Hiperespacios del Espacio Erdős Completo

Alfredo Zaragoza

F. C UNAM

2018

El espacio de Erdős completo

En 1940 P. Erdős definió los siguientes subespacios del espacio de Hilbert ℓ^2.

$$\mathfrak{E} = \{x \in \ell^2 : x_i \in \mathbb{Q} \textit{ para todo } i \in \omega\}$$

$$\mathfrak{E}_c = \{x \in \ell^2 : x_i \in \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \textit{ para todo } i \in \omega\}$$

En 1940 P. Erdős definió los siguientes subespacios del espacio de Hilbert ℓ^2.

$$\mathfrak{E} = \{x \in \ell^2 : x_i \in \mathbb{Q} \textit{ para todo } i \in \omega\}$$

$$\mathfrak{E}_c = \{x \in \ell^2 : x_i \in \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \textit{ para todo } i \in \omega\}$$

El espacio $\mathfrak{E}$ se le conoce como el espacio de Erdős y a $\mathfrak{E}_c$ como el espacio de Erdős completo, por que es topológicamente completo.
Estos espacios sirvieron para dar ejemplos de espacios de dimensión uno cuyo cuadrado también es de dimensión 1.

Erdős demostró que cualquier abierto-cerrado C no vacío de $\mathfrak{E}_c$ y de $\mathfrak{E}$ es no acotado.
Esto implica que para todo $x \in \mathfrak{E}_c$ existe una vecindad V tal que $x \in V$ y que no contiene abiertos-cerrados, basta una bola con centro x y diámetro menor que 1.

Erdős demostró que cualquier abierto-cerrado C no vacío de $\mathfrak{E}_c$ y de $\mathfrak{E}$ es no acotado.
Esto implica que para todo $x \in \mathfrak{E}_c$ existe una vecindad V tal que $x \in V$ y que no contiene abiertos-cerrados, basta una bola con centro x y diámetro menor que 1.
Esta propiedad es fundamental del espacio de Erdős completo $\mathfrak{E}_c$ y Dijkstra y Van Mill la formalizaron de la siguiente manera.

Definición

Un espacio X es cohesivo si para cada $x \in X$, existe una vecindad V de x tal que V no contiene abiertos-cerrados de X.

Definición

Un espacio X es cohesivo si para cada $x \in X$, existe una vecindad V de x tal que V no contiene abiertos-cerrados de X.

Ejemplos

1. $\mathfrak{E}_c$
2. $\mathfrak{E}$

Sea $\phi : X \to [0, \infty)$, decimos que es una función de Lelek.

1. Si X es cero dimensional y ϕ es semicontinua superiormente, es decir $\{x \in X : \phi(x) < t\}$ es abierto en X para cada $t \in (0, \infty)$.
2. $G_0^\phi = \{(x, \phi(x)) : \phi(x) > 0\}$, es denso en $L_0^\phi = \{(x, t) : x \in X, 0 \leq t \leq \phi(x)\}$

El espacio de Erdős completo

Sea $\phi : X \to [0, \infty)$, decimos que es una función de Lelek.

1. Si X es cero dimensional y ϕ es semicontinua superiormente, es decir $\{x \in X : \phi(x) < t\}$ es abierto en X para cada $t \in (0, \infty)$.
2. $G_0^\phi = \{(x, \phi(x)) : \phi(x) > 0\}$, es denso en $L_0^\phi = \{(x, t) : x \in X, 0 \leq t \leq \phi(x)\}$

En 1996 K. Kawamura y L.G. Oversteegen demostraron, que el espacio de Erdős completo es homeomorfo a G_0^ϕ, donde ϕ es una función de Lelek, cuyo dominio es el conjunto de cantor.

En 2009 con los trabajos de K. Kawamura y L.G. Oversteegen y de Erdős, Dijkstra y Van Mill demostraron el siguiente teorema.

