XIII Taller de continuos, hiperespacios y sistemas dinámicos

Agujerando al hiperespacio de subcontinuos de un dendroide

M. en C. Rosa Isela Carranza Cruz

Dr. José Guadalupe Anaya Ortega
Dr. David Maya Escudero
Dr. Fernando Orozco Zitli

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

Octubre 2018

Definición

Decimos que un espacio topológico conexo Z es **unicoherente**, si siempre que $Z = A \cup B$, donde A y B son subconjuntos conexos y cerrados de Z, se tiene que $A \cap B$ es conexo.

Definición

Decimos que un espacio topológico conexo Z es **unicoherente**, si siempre que $Z = A \cup B$, donde A y B son subconjuntos conexos y cerrados de Z, se tiene que $A \cap B$ es conexo.

Definición

Decimos que un espacio topológico conexo Z es **unicoherente**, si siempre que $Z = A \cup B$, donde A y B son subconjuntos conexos y cerrados de Z, se tiene que $A \cap B$ es conexo.

Definición

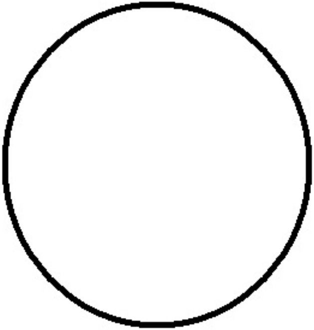
Decimos que un espacio topológico conexo Z es **unicoherente**, si siempre que $Z = A \cup B$, donde A y B son subconjuntos conexos y cerrados de Z, se tiene que $A \cap B$ es conexo.

Definición

Decimos que un espacio topológico conexo Z es **unicoherente**, si siempre que $Z = A \cup B$, donde A y B son subconjuntos conexos y cerrados de Z, se tiene que $A \cap B$ es conexo.

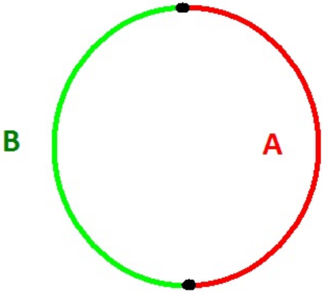
Definición

Decimos que un espacio topológico conexo Z es **unicoherente**, si siempre que $Z = A \cup B$, donde A y B son subconjuntos conexos y cerrados de Z, se tiene que $A \cap B$ es conexo.



Definición

Decimos que un espacio topológico conexo Z es **unicoherente**, si siempre que $Z = A \cup B$, donde A y B son subconjuntos conexos y cerrados de Z, se tiene que $A \cap B$ es conexo.



Definición

Un punto z en un espacio unicoherente Z **agujera** a Z si $Z - \{z\}$ no es unicoherente. En caso contrario, decimos que z no agujera a Z.

Definición

Un continuo es un espacio métrico, conexo, compacto y no degenerado.
Dado un continuo X, el **hiperspacio de subcontinuos** se define como:

$$C(X) = \{A \subset X : A \text{ es conexo, cerrado y no vacío } \},$$

y el **hiperespacio de subcontinuos singulares** es:

$$F_1(X) = \{\{x\} : x \in X\}.$$

Teorema (Nadler, 1978)

Si X es un continuo, entonces $C(X)$ es unicoherente.

Definición

Un continuo es un espacio métrico, conexo, compacto y no degenerado.
Dado un continuo X, el **hiperspacio de subcontinuos** se define como:

$$C(X) = \{A \subset X : A \text{ es conexo, cerrado y no vacío } \},$$

y el **hiperespacio de subcontinuos singulares** es:

$$F_1(X) = \{\{x\} : x \in X\}.$$

Teorema (Nadler, 1978)

Si X es un continuo, entonces $C(X)$ es unicoherente.

Problema:

Dado un continuo X, caracterizar los elementos $A \in C(X)$ tales que A agujera a $C(X)$.

$*$ Abordaremos este problema cuando X es un **dendroide**, es decir un continuo arco-conexo y hereditariamente unicoherente.

Problema:

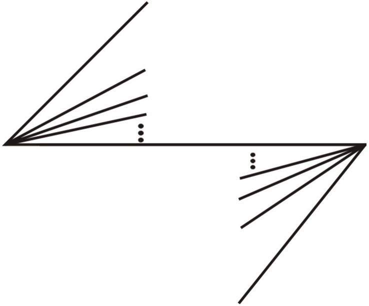
Dado un continuo X, caracterizar los elementos $A \in C(X)$ tales que A agujera a $C(X)$.

