LA PROPIEDAD DE ESPECIFICACIÓN EN DINÁMICA UNIDIMENSIONAL

XIII Taller de Continuos, Hiperespacios y Sistemas Dinámicos

Rafael Alcaraz Barrera
Instituto de Física
Universidad Autónoma de San Luis Potosí
Av. Manuel Nava #6, Zona Universitaria
C.P. 78290, San Luis Potosí, S.L.P. México
ralcaraz@ifisica.uaslp.mx
https://rafaelalcaraz.wordpress.com/

Acerca del curso

La idea del curso es dar un panorama acerca de la propiedad de especificación en el intervalo, más no en general. Si deseas consultar una referencia acerca de esta propiedad, sus generalizaciones y consecuencias puedes consultar [4]. Por otro lado, si quieres profundizar en el estudio de sistemas dinámicos en el intervalo consulta [7]. Los únicos prerequisitos son conocer bien el teorema del valor intermedio y un poco de topología básica en espacios métricos. Algunos de los resultados están expuestos sin demostración para agilizar la lectura del teorema principal (Teorema 4.3). Las demostraciones se pueden encontrar el el libro de Ruette [7].

1. Dinámica topológica

Recordemos algunas nociones básicas. Llamamos a un par (X, f) un *sistema dinámico topológico (discreto)* donde X es un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ es una función continua (o continua por pedazos). Dado $x \in X$ definimos la *órbita futura de x bajo f* como $O_f^+(x) = \{f^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ donde $f^0(x) = x$ y para toda $n \in \mathbb{N}$, $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$. Decimos que un punto $x \in X$ es *periódico de período n* si $f^n(x) = x$ y para toda $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, $f^j(x) \neq x$. Denotaremos como

$$\mathrm{Per}_f = \{x \in X : x \text{ es un punto periódico}\}$$

y

$$\mathrm{Per}_{f_n} = \{x \in \mathrm{Per}_f : x \text{ tiene período } n\}.$$

Recordemos que un subconjunto cerrado Y de X es *f-invariante* si $f(Y) = Y$ y diremos que Y es *totalmente f-invariante* si $f^{-1}(Y) = Y$.

Veamos algunos ejemplos de sistemas dinámicos.

Ejemplo 1.1. Consideremos $\Sigma_2 = \prod_{n=1}^{\infty} \{0,1\}$. Dotemos a este espacio con la siguiente métrica: Consideremos $x = (x_i), y = (y_i)$ entonces

$$d(x,y) = \begin{cases} 2^{-j} & \text{if } x \neq y, \qquad \text{donde } j = \text{mín}\{i : x_i \neq y_i\}; \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Definimos $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ dada por $\sigma(x) = \sigma((x_i)) = (x_{i+1})$. A esta transformación la conocemos como el *dislocamiento o shift unilateral en dos símbolos.* Con esta topología σ es una función continua.

Ejercicio 1.2. Muestra que $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ es continua.

Ejemplo 1.3. Consideremos $T : [0,1] \to [0,1]$ dada por

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]; \\ 1 - 2x & \text{si} x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

A T la conocemos como la función tienda.

Ejemplo 1.4. Consideremos a la circunferencia unitaria $S^1 = [0,1]/\mathbb{Z}$ y $f_2 : S^1 \to S^1$ como

$$f_2(x) = 2x \mod 1 = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]; \\ 2x - 1 & \text{si} x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Ejemplo 1.5. Dado $\beta \in (1,2)$ definimos $f_\beta : [0,1] \to [0,1]$ como

$$f_\beta(x) = \beta x \mod 1 = \begin{cases} \beta x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{\beta}\right); \\ \beta x - 1 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{\beta}, 1\right]. \end{cases}$$

Esta transformación es conocida como la *transformación* β *en* $[0,1]$. Notemos que f_β no es una función continua en $[0,1]$, pero eso no nos impide estudiar su dinámica como veremos después.

Decimos que dos sistemas dinámicos (X,f) y (Y,g) son *seminconjugados* si existe una función $h : X \to Y$ continua y suprayectiva tal que $h \circ f = g \circ h$. Si h es un homeomorfismo decimos que (X,f) y (Y,g) son *topológicamente conjugados.* Si dos sistemas dinámicos son conjugados entonces coparten las mismas propiedades dinámicas. En el caso de sistemas dinámicos semiconjugados, las propidedades de (X,f) se heredan a (Y,g).

Ejercicio 1.6.
I) Muestra que (Σ_2, σ) y (S^1, f_2) son semiconjugados.
II) Muestra que $([0,1], T)$ es conjugado a $([0,1], L)$ donde $L(x) = 4x(1-x)$.

Decimos que un sistema dinámico (X,f) donde f es continua[1] es *topológicamente transitivo* si para cualquier par de subconjuntos abiertos de X, U, V existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \varnothing$. En

[1]en caso de funciones $f : [0,1] \to [0,1]$ *continuas por pedazos* es decir, existen $\{a_i\}_{i=0}^n$ tales que $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = 1$ que satisfacen que $f|_{[a_i, a_i+1]}$ es continua para todo $i \in \{0, \ldots, n-1\}$,

caso de que X no tenga puntos aislados, esto es equivalente a que existe $x \in X$ tal que $\overline{O_f^+(x)} = X$. Decimos que (X, f) es *topológicamente mezclante* si para cualquier par de subconjuntos abiertos de X, U, V existe $N = N(U, V) \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geqslant \mathbb{N}$, $f^n(U) \cap V \neq \varnothing$. Decimos que (X, f) es *totalmente topologicamente transitivo* si (X, f^n) es transitivo para toda $n \in \mathbb{N}$. Finalmente (X, f) es *localmente eventualmente suprayectivo* si para cualquier subconjunto abierto $U \subset X$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geqslant N$ se cumple que $f^n(U) = X$.

Ejercicio 1.7. Supongamos que $f : [0, 1] \to [0, 1]$ es una función continua tal que existe un intervalo $[a, b] \subset [0, 1]$ tal que $f|_{[a,b]} = c$ para alguna $c \in [0, 1]$. Entonces $([0, 1], f)$ no es topológicamente transitivo.

Ejercicio 1.8. Muestra que si (X, f) es topológicamente transitivo (mezclante respectivamente) y (X, f) y (Y, g) son semiconjugados entonces (Y, g) es topológicamente transitivo (mezclante respectivamente).

Ejercicio 1.9. Muestra que (Σ_2, σ) es topológicamente mezclante. Usando los Ejercicios 1.6 y 1.8 concluye que (S^1, f_2) es topológicamente mezclante.

