Propiedades Secuenciales Fuertes Whitney Reversibles

A. Luisa Ramírez Bautista

Benémerita Universidad Autónoma de Puebla

Maestría en Ciencias Matemáticas

Octubre 2018

Preliminares

Definición

- Un continuo es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío.

Preliminares

Definición

- Un continuo es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío.
- Un subconjunto no vacío A de X, es un subcontinuo de X si A es cerrado y conexo.

Preliminares

Definición

- Un continuo es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío.
- Un subconjunto no vacío A de X, es un subcontinuo de X si A es cerrado y conexo.

Preliminares

Definición

- Un continuo es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío.
- Un subconjunto no vacío A de X, es un subcontinuo de X si A es cerrado y conexo.

Definición

Sea X un continuo. Se definen los siguientes hiperespacios de X:

Preliminares

Definición

- Un continuo es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío.
- Un subconjunto no vacío A de X, es un subcontinuo de X si A es cerrado y conexo.

Definición

Sea X un continuo. Se definen los siguientes hiperespacios de X:

- $2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío}\}$;

Preliminares

Definición

- Un continuo es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío.
- Un subconjunto no vacío A de X, es un subcontinuo de X si A es cerrado y conexo.

Definición

Sea X un continuo. Se definen los siguientes hiperespacios de X:

- $2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío}\}$;
- $C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo }\}$;

Continuo límite máximo

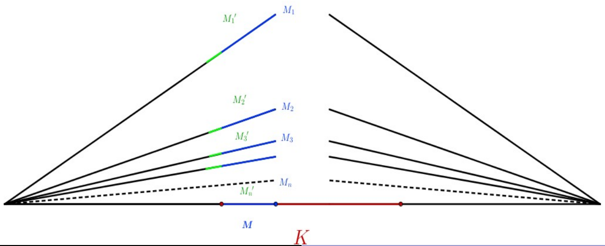
Definición

Sean K, M subcontinuos de un continuo X. Decimos que $M \subset K$ es continuo límite máximo en K, si existe una sucesión $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de $C(X)$ tal que $\lim_{n\to\infty} M_n = M$ y si $\{M'_n\}_{n=1}^{\infty}$ es otra sucesión de elementos de $C(X)$ con $M_n \subset M'_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} M'_n = M' \subset K$, se tiene que $M = M'$.

Continuo límite máximo

Definición

Sean K, M subcontinuos de un continuo X. Decimos que $M \subset K$ es continuo límite máximo en K, si existe una sucesión $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de $C(X)$ tal que $\lim_{n\to\infty} M_n = M$ y si $\{M_n'\}_{n=1}^{\infty}$ es otra sucesión de elementos de $C(X)$ con $M_n \subset M_n'$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} M_n' = M' \subset K$, se tiene que $M = M'$.



Continuo de Kelley

Definición

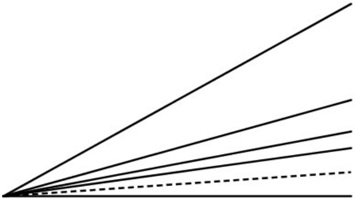
Un continuo X es Kelley siempre que para cada $p \in X$ y cada $K \in C(X)$ que contenga a p y cada sucesión de puntos $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ de X tal que $\lim_{n\to\infty} p_n = p$, exista una sucesión de subcontinuos $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ de X tal que $p_n \in K_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} K_n = K$.

Continuo de Kelley-Ejemplos

Ejemplos:

Continuo de Kelley-Ejemplos

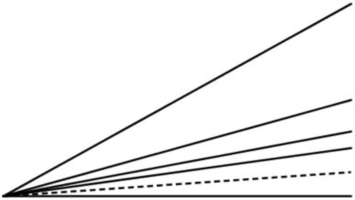
Ejemplos:



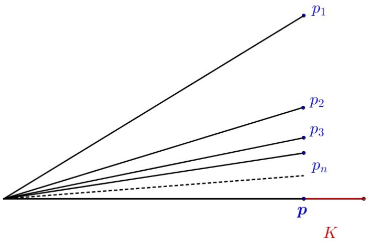
Continuo de Kelley

Continuo de Kelley-Ejemplos

Ejemplos:



Continuo de Kelley



Continuo que no es de Kelley

Continuo Semi-Kelley

Definición

Un continuo X es Semi-Kelley siempre que para cada subcontinuo K y cualquiera dos continuos límites máximales M y N en K, se tiene que $M \subseteq N$ ó $N \subseteq M$.

