UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

LÍMITES DE LÍMITES INVERSOS

MÓNICA SÁNCHEZ GARRIDO

PUEBLA, 2018.

Definiciones

Definición

Dados X y Y continuos, se define la gráfica de la función $f : X \to 2^Y$ como $G(f) = \{(x, y) \in X \times Y : y \in f(x)\}$.

Definiciones

Definición

Dados X y Y continuos, se define la gráfica de la función $f : X \to 2^Y$ como $G(f) = \{(x, y) \in X \times Y : y \in f(x)\}$.

Definición

Sean X y Y continuos. La función $f : X \to 2^Y$ es **semicontinua superiormente**(usc) si $G(f)$ es un conjunto cerrado en $X \times Y$.

Definición

Sean $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de continuos y $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones usc tales que $f_i : X_{i+1} \to 2^{X_i}$, para cada $i \in \mathbb{N}$. El límite inverso de una sucesión $\{(X_i, f_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ es

$$\varprojlim(X_i, f_i) = \{(x_1, x_2, x_3, \dots) \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i : x_i \in f_i(x_{i+1}), \text{ p.c } i\}.$$

Las funciones f_i son llamadas **funciones de ligadura** y los X_i son llamados **espacios factor**.

Definición

Sean $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de continuos y $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones usc tales que $f_i : X_{i+1} \to 2^{X_i}$, para cada $i \in \mathbb{N}$. El límite inverso de una sucesión $\{(X_i, f_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ es

$$\varprojlim(X_i, f_i) = \{(x_1, x_2, x_3, \dots) \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i : x_i \in f_i(x_{i+1}), \text{ p.c } i\}.$$

Las funciones f_i son llamadas **funciones de ligadura** y los X_i son llamados **espacios factor**.

Notación

Si $X_i = X$ y $f_i = f$, $i > 0$. Entonces, escribiremos $\varprojlim f$ para referirnos a $\varprojlim(X_i, f_i)$.

Definición

Dado X un espacio métrico compacto no vacío y $f : X \to 2^X$ una función usc. Definimos:

- $Dom_n(f) = \{x_1 \in X : (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \prod_{i=1}^{n+1} X_i, x_i \in f(x_{i+1}), 1 \leq i \leq n\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$

Definición

Dado X un espacio métrico compacto no vacío y $f : X \to 2^X$ una función usc. Definimos:

- $Dom_n(f) = \{x_1 \in X : (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \prod_{i=1}^{n+1} X_i, x_i \in f(x_{i+1}), 1 \leq i \leq n\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y
- $Dom(f) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Dom_n(f)$.

Definición

Dado X un espacio métrico compacto y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de X. Definimos:

Definición

Dado X un espacio métrico compacto y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de X. Definimos:

- Lím inf $(A_n) = \{x \in X$: para cada conjunto abierto U, tal que $x \in U$, $U \cap A_n \neq \emptyset$ para todo n salvo una cantidad finita$\}$.

Definición

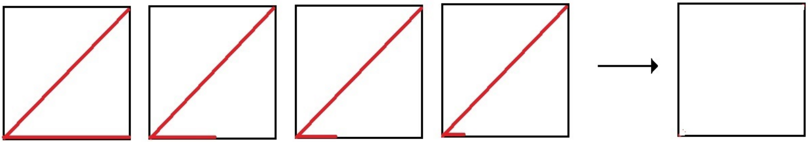
Dado X un espacio métrico compacto y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de X. Definimos:

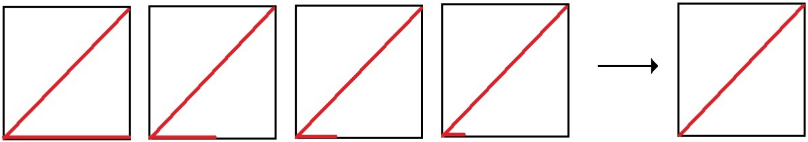
- Lím inf $(A_n) = \{x \in X$: para cada conjunto abierto U, tal que $x \in U$, $U \cap A_n \neq \emptyset$ para todo n salvo una cantidad finita$\}$.
- Lím sup $(A_n) = \{x \in X$: para cada conjunto abierto U, tal que $x \in U$, $U \cap A_n \neq \emptyset$ para una infinidad de $n\}$.

