XII Taller Estudiantil de Teoría de los Continuos y sus Hiperespacios
Mini-curso: Dinámica en Funciones Inducidas a los Hiperespacios

Leobardo Fernández Román

3 – 6 Octubre, 2017

1. Introducción

Dados un espacio métrico compacto no vacío X y una función continua $f\colon X \to X$ se dice que la pareja (X, f) forma un *sistema dinámico*. Dado un sistema dinámico, se han estudiado, entre otros, los conceptos de *puntos periódicos*, de hecho, algo que resulta interesante es estudiar cuándo es que el conjunto de puntos periódicos es denso en el espacio X. También se han estudiado los conceptos de *transitividad topológica* y la *sensibilidad a las condiciones iniciales* que, juntando estos tres conceptos aparece el concepto de *caos*. Otro concepto que se ha estudiado es el de la *propiedad de sombreado*.

Por otro lado se han estudiado, para un espacio métrico compacto X y una función continua $f\colon X \to X$, los *hiperespacios* 2^X, $C(X)$, $C_n(X)$, $F_n(X)$ y $F(X)$ y las respectivas funciones inducidas 2^f, $C(f)$, $C_n(X)$, f_n y $f^{<\omega}$.

En estas notas se estudian algunas de las relaciones que existen entre la función original f y las funciones inducidas a los hiperespacios mencionados, principalmente los conceptos de densidad de puntos periódicos, transitividad, sensibilidad a las condiciones iniciales y sombreado.

2. Sistemas dinámicos

Un *sistema dinámico* consiste de un espacio métrico (compacto) no vacío X y de una función continua $f\colon X \to X$. Dado un punto $x \in X$, la *órbita de x bajo f* está dada por la sucesión:

$$o(x, f) = \left\{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \dots\right\}$$

donde $f^n(x) = \underbrace{(f \circ \cdots \circ f)(x)}_{\text{n - veces}}$

Ejemplo 1. Sean $X = [0, 1]$ y $T\colon [0, 1] \to [0, 1]$ dada por:

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 0 & \text{si} \quad x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Ejemplo 2. Sean $X = S^1$, la *circunferencia unitaria* (en el plano complejo) y $f\colon S^1 \to S^1$ dada por $f(e^{i\theta}) = e^{i(\theta+\varphi)}$, rotación por un ángulo constante φ.

Ejemplo 3. Sean $X = \left\{\frac{1}{n}\colon n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$ y $f\colon X \to X$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si} \quad x = \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Definición 4. Sean X un espacio métrico compacto, $f\colon X \to X$ una función continua y $x \in X$.

- Decimos que x es un *punto periódico de* f si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = x$.
- Si $n_0 = \text{mín}\{n \in \mathbb{N}\colon f^n(x) = x\}$ se dice que *el periodo de* x *bajo* f *es* n_0.
- El conjunto de todos los puntos periódicos bajo f lo denotamos $Per(f)$.
- Si $n_0 = 1$, decimos que x es un *punto fijo de* f. En este caso $o(x, f) = \{x, x, x, \ldots\}$.
- El conjunto de puntos fijos de f lo denotamos $Fix(f)$.

Dejamos como ejercicio la demostración del siguiente teorema.

Teorema 5. *Sean X un espacio métrico compacto, $f\colon X \to X$ una función continua y $x, y \in X$. Si $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x) = y$, entonces $y \in Fix(f)$.*

3. Dinámica en intervalos y la función tienda

En esta sección estudiaremos algunas de las propiedades que se tienen para funciones definidas en un intervalo de $\mathbb{R}$. También enunciaremos, sin demostración, el Teorema del Valor Intermedio que nos será de utilidad en el transcurso de esta sección.

Teorema 6. *Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $f\colon A \to A$ una función continua definida en A. Sean a y b dos puntos en A tales que $a < b$ y sea $M \in \mathbb{R}$. Si se cumple alguna de las siguientes condiciones:*

- $f(a) < M < f(b)$,
- $f(b) < M < f(a)$,

entonces existe un número c, con $a < c < b$, tal que $f(c) = M$.

Proposición 7. *Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $f\colon A \to A$ una función continua definida en A. Sea $[a, b]$ un intervalo contenido en A.*

1. *Si $f([a, b]) \subseteq [a, b]$, entonces f tiene un punto fijo en $[a, b]$.*
2. *Si $[a, b] \subseteq f([a, b])$, entonces f tiene un punto fijo en $[a, b]$.*

Demostración. *(1)* supongamos que $f([a,b]) \subseteq [a,b]$. Entonces:

$$a \leq f(a) \quad \text{y} \quad f(b) \leq b.$$

Sea $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = f(x) - x$. Entonces h es continua en $[a,b]$ y además $h(a) \geq 0$ y $h(b) \leq 0$. Por el Teorema del Valor Intermedio, Teorema 6, tenemos que existe $c \in [a,b]$ tal que $h(c) = 0$, es decir, $f(c) = c$.