Dado un sistema dinámico (X, f) y $x \in X$ definimos el *ω-conjunto límite de x* como

$$\omega_f(x) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{\{f^k(x) : k \geqslant n\}}.$$

Es posible mostrar que si X no tiene puntos aislados, entonces (X, f) es topológicamente transitivo si y sólo si existe $x \in X$ tal que $\omega_f(x) = X$.

2. Dinámica en el intervalo

A partir de este momento nos concentraremos en estudiar sistemas dinámicos definidos en el intervalo $[0, 1]$. Para ello necesitamos definir algunas nociones para este tipo de sistemas dinámicos.

Consideremos un sistema dinámico $([0, 1], f)$. Decimos que una familia de subintervalos no degenerados $\{J_i\}_{i=1}^p$ de $[0, 1]$ es un *ciclo de intervalos de período p* si $f(J_i) = J_{i+1 \text{ mód } p}$ para toda $i \in \{1, \ldots, p\}$ y a J_1 lo llamamos un *intervalo periódico de período p*. Si J_1, J_2 son dos subintervalos no degenerados de $[0, 1]$ tales que $J_2 \subset f(J_1)$ decimos que J_1 *cubre a* J_2.

Lema 2.1. *Sea $([0, 1], f)$ un sistema dinámico y $n \in \mathbb{N}$.*

1. *Let $\{J_i\}_{n=0}^n$ una familia de intervalos de tal suerte que J_i cubre a J_{i+1} para toda $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Entonces existe un intervalo $K \subset J_0$ tal que $f^n(K) = J_n$, $f^n(FrK) = FrJ_n$y $f^i(K) \subset J_i$ para toda $i \in \{0, \ldots n\}$. Si además J_i es un intervalo cerrado para toda $i \in \{0, \ldots, n\}$ entonces K es cerrado.*

la noción de transitividad funciona igual. De hecho, la transitividad topológica es equivalente a que para cualquier intervalo no degenerado J de $[0, 1]$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(J) = [0, 1]$ para toda $n \geqslant N$.

2. *Sea* $\{J_i\}_{i=0}^n$ *una familia de intervalos cerrados tales que* J_i *cubre a* J_{i+1} *para toda* $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ *y* $J_0 \subset J_n$. *Entonces existe* $x \in J_0$ *tal que* x *es un punto periódico de periíodo* n *y* $f^i(x) \in J_i$ *for all* $i \in \{0, \ldots n-1\}$.

Proposición 2.2. *Sea* $([0,1], f)$ *un sistema dinámico transitivo. Entonces*

1. *Para cualquier intervalo no degenerado* $J \subset [0,1]$, $f(J)$ *es un intervalo no degenerado;*
2. f *es una función suprayectiva.*

Demostración. Sea J cualquier subintervalo de $[0,1]$. Como f es una función continua y J es conexo, entonces $f(J)$ es conexo. Si $f(J) = \{c\}$ para algún $c \in [0,1]$ entonces por el Ejercicio 1.7, f no es transitiva.

Es claro que $f([0,1]) \subset [0,1]$. Como $[0,1]$ no tiene puntos aislados y f es transitiva, existe $x \in [0,1]$ tal que $O_f^+(x)$ es denso en $[0,1]$. Además $O_f^+(x) \subset [0,1]$. Como f es continua y $[0,1]$ es compacto se tiene que $f([0,1])$ es compacto y así tenemos que $[0,1] \subset f([0,1])$. Esto implica que f es suprayectiva. □

El siguiente lema será enunciado sin demostración.

Lema 2.3. *Sea* $([0,1], f)$ *un sistema dinámico,* $x, y \in [0,1]$ *y* $n, m \in \mathbb{N}$. *Sea* J *un subintervalo de* $[0,1]$ *tal que no contiene puntos periódicos y supongamos que* $x, y, f^m(x)$ *y* $f^n(y) \in J$. *Si* $x < f^m(x)$ *entonces* $y < f^m(y)$.

Proposición 2.4. *Si* $([0,1], f)$ *es un sistema dinámico transitivo entonces* $\overline{Per_f} = X$.

Demostración. Usaremos el Lema 2.3 para probar el resultado. Supongamos que existe un subintervalo (a,b) que no contiene puntos periódicos. Como f es transitiva entonces existe $x \in [0,1]$ tal que $O_f^+(x)$ es denso en $[0,1]$. Entonces existen $m, p, q \in \mathbb{N}$ con $p < q$ tales que

$$x < f^m(x) < b \text{ y } a < f^q(x) < f^p(x) < x.$$

Esto implica que

$$a < f^{p-q}(f^p(x)) < f^p(x) < x < f^m(x) < b.$$

Tomando $y = f^p(x)$ obtenemos una contradicción al Lema 2.3. □

Proposición 2.5. *Sea* $([0,1], f)$ *un sistema dinámico transitivo. Entonces alguno de los siguientes enunciados ocurre:*

1. $([0,1], f)$ *es totalmente transitivo;*
2. *Existe* $c \in [0,1]$ *tal que* $f([0,c]) = [c,1]$, $f([c,1]) = [a,c]$ *y las transformaciones* $f|_{[a,c]}$ *y* $f|_{[c,b]}$ *son totalmente transitivas. Además* $c = f(c)$ *y este es el único funto fijo de* $([0,1], f)$.

Proposición 2.6. $([0,1], f)$ *es mezclante si y sólo si para toda* $\varepsilon > 0$ *y todo subintervalo cerrado no degenerado* $J \subset [0,1]$ *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que para toda* $n \geqslant N$, $[\varepsilon, 1-\varepsilon] \subset f^n(J)$

Demostración. Supongamos que $([0,1], f)$ es topológicamente mezclante. Sean $\varepsilon > 0$, $U_1 := (0, \varepsilon)$ y $U_2 := (1-\varepsilon, 1)$. Sea J cualquier subintervalo abierto de $[0,1]$. Entonces existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(J) \cap U_1 \neq \varnothing$ para toda $n \geqslant N_1$. De manera similar existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(J) \cap U_2 \neq \varnothing$

para toda $n \geqslant N_2$. Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$. Entonces, para toda $n \geqslant N$, $f^n(J) \cap U_1 \neq \varnothing$ y $f^n(J) \cap U_2 \neq \varnothing$. Esto implica que $[\varepsilon, 1-\varepsilon] \subset f^n(J)$.