$*$ Abordaremos este problema cuando X es un **dendroide**, es decir un continuo arco-conexo y hereditariamente unicoherente.

Problema:

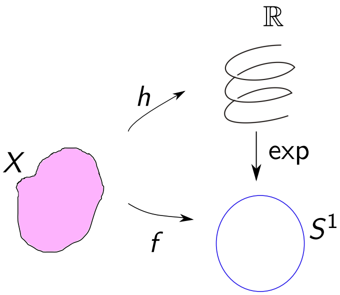
Dado un continuo X, caracterizar los elementos $A \in C(X)$ tales que A agujera a $C(X)$.

$*$ Abordaremos este problema cuando X es un **dendroide**, es decir un continuo arco-conexo y hereditariamente unicoherente.



Definición

Un espacio topológico conexo X tiene **la propiedad b)** si para cada función continua $f : X \to S^1$ existe una función continua $h : X \to \mathbb{R}$ tal que $f = exp \circ h$, donde *exp* denota la función $exp : \mathbb{R} \to S^1$ definida por $exp(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$.



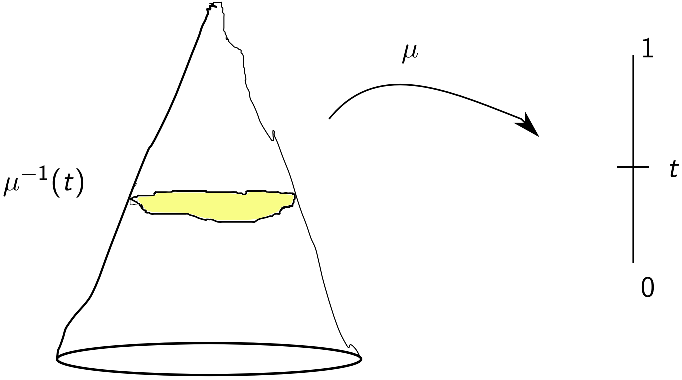
Teorema (Eilenberg, 1936)

Cada espacio métrico X que tiene la propiedad b) es unicoherente.

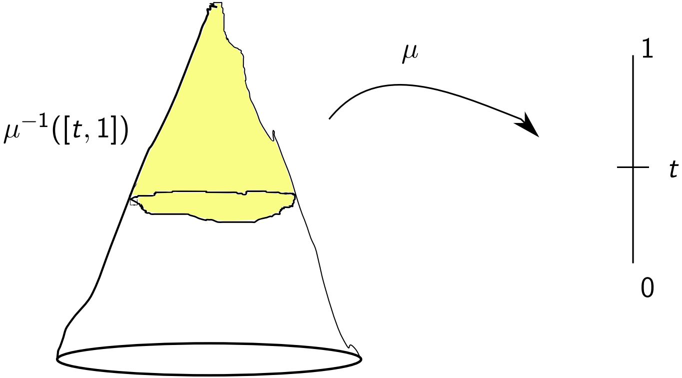
Definición

Dado un continuo X, una **función de Whitney** para $C(X)$ es una función continua $\mu : C(X) \to [0, 1]$ tal que:

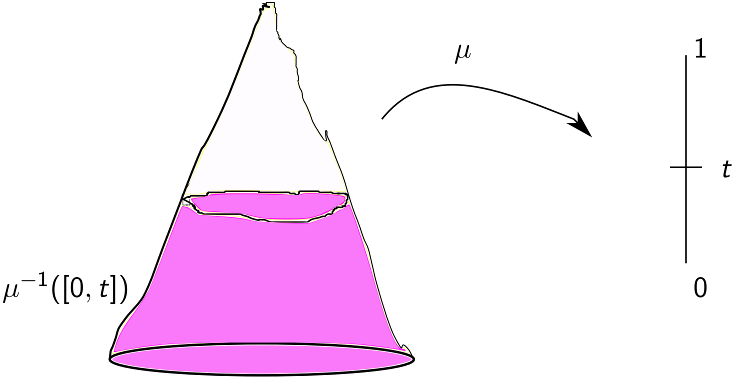
1. $\mu(\{x\}) = 0$ para cada $x \in X$.
2. $\mu(A) < \mu(B)$ si $A \subsetneq B$.
3. $\mu(X) = 1$.



