Arcos ordenados en hiperespacios de continuos no métricos

Edgar Colín Cruz
Facultad de Ciencias, UNAM

XIII Taller de Continuos, Hiperespacios y Sistemas Dinámicos

Octubre 2018

Continuo

Definición

Sea X un espacio topológico. Diremos que X es un $continuo$ si X es un espacio metrizable, compacto, conexo y no vacío.

Continuo de Hausdorff

Definición

Sea X un espacio topológico. Diremos que X es un $continuo\ de\ Hausdorff$ si X es un espacio compacto, conexo, T_2 y no vacío.

Hiperespacios

Definición

Sea X un espacio topológico. A las familias de subconjuntos de X que cumplen ciertas propiedades se les llama $hiperespacios$ de X. Los hiperespacios a considerar en esta plática son:

1. $2^X = \{A \subseteq X : A$ *es compacto y no vacío*$\}$;
2. $C(X) = \{A \in 2^X : A$ *es conexo*$\}$.

Arco ordenado

Definición

Sean X un continuo, $\mathcal{H} \in \{2^X, C(X)\}$ y $A, B \in \mathcal{H}$ tales que $A \subsetneq B$. Diremos que una función continua $\alpha : [0,1] \to \mathcal{H}$ es un $arco\ ordenado\ de\ A\ a\ B\ en$ $\mathcal{H}$, si $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = B$ y para cualesquiera $s, t \in [0,1]$ tales que $s < t$, se tiene que $\alpha(s) \subsetneq \alpha(t)$.

Teorema

Sean X un continuo y $A, B \in C(X)$ tales que $A \subsetneq B$. Entonces existe un arco ordenado de A a B en $C(X)$.

Teorema

Sean X *un continuo y* $A, B \in C(X)$ *tales que* $A \subsetneq B$. *Entonces existe un arco ordenado de* A *a* B *en* $C(X)$.

Teorema

Sean X *un continuo y* $A, B \in 2^X$ *tales que* $A \subsetneq B$. *Entonces existe un arco ordenado de* A *a* B *en* 2^X *si y solo si toda componente de* B *intersecta a* A.

Teorema

Sean X un continuo y $A, B \in C(X)$ tales que $A \subsetneq B$. Entonces existe un arco ordenado de A a B en $C(X)$.

Teorema

Sean X un continuo y $A, B \in 2^X$ tales que $A \subsetneq B$. Entonces existe un arco ordenado de A a B en 2^X si y solo si toda componente de B intersecta a A.

Lema

Existen un continuo de Hausdorff X y $A \in 2^X$ tales que no existe un arco ordenado de A a X en 2^X.

Arco generalizado

Definición

Sea X un conjunto no degenerado con un orden total $\leqslant$. Diremos que X es un $arco\ generalizado$ si se cumple lo siguiente:

1. *cada subconjunto no vacío A de X tiene una mínima cota superior y una máxima cota inferior;*
2. *dados $x, y \in X$ tales que $x < y$ existe $z \in X$ tal que $x < z < y$;*
3. *la topología en X es la inducida por el orden.*

Teorema

Sea X un conjunto totalmente ordenado y no degenerado. Entonces X es un continuo de Hausdorff con la topología del orden si y solo si X es un arco generalizado.

Arco ordenado

Definición

Sean X un continuo de Hausdorff, $\mathcal{H} \in \{2^X, C(X)\}$ y $A, B \in \mathcal{H}$ tales que $A \subsetneq B$. Un $arco\ ordenado\ de\ A\ a\ B\ en\ \mathcal{H}$ es un subespacio $\mathcal{A}$ de $\mathcal{H}$ que cumple lo siguiente:

1. *$\mathcal{A}$ es compacto y conexo;*
2. *para cualesquiera $C, D \in \mathcal{A}$, se tiene que $C \subseteq D$ o $D \subseteq C$;*
3. *$A = \cap\mathcal{A}$ y $B = \cup\mathcal{A}$.*

Teorema

Sean X un continuo de Hausdorff, $\mathcal{H} \in \{2^X, C(X)\}$ y $A, B \in \mathcal{H}$ tales que $A \subsetneq B$. Si $\mathcal{A}$ es un arco ordenado de A a B en $\mathcal{H}$, entonces $\mathcal{A}$ tiene la topología del orden dada por la contención.

Teorema

Sean X un continuo de Hausdorff, $\mathcal{H} \in \{2^X, C(X)\}$ y $A, B \in \mathcal{H}$ tales que $A \subsetneq B$. Si $\mathcal{A}$ es un arco ordenado de A a B en $\mathcal{H}$, entonces $\mathcal{A}$ tiene la topología del orden dada por la contención.

Corolario

Sean X un continuo de Hausdorff, $\mathcal{H} \in \{2^X, C(X)\}$ y $A, B \in \mathcal{H}$ tales que $A \subsetneq B$. Si $\mathcal{A}$ es un arco ordenado de A a B en $\mathcal{H}$, entonces $\mathcal{A}$ es un arco generalizado.

Teorema

Sean X un continuo de Hausdorff y $A, B \in C(X)$ tales que $A \subsetneq B$. Entonces existe un arco ordenado de A a B en $C(X)$.

Teorema

Sean X un continuo de Hausdorff y $A, B \in C(X)$ tales que $A \subsetneq B$. Entonces existe un arco ordenado de A a B en $C(X)$.

Teorema

Sean X un continuo de Hausdorff y $A, B \in 2^X$ tales que $A \subsetneq B$. Entonces existe un arco ordenado de A a B en 2^X si y solo si toda componente de B intersecta a A.

Conclusión

Dado un continuo X (métrico o no), se pueden dar condiciones necesarias y suficientes para la construcción de arcos ordenados en los hiperespacios 2^X y $C(X)$, parametrizados por arcos generalizados.

Referencias

Luis Miguel García Velázquez, Hiperespacios de continuos no métricos, Tesis de doctorado, UNAM, (2015).

Gracias por su atención