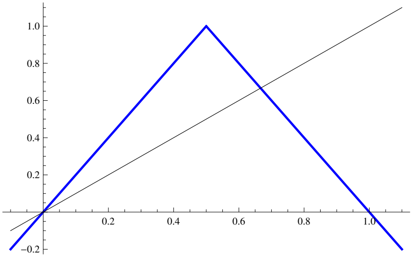


Los únicos puntos fijos de f son $x = 0$ y $x = \frac{3}{4}$.

Definición

Denotaremos y definiremos a la función Tienda como, $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \leq \frac{1}{2}; \\ 2 - 2x, & \text{si } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$



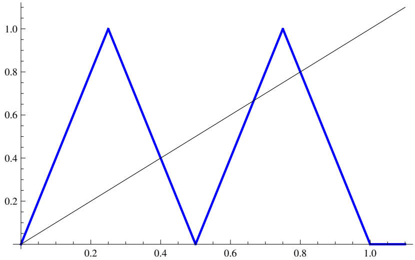
Observación

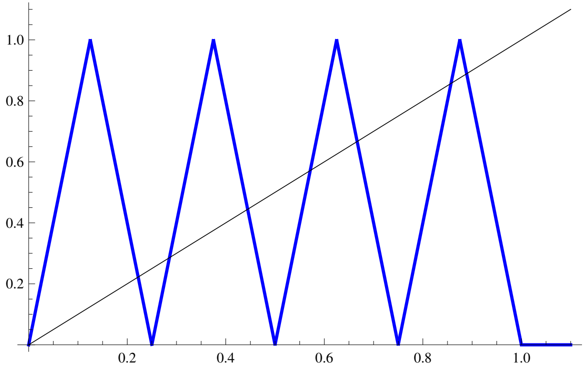
A continuación mostramos algunas propiedades de T que se siguen de forma inmediata.

1. Los únicos puntos fijos de f en $[0,1]$, son $x=0$ y $x=\frac{2}{3}$.
2. Si $x \in [0,1]$, entonces $T(x) \in [0,1]$. Así, para cada $n \in \mathbb{N}$, $T^n(x) \in [0,1]$.
3. T es continua en $[0,1]$.
4. Para toda $x \in [0,1]$, $|T'(x)| = 2$.
5. T es diferenciable para toda $x \in [0,1]$, tal que $x \neq \frac{1}{2}$.
6. $T([0,1]) = [0,1]$.

Notemos que $T^2 : [0, 1] \to [0, 1]$ viene dada por:

$$T^2(x) = \begin{cases} 4x, & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{4}\right]; \\ -4(x - \frac{1}{2}), & \text{si } x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{4}\right]; \\ 4(x - \frac{1}{2}), & \text{si } x \in \left[\frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right]; \\ -4(x - 1), & \text{si } x \in \left[\frac{3}{4}, 1\right]. \end{cases}$$




1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

Teorema

Sean (a, b), $a < b$, un subintervalo de $(0, 1)$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $T^N((a, b)) = [0, 1]$.

Teorema

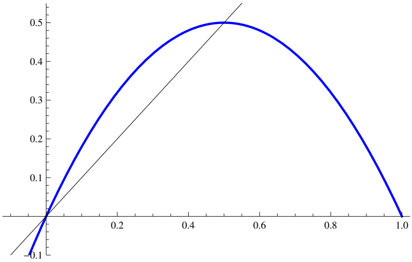
El conjunto $Per(T)$ es denso en $[0, 1]$.

Teorema

Existe $x_0 \in [0, 1]$, tal que $\mathcal{O}(x_0, T)$ es un conjunto denso en $[0, 1]$.

Definición

Definimos y denotamos la función Logística como $f_4(x) : [0, 1] \to [0, 1]$, donde $f_4(x) = 4x(1 - x)$, para cada $x \in [0, 1]$.