Continuo Semi-Kelley

Definición

Un continuo X es Semi-Kelley siempre que para cada subcontinuo K y cualquiera dos continuos límites máximales M y N en K, se tiene que $M \subseteq N$ ó $N \subseteq M$.

Proposición

Un continuo X es de Kelley si y sólo si para cada subcontinuo K de X el único continuo límite máximal en K es K mismo.

Continuo Semi-Kelley

Definición

Un continuo X es Semi-Kelley siempre que para cada subcontinuo K y cualquiera dos continuos límites máximales M y N en K, se tiene que $M \subseteq N$ ó $N \subseteq M$.

Proposición

Un continuo X es de Kelley si y sólo si para cada subcontinuo K de X el único continuo límite máximal en K es K mismo.

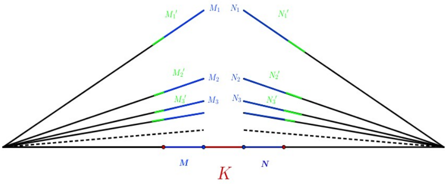
Teniendo así Kelley $\Rightarrow$ Semi-Kelley.

Continuo Semi-Kelley - Ejemplos

Ejemplos:

Continuo Semi-Kelley - Ejemplos

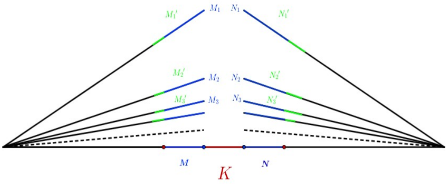
Ejemplos:



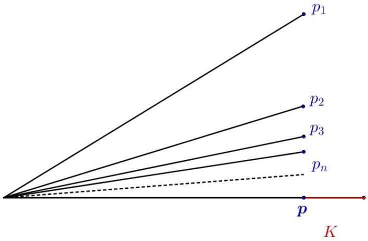
Continuo que no es Semi-Kelley.

Continuo Semi-Kelley - Ejemplos

Ejemplos:



Continuo que no es Semi-Kelley.



Semi-Kelley $\not\Rightarrow$ Kelley.

Función de Whitney y Nivel de Whitney

Definición

Sea X un continuo. Una función de Whitney para $C(X)$ es una función continua $\mu : C(X) \to [0,1]$ que satisface las siguientes condiciones:

Función de Whitney y Nivel de Whitney

Definición

Sea X un continuo. Una función de Whitney para $C(X)$ es una función continua $\mu : C(X) \rightarrow [0,1]$ que satisface las siguientes condiciones:

i) Para toda $x \in X$, se tiene que $\mu(\{x\}) = 0$;

Función de Whitney y Nivel de Whitney

Definición

Sea X un continuo. Una función de Whitney para $C(X)$ es una función continua $\mu : C(X) \to [0, 1]$ que satisface las siguientes condiciones:

i) Para toda $x \in X$, se tiene que $\mu(\{x\}) = 0$;

ii) Para cada $A, B \in C(X)$, se tiene que $\mu(A) < \mu(B)$ siempre que $A \subsetneq B$;

Función de Whitney y Nivel de Whitney

Definición

Sea X un continuo. Una función de Whitney para $C(X)$ es una función continua $\mu : C(X) \to [0,1]$ que satisface las siguientes condiciones:

i) Para toda $x \in X$, se tiene que $\mu(\{x\}) = 0$;

ii) Para cada $A, B \in C(X)$, se tiene que $\mu(A) < \mu(B)$ siempre que $A \subsetneq B$;

iii) $\mu(X) = 1$.

Función de Whitney y Nivel de Whitney

Definición

Sea X un continuo. Una función de Whitney para $C(X)$ es una función continua $\mu : C(X) \to [0,1]$ que satisface las siguientes condiciones:

i) Para toda $x \in X$, se tiene que $\mu(\{x\}) = 0$;

ii) Para cada $A, B \in C(X)$, se tiene que $\mu(A) < \mu(B)$ siempre que $A \subsetneq B$;

iii) $\mu(X) = 1$.