Teorema (Dijkstra y Van Mill 2009)

X es homeomorfo a $\mathfrak{E}_c$ si y sólo si X es cohesivo y hay una topología cero dimensional $\mathcal{W}$ en X más gruesa que la topología dada, tal que cualquier punto en X tiene una base de vecindades que es compacta respecto a $\mathcal{W}$.

Para un espacio topológico X, sean $\mathcal{CL}(X)$ el conjunto de todos los subconjuntos cerrados no vacíos de X y

$$\mathcal{K}(X) = \{K \in \mathcal{CL}(X) : K \textit{ es compacto}\}$$

$$\mathcal{F}_n(X) = \{F \in \mathcal{CL}(X) : |F| \leq n\}$$

y

$$\mathcal{F}(X) = \{F \in \mathcal{CL}(X) : |F| < \omega\}$$

A estos conjuntos los consideraremos con la topología de Vietoris.

La topología de Vietoris tiene como subbase los siguientes conjuntos

$$\langle V \rangle = \{A \in \mathcal{CL}(X) : A \subset V\}$$

$$\langle X, V \rangle = \{A \in \mathcal{CL}(X) : A \cap V \neq \emptyset\},$$

donde V es un subconjunto abierto de X. Así un abierto canónico en $\mathcal{CL}(X)$ es de la forma

$$\langle U_1, \dots, U_n \rangle = \{A \in \mathcal{CL}(X) : A \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_k, \ \textit{y } A \cap U_k \neq \emptyset \textit{ para todo } k \leq n\}$$

donde $U_1, \dots, U_n$ son subconjutos abiertos de X.

Se sabe que $\mathcal{K}(2^\omega)$ es homeomorfo a 2^ω. Entonces nos preguntamos lo siguiente.

1. ¿ Es $\mathcal{K}(\mathfrak{E}_c)$ es homeomorfo a $\mathfrak{E}_c$?
2. ¿ Es $\mathcal{F}(\mathfrak{E}_c)$ es homeomorfo a $\mathfrak{E}_c$?
3. ¿ Es $\mathcal{F}_n(\mathfrak{E}_c)$ es homeomorfo a $\mathfrak{E}_c$?

Se sabe que $\mathcal{K}(2^{\omega})$ es homeomorfo a 2^{ω}. Entonces nos preguntamos lo siguiente.

1. ¿ Es $\mathcal{K}(\mathfrak{E}_c)$ es homeomorfo a $\mathfrak{E}_c$?
2. ¿ Es $\mathcal{F}(\mathfrak{E}_c)$ es homeomorfo a $\mathfrak{E}_c$?
3. ¿ Es $\mathcal{F}_n(\mathfrak{E}_c)$ es homeomorfo a $\mathfrak{E}_c$?

Para ver que alguno de los hiperespacios mencionados en la pregunta anterior sean homeomorfo a $\mathfrak{E}_c$, hay que probar dos cosas.

1. $\mathcal{K}(\mathfrak{E}_c)$, $\mathcal{F}(\mathfrak{E}_c)$ y $\mathcal{F}_n(\mathfrak{E}_c)$ sean cohesivos.

Se sabe que $\mathcal{K}(2^\omega)$ es homeomorfo a 2^ω. Entonces nos preguntamos lo siguiente.

1. ¿ Es $\mathcal{K}(\mathfrak{E}_c)$ es homeomorfo a $\mathfrak{E}_c$?
2. ¿ Es $\mathcal{F}(\mathfrak{E}_c)$ es homeomorfo a $\mathfrak{E}_c$?
3. ¿ Es $\mathcal{F}_n(\mathfrak{E}_c)$ es homeomorfo a $\mathfrak{E}_c$?

Para ver que alguno de los hiperespacios mencionados en la pregunta anterior sean homeomorfo a $\mathfrak{E}_c$, hay que probar dos cosas.

