# Aproximaciones de continuos a través del rayo

Daniel Moreno Vázquez

Facultad de Ciencias, UNAM

XIII Taller de continuos, hiperespacios y sistemas dinámicos
Octubre 2018

# Hiperespacios y continuos

**Definición**

Sea $X$ un espacio topológico. Llamamos **hiperespacio** a una familia de subconjuntos de $X$ con alguna característica en particular. Uno de los hiperespacios más estudiados es

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío}\}.$$

**Definición**

Sea $X$ un espacio topológico. Decimos que $X$ es un **continuo** si es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío.

# Arcos y rayos

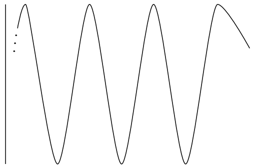
**Definición**

Decimos que un espacio topológico $X$ es un *arco* si es homeomorfo al intervalo $[0, 1]$. Similarmente, diremos que $X$ es un *rayo* si es homeomorfo al intervalo $[1, \infty)$.

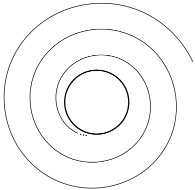
# Compactaciones del rayo

## Definición

Dado un continuo $X$, decimos que $X$ es *residuo* de alguna compactación del rayo si existen un espacio $T_2$ y compacto $Y$ y un rayo $R \subset Y$ tal que $R$ es denso en $Y$ y $Y \setminus R$ es homeomorfo a $X$.



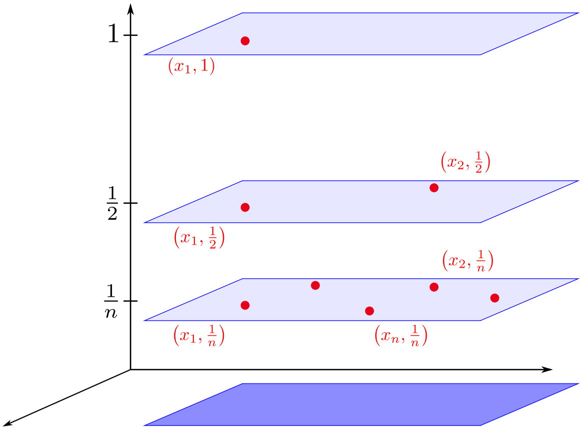
Compactación del rayo con residuo un arco



Compactación del rayo con residuo $S^1$

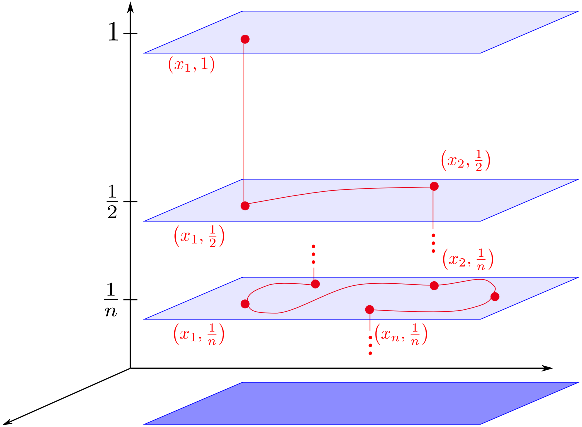
## Teorema

Todo continuo $X$ es residuo de alguna compactación del rayo.



**Teorema**

Todo continuo $X$ es residuo de alguna compactación del rayo.



# Compactaciones del rayo

**Teorema (Martínez De la Vega, V. y Minc P., 2014)**

Para todo continuo no degenerado $X$ existe una cantidad no numerable de compactaciones del rayo no homeomorfas entre sí y con residuo $X$.

# Descomposición

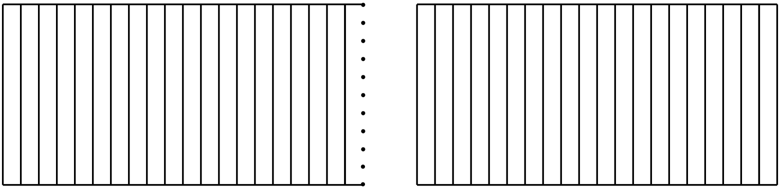
**Definición**

Una *descomposición* de un espacio topológico $X$ es una familia $\mathcal{D}$ de subconjuntos de $X$, no vacíos y ajenos dos a dos, tal que $\bigcup \mathcal{D} = X$.

# Descomposición continua

## Definición

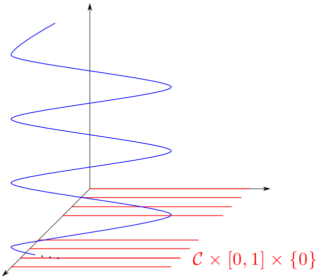
Sea $\mathcal{D}$ una descomposición del espacio topológico $X$. Definimos $X/\mathcal{D}$ como el conjunto cuyos elementos son los elementos de $\mathcal{D}$. La función $q\colon X \to X/\mathcal{D}$ que manda a cada $x \in X$ al único elemento $D \in \mathcal{D}$ tal que $x \in D$, es llamada *función cociente*. Diremos que $X/\mathcal{D}$ es una *descomposición continua* si $\mathcal{D} \subset 2^X$ y la función cociente $q\colon X \to 2^X$ es continua.