CONTENIDO

Definición

Sean X y Y espacios métricos. Dadas dos funciones continuas $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ decimos que *son conjugadas* si existe un homeomorfismo $h : X \to Y$ tal que para todo $x \in X$, se tiene que $h(f(x)) = g(h(x))$. En tal caso se dice que h conjuga a g con f.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & X \arrow[d, "h"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

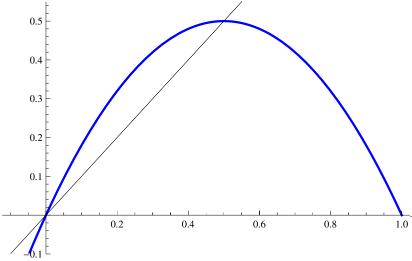
Ejemplo

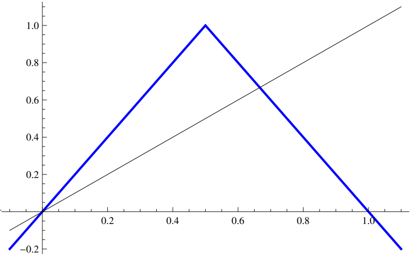
Sean $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones dadas por $f(x) = tx$ y $g(x) = x + \log(t)$, con $t \in \mathbb{R}$. Se tiene que f y g son conjugadas mediante el homeomorfismo $h : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, donde $h(x) = log(x)$.

$$h(f(x)) = log(tx) = log(t) + log(x) = g(h(x))$$

Ejemplo

La función Logística $f_4 = 4x(1-x)$ y la función Tienda T son conjugadas mediante el homeomorfismo $h : [0,1] \to [0,1]$ dada por $h(x) = \operatorname{sen}^2(\frac{\pi x}{2})$.





Teorema

Sean X y Y espacios métricos y $n \in \mathbb{N}$. Si $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ son dos funciones continuas tales que f y g son conjugadas mediante el homeomorfismo $h : X \to Y$, entonces se cumple las siguientes condiciones:

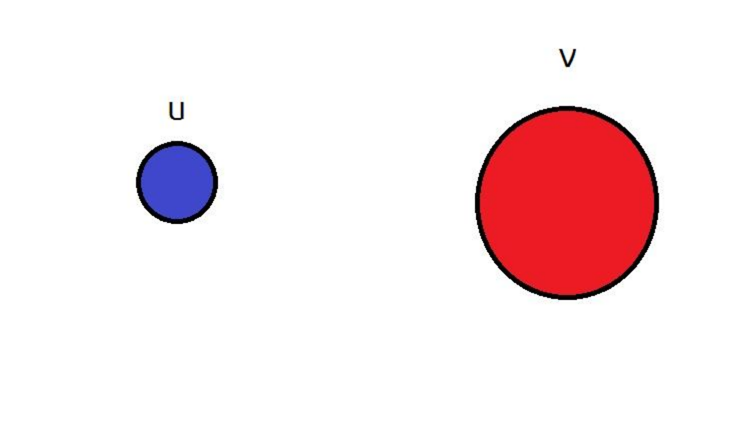
1. El conjunto $Per(f)$ es denso en X si y sólo si el conjunto $Per(g)$ es denso en Y,
2. Si $x_0 \in X$ es un punto fijo de f, entonces $h(x_0)$ es un punto fijo de g,
3. Si $x_0 \in X$ es un punto periódico para f de periodo n, entonces $h(x_0)$ es un punto periódico para g de periodo n,

CONTENIDO

Definición

Sea (X, f) un sistema dinámico, se dice que f es:

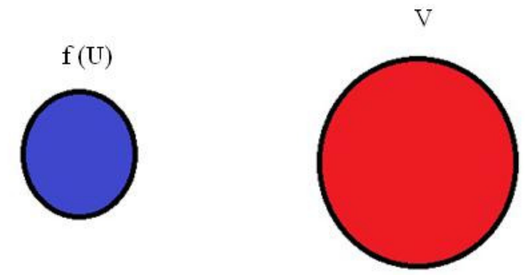
1. *transitiva* si para cada par de subconjuntos abiertos no vacios U y V de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.