Supongamos ahora que para cualquier $\varepsilon > 0$ y para cualquier intervalo $J \subset [0,1]$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $[\varepsilon, 1-\varepsilon] \subset f^n(J)$ para toda $n \geqslant N$. Sean U y V dos subconjuntos abiertos de $[0,1]$. Tomemos dos subintervalos abiertos J y K tales que $J \subset U$, $K \subset V$ y que ni 0 ni $1 \in K$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $K \subset [\varepsilon, 1-\varepsilon]$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset [\varepsilon, 1-\varepsilon] \subset f^n(J)$ para toda $n \geqslant N$. Así $f^n(U) \cap V \neq \varnothing$ para toda $n \geqslant N$. □

Proposición 2.7. *Si* $([0,1], f)$ *es totalmente transitivo entonces* $([0,1], f)$ *es mezclante.*

Demostración. Sean $J \subset [0,1]$ un intervalo no degenerado y $\varepsilon > 0$. Como Per_f es denso en $[0,1]$ existen puntos periódicos x, x_1, x_2 tales que $x \in J$, $x_1 \in (0, \varepsilon)$ y $x_2 \in (1-\varepsilon, 1)$. Podemos además pedir que x_1 y x_2 de tal manera que sus órbitas estén contenidas $(0,1)$. Fijamos

$$y_i := \min\{f^n(x_i) : n \geqslant 0\} \text{ y } z_i := \max\{f^n(x_i) \mid n \geqslant 0\} \text{ para } i \in \{1,2\}.$$

Entonces $y_1 \in (0, x_1] \subset (0, \varepsilon)$, $z_2 \in [x_2, 1) \subset (1-\varepsilon, 1)$ y and $y_2, z_1 \in (0,1)$. Let k un múltiplo común de los periodos de x, y_1 y y_2. Sea $g = f^k$ y

$$K := \bigcup_{n=0}^{+\infty} g^n(J).$$

Notemos que x es un punto fijo de g. Entonces $x \in g^n(J)$ for all $n \geqslant 0$. Esto implica que K es un intervalo. Además K es denso en $[0,1]$ dado que g es topológicamente transitiva. Así $K \supset (0,1)$. Entonces $y_1, y_2, z_1, z_2 \in K$. Para $i = 1,2$, sean $p_i, q_i \in \mathbb{N}$ tales que $y_i \in g^{p_i}(J)$ and $z_i \in g^{q_i}(J)$. Sea $N := \max\{p_1, p_2, q_1, q_2\}$. Como y_1, y_2, z_1, z_2 son puntos fijos de g, $y_1, y_2, z_1, z_2 \in g^N(J)$. Por el teorema del valor intermedio $[y_i, z_i] \subset g^N(J) = f^{kN}(J)$ para $i = 1,2$. Por la elección de y_i, z_i, se cumple que $O_f^+(x) \in [y_i, z_i]$. Usando inducción se puede mostrar que $[y_i, z_i] \subset f^n([y_i, z_i])$ para toda $n \geqslant 0$. Entonces para toda $n \geqslant kN$ se tiene que $y_1, z_1] \cup [y_2, z_2] \subset f^n(J)$. Como $y_1 < \varepsilon$ and $z_2 > 1-\varepsilon$, y como $f^n(J)$ es conexo se cumple que $\varepsilon, 1-\varepsilon] \subset f^n(J)$ para toda $n \geqslant kN$. Por la Proposición 2.6 se tiene que f es mezclante. □

Ejemplo 2.8. Daremos ahora un ejemplo de un sistema dinámico topológicamente transitivo que no es topológicamente mezclante en el intervalo. Consideremos $T : [0,1] \to [0,1]$ dada por

$$T(x) = \begin{cases} 2x + \frac{1}{2} & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{4}\right]; \\ -2x + \frac{3}{2} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]; \\ 1 - x & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Observemos que si consideramos $T^2 : [0,1] \to [0,1]$ su regla de correspondencia está dada por:

$$T^2(x) = \begin{cases} -2x + \frac{1}{2} & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{4}\right]; \\ 2x + \frac{1}{2} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]; \\ -2x + \frac{5}{2} & \text{si } x \in \left[\frac{3}{4}, 1\right]. \end{cases}$$

La cual no es una función transitiva.

Sea $([0,1], f)$ un sistema dinámico. Decimos que 0 (respectivamente 1) es *accesible* si existe $x \in (0,1)$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = 0$ (respectivamente $f^n(x) = 1$).

Lema 2.9. *Let* $([0,1], f)$ *un sistema dinámico topologicamente mezclante. Entonces:*

1. *If* 0 *(respectivamente* 1*) el único punto no accesible entonces es un punto fijo. Si tanto* 0 *como* 1 *son no accesibles entonces o son puntos fijos o bien* $f(0) = 1$ *y* $f(1) = 0$.
2. *If* 0 *(respectivamente* 1*) es un punto fijo no accesible entonces existe una sucesión creciente (decreciente) de puntos fijos* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *tal que* $x_n \to 0$ *(*$x_n \to 1$ *respectivamente), Además, para toda* $n \in \mathbb{N}_0$ *se cumple que* $f|_{[x_{n+1}, x_n]}$ *no es monótona.*

Demostración. Mostremos primero 1. Supongamos que 0 no es accesible. Esto implica que $0 \notin f((0,1))$. Como $([0,1], f)$ es topológicamente mezclante tenemos que f es transitiva. Usando el Lema 2.2 tenemos que f es suprayectiva. Así se tiene que $f(0) = 0, 1$. Notemos que si 1 es accesible entonces $f(1) = 0$ y así 0 es accesible. Por tanto si 0 es no accesible entonces es un punto fijo. En caso de tanto 0 como 1 sean no accesibles se tiene que $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$, o bien $f(1) = 0$ and $f(0) = 1$.

