Propiedades de Whiyney

XIII Taller de continuos, hiperespacios y sistemas dinámicos

Josué-Díaz

FCFM-UNACH

2-5 de Octubre 2018

Notación

- X denotará un continuo;
- 2^X el hiperespacio de los cerrados y no vacíos;
- $C(X)$ el hiperespacio de los subcontinuos de X;
- $F_n(X) = \{A \in 2^X : |A| \leq n\}$;
- I representará el intervalo unitario.

Note que si $n = 1$;
$F_1(X) = \{\{x\} : x \in X\} \equiv X$.

Notación

- X denotará un continuo;
- 2^X el hiperespacio de los cerrados y no vacíos;
- $C(X)$ el hiperespacio de los subcontinuos de X;
- $F_n(X) = \{A \in 2^X : |A| \leq n\}$;
- I representará el intervalo unitario.

Note que si $n = 1$;
$F_1(X) = \{\{x\} : x \in X\} \equiv X$.

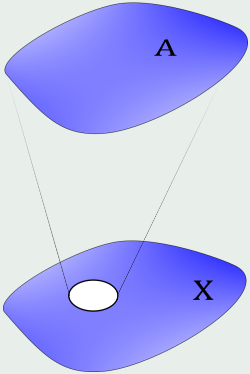


Figura: Continuos y su subcontinuos

¿Cómo medir?

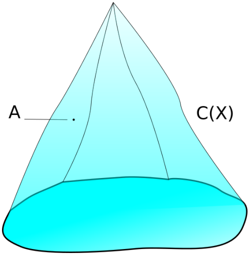


Figura: $C(X)$

¿Cómo medir?

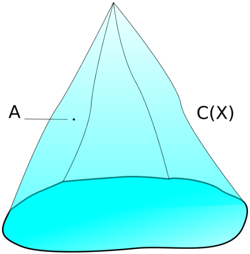


Figura: $C(X)$

Definición

Sea $\mu : C(X) \to [0, \infty)$, una función continua, se dice que μ es una **función de Whitney** para $C(X)$ si cumple lo siguiente:

¿Cómo medir?

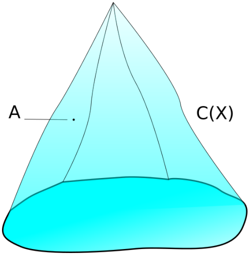


Figura: $C(X)$

Definición

Sea $\mu : C(X) \to [0, \infty)$, una función continua, se dice que μ es una **función de Whitney** para $C(X)$ si cumple lo siguiente:

- Para cada $\{x\} \in F_1(X)$ entonces: $\mu(\{x\}) = 0$.

¿Cómo medir?

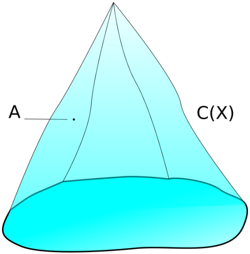


Figura: $C(X)$

Definición

Sea $\mu : C(X) \to [0, \infty)$, una función continua, se dice que μ es una **función de Whitney** para $C(X)$ si cumple lo siguiente:

- Para cada $\{x\} \in F_1(X)$ entonces: $\mu(\{x\}) = 0$.
- Sean A, $B \in C(X)$ tales que $A \subsetneqq B$, entonces: $\mu(A) < \mu(B)$.

¿Cómo medir?

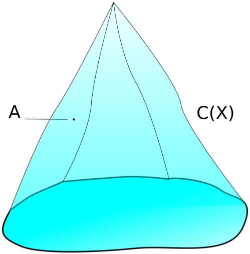


Figura: $C(X)$

Definición

Sea $\mu : C(X) \to [0, \infty)$, una función continua, se dice que μ es una **función de Whitney** para $C(X)$ si cumple lo siguiente:

- Para cada $\{x\} \in F_1(X)$ entonces: $\mu(\{x\}) = 0$.
- Sean A, $B \in C(X)$ tales que $A \subsetneq B$, entonces: $\mu(A) < \mu(B)$.

¿Cómo medir?

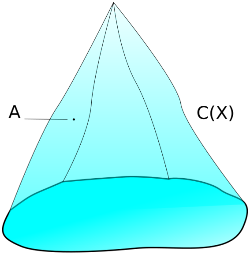


Figura: $C(X)$

Definición

Sea $\mu : C(X) \to [0, \infty)$, una función continua, se dice que μ es una **función de Whitney** para $C(X)$ si cumple lo siguiente:

- Para cada $\{x\} \in F_1(X)$ entonces: $\mu(\{x\}) = 0$.
- Sean A, $B \in C(X)$ tales que $A \subsetneq B$, entonces: $\mu(A) < \mu(B)$.