Definición

Dado X un espacio métrico compacto y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de X. Definimos:

- Lím inf $(A_n) = \{x \in X$: para cada conjunto abierto U, tal que $x \in U$, $U \cap A_n \neq \emptyset$ para todo n salvo una cantidad finita$\}$.
- Lím sup $(A_n) = \{x \in X$: para cada conjunto abierto U, tal que $x \in U$, $U \cap A_n \neq \emptyset$ para una infinidad de $n\}$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} (A_n) = A$ si Lím sup $(A_n) = A =$Lím inf (A_n).





Notación

Notación

Dado X espacio métrico compacto no vacío y $f : X \to 2^X$, $f_n : X \to 2^X$ funciones usc, para cada $n \in \mathbb{N}$. Denotaremos por:

- $K_n = \underleftarrow{\lim}\{X, f_n\}_{k=1}^{\infty}$,
- $K = \underleftarrow{\lim}\{X, f\}_{k=1}^{\infty}$.

Sea X un espacio métrico compacto no vacío y para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : X \to 2^X$ usc y $f : X \to 2^X$ usc. ¿Bajo qué condiciones las siguientes afirmaciones son equivalentes?

1. $\lim_{n\in\mathbb{N}} K_n = K$
2. $\lim_{n\in\mathbb{N}} G(f_n) = G(f)$?

Ejemplos

Sea $f_n : [0,1] \to F_2([0,1])$ dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} \{0, x\} & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ \{x\} & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$

Ejemplos

Sea $f_n : [0,1] \to F_2([0,1])$ dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} \{0,x\} & \text{si } x \in [0,\frac{1}{n}] \\ \{x\} & \text{si } x \in [\frac{1}{n},1] \end{cases}$$

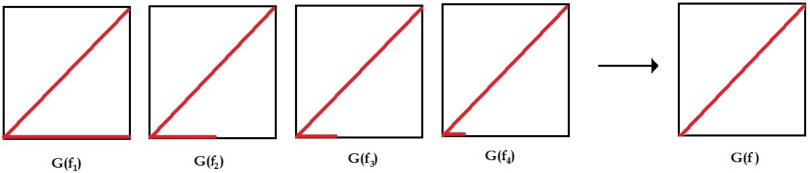
para cada $n \in \mathbb{N}$ y $f : [0,1] \to [0,1]$ dada por $f(x) = x$.

Ejemplos

Sea $f_n : [0,1] \to F_2([0,1])$ dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} \{0, x\} & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ \{x\} & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ y $f : [0,1] \to [0,1]$ dada por $f(x) = x$.



Quién es K_1?

Quién es K_1?

$$\{(x, x, x, \dots) \in \prod_{i=1}^{\infty}[0,1] : x \in [0,1]\}$$

Quién es K_1?

$$\{(x, x, x, \dots) \in \prod_{i=1}^{\infty}[0,1] : x \in [0,1]\}$$

Quién es K_1?

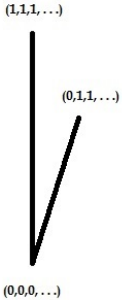
$$\{(x, x, x, \dots) \in \prod_{i=1}^{\infty} [0,1] : x \in [0,1]\}$$

$$\{(0, x, x, \dots) \in \prod_{i=1}^{\infty} [0,1] : x \in [0,1]\}$$

Quién es K_1?

$$\{(x,x,x,\dots)\in\prod_{i=1}^{\infty}[0,1] : x\in[0,1]\}$$

$$\{(0,x,x,\dots)\in\prod_{i=1}^{\infty}[0,1] : x\in[0,1]\}$$

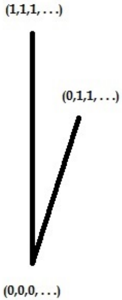


Quién es K_1?