Definición

Sea (X, f) un sistema dinámico, se dice que f es:

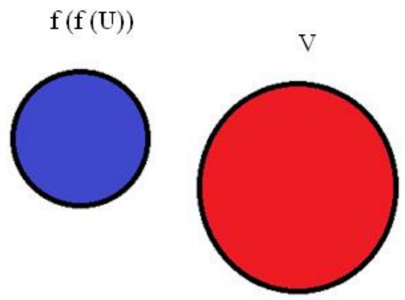
1. *transitiva* si para cada par de subconjuntos abiertos no vacios U y V de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.



Definición

Sea (X, f) un sistema dinámico, se dice que f es:

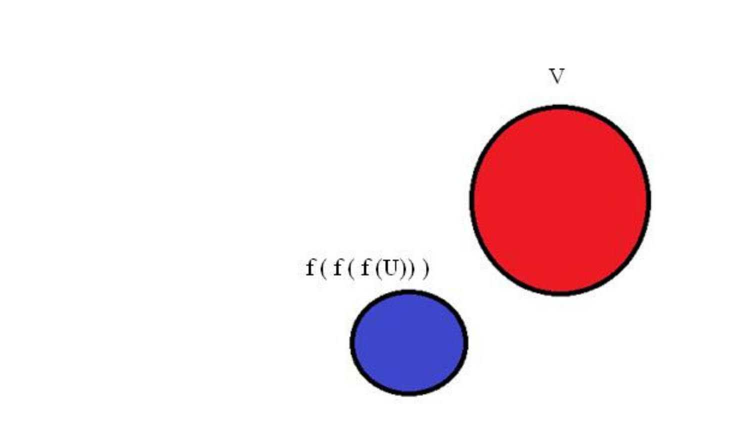
1. *transitiva* si para cada par de subconjuntos abiertos no vacios U y V de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.



Definición

Sea (X,f) un sistema dinámico, se dice que f es:

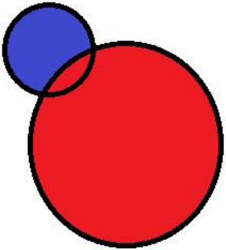
1. *transitiva* si para cada par de subconjuntos abiertos no vacios U y V de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.



Definición

Sea (X,f) un sistema dinámico, se dice que f es:

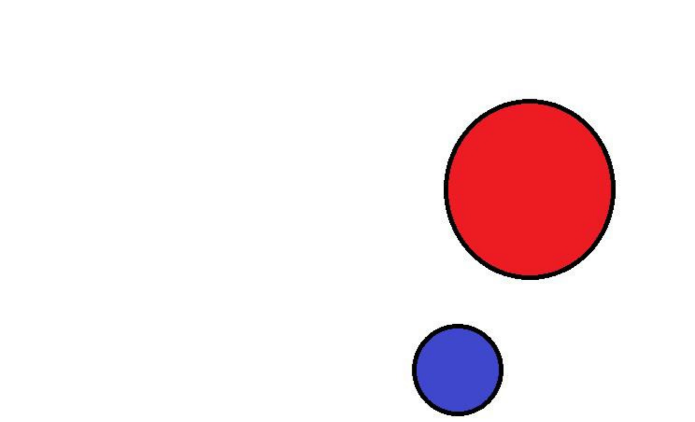
1. *transitiva* si para cada par de subconjuntos abiertos no vacios U y V de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.



Definición

Sea (X,f) un sistema dinámico, se dice que f es:

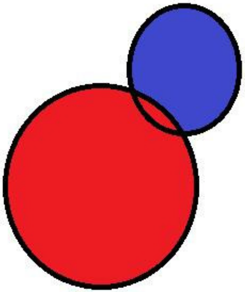
1. *transitiva* si para cada par de subconjuntos abiertos no vacios U y V de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.



Definición

Sea (X, f) un sistema dinámico, se dice que f es:

1. *transitiva* si para cada par de subconjuntos abiertos no vacios U y V de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.



Teorema

Sean (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos tales que f y g son conjugadas mediante el homeomorfismo $h : X \to Y$. La función f es transitiva en X si y sólo si la función g es transitiva en Y.

Teorema

Sean (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos tales que f y g son conjugadas mediante el homeomorfismo $h : X \to Y$. La función f es transitiva en X si y sólo si la función g es transitiva en Y.