(2) Supongamos que $[a,b] \subseteq f([a,b])$. Entonces existen α y β en el intervalo $[a,b]$ tales que $f(\alpha) = a$ y $f(\beta) = b$. Entonces:

$$f(\alpha) \leq \alpha \quad \text{y} \quad \beta \leq f(\beta).$$

Sea $h\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = f(x) - x$. Entonces h así definida es continua en $[\alpha,\beta]$ y además $h(\alpha \leq 0)$ y $h(\beta) \geq 0$. Por lo tanto, por el Teorema del Valor Intermedio, existe $c \in [\alpha,\beta]$ tal que $h(c) = 0$, es decir, $f(c) = c$. $\square$

Ahora fijaremos nuestra atención en la función del Ejemplo 1.

Proposición 8. *Sean $X = [0,1]$ y $f\colon [0,1] \to [0,1]$ dada por:*

$$T(x) = \begin{cases} 2x & si \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 0 & si \quad x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $l \in \{1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$ se tiene lo siguiente:

- *La función T^n restringida al intervalo $\left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right]$, dada por:*

$$T^n|_{\left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right]}\colon \left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right] \to [0,1]$$

  es un homeomorfismo.

- *La regla de correspondencia de T^n en $\left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right]$ es:*

$$T^n(x) = \mu + (-1)^l 2^n x,$$

  donde μ es un número entero.

Demostración. La prueba es por inducción. Para $n = 1$, $l \in \{0,1\}$. Si $l = 0$, es inmediato que $T\colon [0, \frac{1}{2}] \to [0,1]$ es un homeomorfismo ya que en este intervalo:

$$T(x) = 2x = 0 + (-1)^0 2x.$$

Si $l = 1$, entonces $T\colon [\frac{1}{2}, 1] \to [0,1]$ también es un homeomorfismo ya que en este intervalo:

$$T(x) = 2 - 2x = 2 + (-1)^1 2x.$$

Supongamos ahora que la afirmación es cierta para $n = k$, es decir, para cada l en el conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, 2^k - 1\}$,

$$T^k\,|_{\left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}\right]}\colon \left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}\right] \to [0,1]$$

es un homeomorfismo. Además en cada intervalo $[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}]$, la regla de correspondencia de T^k es:

$$T^k(x) = \mu + (-1)^l 2^k x, \quad \mu \in \mathbb{Z}.$$

Sean $n = k+1$ y $l \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^{k+1} - 1\}$.

Observamos que si $l \leq 2^k - 1$, entonces

$$\left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}\right] \subseteq \left[0, \frac{1}{2}\right],$$

y si $2^k \leq l \leq 2^{k+1} - 1$, entonces

$$\left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}\right] \subseteq \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

Caso 1. Si $l \leq 2^k - 1$, entonces la función T^{k+1} se puede expresar de la siguiente forma:

$$\left[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}}\right] \xrightarrow{T} \left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}\right] \xrightarrow{T^k} [0, 1].$$

Como por hipótesis de inducción T^k es un homeomorfismo y además T, en ese intervalo, también es un homeomorfismo, entonces

$$T^{k+1}\mid_{[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}}]} : \left[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}}\right] \to [0, 1]$$

es un homeomorfismo. Además

$$x \xrightarrow{T} 2x \xrightarrow{T^k} \mu + (-1)^l 2^k (2x).$$

Por lo tanto,

$$T^{k+1}(x) = \mu + (-1)^l 2^{k+1} x.$$

Caso 2. Si $2^k \leq l \leq 2^{k+1} - 1$, entonces la función T^{k+1} se puede expresar de la forma:

$$\left[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}}\right] \xrightarrow{T} \left[\frac{2^{k+1} - l - 1}{2^k}, \frac{2^{k+1} - l}{2^k}\right] \xrightarrow{T^k} [0, 1].$$

Para ver que la primera función es un homeomorfismo notamos que como

$$2^k \leq l \leq 2^{k+1} - 1,$$

enrtonces

$$\begin{array}{rcl} -2^k & \geq & -l \ \geq \ 1 - 2^{k+1}, \\ 2^{k+1} - 2^k - 1 & \geq & 2^{k+1} - l - 1 \geq 0, \\ 2^k - 1 & \geq & 2^{k+1} - l - 1 \geq 0. \end{array}$$