Para mostrar 2 supongamos que 0 no es accesible y que además es un punto fijo. Dado que 0 no es accesible se tiene que $0 \notin f((0,1))$. Por el inciso 1 si 1 no es accesible entonces es un punto fijo. En caso de ser accesible $f(1) \neq 0$. Observemos que en cualquiero de estos casos $0 \notin f((0,1])$. Sea $\varepsilon \in (0,1)$. Por la transitividad de $([0,1], f)$ se cumple que $f([0,\varepsilon]) \not\subset [0,\varepsilon]$. Entonces, se tiene que existe $y \in (0,\varepsilon]$ tal que $f(y) \geqslant \varepsilon$. Además $f(y) \geqslant y$. Supongamos que $f(x) \geqslant x$ for all $x \in [0,y]$. Sea

$$z := \text{mín}\left\{y, \text{mín}(f([y,1]))\right\}.$$

Entonces $z > 0$, $f([z,1]) = f([z,y]) \cup f([y,1])$, además $f([z,y]) \subset [z,1]$ and $f([y,1]) \subset [z,1]$. De donde $f([z,1]) \subset [z,1]$ lo que contradice la transitividad de $([0,1], f)$ De donde, $x \in [0,y]$ such that $f(x) < x$. Thus $f([x,y]) \supset [f(x), f(y)] \supset [x,y]$, and necessarily $x \neq 0$. Esto implica que existe un punto fijo $w \in [x,y] \subset (0,\varepsilon]$. Dado que ε es arbitraria existe una sucesión de puntos fijos $\{x_n\}_{n=1}^{f}$ que converge a 0. Si $f|_{[x_{n+1}, x_n]}$ es monótona entonces $f([x_{n+1}, x_n]) = [x_{n+1}, x_n]$, lo que contradice la transitividad de f. □

Proposición 2.10. *Sea* $([0,1], f)$ *un sistema dinámico topológicamente mezclante. Entonces* f *es localmente eventualmente suprauectiva si y sólo si* 0 *y* 1 *son accesibles.*

Demostración. Vamos a mostrar que para cada $\varepsilon > 0$ y para cada subintervalo no degenerado $J \subset (0,1)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $[0, 1-\varepsilon] \subset f^n(J)$ para toda $n \geqslant N$ si y sólamente si 0 es accesible. Podemos hacer lo mismo para 1 y el la proposición se sigue de este hecho.

Supongamos que a es accesible. Sa $x_0 \in (0,1)$ y and $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_0}(x_0) = 0$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $x_0 \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$. Tomemos $J \subset [0,1]$. Como $([0,1], f)$ es topológicamente mezclante existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(J) \supset [\varepsilon, 1-\varepsilon]$ para toda $n \geqslant N$. Dado que $x_0 \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$, usando el teorema del valor intermedio tenemos que $f^{n+n_0}(J) \supset [0, 1-\varepsilon]$ para toda $n \geqslant N$.

Por otro lado, sea J un subintervalo no degenerado que no contiene ni a 0 ni a 1 y tal que $0 \in f^n(J)$ para alguna $n \in \mathbb{N}$. Entonces 0 es accesible. De aqui se tiene que 0 es accesible si y sólamente si para cualquier $\varepsilon > 0$ y cualquier subintervalo no degenerado $J \subset (0,1)$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(J)$ contains $[0, 1-\varepsilon]$ para toda $n \geqslant N$. Similarmente lo probamos para 1. □

3. Sombreado y especificación

En esta sección introducimos el la propiedad que queremos estudiar: *la propiedad de especificación de Bowen*, introducida por R. Bowen en [1] para difeomorfismos que satisfacen el Axioma A de Smale.

Antes de introducirla, hablaremos de una propiedad que intuitivamente es mas sencilla pero nos dará una idea de que estamos buscando. Para ello necesitamos definir algunas nociones. Sea $\delta > 0$. Decimos que una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una *δ-pseudo-órbita de* (X, f) si para toda $n \in \mathbb{N}_0$ $d(f(x_n), x_{n+1}) \leqslant \delta$. Sea $\varepsilon > 0$. Decimos que una órbita $O_f^+(x)$ *ε-sombrea a una δ-pseudo-orbita* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ si para toda $n \in \mathbb{N}_0$ se cumple que $d(x_n, f^n(x)) \leqslant \varepsilon$. Decimos que un sistema dinámico (X, f) tiene *la propiedad del sombreado* si para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda toda δ-pseudo-órbita $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ existe $x \in X$ tal que $O_f^+(x)$ ε-sombrea a $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Intuitivamente la propiedad del sombredo nos dice que «la computadora no miente». Es decir, dada una suceción que se parece a una órbita, digamos una órbita con un error δ, si el sistema dinámico a estudiar tiene algunas condiciones «buenas» entonces existe una orbita verdadera que pasa suficientemente cerca y tiene el mismo comportamiento dinámico.

Ejercicio 3.1. Consideremos $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Dado $\alpha \in [0, 2\pi)$ definimos la rotación de ángulo α, $R_\alpha : S^1 \to S^1$ como $R_\alpha(z) = R_\alpha(e^{i\theta}) = e^{i(\theta+\alpha)}$.

1. (S^1, R_α) no tiene la propiedad del sombreado.
2. Da una idea intuitiva de porque si α es un ángulo irracional, entonces R_α es transitiva mas no mezclante.
3. Muestra que si M es una variedad y $f : M \to M$ es una isometría, entonces (M, f) no tiene la propiedad del sombreado.

La propiedad de especificación es, en cierto sentido, parecida a la propiedad del sombreado. En este caso lo que nos interesa es ε-sombrear no pseudo-órbitas, sino pedazos finitos de órbitas verdaderas. Formalicemos esta propiedad.

Sea (X, f) un sistema dinámico y $a, b \in \mathbb{N}_0$ with $a \leqslant b$. Definimos el *segmento de órbita de x en $[a, b]$* como $f^{[a,b]}(x) = \{f^n(x)\}_{n=a}^{b}$. Llamamos a una familia finita de segmentos de órbita $\zeta = \left\{f^{[a_i,b_i]}(x_i)\right\}_{i=1}^{n}$ una *especificación de rango n* o *especificación* si $n \in \mathbb{N}$ and $b_i < a_{i+1}$ para toda $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Consideremos $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función. Decimos que una specification de rango n es una *ν-specification* si $a_{i+1} - b_i \geqslant \nu(b_{i+1} - a_{i+1} + 1)$ para toda $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Si ν es una función constante, digamos $\nu(m) = N$ para cada $m \in \mathbb{N}$ decimos que ζ es una *N-especificación.* Sea $\varepsilon > 0$. Decimos que una especificación especificación $\zeta = \left\{f^{[a_i,b_i]}(x_i)\right\}_{i=1}^{n}$ es *ε-sombreada por $x \in X$* si

$$d(f^k(x), f^k(x_i)) \leqslant \varepsilon \quad \text{para cada}\, k \in [a_i, b_i] \text{ and } i \in \{1, \ldots, n\}\,.$$

Definición 3.2. Decimos que un sistema dinámico (X, f) tiene *la propiedad de especificación de Bowen* si para toda $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y cualquier N-especificación de rango n ζ existe $y \in X$ tal que y ε-sombrea a ζ. Si $y \in \mathrm{Per}_{f_{b_n+a_1+N}}$ decimos que (X, f) tiene la *propiedad de especificación periódica.*

Esta propiedad dice mucho acerca de la dinámica de (X, f). Además, tiene consecuencias fuertes sobre el espacio de medidas de probabilidad de (X, f). Si deseas saber mas del tema puedes consultar el artículo [2]. En general, los sistemas dinámicos con especificación son mezclantes.

