La función punto medio en compactaciones métricas del intervalo $(0, 1]$

José Luis Suárez López (FCFM-BUAP)

XIII Taller de continuos, hiperespacios y sistemas dinámicos

Octubre 2018

Hiperespacios

Hiperespacios

Los hiperespacios son ciertas familias de subconjuntos de un espacio topológico, X, con alguna característica particular. Los más conocidos son:

$$2^X = \{F \subset X : F \text{ es no vacío y cerrado en } X\},$$

$$C(X) = \{F \in 2^X : F \text{ es conexo}\},$$

$$F_n(X) = \{F \subseteq X : 1 \leq |F| \leq n\}.$$

En particular, cuando X es un continuo, a $C(X)$ se le conoce como el hiperespacios de subcontinuos del continuo X.

En el libro *Hyperspaces of sets*, Nadler propone estudiar propiedades del *hiperespacio de arcos* de un continuo X el cual se define como:

En el libro *Hyperspaces of sets*, Nadler propone estudiar propiedades del *hiperespacio de arcos* de un continuo X el cual se define como:

Definición

Para todo continuo X se define el subespacio de $C(X)$ que llamaremos **hiperespacio de arcos**:

$$\mathcal{A}(X) = \{A \in C(X) : A \text{ es un arco en } X\}$$

En el libro *Hyperspaces of sets*, Nadler propone estudiar propiedades del *hiperespacio de arcos* de un continuo X el cual se define como:

Definición

Para todo continuo X se define el subespacio de $C(X)$ que llamaremos **hiperespacio de arcos**:

$$\mathcal{A}(X) = \{A \in C(X) : A \text{ es un arco en } X\}$$

Más tarde, Adrian Ulises Soto retoma la propuesta de Nadler y define el *hiperespacio de arcos y singulares*, el cual está dado por

$$\mathcal{M}(X) = \mathcal{A}(X) \cup \{\{x\} : x \in X\} = \mathcal{A}(X) \cup F_1(X)$$

En 2016, Iván Serapio Ramos en su tesis de maestría define la *función de puntos medios* en continuos, apartir de la siguiente definición de *punto medio*. Esto es:

En 2016, Iván Serapio Ramos en su tesis de maestría define la *función de puntos medios* en continuos, apartir de la siguiente definición de *punto medio*. Esto es:

Definición

Sean X un continuo y μ una función de Whitney para $C(X)$. Dados $A \in \mathcal{M}(X)$ y $p \in X$, diremos que p es punto medio de A respecto de μ si existen dos subcontinuos K y L de X tales que $A = K \cup L$, $K \cap L = \{p\}$ y $\mu(K) = \mu(L)$.

En dicha tesis prueba que si X es un continuo y μ es una función de Whitney definida en $C(X)$, entonces todo elemento de $\mathcal{M}(X)$ admite un único punto medio respecto a μ. De este modo podemos considerar la función $P_\mu : \mathcal{M}(X) \to X$ que a cada elemento de $\mathcal{M}(X)$ le asigna su único punto medio respecto de μ. A esta función se le llama *función punto medio* de X respecto de μ.

Definición

Dado un continuo X y $L \in \mathcal{M}(X)$ se define el conjunto de puntos extremos de L de la siguiente manera:

$$E(L) = \begin{cases} \{p \in L : p \text{ es un punto extremo de } L\} & \text{si } L \in \mathcal{A}(X); \\ L & \text{si } L \in F_1(X). \end{cases}$$

Definición

Dado un continuo X y $L \in \mathcal{M}(X)$ se define el conjunto de puntos extremos de L de la siguiente manera:

$$E(L) = \begin{cases} \{p \in L : p \text{ es un punto extremo de } L\} & \text{si } L \in \mathcal{A}(X); \\ L & \text{si } L \in F_1(X). \end{cases}$$

Asimismo, define la *función de puntos extremos* en continuos. Esto es, dado un continuo X consideremos la función $E : \mathcal{M}(X) \to F_2(X)$ que a cada elemento de $\mathcal{M}(X)$ le asigna el conjunto de sus puntos extremos. A esta función se le llama *función de puntos extremos* de X.

La teoría generada hasta ahora con respecto a esta función, cuenta ya con diversos resultados, como el siguiente:

La teoría generada hasta ahora con respecto a esta función, cuenta ya con diversos resultados, como el siguiente:

Teorema

Para un continuo cualquiera X, las siguientes proposiciones son equivalentes entre sí:

- (1) alguna función punto medio de X es continua,
- (2) toda función punto medio de X es continua,
- (3) la función de puntos extremos es continua.