Función de Whitney y Nivel de Whitney

Definición

Sea X un continuo. Una función de Whitney para $C(X)$ es una función continua $\mu : C(X) \to [0,1]$ que satisface las siguientes condiciones:

i) Para toda $x \in X$, se tiene que $\mu(\{x\}) = 0$;

ii) Para cada $A, B \in C(X)$, se tiene que $\mu(A) < \mu(B)$ siempre que $A \subsetneq B$;

iii) $\mu(X) = 1$.

Definición

Sea X un continuo, $\mu : C(X) \longrightarrow [0,1]$ una función de Whitney y $t \in [0,1]$, el nivel de Whitney para $C(X)$ en t es el conjunto de la forma $\mu^{-1}(t)$.

Propiedades con funciones de Whitney

Una propiedad topológica $\mathcal{P}$ es una propiedad:

Propiedades con funciones de Whitney

Una propiedad topológica $\mathcal{P}$ es una propiedad:

- Whitney, si para todo continuo X con la propiedad $\mathcal{P}$, para cada función de Whitney para $C(X)$ y para cada $t \in (0,1)$ se tiene que $\mu^{-1}(t)$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$;

Propiedades con funciones de Whitney

Una propiedad topológica $\mathcal{P}$ es una propiedad:

- Whitney, si para todo continuo X con la propiedad $\mathcal{P}$, para cada función de Whitney para $C(X)$ y para cada $t \in (0,1)$ se tiene que $\mu^{-1}(t)$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$;
- Whitney Reversible, si para todo continuo X y toda función de Whitney μ para $C(X)$ tal que para todo $t \in (0,1)$ si $\mu^{-1}(t)$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$, entonces X tiene la propiedad $\mathcal{P}$;

Propiedades con funciones de Whitney

Una propiedad topológica $\mathcal{P}$ es una propiedad:

- Whitney, si para todo continuo X con la propiedad $\mathcal{P}$, para cada función de Whitney para $C(X)$ y para cada $t \in (0,1)$ se tiene que $\mu^{-1}(t)$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$;
- Whitney Reversible, si para todo continuo X y toda función de Whitney μ para $C(X)$ tal que para todo $t \in (0,1)$ si $\mu^{-1}(t)$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$, entonces X tiene la propiedad $\mathcal{P}$;
- Fuerte Whitney Reversible, siempre que para cualquier continuo X y para alguna función de Whitney μ para $C(X)$ y todo $t \in (0,1)$ tal que $\mu^{-1}(t)$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$, entonces X tiene la propiedad $\mathcal{P}$;

Propiedades con funciones de Whitney

- Secuencial Fuerte Whitney Reversible, siempre que para cualquier continuo X tal que existe una función de Whitney μ para $C(X)$ y una sucesión $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $(0,1)$ tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ y $\mu^{-1}(t_n)$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$ para cada n, entonces X tiene la propiedad $\mathcal{P}$.

Propiedades con funciones de Whitney

- Secuencial Fuerte Whitney Reversible, siempre que para cualquier continuo X tal que existe una función de Whitney μ para $C(X)$ y una sucesión $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $(0,1)$ tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ y $\mu^{-1}(t_n)$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$ para cada n, entonces X tiene la propiedad $\mathcal{P}$.

Propiedades con funciones de Whitney

- Secuencial Fuerte Whitney Reversible, siempre que para cualquier continuo X tal que existe una función de Whitney μ para $C(X)$ y una sucesión $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $(0,1)$ tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ y $\mu^{-1}(t_n)$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$ para cada n, entonces X tiene la propiedad $\mathcal{P}$.

Notemos que:
Secuencial Fuerte Whitney Reversible $\Rightarrow$ Fuerte Whitney Reversible $\Rightarrow$ Whitney Reversible.

Propiedad Kelley

En 1977, R.W Wardle: ¿La propiedad de Kelley es una propiedad de Whitney?

Propiedad Kelley

En 1977, R.W Wardle: ¿La propiedad de Kelley es una propiedad de Whitney?

En 1991, H. Kato: Es suficiente probar que si X tiene la propiedad de Kelley, entonces $X \times [0, 1]$ tiene la propiedad de Kelley.

Propiedad Kelley

En 1977, R.W Wardle: ¿La propiedad de Kelley es una propiedad de Whitney?

En 1991, H. Kato: Es suficiente probar que si X tiene la propiedad de Kelley, entonces $X \times [0, 1]$ tiene la propiedad de Kelley.

Teorema (J.J. Charatonik and W.J. Charatonik, 2008.)