Nota:

Algunos autores *prefieren* agregar una tercera condición,

- $\mu(X) = 1$

Definición

Los conjuntos $\mathcal{A}_t = \mu^{-1}(t)$ se les llama, **niveles de Whitney**, donde $t \in (0, 1)$.

Definición

Los conjuntos $\mathcal{A}_t = \mu^{-1}(t)$ se les llama, **niveles de Whitney**, donde $t \in (0, 1)$.

observación

Note que

$$\mu^{-1}(0) = F_1(X) \equiv X$$
$$\mu^{-1}(1) = X$$

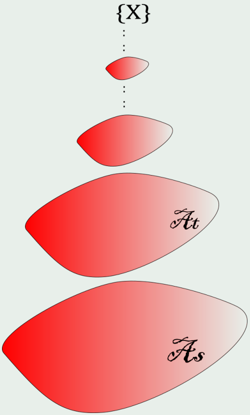


Figura: Niveles de Whitney

Definición

Los conjuntos $\mathcal{A}_t = \mu^{-1}(t)$ se les llama, **niveles de Whitney**, donde $t \in (0, 1)$.

observación

Note que

$$\mu^{-1}(0) = F_1(X) \equiv X$$
$$\mu^{-1}(1) = X$$

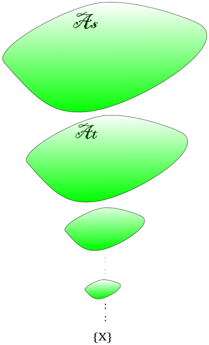


Figura: Continuo

Preguntas:

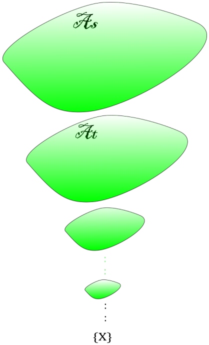


Figura: Continuo

Preguntas:

- Sea P una propiedad topológica de manera que X la tenga, ¿necesariamente $\mu^{-1}(t)$ la tiene?

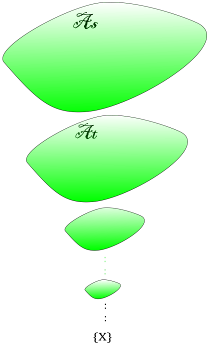


Figura: Continuo

Preguntas:

- Sea P una propiedad topológica de manera que X la tenga, ¿necesariamente $\mu^{-1}(t)$ la tiene?
- No.

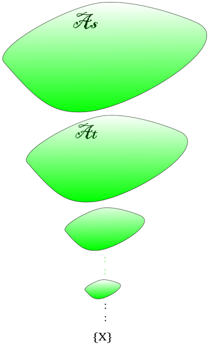


Figura: Continuo

Preguntas:

- Sea P una propiedad topológica de manera que X la tenga, ¿necesariamente $\mu^{-1}(t)$ la tiene?
- No.
- Sea P una propiedad topológica de manera que $\mu^{-1}(t)$ la tenga, ¿necesariamente X la tiene?

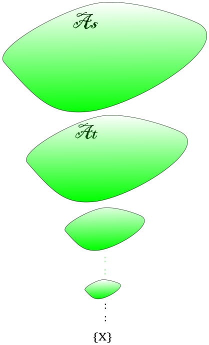


Figura: Continuo

Preguntas:

- Sea P una propiedad topológica de manera que X la tenga, ¿necesariamente $\mu^{-1}(t)$ la tiene?
- No.
- Sea P una propiedad topológica de manera que $\mu^{-1}(t)$ la tenga, ¿necesariamente X la tiene?
- No.

Más definciones

En las definiciones siguientes P denota una propiedad topológica.

Definición

Se dice que $\mathcal{P}$ es una **propiedad de Whitney** si, siempre que X tiene la propiedad $\mathcal{P}$ entonces $\mu^{-1}(t)$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$, para cada μ función de Whitney y para cada $t \in [0, 1]$.