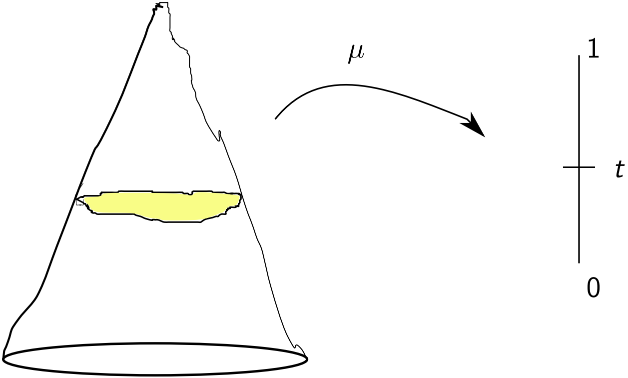
Nivel de Whitney



Bloque de Whitney



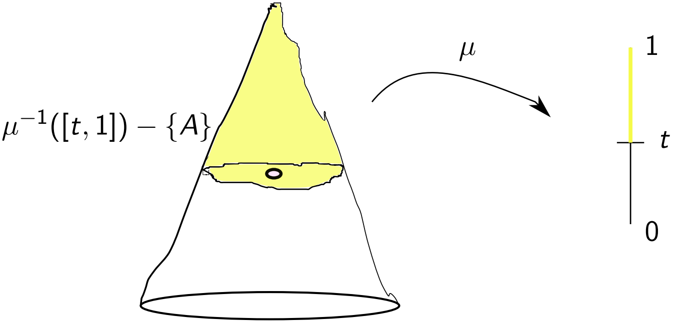
Bloque de Whitney



$$\mu^{-1}([0,t]) \cap \mu^{-1}([t,1]) = \mu^{-1}(t)$$

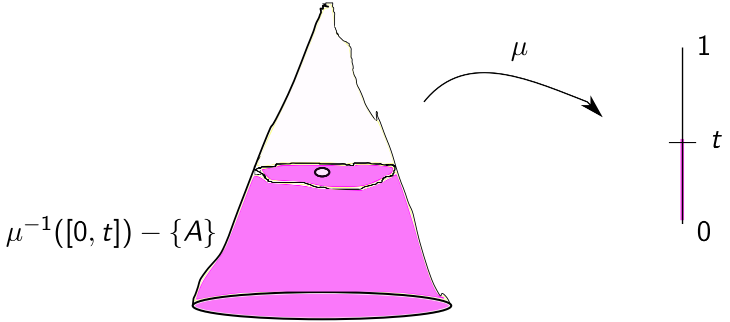
Teorema

Sea X un continuo. Si $A \in C(X) - \{X\}$ y $\mu(A) = t$, entonces $\mu^{-1}([t, 1]) - \{A\}$ tiene la propiedad b).



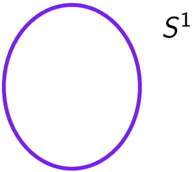
Teorema

Sea X un dendroide. Si $A \in C(X) - F_1(X)$ y $\mu(A) = t$, entonces $\mu^{-1}([0,t]) - \{A\}$ tiene la propiedad b).



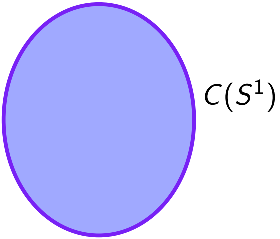
Teorema

Sea X un dendroide. Si $A \in C(X) - F_1(X)$ y $\mu(A) = t$, entonces $\mu^{-1}([0, t]) - \{A\}$ tiene la propiedad b).



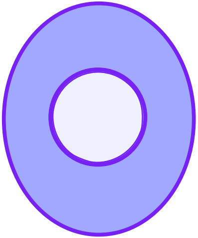
Teorema

Sea X un dendroide. Si $A \in C(X) - F_1(X)$ y $\mu(A) = t$, entonces $\mu^{-1}([0,t]) - \{A\}$ tiene la propiedad b).



Teorema

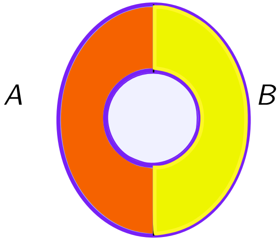
Sea X un dendroide. Si $A \in C(X) - F_1(X)$ y $\mu(A) = t$, entonces $\mu^{-1}([0,t]) - \{A\}$ tiene la propiedad b).



$\mu^{-1}([0,t])$

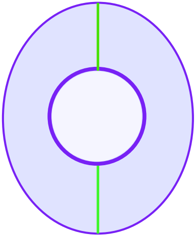
Teorema

Sea X un dendroide. Si $A \in C(X) - F_1(X)$ y $\mu(A) = t$, entonces $\mu^{-1}([0, t]) - \{A\}$ tiene la propiedad b).