Teorema

La función $T : [0, 1] \to [0, 1]$ es transitiva en $[0, 1]$.

Teorema

Sean (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos tales que f y g son conjugadas mediante el homeomorfismo $h : X \to Y$. La función f es transitiva en X si y sólo si la función g es transitiva en Y.

Teorema

La función $T : [0, 1] \to [0, 1]$ es transitiva en $[0, 1]$.

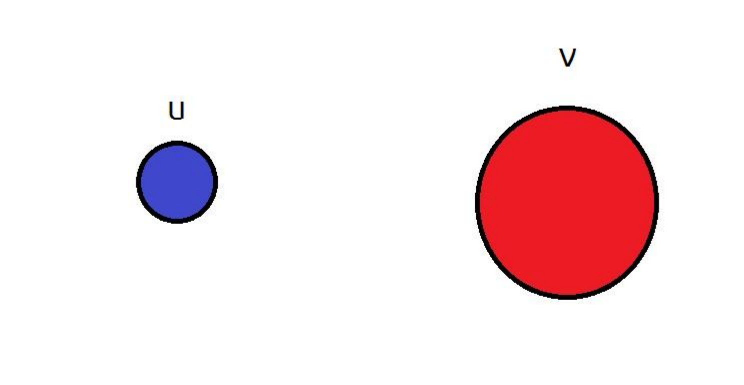
Corolario

La función $f_4 : [0, 1] \to [0, 1]$ es transitiva en $[0, 1]$.

Definición

Sea (X, f) un sistema dinámico, se dice que f es:

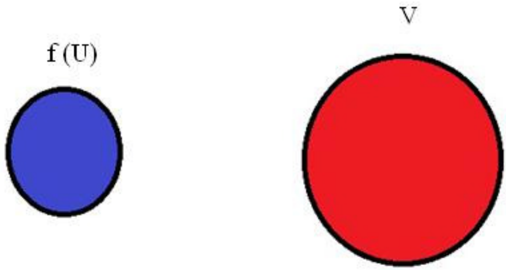
1. *mezcladora* si para cada par de subconjuntos abiertos no vacios U y V de X, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ para cada $k \geq N$;



Definición

Sea (X, f) un sistema dinámico, se dice que f es:

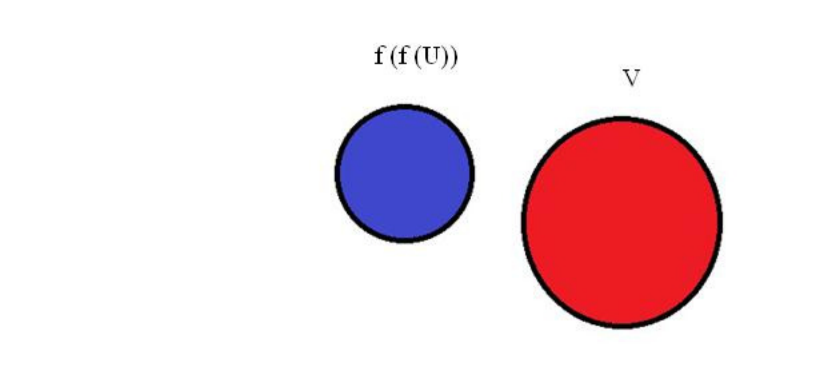
1. *mezcladora* si para cada par de subconjuntos abiertos no vacios U y V de X, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ para cada $k \geq N$;



Definición

Sea (X,f) un sistema dinámico, se dice que f es:

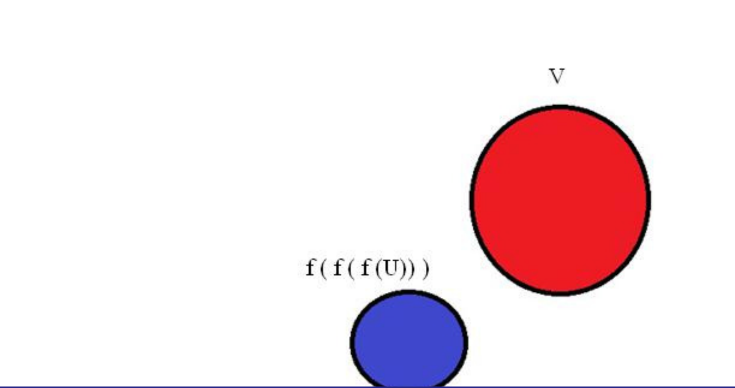
1. *mezcladora* si para cada par de subconjuntos abiertos no vacios U y V de X, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ para cada $k \geq N$;



Definición

Sea (X, f) un sistema dinámico, se dice que f es:

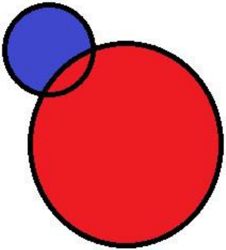
1. *mezcladora* si para cada par de subconjuntos abiertos no vacios U y V de X, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ para cada $k \geq N$;



Definición

Sea (X,f) un sistema dinámico, se dice que f es:

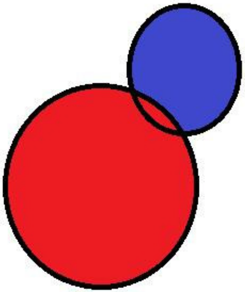
1. *mezcladora* si para cada par de subconjuntos abiertos no vacios U y V de X, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ para cada $k \geq N$;



Definición

Sea (X, f) un sistema dinámico, se dice que f es:

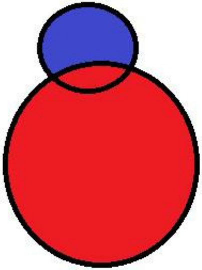
1. *mezcladora* si para cada par de subconjuntos abiertos no vacios U y V de X, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ para cada $k \geq N$;



Definición

Sea (X,f) un sistema dinámico, se dice que f es:

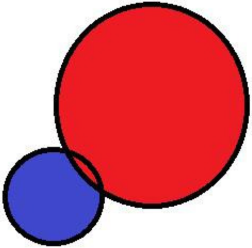
1. *mezcladora* si para cada par de subconjuntos abiertos no vacios U y V de X, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ para cada $k \geq N$;



Definición

Sea (X, f) un sistema dinámico, se dice que f es:

1. *mezcladora* si para cada par de subconjuntos abiertos no vacios U y V de X, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ para cada $k \geq N$;



Teorema

Sean (X,f) y (Y,g) sistemas dinámicos tales que f y g son conjugadas mediante el homeomorfismo $h : X \to Y$. La función f es mezcladora en X si y sólo si la función g es mezcladora en Y.

Teorema

Sean (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos tales que f y g son conjugadas mediante el homeomorfismo $h : X \to Y$. La función f es mezcladora en X si y sólo si la función g es mezcladora en Y.

Teorema

La función $T : [0, 1] \to [0, 1]$ es mezcladora en $[0, 1]$.

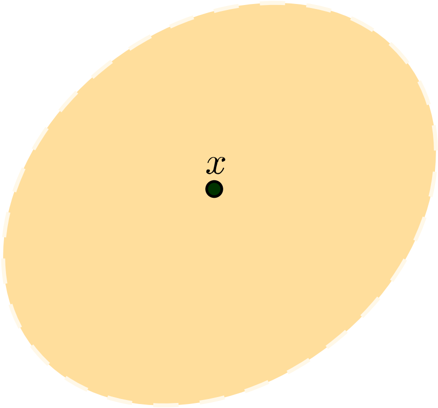
Corolario

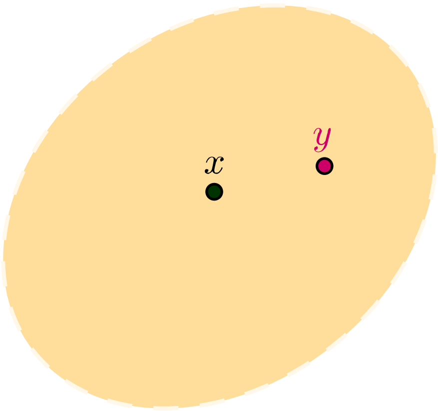
La función $f_4 : [0, 1] \to [0, 1]$ es mezcladora en $[0, 1]$.

