Irreducibilidad en niveles de tamaño fuerte

Miguel Angel Lara Mejía

Facultad de Ciencias, UAEMéx

Octubre 2018

Un continuo X es *unicoherente* si para todo par de subcontinuos A y B de X tales que $X = A \cup B$, $A \cap B$ es conexo.

Un continuo X es *descomponible* si es unión de dos subcontinuos propios.

Un continuo X es *irreducible sobre un subconjunto* Z de X si ningún subcontinuo propio de X contiene a Z.

Un continuo X es *irreducible* si es irreducible sobre $\{p, q\}$ para algunos $p, q \in X$.

Un continuo X es *irreducible sobre un subconjunto* Z de X si ningún subcontinuo propio de X contiene a Z.
Un continuo X es *irreducible* si es irreducible sobre $\{p, q\}$ para algunos $p, q \in X$.

- $2^X = \{A \subset X : A \text{ cerrado y no vacío}\}$,
- $C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}$,
- $C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}$,
- $F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}$.

Definición

Una *función de Whitney* para $C_n(X)$ es una función continua $\omega : C_n(X) \to \mathbb{R}$ tal que:

- $\omega(\{x\}) = 0$ para todo $x \in X$ y,
- $\omega(A) < \omega(B)$ cuando $A \subset B$.

Un nivel de Whitney es un conjunto de la forma $\omega^{-1}(t)$ para alguna $t \in [0, \omega(X)]$.

Los niveles de Whitney para $C(X)$ son subcontinuos de $C(X)$.

Definición

Una *función de Whitney* para $C_n(X)$ es una función continua $\omega : C_n(X) \to \mathbb{R}$ tal que:

- $\omega(\{x\}) = 0$ para todo $x \in X$ y,
- $\omega(A) < \omega(B)$ cuando $A \subset B$.

Un nivel de Whitney es un conjunto de la forma $\omega^{-1}(t)$ para alguna $t \in [0, \omega(X)]$.
Los niveles de Whitney para $C(X)$ son subcontinuos de $C(X)$.

Existen funciones de Whitney para $C_m(X)$ que no son monótonas .

Definición (Hosokawa(2011))

Una función de *tamaño fuerte* para $C_n(X)$ es una función continua $\mu : C_n(X) \to \mathbb{R}$ tal que:

- $\mu(A) = 0$ si $A \in F_n(X)$ y,
- $\mu(A) < \mu(B)$ cuando $A \subset B$ y $B \notin F_n(X)$.

Teorema (Hosokawa(2011))

Dados X un continuo y $n \in \mathbb{N}$, existen funciones de tamaño fuerte para $C_n(X)$.

Definición (Hosokawa(2011))

Una función de *tamaño fuerte* para $C_n(X)$ es una función continua $\mu : C_n(X) \to \mathbb{R}$ tal que:

- $\mu(A) = 0$ si $A \in F_n(X)$ y,
- $\mu(A) < \mu(B)$ cuando $A \subset B$ y $B \notin F_n(X)$.

Teorema (Hosokawa(2011))

Dados X un continuo y $n \in \mathbb{N}$, existen funciones de tamaño fuerte para $C_n(X)$.

Un *nivel de tamaño fuerte* es un conjunto de la forma $\mu^{-1}(t)$ para alguna $t \in [0, \mu(X)]$.

Teorema (Hosokawa(2011))

Los niveles de tamaño fuerte para $C_n(X)$ son continuos.

Un *nivel de tamaño fuerte* es un conjunto de la forma $\mu^{-1}(t)$ para alguna $t \in [0, \mu(X)]$.

Teorema (Hosokawa(2011))

Los niveles de tamaño fuerte para $C_n(X)$ son continuos.

Teorema

Sea X un continuo. Si X es hereditariamente descomponible y hereditariamente unicoherente entonces todo nivel positivo de tamaño fuerte tiene una $(2n-1)$-celda.

Sean X un continuo y μ una función de tamaño fuerte para $C_n(X)$. Una propiedad topológica $\mathcal{P}$ es llamada

1. *propiedad de tamaño fuerte* si X tiene la propiedad $\mathcal{P}$, entonces todos los niveles la tienen.
2. *propiedad creciente de tamaño fuerte* si $\mu^{-1}(t_0)$ tiene la propiedad P entonces $\mu^{-1}(t)$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$ para $t \in (t_0, 1)$.

Sean X un continuo y μ una función de tamaño fuerte para $C_n(X)$. Una propiedad topológica $\mathcal{P}$ es llamada

1. *propiedad de tamaño fuerte* si X tiene la propiedad $\mathcal{P}$, entonces todos los niveles la tienen.
2. *propiedad creciente de tamaño fuerte* si $\mu^{-1}(t_0)$ tiene la propiedad P entonces $\mu^{-1}(t)$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$ para $t \in (t_0, 1)$.

Teorema

Ser conexo por arcos es una propiedad creciente de tamaño fuerte.

Corolario

Ser conexo por arcos es una propiedad de tamaño fuerte.

Teorema

Ser conexo por arcos es una propiedad creciente de tamaño fuerte.

Corolario

Ser conexo por arcos es una propiedad de tamaño fuerte.

Teorema

Si X es un dendroide entonces todo nivel de tamaño fuerte es no irreducible.

Teorema

La propiedad de ser irreducible no es una propiedad de tamaño fuerte.

Teorema

Si X es un dendroide entonces todo nivel de tamaño fuerte es no irreducible.

Teorema

La propiedad de ser irreducible no es una propiedad de tamaño fuerte.