$$\{(x, x, x, \dots) \in \prod_{i=1}^{\infty}[0,1] : x \in [0,1]\}$$

$$\{(0, x, x, \dots) \in \prod_{i=1}^{\infty}[0,1] : x \in [0,1]\}$$

$$\{(0, 0, x, \dots) \in \prod_{i=1}^{\infty}[0,1] : x \in [0,1]\}$$

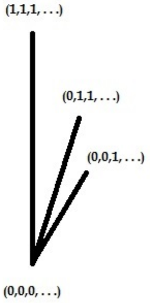


Quién es K_1?

$$\{(x,x,x,\dots)\in\prod_{i=1}^{\infty}[0,1] : x\in[0,1]\}$$

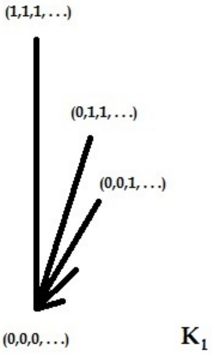
$$\{(0,x,x,\dots)\in\prod_{i=1}^{\infty}[0,1] : x\in[0,1]\}$$

$$\{(0,0,x,\dots)\in\prod_{i=1}^{\infty}[0,1] : x\in[0,1]\}$$



$\lim\limits_{\leftarrow} f_1 = \bigcup_{i=1}^{\infty}\{(x_1, x_2, x_3, \dots) \in \prod_{i=1}^{\infty}[0,1] : x_j = 0$ si $j < i$ y $x_j = x$ si $j \geq i, x \in [0,1]\}$.

$\varprojlim f_1 = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{(x_1, x_2, x_3, \dots) \in \prod_{i=1}^{\infty} [0,1] : x_j = 0$ si $j < i$ y $x_j = x$ si $j \geq i, x \in [0,1]\}$.



Quién es K_2?

Quién es K_2?

$$\{(x, x, x, \dots) \in \prod_{i=1}^{\infty} [0, 1] : x \in [0, 1]\}$$

Quién es K_2?

$$\{(x, x, x, \dots) \in \prod_{i=1}^{\infty} [0,1] : x \in [0,1]\}$$

Quién es K_2?

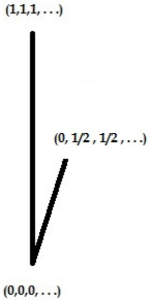
$$\{(x,x,x,\dots) \in \prod_{i=1}^{\infty}[0,1] : x \in [0,1]\}$$

$$\{(0,x,x,\dots) \in \prod_{i=1}^{\infty}[0,1] : x \in [0,\frac{1}{2}]\}$$

Quién es K_2?

$$\{(x,x,x,\dots)\in\prod_{i=1}^{\infty}[0,1]: x\in[0,1]\}$$

$$\{(0,x,x,\dots)\in\prod_{i=1}^{\infty}[0,1]: x\in[0,\frac{1}{2}]\}$$

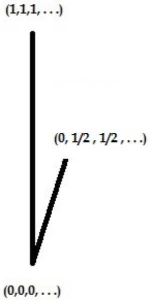


Quién es K_2?

$$\{(x,x,x,\dots)\in\prod_{i=1}^{\infty}[0,1]:x\in[0,1]\}$$

$$\{(0,x,x,\dots)\in\prod_{i=1}^{\infty}[0,1]:x\in[0,\frac{1}{2}]\}$$

$$\{(0,0,x,\dots)\in\prod_{i=1}^{\infty}[0,1]:x\in[0,\frac{1}{2}]\}$$

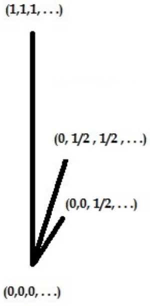


Quién es K_2?