## Teorema (Minc, P., 2016)

Para cada continuo no degenerado $X$ existe un espacio métrico compacto $K$ tal que

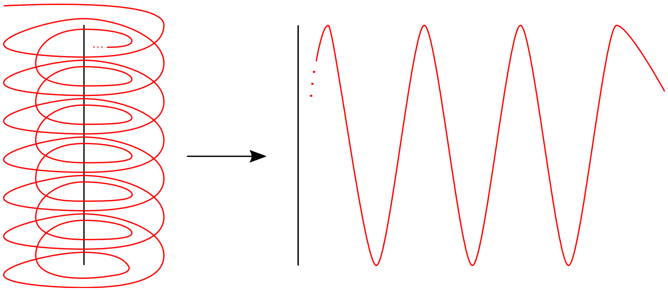
- las componentes de $K$ son no homeomorfas entre sí y cada una de ellas es una compactación del rayo con residuo $X$, y
- la descomposición de $K$ en sus componentes es continua, y el espacio de descomposición es homeomorfo al conjunto de Cantor.



# Compactaciones del rayo

**Teorema (Nadler S. B. y Quinn, J., 1972)**

Toda compactación del rayo con residuo un arco se puede encajar en plano euclidiano de tal manera que la imagen del arco es el $\{0\} \times [0,1]$ y la imagen del rayo es la gráfica de una función continua $f\colon (0,1] \to [0,1]$.



**Definición**

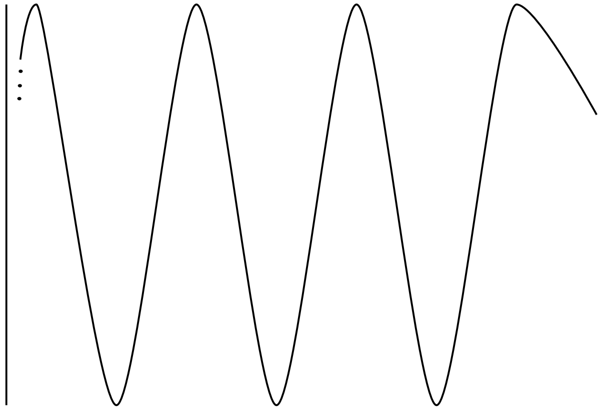
Sea $(X, d)$ un espacio métrico. Una *cadena en* $X$ *es una familia indexada de conjuntos no vacíos abiertos en* $X$, $C = \{U_1, \ldots, U_n\}$, *tales que* $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ *si y sólo si* $|i - j| \leq 1$.
*Dada* $\epsilon > 0$, *decimos que* $C$ *es una* $\epsilon$*-cadena si diám*$(U) < \epsilon$ *para cada* $U \in C$.

**Definición**

Decimos que un continuo $X$ es *encadenable* si para cada $\epsilon > 0$ existe una $\epsilon$-cadena que cubre a $X$.

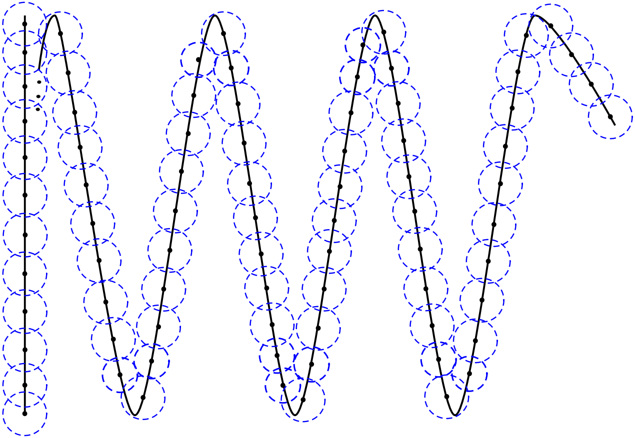
## Teorema

Toda compactación del rayo con residuo un arco es encadenable.



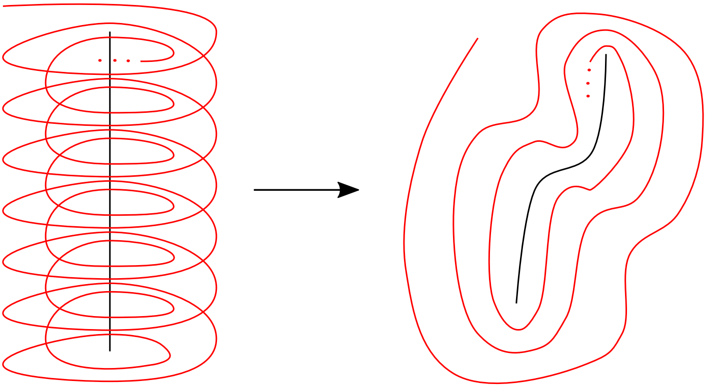
## Teorema

Toda compactación del rayo con residuo un arco es encadenable.