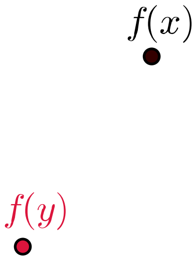
Definición

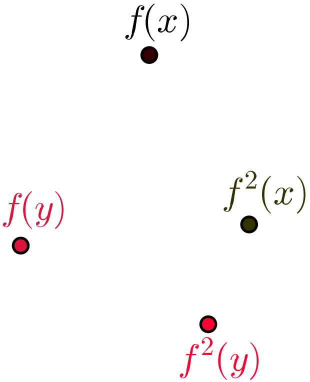
Sea (X,f) un sistema dinámico. Se dice que f *es sensitiva*, si existe $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que para todo $x \in X$ y para todo abierto U en X con $x \in U$, existen $y \in U$ y $k \in \mathbb{N}$ tales que $d(f^k(x), f^k(y)) \geq \delta$.

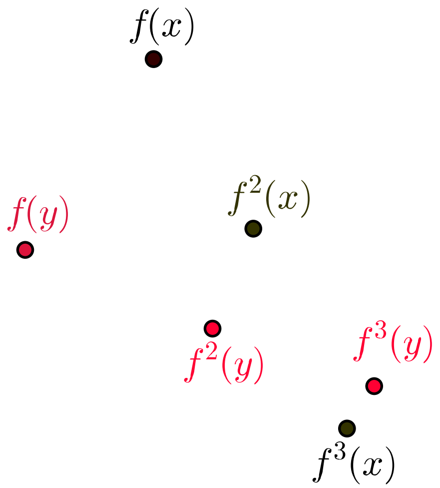

x

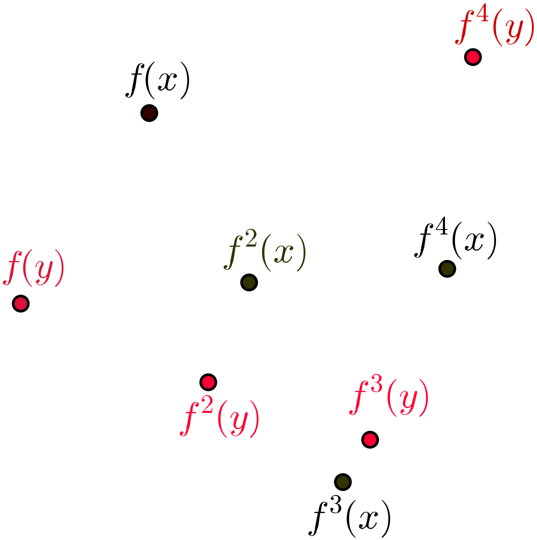