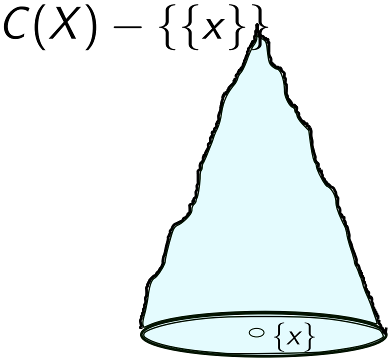
Teorema

Sea X un dendroide. Si $A \in C(X) - F_1(X)$ y $\mu(A) = t$, entonces $\mu^{-1}([0, t]) - \{A\}$ tiene la propiedad b).



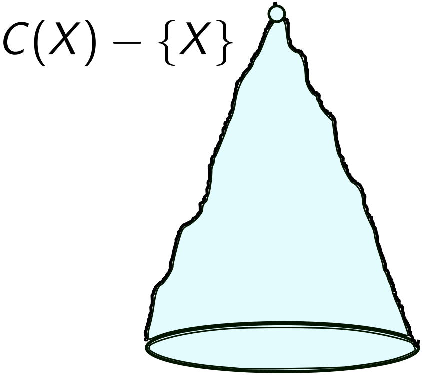
Corolario

Para todo elemento x de un continuo X se tiene que $\{x\}$ no agujera a $C(X)$.

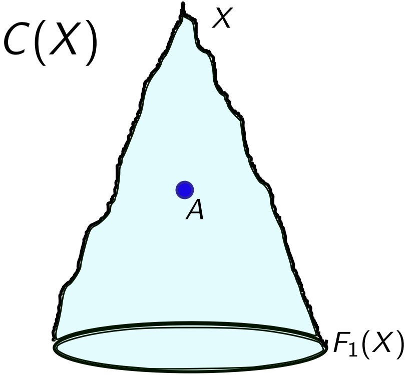


Corolario

Si X es un dendroide, entonces X no agujera a $C(X)$.



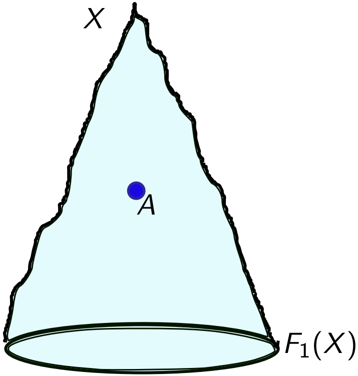
De está manera ahora estaremos considerando $A \in C(X) - (F_1(X) \cup \{X\})$ los cuales llamaremos no triviales.



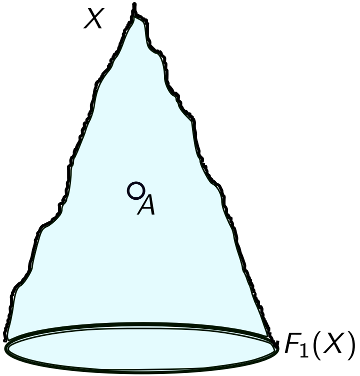
Teorema

Si $A \in C(X)$ no trivial y $\mu(A) = t$, entonces A no agujera a $C(X)$ si y sólo si $\mu^{-1}(t) - \{A\}$ es conexo.

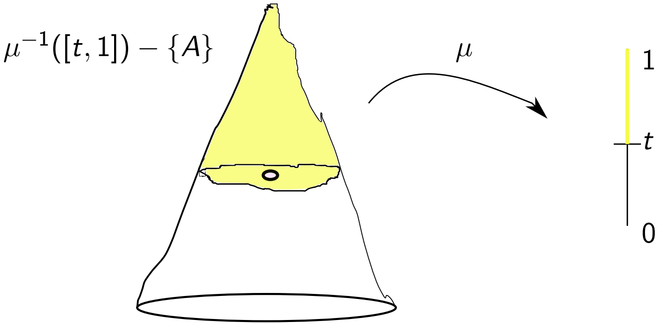
Si A no agujera a $C(X)$, entonces $C(X) - \{A\}$ es unicoherente



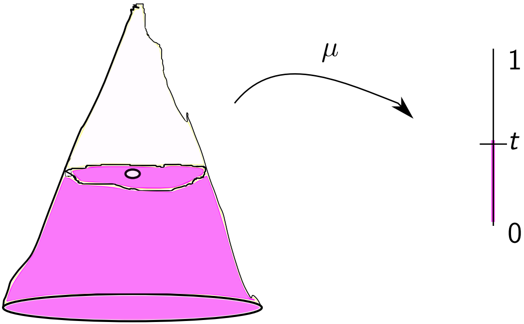
Si A no agujera a $C(X)$, entonces $C(X) - \{A\}$ es unicoherente