Definición

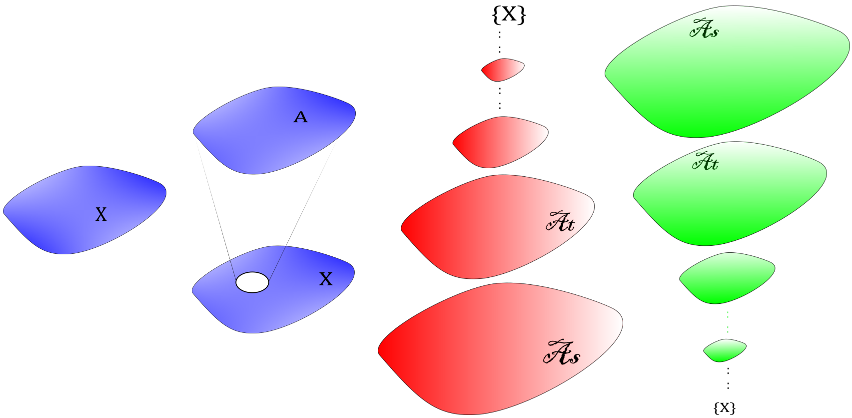
Se dice que $\mathcal{P}$ es una **propiedad reversible de Whitney** si, siempre que $\mu^{-1}(t)$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$ entonces X tiene la propiedad $\mathcal{P}$, para toda función de Whitney μ y para toda $t \in (1, 0)$

Definición

Se dice que $\mathcal{P}$ es una **propiedad fuerte reversible de Whitney** si, siempre que $\mu^{-1}(t)$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$, entonces X tiene la propiedad $\mathcal{P}$ para alguna función de Whitney μ y para toda $t \in (1, 0)$.

Definición

Se dice que $\mathcal{P}$ es una **propiedad secuencial fuerte reversible de Whitney** si, existe una función de Whitney μ y una sucesión en $(0,1)$ tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ y cada $\mu^{-1}(t_n)$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$, entonces X tiene la propiedad $\mathcal{P}$.



Continuo   Función de Whitney   Nivel de Whitney   Propiedad de Whitney

Propiedades de Whitney

Propiedad	Whitney	Reversible	Fuerte Reversible	Secuencial
Aposindésis	Si	No		
Semi-aposindésis	Si	No		
Aposindésis contable	Si	No		
Aposindesis finita	Si	No		
Aposindesis mutua	Si	No		
Tipo arco	Si			No
Retracto absoluto	No	Si	No	

Definición:

Una selección para $C(X)$ es una función continua $s : C(X) \to X$ tal que $s(A) \in A$ para toda $A \in C(X)$.

Definición:

El **cono sobre** X denotado Cono(X) es el espacio cociente que resulta de identificar en un punto al subconjunto $X \times \{1\}$ del espacio $X \times I$, en otras palabras el Cono(X) es el espacio cociente $\dfrac{X \times I}{\sim}$ donde $\sim$ es la relación de equivalencia sobre $X \times I$ dada por $(x_1, t_1) \sim (x_1, t_2)$ si y sólo si $(x_1, t_1) = (x_1, t_2)$ o $t_1 = t_2 = 1$.
El **vértice** del Cono(X) es el punto $X \times \{1\}$ y es denotado por v_X, la **base** del cono es el subconjunto $X \times \{0\}$ y es denotado por B_X.

Definición

Sea X un continuo y un homeomorfismo $h : Cono(X) \rightarrow C(X)$ es llamado **homeomorfismo de Rogers**, si es tal que $h(v_X) = \{X\}$ y la restricción de $h|_{B_X}$ a la base del cono es un homeomorfismo,es decir $B(X) \cong_h F_1(X)$.
Decimos que X tiene la propiedad **Cono = hiperespacio** si X admite un homeomorfismo de Rogers.

Teorema

Sea X un continuo finito dimensional, las siguientes son equivalentes:

1. X es $K(X) = C(X)$;
2. Existe una selección $s : C(X) \setminus \{X\} \to X$ tal que para todo nivel de Whitney $\mathcal{A}$ para $C(X)$, $s : \mathcal{A} \to X$ es un homeomorfismo;
3. Existen una selección $s : C(X) \setminus \{X\} \to X$ y una función de Whitney $\mu : C(X) \to [0, 1]$, tal que $\mu(X) = 1$ y $s : \mu^{-1}(t) \to X$ es un homeomorfismo para todo $t \in [0, 1)$.

Referencias

- Alejandro Illanes *The-cone-hyperspace property a characterizacion*
- Alejandro Illanes and Sam B. Nadler jr *Hyperspaces Fundamentals and recent advances*.
- Dorothy D. Sherling *Concerning the cone=hyperspace property*

Para terminar

Para terminar

Gracias.