x

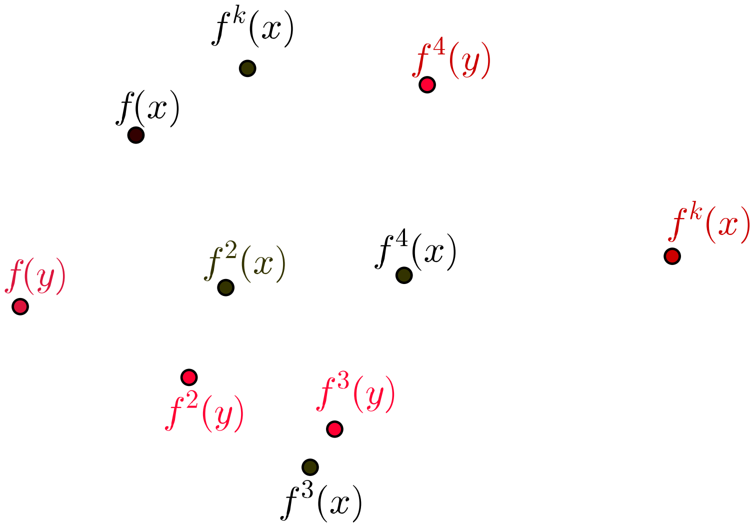

y
x

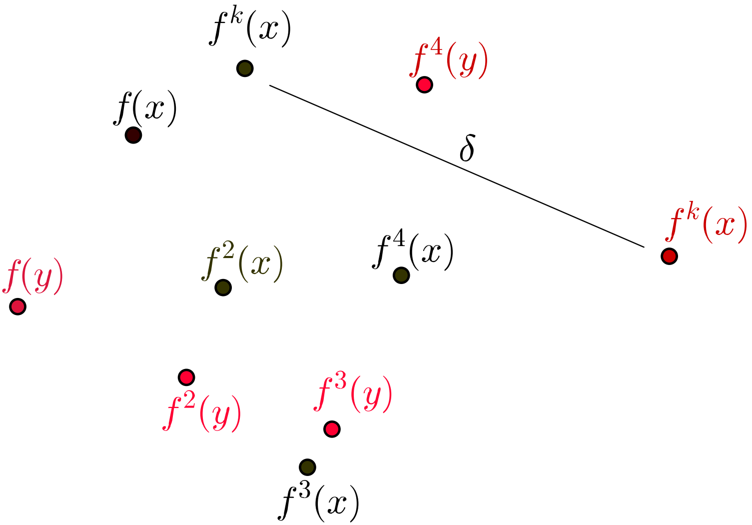

$f(x)$
$f(y)$

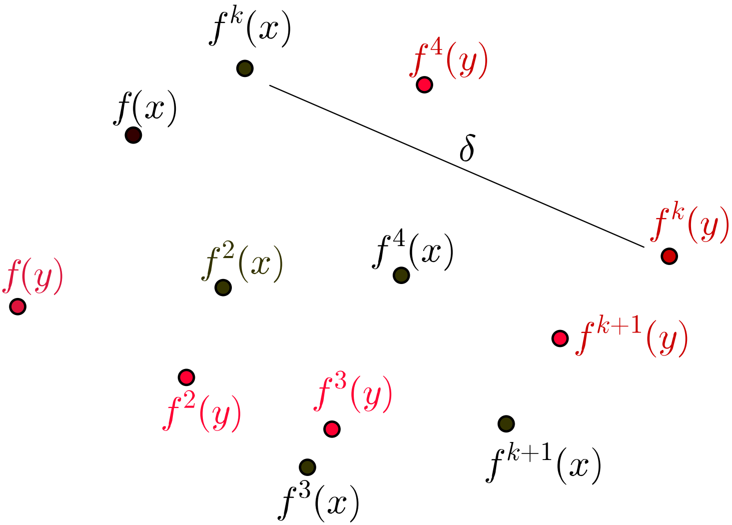

$f(x)$
$f(y)$
$f^2(x)$
$f^2(y)$

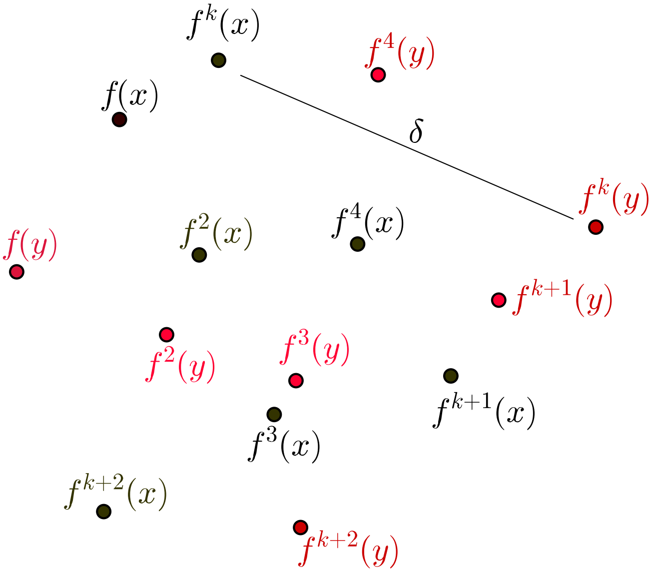

$f(x)$
$f(y)$
$f^2(x)$
$f^2(y)$
$f^3(y)$
$f^3(x)$


$f^4(y)$
$f(x)$
$f(y)$
$f^2(x)$
$f^4(x)$
$f^2(y)$
$f^3(y)$
$f^3(x)$


$f^k(x)$
$f^4(y)$
$f(x)$
$f^k(x)$
$f(y)$
$f^2(x)$
$f^4(x)$
$f^2(y)$
$f^3(y)$
$f^3(x)$