Si A no agujera a $C(X)$, entonces $C(X) - \{A\}$ es unicoherente

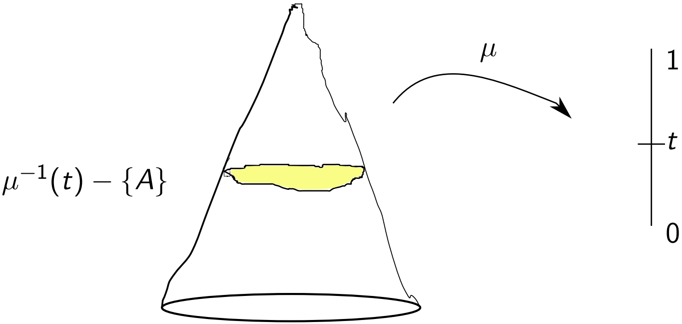


Si A no agujera a $C(X)$, entonces $C(X) - \{A\}$ es unicoherente



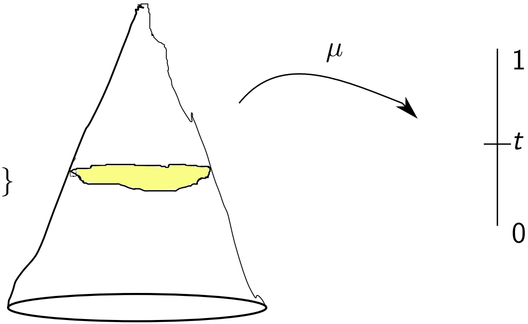
$\mu^{-1}([0,t]) - \{A\}$

Así, $\mu^{-1}(t) - \{A\}$ es conexo.

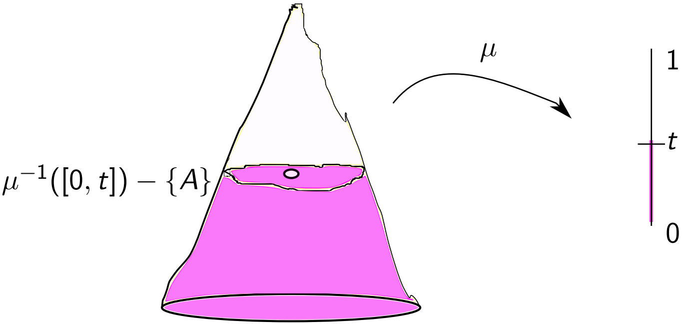


Ahora, $\mu^{-1}(t) - \{A\}$ es conexo.

$\mu^{-1}(t) - \{A\}$

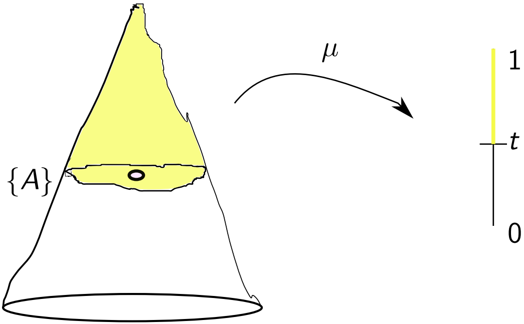


Ahora, $\mu^{-1}(t) - \{A\}$ es conexo.

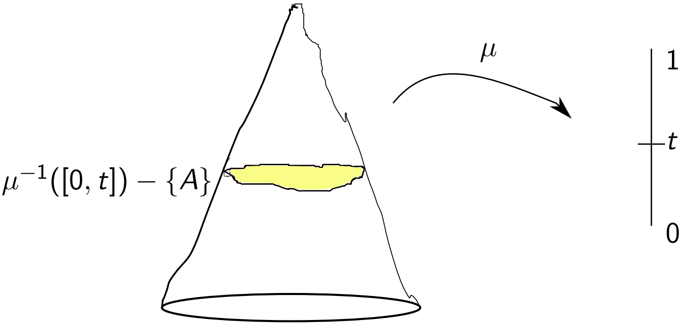


Ahora, $\mu^{-1}(t) - \{A\}$ es conexo.

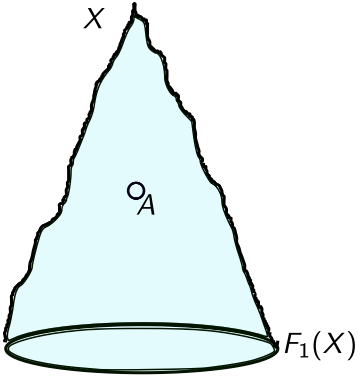
$\mu^{-1}([t, 1]) - \{A\}$



Ahora, $\mu^{-1}(t) - \{A\}$ es conexo.