$$\{(x, x, x, \dots) \in \prod_{i=1}^{\infty}[0,1] : x \in [0,1]\}$$

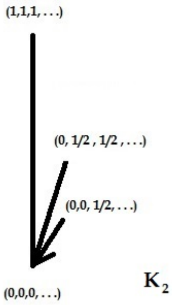
$$\{(0, x, x, \dots) \in \prod_{i=1}^{\infty}[0,1] : x \in [0,\frac{1}{2}]\}$$

$$\{(0, 0, x, \dots) \in \prod_{i=1}^{\infty}[0,1] : x \in [0,\frac{1}{2}]\}$$



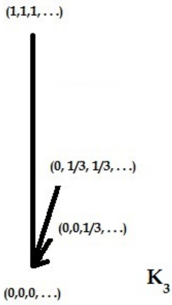
$$K_2 = \{(x, x, x, \dots) \in \prod_{i=1}^{\infty} [0,1] : x \in [0,1]\} \cup \bigcup_{i=2}^{\infty} \{(x_1, x_2, x_3, \dots) \in \prod_{i=1}^{\infty} [0,1] : x_j = 0 \text{ si } j < i \text{ y } x_j = x \text{ si } j \geq i, x \in [0, \tfrac{1}{2}]\}.$$

$$K_2 = \{(x,x,x,\dots) \in \prod_{i=1}^{\infty}[0,1] : x \in [0,1]\} \cup \bigcup_{i=2}^{\infty}\{(x_1,x_2,x_3,\dots) \in \prod_{i=1}^{\infty}[0,1] : x_j = 0 \text{ si } j < i \text{ y } x_j = x \text{ si } j \geq i, x \in [0,\tfrac{1}{2}]\}.$$



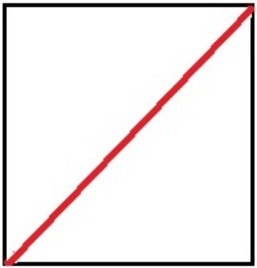
$$K_3 = \{(x, x, x, \dots) \in \prod_{i=1}^{\infty}[0,1] : x \in [0,1]\} \cup \bigcup_{i=2}^{\infty}\{(x_1, x_2, x_3, \dots) \in \prod_{i=1}^{\infty}[0,1] : x_j = 0 \text{ si } j < i \text{ y } x_j = x \text{ si } j \geq i, x \in [0, \tfrac{1}{3}]\}.$$

$$K_3 = \{(x, x, x, \dots) \in \prod_{i=1}^{\infty} [0,1] : x \in [0,1]\} \cup \bigcup_{i=2}^{\infty} \{(x_1, x_2, x_3, \dots) \in \prod_{i=1}^{\infty} [0,1] : x_j = 0 \text{ si } j < i \text{ y } x_j = x \text{ si } j \geq i, x \in [0, \tfrac{1}{3}]\}.$$



Quién es K?

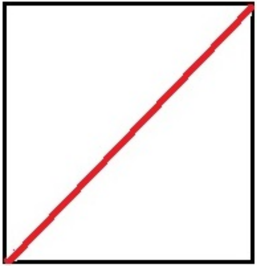
Quién es K?



$G(f)$

K

Quién es K?



G(f)

K

Observación: $\lim_{n \to \infty} K_n = K.$

Ejemplo

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $f_n : [0, 1] \to [0, 1]$ como

Ejemplo

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $f_n : [0,1] \to [0,1]$ como

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) x$$

Ejemplo

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $f_n : [0,1] \to [0,1]$ como

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) x$$

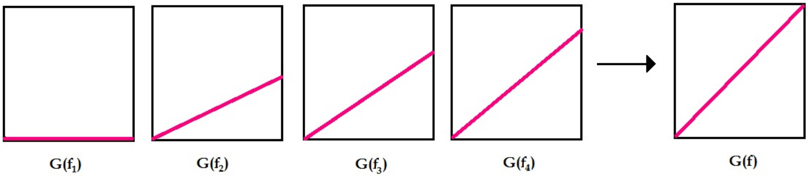
y $f : [0,1] \to [0,1]$ como $f(x) = x$.

Ejemplo

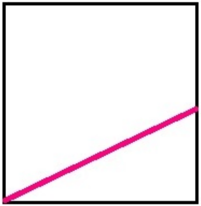
Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $f_n : [0,1] \to [0,1]$ como

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) x$$

y $f : [0,1] \to [0,1]$ como $f(x) = x$.



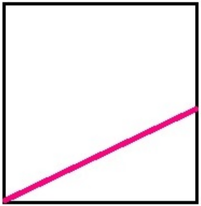
Quién es K_2?