Teorema 3.3. *Si (X, f) es un sistema dinámico tal que f es suprayectiva. Si (X, f) la propiedad de especificación, entonces (X, f) es topológicamente mezclante.*

Demostración. Supongamos que (X, f) tiene especificación. Sean U, V dos subconjuntos abiertos de X. Tomemos $x \in U$ y $y \in Y$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \subset U$ y $B_\varepsilon(y) \subset V$. Como (X, f) tiene especificación, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier N-especificación de rango n, ζ es $\frac{\varepsilon}{2}$-sobreada. Consideremos $n > N$. Entonces existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $n = N + i$. Tomemos el segmento de órbita $\{x, f(x), \ldots, f^i(x)\}$. Sea $z \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y)$.

Como f es suprayectiva existe $w \in X$ tal que $f^{N+i}(w) = f^n(w) = z$. Así $\{x, f(x), \ldots f^i(x)\} \cup \{f^N(w) \ldots f^n(w)\}$ es una N-especificación. Entonces existe $w' \in X$ tal que $d(w', x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ y $d(f^n(w'), z) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, de donde $d(f^n(w'), y) < \varepsilon$ y así f es mezclante. $\square$

Ejercicio 3.4. Sean (X, f) y (Y, g) dos sistemas dinámicos (semi)-conjugados. Entonces, si (X, f) tiene especificación entonces (Y, g) tiene especificación.

Ejercicio 3.5. Si (X, f) tiene especificación si y sólamente si (X, f^n) tiene especificación para toda $n \in \mathbb{N}$.

4. En el intervalo especificación y mezclado son equivalentes

En esta sección mostraremos que si $([0,1], f)$ es mezclante entonces tiene la propiedad de especificación. Para ello necesitamos dos lemas auxiliares.

Lema 4.1. *Sea $([0,1], f)$ un sistema dinámico y $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Entonces para toda $x \in [0,1]$ y para toda $n \in \mathbb{N}_0$ existe una familia de subintervalos cerrados de $[0,1]$, $\{J_i\}_{i=0}^n$, tales que:*

1. *Para toda $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ se cumple que $f(J_i) = J_{i+1}$;*
2. *Para toda $i \in \{0, \ldots, n\}$, $f^i(x) \in J_i$ y $J_i \subset \left[f^i(x) - \varepsilon, f^i(x) + \varepsilon\right]$;*
3. *Existe $i\,\{0, \ldots, n\}$ tal que $f^i(x) - \varepsilon \in J_i$ o $f^i(x) + \varepsilon \in J_i$.*

Demostración. Vamos a probar el resultado por inducción. Sea $x \in [0,1]$. Si $n = 0$ como $\varepsilon < \frac{1}{2}$ se tiene que $x + \varepsilon$ o bien $x - \varepsilon \in [0,1]$. Entonces $J_0 = [x, x+\varepsilon]$ si $x + \varepsilon \in [0,1]$ o bien $J_0 := [x - \varepsilon, x]$ si $x - \varepsilon \in [0,1]$ cumplen 3. Supongamos que para $n = k$ el resultado es cierto. Consideremos $J_0, \ldots, J_k$ los intervalos dados por el lema. Si $f(J_k) \subset [f^{k+1}(x) - \varepsilon, f^{k+1}(x) + \varepsilon]$ entonces $J_{k+1} = f(J_k)$ y así $\{J_i\}_{i=0}^{k+1}$ satisfacen las condiciones del resultado. Supongamos que $f_(J_k)$ no está contenido en $[f^{k+1}(x) - \varepsilon, f^{k+1}(x) + \varepsilon]$. Entonces $f^{k+1}(x) - \varepsilon \in f(J_k)$ o bien $f^{k+1}(x) + \varepsilon \in f(J_k)$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $J_0 \subset [x, x+\varepsilon]$. Por la hipótesis de inducción se cumple que $f(J_k) = f^{k+1}(J_0)$. Así definimos

$$y := \text{mín}\{z \in J_0 : f^k(z) \in \{f^{k+1} - \varepsilon, f^{k+1} + \varepsilon\}\}.$$

Así $f^{k+1}([x,y]) = [f^{k+1}(x) - \varepsilon, f^{k+1}(x)]$ o bien $[f^{k+1}, f^{k+1}(x) + \varepsilon]$. Sea $J_0' = [x,y]$ and $J_i' := f^i(J_0')$ para toda $i \in \{1, \ldots, k+1\}$. Estos intervalos cumplen lo deseado. $\square$

Lema 4.2. *Sea* $([0,1], f)$ *un sistema dinámico topológicamente mezclante y* $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4})$*. Supongamos que* 0 *(*1 *respectivamente) es un punto fijo no accesible para* f*. Entonces existe* $\delta \in (0, \varepsilon)$ *tal que para toda* $x \in [0, \delta]$ *(respectivamente* $c \in [1-\delta, 1]$*) y para toda* $n \in \mathbb{N}_0$ *existen intervalos cerrados* $\{J_i\}_{i=0}^n$ *tales que:*

1. $J_0 \subset [\delta, 1-\delta]$*;*
2. *para toda* $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ *se cumple que* $f(J_i) = J_{i+1}$*;*
3. *para toda* $i \in \{0, \ldots, n\}$ *se cumple que* $J_i \subset [f^i(x) - \varepsilon, f^i(x) + \varepsilon]$*;*
4. *existe* $i \in \{0, \ldots, n\}$ *tal que* $|J_i| \geqslant \dfrac{\varepsilon}{4}$*.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad supondremos que 0 es un punto fijo no accesible dado que la prueba cuando 1 no es accesible es similar. Dado que f es continua existe $\eta > 0$ tal que

$$\text{para toda} \quad y \in [0, \eta], \ f(y) < \varepsilon. \tag{1}$$

Por la transitividad de $([0,1], f)$ se tiene que $f([0,\varepsilon]) \not\subset [0, \varepsilon]$. Entonces existe $z \in [0, \varepsilon]$ tal que $f(z) \geqslant \varepsilon$. Más aún $z \in (\eta, \varepsilon]$ por 1. Usando el Lema 2.9, existe $c \in (0, \text{mín}\{\eta, \frac{\varepsilon}{2}\})$ tal que $c = f(c)$. Sea $\delta = c \in (0, \frac{\varepsilon}{2}]$. Observemos que $c, z \in [c, \varepsilon]$. Por el teorema del valor intermedio $[c, \varepsilon] \subset f([c, \varepsilon])$. Notemos que $\varepsilon < 1 - \delta$ dado que $\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \frac{1}{4}$. Sea $x \in [0, c]$ y $n \in \mathbb{N}_0$ fijas. Sea

$$m = \text{máx}\left\{i \in \{0, \ldots, n\} : x, f(x) \ldots, f^i(x) \in [a, c]\right\}.$$