Finalmente, $C(X) - \{A\}$ es unicoherente.

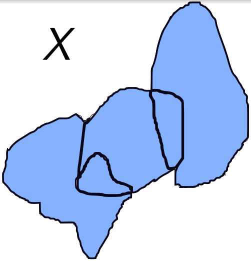


El problema se reduce a resolver si A es o no punto de corte del nivel de Whitney en el que se encuentra.

Caracterización de puntos de corte en $\mu^{-1}(t)$

Teorema (Hughes, 1976)

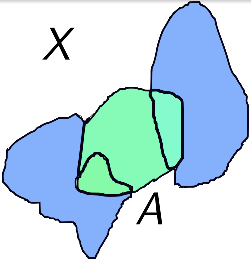
Si $A \in \mu^{-1}(t)$, entonces A es un punto de corte de $\mu^{-1}(t)$ si y sólo si existen subconjuntos abiertos, ajenos y no vacíos U, V de X tales $X - A = U \cup V$ y $B \subset A \cup U$ ó $B \subset A \cup V$ para cada $B \in \mu^{-1}(t)$.



Caracterización de puntos de corte en $\mu^{-1}(t)$

Teorema (Hughes, 1976)

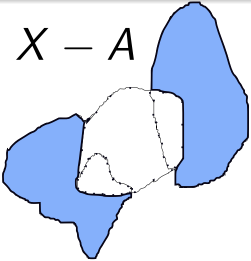
Si $A \in \mu^{-1}(t)$, entonces A es un punto de corte de $\mu^{-1}(t)$ si y sólo si existen subconjuntos abiertos, ajenos y no vacíos U, V de X tales $X - A = U \cup V$ y $B \subset A \cup U$ ó $B \subset A \cup V$ para cada $B \in \mu^{-1}(t)$.



Caracterización de puntos de corte en $\mu^{-1}(t)$

Teorema (Hughes, 1976)

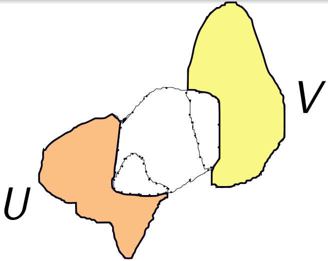
Si $A \in \mu^{-1}(t)$, entonces A es un punto de corte de $\mu^{-1}(t)$ si y sólo si existen subconjuntos abiertos, ajenos y no vacíos U, V de X tales $X - A = U \cup V$ y $B \subset A \cup U$ ó $B \subset A \cup V$ para cada $B \in \mu^{-1}(t)$.



Caracterización de puntos de corte en $\mu^{-1}(t)$

Teorema (Hughes, 1976)

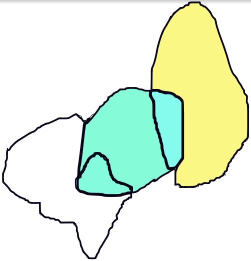
Si $A \in \mu^{-1}(t)$, entonces A es un punto de corte de $\mu^{-1}(t)$ si y sólo si existen subconjuntos abiertos, ajenos y no vacíos U, V de X tales $X - A = U \cup V$ y $B \subset A \cup U$ ó $B \subset A \cup V$ para cada $B \in \mu^{-1}(t)$.



Caracterización de puntos de corte en $\mu^{-1}(t)$

Teorema (Hughes, 1976)

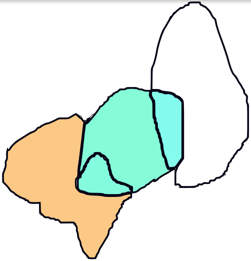
Si $A \in \mu^{-1}(t)$, entonces A es un punto de corte de $\mu^{-1}(t)$ si y sólo si existen subconjuntos abiertos, ajenos y no vacíos U, V de X tales $X - A = U \cup V$ y $B \subset A \cup U$ ó $B \subset A \cup V$ para cada $B \in \mu^{-1}(t)$.



Caracterización de puntos de corte en $\mu^{-1}(t)$

Teorema (Hughes, 1976)

Si $A \in \mu^{-1}(t)$, entonces A es un punto de corte de $\mu^{-1}(t)$ si y sólo si existen subconjuntos abiertos, ajenos y no vacíos U, V de X tales $X - A = U \cup V$ y $B \subset A \cup U$ ó $B \subset A \cup V$ para cada $B \in \mu^{-1}(t)$.