1. $\mathcal{K}(\mathfrak{E}_c)$, $\mathcal{F}(\mathfrak{E}_c)$ y $\mathcal{F}_n(\mathfrak{E}_c)$ sean cohesivos.
2. $\mathcal{K}(\mathfrak{E}_c)$, $\mathcal{F}(\mathfrak{E}_c)$ y $\mathcal{F}_n(\mathfrak{E}_c)$ tengan una topología cero dimensional $\mathcal{W}$ en más gruesa que la topología dada, tal que cualquier punto en $\mathcal{K}(\mathfrak{E}_c)$, ó $\mathcal{F}(\mathfrak{E}_c)$ ó $\mathcal{F}_n(\mathfrak{E}_c)$ tengan una base de vecindades que es compacta respecto a $\mathcal{W}$.

Lema (A. Zaragoza 2018)

$\mathcal{K}(\mathfrak{E}_c)$, $\mathcal{F}(\mathfrak{E}_c)$ y $\mathcal{F}_n(\mathfrak{E}_c)$ son cohesivos.

Lema (A. Zaragoza 2018)

$\mathcal{K}(\mathfrak{E}_c)$, $\mathcal{F}(\mathfrak{E}_c)$ y $\mathcal{F}_n(\mathfrak{E}_c)$ son cohesivos.

Proposición (A. Zaragoza 2018)

$\mathcal{F}(\mathfrak{E}_c)$ no es homeomorfo a $\mathfrak{E}_c$

Lema (A. Zaragoza 2018)

$\mathcal{F}_n(\mathfrak{E}_c)$ tiene una topología cero dimensional $\mathcal{W}$ en más gruesa que la topología dada, tal que cualquier punto en $\mathcal{F}_n(\mathfrak{E}_c)$ tiene una base de vecindades que es compacta respecto a $\mathcal{W}$.

Teorema (A. Zaragoza 2018)

1. $dim(\mathcal{K}(\mathfrak{E}_c)) = 1$
2. Para cualquier $n \in \omega$ $\mathcal{F}_n(\mathfrak{E}_c)$ es homeomorfo a $\mathfrak{E}_c$.
3. Sea X un espacio tal que $\mathcal{K}(X)$ o $\mathcal{F}_n(X)$ son homeomorfos a $\mathfrak{E}_c$, entonces X es homeomorfo a $\mathfrak{E}_c$.

Corolario

1. *Para cualquier* $n \in \omega$ $\mathcal{F}_n(\mathfrak{E}_c) \setminus \mathcal{F}_{n-1}(\mathfrak{E}_c)$ *es homeomorfo* $\mathfrak{E}_c$.

Gracias

Bibliografía

- J. J. Dijkstra and J. van Mill, *Characterizing complete Erdös space*, Canad J. Math. 61 (2009), 124-140. MR2488452
- J. J. Dijkstra and J. van Mill, *Erdös space and homeomorphism groups of manifolds*, Mem. Amer. Math. Soc. 208 (2010), no. 979.
- J. J. Dijkstra, *A criterion for Erdös spaces*, Proc. Edinburgh Math. Soc. 48 (2005), 595-601. MR2171187 (2006g:54041)
- J. J. Dijkstra, J. van Mill, and J. Steprans, *Complete Erdös space is unstable*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 137 (2004), 465-473. MR2092071 (2005g:54076)
- T. Dobrowolski, J. Grabowski, and K. Kawamura, *Topological type of weakly closed subgroups in Banach spaces*, Studia Math. 118 (1996), 49-62. MR1373624 (97d:46013)

Bibliografía

R. Engelking, *General Topology*, Sigma Series in Pure Mathematics, Vol. 6, Heldermann Verlag, 1989.

P. Erdös, *The dimension of the rational points in Hilbert space*, Ann. of Math. (2) 41 (1940), 734-736.

B. Knaster, *Sur un probléme de P. Alexandroff*, Fund. Math. 33 (1945), 308-313.

E. Michael, *Topologies on spaces of subsets*, Trans. Amer. Math. Soc. 71 (1951), 152-182.

L. G. Oversteegen and E. D. Tymchatyn, *On the dimension of certain totally disconnected spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 122 (1994), 885-891. MR1273515 (95b:54040)