Compactaciones métricas del intervalo $(0, 1]$

Compactaciones métricas del intervalo $(0,1]$

Definición

Un espacio métrico compacto Y es una **compactación métrica del intervalo** $(0,1]$ si existe un homeomorfismo $h:(0,1] \to h((0,1]) \subseteq Y$ tal que $h((0,1])$ es denso en Y. Al homeomorfismo h se le llama encaje y a $X = Y \setminus h((0,1])$ se le denomina residuo.

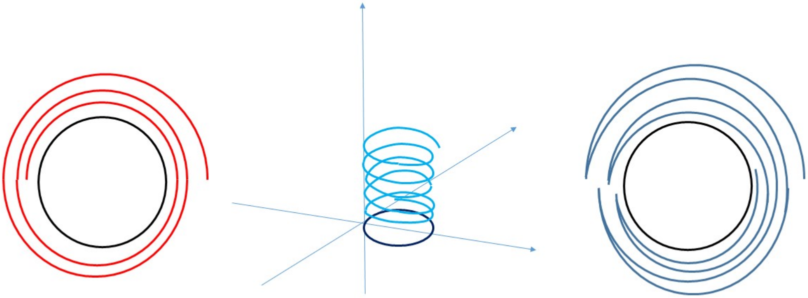


Figura: Compactaciones con residuo S^1.

Corolario

Todas las funciones punto medio de una compactación del rayo cuyo residuo es un continuo libre de arcos son continuas.

Corolario

Todas las funciones punto medio de una compactación del rayo cuyo residuo es un continuo libre de arcos son continuas.

Problema

¿Existen compactaciones del rayo con residuo un continuo que no sea libre de arcos para el cual la función de punto medio sea continua?

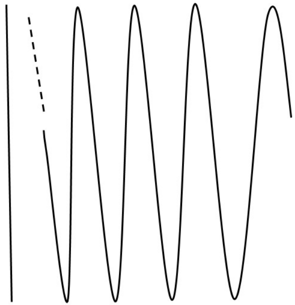
Ejemplo

Ejemplo

Consideremos $A = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 1]\}$,
$B = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, \pi]\}$. Sea $X = A \cup B$. Este continuo es conocido como la curva senoidal.

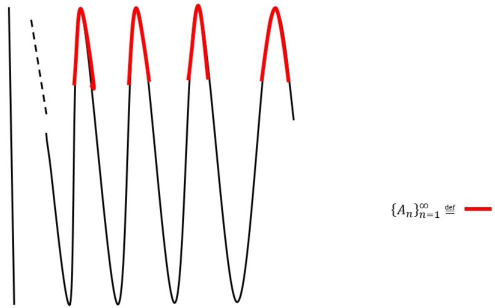
Ejemplo

Consideremos $A = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 1]\}$, $B = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, \pi]\}$. Sea $X = A \cup B$. Este continuo es conocido como la curva senoidal.



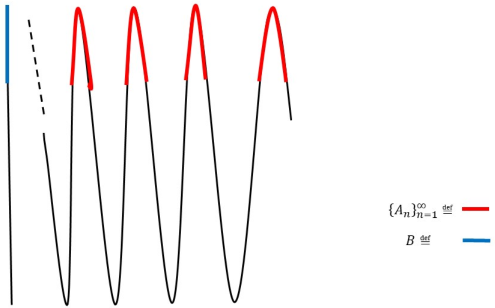
Ejemplo

Consideremos $A = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 1]\}$, $B = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, \pi]\}$. Sea $X = A \cup B$. Este continuo es conocido como la curva senoidal.



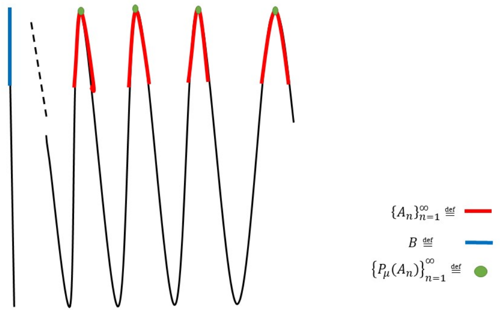
Ejemplo

Consideremos $A = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 1]\}$, $B = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, \pi]\}$. Sea $X = A \cup B$. Este continuo es conocido como la curva senoidal.



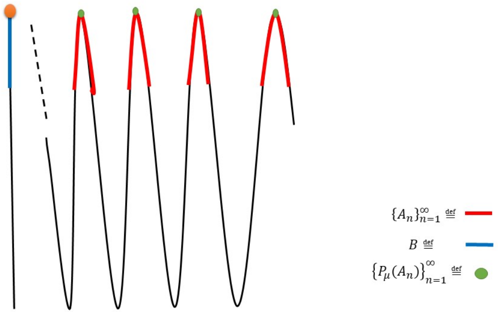
Ejemplo

Consideremos $A = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 1]\}$, $B = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, \pi]\}$. Sea $X = A \cup B$. Este continuo es conocido como la curva senoidal.