Existe un continuo X que tiene las siguientes propiedades:

Propiedad Kelley

En 1977, R.W Wardle: ¿La propiedad de Kelley es una propiedad de Whitney?

En 1991, H. Kato: Es suficiente probar que si X tiene la propiedad de Kelley, entonces $X \times [0,1]$ tiene la propiedad de Kelley.

Teorema (J.J. Charatonik and W.J. Charatonik, 2008.)

Existe un continuo X que tiene las siguientes propiedades:

1. X tiene la propiedad de Kelley;

Propiedad Kelley

En 1977, R.W Wardle: ¿La propiedad de Kelley es una propiedad de Whitney?
En 1991, H. Kato: Es suficiente probar que si X tiene la propiedad de Kelley, entonces $X \times [0,1]$ tiene la propiedad de Kelley.

Teorema (J.J. Charatonik and W.J. Charatonik, 2008.)

Existe un continuo X que tiene las siguientes propiedades:

1. X tiene la propiedad de Kelley;
2. $X \times [0,1]$ no tiene la propiedad de Kelley;

Propiedad Kelley

En 1977, R.W Wardle: ¿La propiedad de Kelley es una propiedad de Whitney?

En 1991, H. Kato: Es suficiente probar que si X tiene la propiedad de Kelley, entonces $X \times [0,1]$ tiene la propiedad de Kelley.

Teorema (J.J. Charatonik and W.J. Charatonik, 2008.)

Existe un continuo X que tiene las siguientes propiedades:

1. X tiene la propiedad de Kelley;
2. $X \times [0,1]$ no tiene la propiedad de Kelley;
3. El hiperespacio $C(X)$ no tiene la propiedad de Kelley;

Propiedad Kelley

En 1977, R.W Wardle: ¿La propiedad de Kelley es una propiedad de Whitney?
En 1991, H. Kato: Es suficiente probar que si X tiene la propiedad de Kelley, entonces $X \times [0,1]$ tiene la propiedad de Kelley.

Teorema (J.J. Charatonik and W.J. Charatonik, 2008.)

Existe un continuo X que tiene las siguientes propiedades:

1. X tiene la propiedad de Kelley;
2. $X \times [0,1]$ no tiene la propiedad de Kelley;
3. El hiperespacio $C(X)$ no tiene la propiedad de Kelley;
4. Para cada función de Whitney $\mu : C(X) \to [0, \infty)$ existe un número $\delta > 0$ tal que para cada $t \in (0, \delta)$ el nivel de Whitney $\mu^{-1}(t)$ no tiene la propiedad de Kelley.

Propiedad Kelley

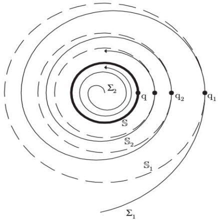
Corolario

La propiedad de Kelley no es una propiedad de Whitney.

Propiedad Kelley

Corolario

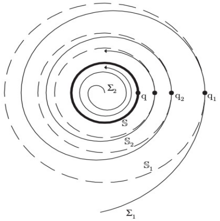
La propiedad de Kelley no es una propiedad de Whitney.



Propiedad Kelley

Corolario

La propiedad de Kelley no es una propiedad de Whitney.



Teorema (A. Illanes and S.B. Nadler)

La propiedad de ser Kelley es una propiedad Secuencial Fuerte Whitney Reversible.

Propiedad Semi-Kelley

En 1998, J.J. Charatonik and W.J. Charatonik: ¿Es cierto que si un continuo X de Kelley, entonces $X \times [0, 1]$ es Semi- Kelley?

Propiedad Semi-Kelley

En 1998, J.J. Charatonik and W.J. Charatonik: ¿Es cierto que si un continuo X de Kelley, entonces $X \times [0, 1]$ es Semi- Kelley?

En 2013, A.Illanes: ¿La propiedad de Semi-Kelley es propiedad de Whitney?

Propiedad Semi-Kelley

En 1998, J.J. Charatonik and W.J. Charatonik: ¿Es cierto que si un continuo X de Kelley, entonces $X \times [0,1]$ es Semi- Kelley?
En 2013, A.Illanes: ¿La propiedad de Semi-Kelley es propiedad de Whitney?

Teorema (Castañeda-Alvarado E. y Vidal-Escobar I., 2017.)