Obsérvese que $[c, \varepsilon] \subset [f^i(x) - \varepsilon, f^i(x) + \varepsilon]$ para toda $i \in \{0, \ldots, m\}$. Usando el Lema 2.1 1 aplicado en $[c, \varepsilon]$ $m+1$ veces se tiene que existen subintervalos cerrados $J_0, \ldots, J_m$ tales que $J_m = [c, \varepsilon]$ and $J_i \subset K$, $f(J_i) = J_{i+1}$ for all $i \in \{0, \ldots, m-1\}$. Si $m = n$ terminamos. Si $m < n$, por (1) $f^{m+1}(x) > c$ y $f^{m+1}(x) = f^m(x) < \varepsilon$. Esto implica que $f^{m+1}(x) \in [c, \varepsilon]$. Entonces $f^{m+1}(x) - \frac{\varepsilon}{4} \in [c, \varepsilon]$ o bien $f^{m+1}(x) + \frac{\varepsilon}{4} \in [c, \varepsilon]$dado que $|[c, \varepsilon]| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Aplicando Lema 4.1 a $f^{m+1}(x)$, $\frac{\varepsilon}{4}$ and $n - m + 1$ obtenemos que existen intervalos cerrados $J'_{m+1}, \ldots, J'_n$ tales que $J'_{m+1} \subset K$, para toda $i \in \{m+1, \ldots n-1\}$, $f(J'_i) = J_{i+1}$, $x_i \in J'_i$ y $J'_i \subset [x_i - \frac{\varepsilon}{4}, x_i + \frac{\varepsilon}{4}]$ y además existe $i \in \{m+1, \ldots, n\}$ tal que J'_i contiene a $f^i(x) - \frac{\varepsilon}{4}$ o a $f^i(x) + \frac{\varepsilon}{4}$. Así, la longitud de J'_i es al menos $\frac{\varepsilon}{4}$. Entonces por el Lema 2.1 1, existen $J'_0 \subset J_0, \ldots, J'_m \subset J_m$ tales que $f(J'_m) = J'_{m+1}$ and $f(J'_i) = f(J'_{i+1})$ para toda $i \in \{0, \ldots m-1\}$. La sucesión de intervalos $\{J'_0, \ldots, J'_n\}$ cumple con lo que queremos. En caso de que 0 y 1 sean fijos y no accesibles podemos tomar δ como la mínima dada por la prueba para 0 y para 1. $\square$

Teorema 4.3. *Si* $([0,1], f)$ *es topológicamente mezclante entonces* f *tiene especificación.*

Demostración. Sea $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$. Sea $I = [0,1]$. Si 0 y 1 son puntos accesibles definimos $I_0 := [0,1]$. En otro caso sea $0 < \delta < \varepsilon$ dada por el Lema 4.2 y

$$\begin{aligned} I_0 &:= [\delta, 1] \quad \text{si 0 es el único punto no accesible,} \\ I_0 &:= [0, 1-\delta] \quad \text{si 1 es el unico punto no accesible,} \\ I_0 &:= [\delta, 1-\delta] \quad \text{si 0 y 1 no son accesibles.} \end{aligned}$$

Sea p tal que $\frac{1}{p} < \frac{\varepsilon}{8}$. Para toda $k \in \{0, \dots p-1\}$ definimos

$$A_k := \left(\frac{k}{p}, \frac{(k+1)}{p}\right).$$

Por la Proposición 2.10, para cada $k \in \{0, \dots, p-1\}$, existe N_k tal que $I_0 \subset f^n(A_k)$ para toda $n \geqslant N_k$. Sea

$$N := \text{máx}\{N_0, \dots, N_{p-1}\}.$$

Sean $J_0, \dots, J_k$ una familia de intervalos tales que $f(J_i) = J_{i+1}$ para toda $i \in \{0, \dots, k-1\}$. Por la elección de N se tiene que

$$\text{(2)} \qquad \text{existe} \quad i \in \{0, \dots k\} \text{ tal que si} |J_i| \geqslant \frac{\varepsilon}{4} \text{entonces para toda} \quad n \geqslant N,\ f^n(J_k) \supset I_0$$

como $|J_i| \geqslant \frac{\varepsilon}{4}$ entonces $A_j \subset I_i$ para alguna $j \in \{0, \dots p-1\}$.

Observación 1. *Sea $x \in I$ y $n \geqslant 0$. Entonces existen subintervalos cerrados $J_0, \dots, J_n$ tales que:*

1. *$J_0 \subset I_0$,*
2. *para toda $i \in \{0, \dots, n\}$, $J_i \subset [f^i(x) - \varepsilon, f^i(x) + \varepsilon]$,*
3. *para toda $i \in \{0, \dots, n-1$, $f(J_i) = J_{i+1}$,*
4. *existe $i \in \{0, \dots, n\}$ such that $|J_i| \geqslant \frac{\varepsilon}{4}$.*

Si $x \in I_0$, sean $J_0, \dots, J_n$ los subintervalos dados por el Lema 4.1. Estos satisfacen $(2-4$. Además, $|I_0| \geqslant 2\varepsilon$ por defición. Entonces $[x-\varepsilon, x] \subset I_0$ o $[x, x+\varepsilon] \subset I_0$, y así podemos tomar $J_0 \subset I_0$ por el Lemma 4.1.

Supongamos ahora que 0 no es accesible. Si $x \in [0, \delta]$, entonces usando el Lema 4.2 nos da los intervalos deseados. Podemos proceder de manera análoga si $x \in [1-\delta, 1]$ y si 1 no es accesible.