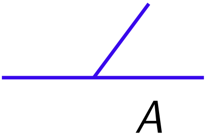


Teorema

Si $A \in C(X)$ no trivial y $X - A$ es conexo, entonces A no agujera a $C(X)$.

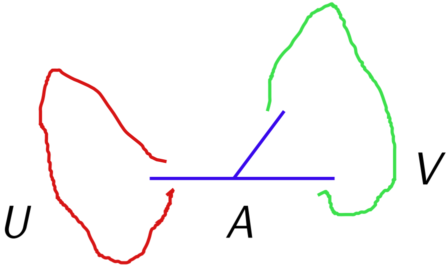
Teorema

Si $A \in C(X)$ no trivial, $X - A$ no es conexo y A no es un arco, entonces A no agujera a $C(X)$.



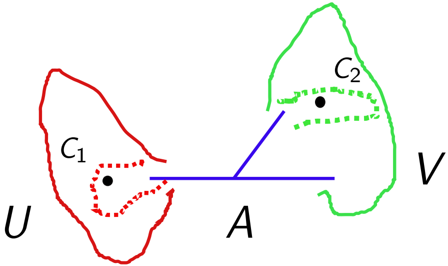
Teorema

Si $A \in C(X)$ no trivial, $X - A$ no es conexo y A no es un arco, entonces A no agujera a $C(X)$.



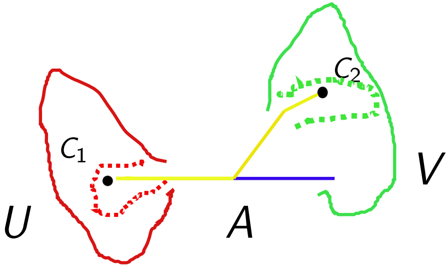
Teorema

Si $A \in C(X)$ no trivial, $X - A$ no es conexo y A no es un arco, entonces A no agujera a $C(X)$.



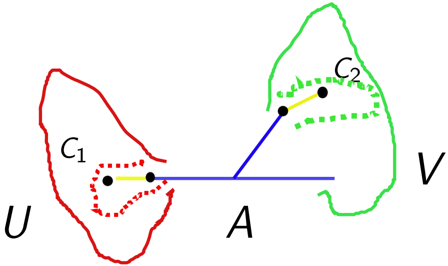
Teorema

Si $A \in C(X)$ no trivial, $X - A$ no es conexo y A no es un arco, entonces A no agujera a $C(X)$.



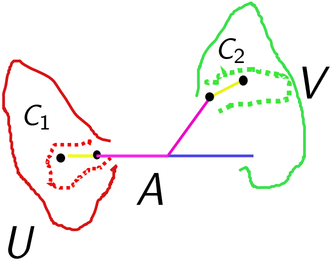
Teorema

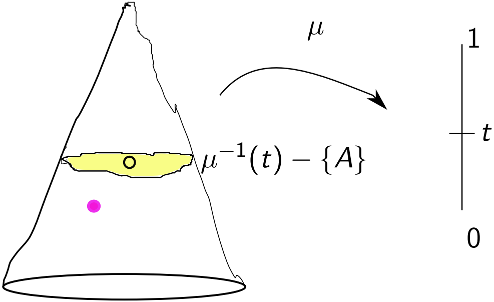
Si $A \in C(X)$ no trivial, $X - A$ no es conexo y A no es un arco, entonces A no agujera a $C(X)$.



Teorema

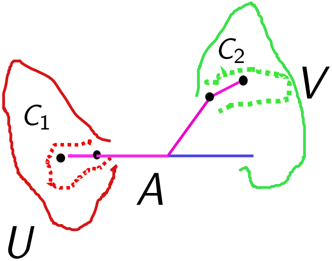
Si $A \in C(X)$ no trivial, $X - A$ no es conexo y A no es un arco, entonces A no agujera a $C(X)$.

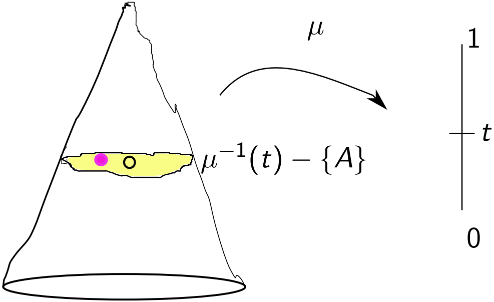




Teorema

Si $A \in C(X)$ no trivial, $X - A$ no es conexo y A no es un arco, entonces A no agujera a $C(X)$.