Ejemplo

Consideremos $A = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 1]\}$,
$B = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, \pi]\}$. Sea $X = A \cup B$. Este continuo es conocido como la curva senoidal.



Teorema

Sea X un continuo que contiene un arco libre B tal que $|fr_X(B)| \leq 1$. Si Y es una compactación métrica del intervalo $(0,1]$ con residuo X, entonces ninguna función punto medio en $\mathcal{M}(Y)$ es continua.

Definición

Una **gráfica finita** es un continuo el cual puede ser expresado como unión finita de arcos disjuntos o que se intersectan en uno o ambos puntos extremos.

Definición

Sea $f : X \to Y$ una función entre espacios topológicos. Diremos que f es una función **localmente inyectiva** si para cada $x \in X$, existe un abierto U en X tal que $x \in U$ y $f|_U : U \to f(U)$ es inyectiva.

Definición

Sea $f : X \to Y$ una función entre espacios topológicos. Diremos que f es una función **localmente inyectiva** si para cada $x \in X$, existe un abierto U en X tal que $x \in U$ y $f|_U : U \to f(U)$ es inyectiva.

Definición

Sean X una gráfica finita, $f : [0,1] \to X$ una función continua tal que $f(0) = f(1)$. Decimos que f es **fuertemente localmente inyectiva** si f es localmente inyectiva y existen $t_0, t_1 \in (0,1)$ tales que $t_0 < t_1$ y $f([0,t_0]) \cap f([t_1,1]) = \{f(0)\}$.

Proposición

Sea X una curva cerrada simple. Si $p \in X$, entonces existe una función $f : [0, 1] \to X$ continua, suprayectiva y fuertemente localmente inyectiva tal que $f(0) = p = f(1)$.

Teorema

Sea X una gráfica finita tal que $E(X) = \emptyset$. Si $p \in R(X)$, entonces existe una función $f : [0, 1] \to X$ continua, suprayectiva y fuertemente localmente inyectiva tal que $f(0) = p = f(1)$.

Teorema

Sean X una gráfica finita tal que $E(X) = \emptyset$, $f : [0,1] \to X$ una función continua, suprayectiva, fuertemente localmente inyectiva tal que $f(0) = p = f(1)$, para algún $p \in X$, $\alpha_n : [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \to [0,1]$ un homeomorfismo tal que $\alpha_n(\frac{1}{n+1}) = 0$ y $\alpha_n(\frac{1}{n}) = 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Definimos $h : (0,1] \to h((0,1]) \subseteq X \times [0,1]$ tal que:

$$h(x) = ((f \circ \alpha_n)(x), x), \text{ si } x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \text{ y } n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Si $Y = (X \times \{0\}) \cup h((0,1])$, entonces Y es una compactación métrica del intervalo $(0,1]$ con residuo $X \times \{0\}$.

Teorema

Si X es una gráfica finita tal que $E(X) = \emptyset$, entonces existe una compactación métrica Y, del intervalo $(0, 1]$, tal que la función punto medio en $\mathcal{M}(Y)$ es continua.

Lema

Sea X una gráfica finita. Si $E(X) \neq \emptyset$ y Y es una compactación métrica del intervalo $(0,1]$ con residuo X, entonces ninguna función punto medio es continua en $\mathcal{M}(Y)$.

Lema

Sea X una gráfica finita. Si $E(X) \neq \emptyset$ y Y es una compactación métrica del intervalo $(0,1]$ con residuo X, entonces ninguna función punto medio es continua en $\mathcal{M}(Y)$.

Corolario

Sea X una gráfica finita. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

(1) $E(X) \neq \emptyset$.

(2) Si Y es una compactación cualquiera del intervalo $(0,1]$ con residuo X, entonces ninguna de sus funciones punto medio es continua en $\mathcal{M}(Y)$.

Gracias por su atención.

Referencias

- A. Illanes and S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces. Fundamentals and recent advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.
- M. de J. López, P. Pellicer-Covarrubias, I. Serapio Ramos, *Introducción a la función punto medio en continuos*, Rev. Integr. Temas Mat. 34 (2016), No. 1, 109–123.
- S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of sets*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. Vol. 49, Marcel Dekker, Inc., New York, N. Y., 1978.
- A. Soto, *El hiperespacio de arcos de un continuo*, Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, 1999.