Observación 2. *Sean $x_1, \dots, x_p \in I$ y $m_1 \leqslant n_1 < m_2 \leqslant n_2 < \cdots < m_p \leqslant n_p$ tales que $m_{i+1} - n_i \geqslant N$ para toda $i \in \{1, \dots p-1\}$. Entonces existen subintervalos $\{J_i\}_{m_1 \leqslant i \leqslant n_p}$ tales que*

1. *$J_{m_1} \subset I_0$,*
2. *para toda $i \in \{m_1, \dots n_p - 1\}$, $f(J_i) = J_{i+1}$,*
3. *para toda $k \in \{1, \dots, p\}$ y para toda $i \in \{m_k, \dots, n_k\}$ se tiene que $J_i \subset [f^i(x_k) - \varepsilon, f^i(x_k) + \varepsilon]$,*
4. *para toda $n \geqslant N$, $f^n(J_{n_p}) \supset I_0$.*

Veamos que nuestra observación es cierta usando inducción sobre p.

Si $p = 1$ aplicamos la Observación 1 a $x := f^{m_1}(x_1)$ y $n := n_1 - m_1$. Por (2) se da 4.

Supongamos que la observación es válida para $p-1$. Sean $J_{m_1}, \dots, J_{n_{p-1}}$ subintervalos que satisfacen la Observación 2. Usando la Observación 1 con $x := f^{m_p}(x_p)$ y $n := n_p - m_p$ llamamos a los intevalos obstenidos $J'_{m_p}, \dots, J'_{n_p}$. Entonces por (2) se tiene que $f^n(J'_{n_p}) \supset I_0$. Fijemos $J_i := f^{i-n_{p-1}}(J_{n_{p-1}})$ para cada $i \in \{n_{p-1}+1 \dots m_p\}$. Notemos que $m_p - n_{p-1} \geqslant N$. Entonces $J_{m_p} = f^{m_p - n_{p-1}}(J_{n_{p-1}}) \supset I_0$ por (2). Así $(J_{m_1}, \dots, J_{m_p-1}, J'_{m_p})$ satisface que $J_{m_i} \subset f(J_{m_i-1})$ dado que por constucción $J'_{m_p} \subset I_0$. Por el Lema 2.1(1), existen subintervalos $J'_i \subset J_i$ tales que $f(J'_i) = f(J'_{i+1})$ [para todo $i \in \{m_1, \dots m_p - 1\}$. Así $J'_{m_1}, \dots, J'_{n_p}$ satisface la Observación 2.

Probemos ahora la especificación. Sean $x_1, \dots, x_p \in I$ y $m_1 \leqslant n_1 < m_2 \leqslant n_2 < \cdots < m_p \leqslant n_p$ tales que para toda $i \in \{1, \dots p-1\}$ $\quad m_{i+1} - n_i \geqslant N$ y $q \geqslant n_p - m_1 + N$. Tomemos $J_{m_1}, \dots, J_{n_p}$ los intevlaos dados por la Observación 2. Entonces $I_0 \subset f^n(J_{n_p}$ par atoda $n \geqslant N$. Entonces $f^q(J_{m_1}) = f^{q-n_p+m_1}(J_{n_p}) \supset I_0 \supset J_{m_1}$. Esto implica que existe $x \in J_{m_1}$ tal que $f^q(x) = x$. Sea $y = f^{q-m_1}(x)$. Así $f^{m_1}(y) = x \in J_{m_1}$. Entonces $f^q(y) = y$ y para toda $k \in \{1 \dots p\}$ y para toda $i \in \{m_k, \dots n_k\}$ se tiene que $f^i(y) \in J_i \subset [f^i(x_k) - \varepsilon, f^i(x_k) + \varepsilon]$. $\square$

5. Ejemplos simbólicos donde mezclado no implica especificación. El caso de las expansiones en bases no enteras

En esta sección daremos una familia de ejemplos de sistemas dinámicos donde la propiedad de especificación y el mezclado topológico no son equivalentes. Para ello, introducimos el *orden lexicográfico* en Σ_2. Decimos que $(x_i) \preccurlyeq (y_i)$ si $(x_i) = (y_i)$ o bien existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_i = y_i$ para toda $i \in \{1, \dots, k-1\}$ y $x_i < y_i$.

A finales de la década de los 50 y principios de la década de los 60, A. Rényi [6] y W. Parry [5] introdujeron la siguiente familia de funciones, la cual nos permite construir expansiones de números reales. Estas expansiones son conocidas como *expansiones* β y también están generadas función la función f_β. Sea $\beta \in (1,2)$. Recordemos que $f_\beta : [0,1] \to [0,1]$ está definida como

$$f_\beta(x) = \beta x \mod 1 = \begin{cases} \beta x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{\beta}\right); \\ \beta x - 1 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{\beta}, 1\right). \end{cases}$$

Esta transformación genera *una expansión* β *para* $x \in [0,1]$, es decir, una sucesión $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $a_i \in \{0, \dots, M\}$ para toda $i \in \mathbb{N}$ y

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{\beta^i}.$$

El algoritmo para encontrar dicha expansión se le conoce como el *algoritmo ambicioso* y a la expansión β construida se le conoce como la β*-expansión ambiciosa de* x[2].

Consideremos $\beta \in (1,2)$. Definimos

$$a_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{\beta}\right); \\ 1 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{\beta}, 1\right]. \end{cases}$$

y para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n(x) = a_1(f_\beta^{n-1}(x)).$$

[2]Por sencillas que parezcan, las expansiones β tienen comportamientos complicados. De hecho son un objeto de investigación actual en distintas áreas de la matemática. Por otro lado, la expansión ambiciosa es sólamente una de las expansiones β que se le puede construir a $x \in [0,1]$. Si quieres conocer un poco más acerca de ellas puedes consultar [3, 8]

No es difícil convencerse de que

$$x = \frac{a_1(x)}{\beta} + \frac{a_2(x)}{\beta^2} + \ldots + \frac{a_n(x)}{\beta^n} + \frac{\tau_\beta^n(x)}{\beta^n}.$$

Así, utilizando límites tenemos que

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i(x)}{\beta^i}.$$

Notemos que es posible que para alguna $n \in \mathbb{N}$ se cumpla que $\tau_\beta^n(x) = 0$. En este caso diremos que la expansión β de x es *finita*. Observese que $a_n(x)$ es el máximo elemento de $\{0,1\}$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i(x)}{\beta^i} \leqslant x.$$

Denotemos por $1_\beta = (b_i)$ a la expansión β de 1. Entonces, es claro que si (x_i) es una expansión β de $x \in [0,1]$ entonces $(x_i) \preccurlyeq 1_\beta$. Es posible que 1_β sea una expansión finita, es decir, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $b_n = 0$ para todo $n > m$. En este caso definimos

$$\alpha(1) = \begin{cases} 1_\beta & \text{si } 1_\beta \text{ no es finita;} \\ (b_1 \ldots b_{m-1}0)^\infty & \text{si } 1_\beta \text{ es finita.} \end{cases}$$

Así definimos

$$\Sigma_\beta = \{(x_i) \in \Sigma_2 : \sigma^n(x_i) \preccurlyeq \alpha(1)\}.$$

A este espacio lo conocemos como *el β-shift*.