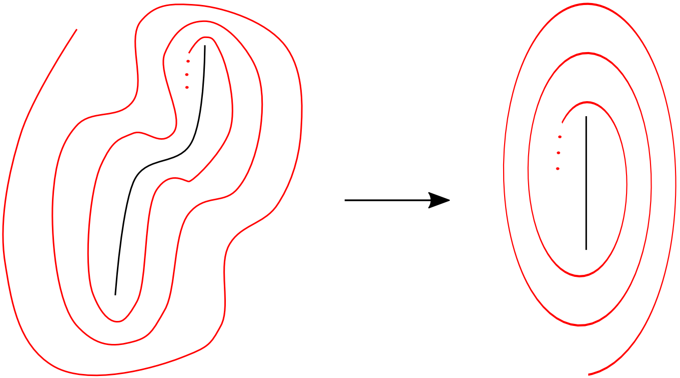
## Teorema

Todo continuo encadenable es homeomorfo a algún continuo contenido en el plano euclidiano.



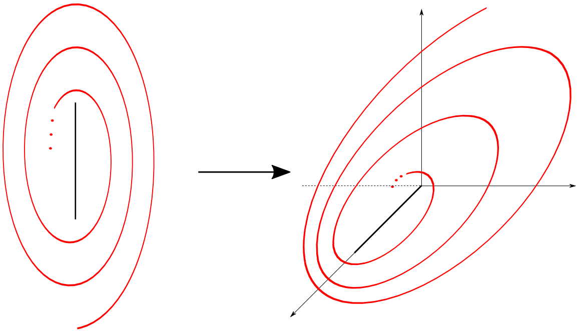
## Teorema

Para cualquiera dos arcos $A_1$ y $A_2$ contenidos en $\mathbb{R}^2$ existe un homeomorfismo $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\alpha(A_1) = A_2$.



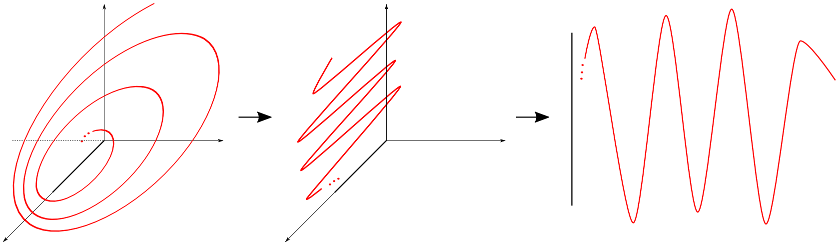
Por lo anterior, podemos suponer que cualquier compactación del rayo con residuo un arco $Y = R \cup I$ está encajada en $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$, de tal manera que $I = \{0\} \times [0,1] \times \{0\}$. Sea $h\colon R \to (0,1]$ un homeomorfismo. Consideremos el encaje $g\colon Y \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$g(x,y,0) = \begin{cases} (0,y,0) & \text{si } (x,y,0) \in I \\ (0,y,h(x,y,0)) & \text{si } (x,y,0) \in R. \end{cases}$$



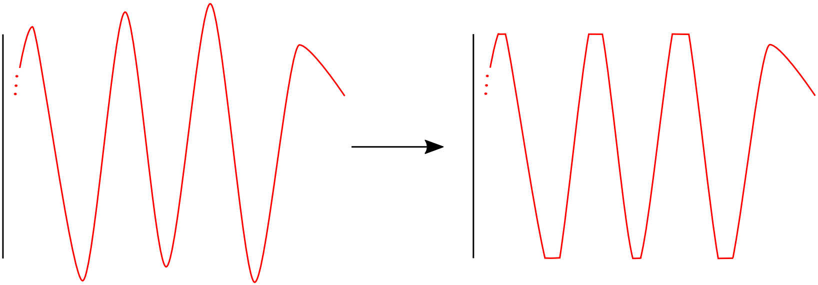
Luego, aplicamos el encaje $\phi\colon g(Y) \to \mathbb{R}^2$ definido como

$$\phi(0, y, z) = \begin{cases} (0, y) & \text{si } z = 0 \\ (h(x, y, 0), y) & \text{si } z = h(x, y, 0). \end{cases}$$



Finalmente, componemos con $\psi\colon \phi(g(Y)) \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\psi(x,y) = \begin{cases} (x,1) & \text{si } y \leq 1, \\ (x,y) & \text{si } 0 \leq y \leq 1, \\ (x,0) & \text{si } y \leq 0. \end{cases}$$



## Referencias

Martínez De la Vega, V. and Minc, P., *Uncountable families of metric compactifications of the ray*, 2014.

Minc, P., $2^{\aleph_0}$ *ways of approaching a continuum with* $[1, \infty)$, Department of Mathematics and Statistics, Auburn University, 2016.

Nadler, S. B. and Quinn, J., Embeddability and structure properties of real curves, American Mathematical Soc., 1972, 20-22.

Gracias por su atención