$f^k(x)$
$f^4(y)$
$f(x)$
δ
$f^k(x)$
$f^4(x)$
$f^2(x)$
$f(y)$
$f^2(y)$
$f^3(y)$
$f^3(x)$


$f^k(x)$
$f^4(y)$
$f(x)$
δ
$f^k(y)$
$f(y)$
$f^2(x)$
$f^4(x)$
$f^{k+1}(y)$
$f^2(y)$
$f^3(y)$
$f^{k+1}(x)$
$f^3(x)$


$f^k(x)$
$f^4(y)$
$f(x)$
δ
$f^k(y)$
$f(y)$
$f^2(x)$
$f^4(x)$
$f^{k+1}(y)$
$f^2(y)$
$f^3(y)$
$f^{k+1}(x)$
$f^3(x)$
$f^{k+2}(x)$
$f^{k+2}(y)$

Ejemplo

La función $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ dada por $f(x) = tx$, con $t \in \mathbb{R}^+$, es sensitiva y su constante de sensitividad es $\delta = \frac{1}{2}$.

Ejemplo

La función $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ dada por $f(x)=tx$, con $t\in\mathbb{R}^+$, es sensitiva y su constante de sensitividad es $\delta=\frac{1}{2}$.

Teorema

Sea (X,f) un sistema dinámico. Si f es una isometría, entonces f no es sensitiva.

Ejemplo

La función $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ dada por $f(x)=tx$, con $t\in\mathbb{R}^{+}$, es sensitiva y su constante de sensitividad es $\delta=\frac{1}{2}$.

Teorema

Sea (X,f) un sistema dinámico. Si f es una isometría, entonces f no es sensitiva.

Ejemplo

La función $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $g(x)=x+\log(t)$, con $t\in\mathbb{R}^{+}$, no es sensitiva.

Ejemplo

La función $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ dada por $f(x) = tx$, con $t \in \mathbb{R}^+$, es sensitiva y su constante de sensitividad es $\delta = \frac{1}{2}$.

Teorema

Sea (X, f) un sistema dinámico. Si f es una isometría, entonces f no es sensitiva.

Ejemplo

La función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x + \log(t)$, con $t \in \mathbb{R}^+$, no es sensitiva.

Recordemos que f y g son conjugadas mediante el homeomorfismo $h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, donde $h(x) = log(x)$.

Teorema

Sean (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos con X y Y espacios métricos compactos tal que f y g son conjugadas mediante el homeomorfismo $h : X \to Y$. La función f es sensitiva en X si y sólo si la función g es sensitiva en Y.

Teorema

Sean (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos con X y Y espacios métricos compactos tal que f y g son conjugadas mediante el homeomorfismo $h : X \to Y$. La función f es sensitiva en X si y sólo si la función g es sensitiva en Y.

Teorema

La función $T : [0, 1] \to [0, 1]$ es sensitiva en $[0, 1]$.

Corolario

La función $f_4 : [0, 1] \to [0, 1]$ es sensitiva en $[0, 1]$.

CONTENIDO

1. Bau-sen du, A dense orbit almost implies sensitivity to initial conditions, Bulletin of MAS, volume 26, Number 2, june 1988.
2. S. Kanmani, Sensitive dependece and dense periodic points, Materials science division.
3. Jefferson E. King, Héctor Méndez Lango, Sistemas dinámicos discretos, Temas de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM, (2014).
4. Puneet Sharma, Anima Nagar, Inducing sensitivity on hyperspaces, Topology and its applications 157,2010,2052-2058.

GRACIAS!