$\mathbf{G(f_2)}$

Quién es K_2?

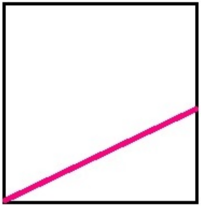
- $Dom_1(f_2) = \{x \in [0,1] : (x, 2x) \in [0,1]^2\} = \left[0, \frac{1}{2}\right]$



G(f$_2$)

Quién es K_2?

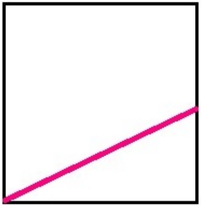
- $Dom_1(f_2) = \{x \in [0,1] : (x, 2x) \in [0,1]^2\} = \left[0, \frac{1}{2}\right]$
- $Dom_2(f_2) = \{x \in [0,1] : (x, 2x, 4x) \in [0,1]^3\} = \left[0, \frac{1}{4}\right]$



$G(f_2)$

Quién es K_2?

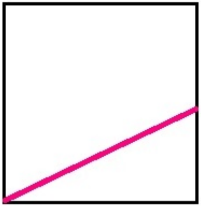
- $Dom_1(f_2) = \{x \in [0,1] : (x, 2x) \in [0,1]^2\} = \left[0, \frac{1}{2}\right]$
- $Dom_2(f_2) = \{x \in [0,1] : (x, 2x, 4x) \in [0,1]^3\} = \left[0, \frac{1}{4}\right]$
- $Dom_3(f_2) = \{x \in [0,1] : (x, 2x, 4x, 8x) \in [0,1]^4\} = \left[0, \frac{1}{8}\right]$



$G(f_2)$

Quién es K_2?

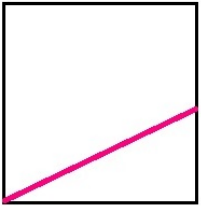
- $Dom_1(f_2) = \{x \in [0,1] : (x, 2x) \in [0,1]^2\} = \left[0, \frac{1}{2}\right]$
- $Dom_2(f_2) = \{x \in [0,1] : (x, 2x, 4x) \in [0,1]^3\} = \left[0, \frac{1}{4}\right]$
- $Dom_3(f_2) = \{x \in [0,1] : (x, 2x, 4x, 8x) \in [0,1]^4\} = \left[0, \frac{1}{8}\right]$
- $Dom_n(f_2) = \{x \in [0,1] : (x, 2x, 4x, \ldots, 2^n x) \in [0,1]^{n+1}\}$
  $= \left[0, \frac{1}{2^n}\right]$



$G(f_2)$

Quién es K_2?

- $Dom_1(f_2) = \{x \in [0,1] : (x, 2x) \in [0,1]^2\} = \left[0, \frac{1}{2}\right]$
- $Dom_2(f_2) = \{x \in [0,1] : (x, 2x, 4x) \in [0,1]^3\} = \left[0, \frac{1}{4}\right]$
- $Dom_3(f_2) = \{x \in [0,1] : (x, 2x, 4x, 8x) \in [0,1]^4\} = \left[0, \frac{1}{8}\right]$
- $Dom_n(f_2) = \{x \in [0,1] : (x, 2x, 4x, \ldots, 2^n x) \in [0,1]^{n+1}\} = \left[0, \frac{1}{2^n}\right]$
- $Dom(f_2) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left[0, \frac{1}{2^n}\right] = \{0\}$



$G(f_2)$

Teorema

Sea X un espacio métrico compacto no vacío y $f : X \to 2^X$ usc. Entonces, $\lim\limits_{\leftarrow}\{X, f\}$ es homeomorfo a $\lim\limits_{\leftarrow}\{Dom(f), f|_{Dom(f)}\}$.

Teorema

Sea X un espacio métrico compacto no vacío y $f : X \to 2^X$ usc. Entonces, $\varprojlim\{X, f\}$ es homeomorfo a $\varprojlim\{Dom(f), f|_{Dom(f)}\}$.