Ejercicio 5.1.
1. Muestra que Σ_β es un conjunto cerrado y σ-invariante de Σ_2;
2. Muestra que si $\beta \in (1,2)$ entonces $\Sigma_\beta \subsetneq \Sigma_2$;
3. Muestra que la función $\pi_\beta : \Sigma_\beta \to [0,1]$ es una semiconjugación entre (Σ_β, σ) y $([0,1], f_\beta)$.

Usando 5.1 podemos considerar a (Σ_β, σ) como un *subsistema dinámico* de (Σ_2, σ), con la ventaja de que $\sigma|_{\Sigma_\beta} : \Sigma_\beta \to \Sigma_\beta$ es una función continua. Al trabajar con espacios de símbolos, podemos traducir la transitividad topológica, el mezclado y la propiedad de especificación en términos de palabras finitas.

A una sucesión finita $\omega = w_1 \ldots w_n$ con $w_i \in \{0,1\}$ la llamaremos *palabra* y definimos la *longitud de* ω como el número de símbolos que contiene. Dada una palabra finita $\omega = w_1 \ldots w_n$ definimos su *cilíndro asociado* C_ω como

$$C_\omega = \{(x_i) \in \Sigma_2 : x_i = w_i \text{ para toda } i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Definimos el *leguaje de* Σ_2 como $\mathcal{L}(\Sigma_2) = \{\omega : \omega \text{ es una palabra finita }\}$. Además, como $\Sigma_\beta \subsetneq \Sigma_2$ podemos definir el lenguaje de Σ_β como

$$\mathcal{L}(\Sigma_\beta) = \{\omega \in \Sigma_2 : \text{ existe } (x_i) \in \Sigma_\beta \text{ y } k \in \mathbb{N} \text{ tal que } x_{k+i} = w_i\}.$$

Ejercicio 5.2. Los cilindros generados por elementos de $\mathcal{L}(\Sigma_2)$ son una base para la topología dada por la métrica d en Σ_2.

Usando el Ejercicio 5.2, reescribimos las definiciones que necesitamos. Decimos que (Σ_β, σ)

1. es *topológicamente transitivo* si para cualesquiera dos palabras $\upsilon, \nu \in \mathcal{L}(\Sigma_\beta)$ existe $\omega \in \mathcal{L}(\Sigma_\beta)$ tal que la palabra $\upsilon\omega\nu \in \mathcal{L}(\Sigma_\beta)$.
2. es *topológicamente mezclante* si para cualesquiera dos palabras $\upsilon, \nu \in \mathcal{L}(\Sigma_\beta)$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geqslant N$ existe $\omega \in \mathcal{L}(\Sigma_\beta)$ tal que ω tiene longitud n y $\upsilon\omega\nu \in \mathcal{L}(\Sigma_\beta)$.
3. *tiene la propiedad de especificación* si existe $N \in \mathbb{N}$ tal para cualesquiera dos palabras $\upsilon, \nu \in \mathcal{L}(\Sigma_\beta)$ existe $\omega \in \mathcal{L}(\Sigma_\beta)$ de longitud N tal que $\upsilon\omega\nu \in \mathcal{L}(\Sigma_\beta)$.

Para el caso de (Σ_β, σ) tenemos el siguiente teorema:

Teorema 5.3. *Sea $\beta \in (1,2)$ and (Σ_β, β) su β-shift correspondiente. Entonces:*

1. *(Σ_β, σ) es topologicamente mixing para toda $\beta \in (1,2)$.*
2. *(Σ_β, σ) tiene especificación si y sólo si $\alpha(1)$ no contiene bloques arbitrariamente largos de 0's consesuctivos. Además*

$$\mathscr{S} = \{\beta \in (1,2) : (\Sigma_\beta, \sigma) \text{ tiene especificación } \}$$

es un conjunto no numerable, de medida de Lebesgue cero y $\dim_H(\mathscr{S}) = 1$.

Comentarios finales

Hemos visto a lo largo del texto que parece ser que la propiedad de especificación depende no sólamente de la función que estudiemos sino que en la dimensión del espacio X donde está definida. Así, una pregunta con mas sabor topológico sería la siguiente.

¿Será cierto que el mezclado topológico y la propiedad de especificación son equivalentes para sistemas dinámicos definidos en X donde X es un continuo de dimensión topológica 1?

En esta linea hay un resultado general que buscaríamos aplicar.

Teorema 5.4. [4] *Sea (X, f) un sistema dinámico con la propiedad del sombreado. Entonces (X, f) tiene la propiedad de especificación si y sólamente si (X, f) es mezclante.*

No se sabe todavía si hay un resultado análogo al Teorema 4.3 cuando X es una dendrita o bien si X es un continuo indescomponible de dimensión uno, por ejemplo un solenoide p-ádico. Estudiar la propiedad de especificación en estos espacios es un problema interesante.

Referencias

[1] R. Bowen. Periodic points and measures for axiom a diffeomorphisms. *Transactions of the American Mathematical Society*, 154:377–397, 1971.

[2] V. Climenhaga and D. J. Thompson. Intrinsic ergodicity beyond specification: β-shifts, S-gap shifts, and their factors. *Israel J. Math.*, 192:785–817, 2012.

[3] V. Komornik. Expansions in noninteger bases. *Integers*, 11B:Paper No. A9, 30, 2011.

[4] D. Kwietniak, M. Lacka, and P. Oprocha. A panorama of specification-like properties and their consequences. In *Dynamics and numbers*, volume 669 of *Contemp. Math.*, pages 155–186. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2016.

[5] W. Parry. Representations for real numbers. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 15:95–105, 1964.

[6] A. Rényi. Representations for real numbers and their ergodic properties. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar*, 8:477–493, 1957.

[7] S. Ruette. *Chaos on the interval*. University lecture series. American Mathematical Society, Providence, RI, 2017.

[8] N. Sidorov. Arithmetic dynamics. In *Topics in dynamics and ergodic theory*, volume 310 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 145–189. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.