Existe un continuo X que tiene las siguientes propiedades:

Propiedad Semi-Kelley

En 1998, J.J. Charatonik and W.J. Charatonik: ¿Es cierto que si un continuo X de Kelley, entonces $X \times [0, 1]$ es Semi- Kelley?
En 2013, A.Illanes: ¿La propiedad de Semi-Kelley es propiedad de Whitney?

Teorema (Castañeda-Alvarado E. y Vidal-Escobar I., 2017.)

Existe un continuo X que tiene las siguientes propiedades:

1. X tiene la propiedad de Kelley;

Propiedad Semi-Kelley

En 1998, J.J. Charatonik and W.J. Charatonik: ¿Es cierto que si un continuo X de Kelley, entonces $X \times [0,1]$ es Semi- Kelley?
En 2013, A.Illanes: ¿La propiedad de Semi-Kelley es propiedad de Whitney?

Teorema (Castañeda-Alvarado E. y Vidal-Escobar I., 2017.)

Existe un continuo X que tiene las siguientes propiedades:

1. X tiene la propiedad de Kelley;
2. $X \times [0,1]$ no es Semi-Kelley;

Propiedad Semi-Kelley

En 1998, J.J. Charatonik and W.J. Charatonik: ¿Es cierto que si un continuo X de Kelley, entonces $X \times [0, 1]$ es Semi- Kelley?
En 2013, A.Illanes: ¿La propiedad de Semi-Kelley es propiedad de Whitney?

Teorema (Castañeda-Alvarado E. y Vidal-Escobar I., 2017.)

Existe un continuo X que tiene las siguientes propiedades:

1. X tiene la propiedad de Kelley;
2. $X \times [0, 1]$ no es Semi-Kelley;
3. El hiperespacio $C(X)$ no es Semi-Kelley;

Propiedad Semi-Kelley

En 1998, J.J. Charatonik and W.J. Charatonik: ¿Es cierto que si un continuo X de Kelley, entonces $X \times [0,1]$ es Semi- Kelley?
En 2013, A.Illanes: ¿La propiedad de Semi-Kelley es propiedad de Whitney?

Teorema (Castañeda-Alvarado E. y Vidal-Escobar I., 2017.)

Existe un continuo X que tiene las siguientes propiedades:

1. X tiene la propiedad de Kelley;
2. $X \times [0,1]$ no es Semi-Kelley;
3. El hiperespacio $C(X)$ no es Semi-Kelley;
4. Para cada función de Whitney $\mu : C(X) \to [0,\infty)$ existe un número $\delta > 0$ tal que para cada $t \in (0,\delta)$ el nivel de Whitney $\mu^{-1}(t)$ no es Semi-Kelley.

Propiedad Semi-Kelley

Corolario

La propiedad de Semi-Kelley no es una propiedad de Whitney.

Propiedad Semi-Kelley

Corolario

La propiedad de Semi-Kelley no es una propiedad de Whitney.

Teorema (Santiago-Santos A. y Vidal-Escobar I., 2018.)

La propiedad de ser Semi-Kelley es una propiedad Secuencial Fuerte reversible de Whitney.

Propiedad Semi-Kelley

Corolario

La propiedad de Semi-Kelley no es una propiedad de Whitney.

Teorema (Santiago-Santos A. y Vidal-Escobar I., 2018.)

La propiedad de ser Semi-Kelley es una propiedad Secuencial Fuerte reversible de Whitney.

Corolario

Sea X un continuo, la propiedad de Semi-Kelley es:

Propiedad Semi-Kelley

Corolario

La propiedad de Semi-Kelley no es una propiedad de Whitney.

Teorema (Santiago-Santos A. y Vidal-Escobar I., 2018.)

La propiedad de ser Semi-Kelley es una propiedad Secuencial Fuerte reversible de Whitney.

Corolario

Sea X un continuo, la propiedad de Semi-Kelley es:

- $a)$ *Fuerte Reversible de Whitney;*

Propiedad Semi-Kelley

Corolario

La propiedad de Semi-Kelley no es una propiedad de Whitney.

Teorema (Santiago-Santos A. y Vidal-Escobar I., 2018.)

La propiedad de ser Semi-Kelley es una propiedad Secuencial Fuerte reversible de Whitney.

Corolario

Sea X un continuo, la propiedad de Semi-Kelley es:

- a) *Fuerte Reversible de Whitney;*
- b) *Whitney reversible.*


Gracias