Domando Conjuntos y Algunas Bestias

Jesús Iván Rivera Ramírez

Escuela Superior de Física y Matemáticas - IPN

Octubre 2018

Resumen

Resumen

Definición (Conjunto de Cantor)

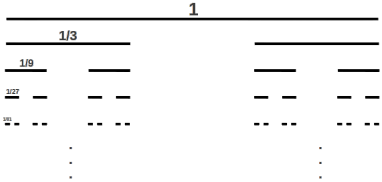
Sea $I = [0,1]$, *consideremos los siguientes conjuntos:*

$$C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$$

$$C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$$

$$\ldots$$

$\mathcal{C} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} C_n$, *al cual llamaremos el* **Conjunto de Cantor**.



Teorema (Caracterización del conjunto de Cantor)

Sea $M \subseteq \mathbb{R}^n$, si M satisface las siguientes condiciones:

- *M es compacto.*
- *M es totalmente disconexo.*
- *M es perfecto (i.e, M es cerrado y no tiene puntos aislados).*

Entonces M es **homeomorfo** *a $\mathcal{C}$, donde $\mathcal{C}$ es el conjunto de Cantor.*

Observación

Si $B \subseteq \mathbb{R}^n$ cumple con las condiciones anteriores diremos que B es de tipo Cantor.

Definición (Conjuntos Equivalentes)

Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, diremos que A y B son **equivalentes** *si existe $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ homeomorfismo tal que:*

$$h(A) = B$$

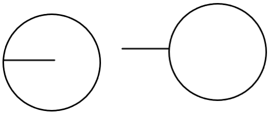


Figura: Conjuntos no equivalentes

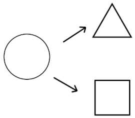


Figura: Conjuntos Equivalentes

Resumen

Ejemplos de Conjuntos Tipo Cantor

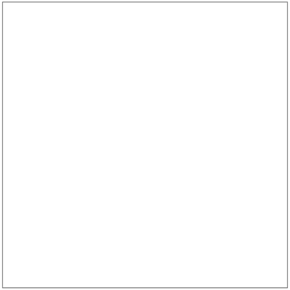


Figura: Polvo de Cantor en $\mathbb{R}^2$

Ejemplos de Conjuntos Tipo Cantor

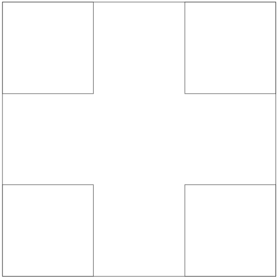


Figura: Polvo de Cantor en $\mathbb{R}^2$

Ejemplos de Conjuntos Tipo Cantor

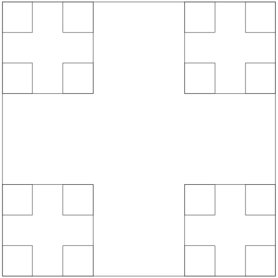


Figura: Polvo de Cantor en $\mathbb{R}^2$

Ejemplos de Conjuntos Tipo Cantor

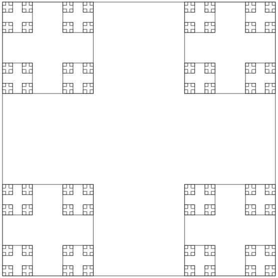


Figura: Polvo de Cantor en $\mathbb{R}^2$

Ejemplos de Conjuntos Tipo Cantor

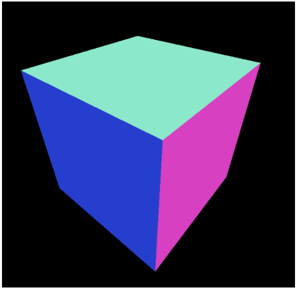


Figura: Polvo de Cantor en $\mathbb{R}^3$

Ejemplos de Conjuntos Tipo Cantor

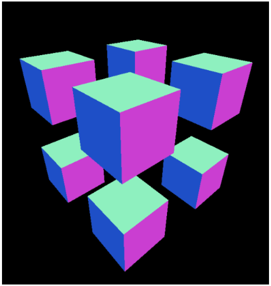


Figura: Polvo de Cantor en $\mathbb{R}^3$

Ejemplos de Conjuntos Tipo Cantor

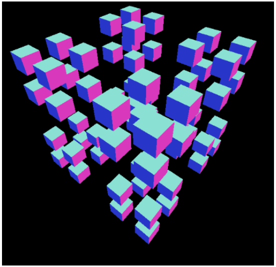


Figura: Polvo de Cantor en $\mathbb{R}^3$

Resumen

Definición (Conjunto Domable)

Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$, diremos que A es **domable** *(tame) si es equivalente a $\mathcal{C}$, en caso contrario diremos que es* **salvaje** *(wild).*

Teorema

Todos conjunto A de tipo Cantor en $\mathbb{R}^2$ es domable.