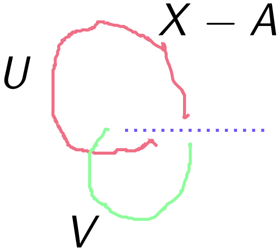


Teorema

Si $A \in C(X)$ no trivial, $X - A$ no es conexo y A es un arco tal que $A \cap E(X) \neq \emptyset$, entonces A no agujera a $C(X)$.

Teorema

Si $A \in C(X)$ no trivial, $X - A$ no es conexo y A es un arco tal que $A \cap E(X) \neq \emptyset$, entonces A no agujera a $C(X)$.



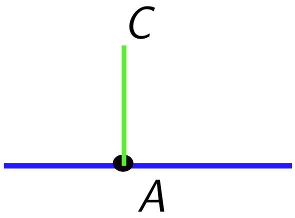
Teorema

Si $A \in C(X)$ no trivial, $X - A$ no es conexo y A es un arco tal que $A \cap R(X) - E(A) \neq \emptyset$, entonces A no agujera a $C(X)$

A

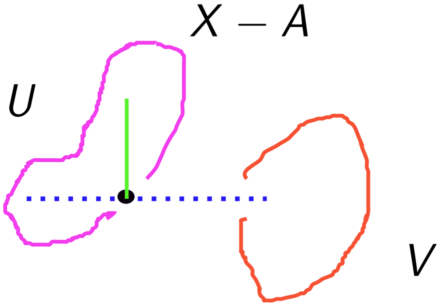
Teorema

Si $A \in C(X)$ no trivial, $X - A$ no es conexo y A es un arco tal que $A \cap R(X) - E(A) \neq \emptyset$, entonces A no agujera a $C(X)$



Teorema

Si $A \in C(X)$ no trivial, $X - A$ no es conexo y A es un arco tal que $A \cap R(X) - E(A) \neq \emptyset$, entonces A no agujera a $C(X)$

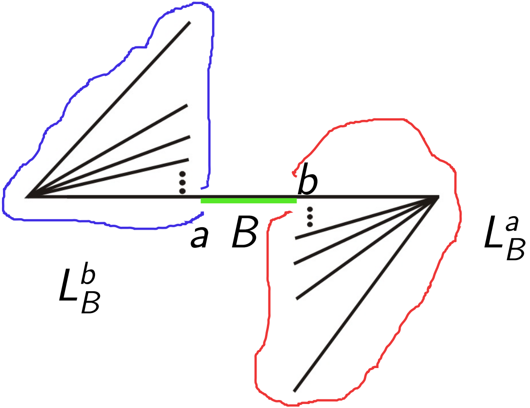


Definición

Para cada arco $B = [a, b]$ tal que $X - B$ no es conexo, $B \cap E(X) = \emptyset$ y $B \cap R(X) - E(A) = \emptyset$, definimos:

$$L_B^a = \{x \in X - B : B \subset [a, x]\} \text{ y}$$

$$L_B^b = \{x \in X - B : B \subset [b, x]\}.$$


b
a
B
L_B^a
L_B^b

Teorema

Si $A \in C(X)$ no trivial, $X - A$ no es conexo, $A \cap E(X) = \emptyset$, $A \cap R(X) - E(A) = \emptyset$, $A = [a, b]$ es un arco y L_A^a o L_A^b no es abierto, entonces A no agujera a $C(X)$.

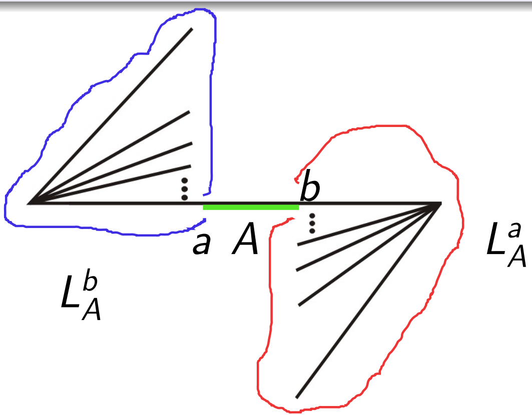
Definición

Diremos que $B \in C(X)$ no trivial es un **arco simple** si:

1. $B = [a, b]$ es un arco,
2. $X - B$ no es conexo,
3. $B \cap E(X) = \emptyset$,
4. $B \cap R(X) - E(B) = \emptyset$ y
5. L_B^a y L_B^b son abiertos.

Teorema

Si $A \in C(X)$ es un arco simple, entonces A agujera a $C(X)$.



Teorema de Clasificación

Si $A \in C(X)$, entonces A agujera a $C(X)$ si y sólo si A es un arco simple.


GRACIAS!