Como $\varprojlim\{Dom(f_2), f_2|_{Dom(f_2)}\} = \{(0, 0, 0, \dots)\}$,

Teorema

Sea X un espacio métrico compacto no vacío y $f : X \to 2^X$ usc. Entonces, $\varprojlim\{X, f\}$ es homeomorfo a $\varprojlim\{Dom(f), f|_{Dom(f)}\}$.

Como $\varprojlim\{Dom(f_2), f_2|_{Dom(f_2)}\} = \{(0, 0, 0, \dots)\}$,
$K_2 = \{(0, 0, 0, \dots)\}$.

Teorema

Sea X un espacio métrico compacto no vacío y $f : X \to 2^X$ usc. Entonces, $\varprojlim\{X, f\}$ es homeomorfo a $\varprojlim\{Dom(f), f|_{Dom(f)}\}$.

Como $\varprojlim\{Dom(f_2), f_2|_{Dom(f_2)}\} = \{(0, 0, 0, \dots)\}$,
$K_2 = \{(0, 0, 0, \dots)\}$.

Para todo $n \in \mathbb{N}$, $K_n = \{(0, 0, 0, \dots)\}$.

Teorema

Sea X un espacio métrico compacto no vacío y $f : X \to 2^X$ usc. Entonces, $\varprojlim\{X, f\}$ es homeomorfo a $\varprojlim\{Dom(f), f|_{Dom(f)}\}$.

Como $\varprojlim\{Dom(f_2), f_2|_{Dom(f_2)}\} = \{(0, 0, 0, \dots)\}$, $K_2 = \{(0, 0, 0, \dots)\}$.

Para todo $n \in \mathbb{N}$, $K_n = \{(0, 0, 0, \dots)\}$.

Sin embargo, K es homeomorfo a un arco.

Ejemplo

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $f_n : [0,1] \to [0,1]$ como $f_n(x) = \frac{x}{2}$ y

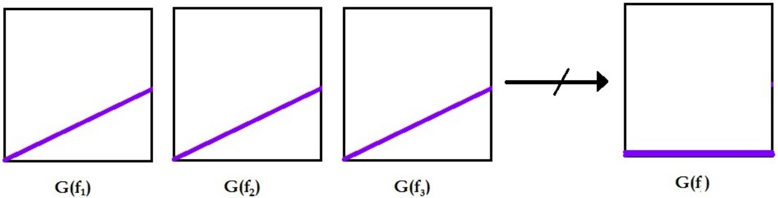
Ejemplo

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $f_n : [0,1] \to [0,1]$ como $f_n(x) = \frac{x}{2}$ y

$f : [0,1] \to [0,1]$ como $f(x) = 0$.

Ejemplo

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $f_n : [0,1] \to [0,1]$ como $f_n(x) = \frac{x}{2}$ y $f : [0,1] \to [0,1]$ como $f(x) = 0$.



Teorema

Sea X un espacio métrico compacto no vacío, y para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : X \to 2^X$ función usc suprayectiva y $f : X \to X$ una función continua, tal que $\lim_{n\in\mathbb{N}} G(f_n) = G(f)$. Entonces, $\lim_{n\in\mathbb{N}} (K_n) = K$.

Lema

Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones usc suprayectivas de X en 2^X, donde X es un espacio métrico compacto no vacío y sea $f : X \to 2^X$ una función usc tal que $\lim_{n\in\mathbb{N}} G(f_n) = G(f)$. Entonces, f es suprayectiva.

Teorema

Sea X un espacio métrico compacto no vacío, y para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : X \to 2^X$ función usc suprayectiva y $f : X \to 2^X$ una función usc, tal que $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}}(K_n) = K$. Entonces, $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} G(f_n) = G(f)$.

Corolario

Sea X un espacio métrico compacto no vacío, y para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : X \to 2^X$ función usc suprayectiva y $f : X \to X$ una función continua. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

Corolario

Sea X un espacio métrico compacto no vacío, y para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : X \to 2^X$ función usc suprayectiva y $f : X \to X$ una función continua. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\lim_{n \in \mathbb{N}} (K_n) = K$.
2. $\lim_{n \in \mathbb{N}} G(f_n) = G(f)$.


GRACIAS