Collar de Antoine

Definición

Sea T_0 *un toro(sólido) en* $\mathbb{R}^3$*, definimos* $A_0 = T_0$ *y sean* $T_{1,1}$*,* $T_{1,2}$*,* $T_{1,3}$ *y* $T_{1,4}$ *toros, contenidos en* T_0 *y encadenados*

$$A_1 = T_{1,1} \cup T_{1,2} \cup T_{1,3} \cup T_{1,4}$$

$$\ldots$$

El collar de Antoine es $\mathcal{A} = \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$.

Collar de Antoine

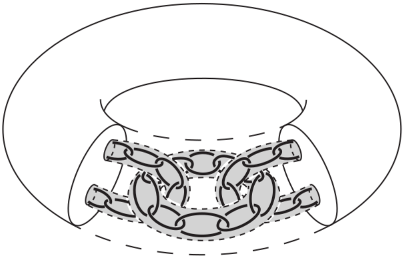


Figura: Collar de Antoine

Lema (Antoine)

El collar de Antoine no se puede **separar** *por una esfera.*

Teorema (Existencia de un conjunto salvaje en $\mathbb{R}^3$)

El collar de Antoine no es equivalente al conjunto de Cantor $\mathcal{C}$.

Ejemplos

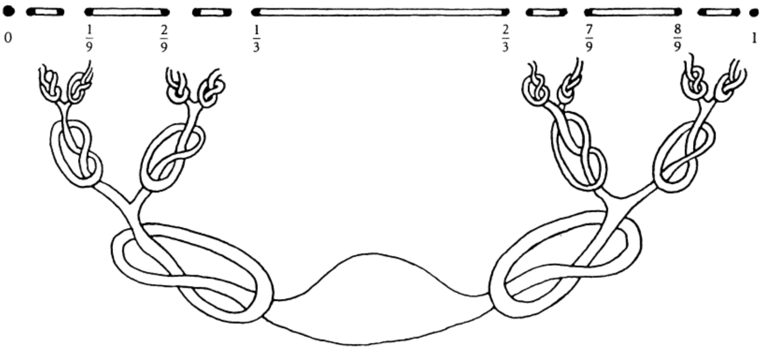


Figura: Nudo

Ejemplos

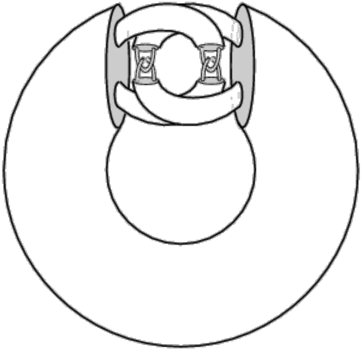


Figura: Esfera Cornuda de Alexander

Ejemplos

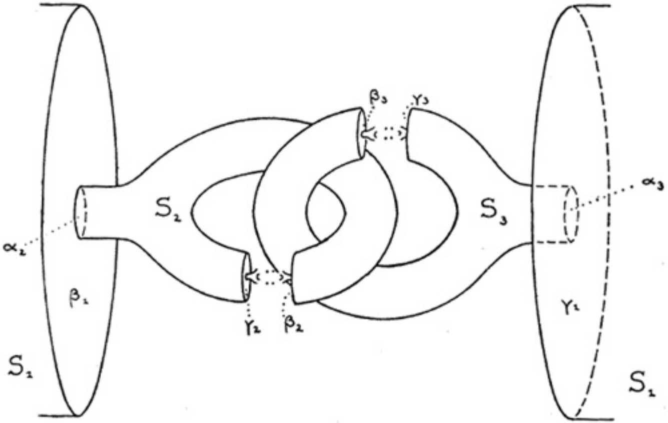


Figura: Esfera Cornuda de Alexander

Resumen

References I

Daverman, Venema
Embedings in Manifolds.
Graduate Studies in Mathematics V 106 AMS.

Moise E.E.
Geometric Topology in Dimensions 2 and 3.
Springer.

References I

Beverly L. Brechner and John C. Mayer
Antoine's Necklace or How to Keep a Necklace from Falling Apart.
The College Mathematics Journal, Vol. 19, No. 4 (Sep., 1988), pp. 306-320

R. B. Sher
Concerning wild Cantor sets in $\mathbb{R}^3$.
Proc. of the AMS 19 (1968) pp. 1195-1200