Como además por hipótesis de inducción T^k es un homeomorfismo, entonces

$$T^{k+1}\mid_{[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}}]} : \left[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}}\right] \to [0, 1]$$

es un homeomorfismo. Además en este caso, si $x \in [\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}}]$, entonces

$$T^{k+1}(x) = T^k(T(x)) = T^k(2-2x) = \mu + (-1)^{2^{k+1}-l-1} 2^k(2-2x)$$

$$= \mu + (-1)^{2^{k+1}-l-1} 2^{k+1} + (-1)^{2^{k+1}-l} 2^{k+1} x.$$

Tomando $\mu' = \mu + (-1)^{2^{k+1}-l-1} 2^{k+1}$ y como l y $2^{k+1} - l$ tienen la misma paridad, entonces

$$T^{k+1}(x) = \mu' + (-1)^l 2^{k+1} x.$$

□

Proposición 9. *Sean $a, b \in [0,1]$ tales que $a < b$. Entonces existe un número $N \in \mathbb{N}$ para el cual $T^N(a,b) = [0,1]$.*

Demostración. Como $a < b$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^N} < \frac{b-a}{2}$. Entonces existe un número $l \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^N - 1\}$ tal que:

$$\left[\frac{l}{2^N}, \frac{l+1}{2^N}\right] \subseteq (a,b).$$

Por la Proposición 8, tenemos que $T^N(a,b) = [0,1]$. □

Proposición 10. *El conjunto $Per(T)$ es denso en el intervalo $[0,1]$.*

Demostración. Sean $a, b \in [0,1]$ con $a < b$ y sean $N \in \mathbb{N}$ y $l \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^N - 1\}$ como en la Proposición 9 tales que $\left[\frac{l}{2^N}, \frac{l+1}{2^N}\right] \subseteq (a,b)$. Como $T^n\left(\left[\frac{l}{2^N}, \frac{l+1}{2^N}\right]\right) = [0,1]$, entonces podemos aplicar la Proposición 7 para obtener un punto fijo de la función T^N en $\left[\frac{l}{2^N}, \frac{l+1}{2^N}\right]$. Por lo tanto, existe

$$x_0 \in \left[\frac{l}{2^N}, \frac{l+1}{2^N}\right] \subseteq (a,b)$$

tal que $T^N(x_0) = x_0$. □

4. Caos

Una de las formas de definir caos es como lo hace Devaney [2]. Después, J. Banks et al. [1] probaron que si una función continua f definida en un espacio métrico que es *transitiva* y que tiene *densidad de puntos periódicos* tambien tiene *sensibilidad a las condiciones iniciales.*

Definición 11. Sean X un espacio métrico y $f\colon X \to X$ una función continua. Decimos que f es *topológicamente transitiva* (o simplemente *transitiva*) si para cualesquiera dos conjuntos abiertos no vacíos U y V de X, existe un número natural n tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

La función en el Ejemplo 1 es transitiva. La función en el Ejemplo 2 es transitiva cuando el ángulo de rotación es irracional con respecto a 2π. La función en el Ejemplo 3 no es transitiva.

Proposición 12. *La función tienda $T\colon [0,1] \to [0,1]$ es transitiva en el intervalo $[0,1]$.*

Demostración. Sean U y V dos subconjuntos abiertos no vacíos de $[0,1]$. Entonces existe un intervalo abierto $(a,b) \subseteq U$. Por la Proposición 9, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $T^N(a,b) = [0,1]$. Así, $T^N(U) = [0,1]$ y, por lo tanto, $T^N(U) \cap V \neq \emptyset$. □

Definición 13. Sean X un espacio métrico y $f\colon X \to X$ una función continua. Decimos que f es *sensible a las condiciones iniciales en* X si existe una $\varepsilon > 0$ tal que, para toda $x \in X$ y para cualquier $\delta > 0$, existen $y \in B(x,\delta)$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que:

$$d(f^n(x), f^n(y)) \geq \varepsilon.$$

Al número ε se le llama *la constante de sensibilidad de f.*

La función en el Ejemplo 1 es sensible a las condiciones iniciales. Las funciones en los ejemplos 2 y 3 no son sensibles a las condiciones iniciales.

Proposición 14. *La función tienda $T\colon [0,1] \to [0,1]$ es sensible a las condiciones iniciales en el intervalo $[0,1]$.*

Demostración. Sea $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Tomemos $x \in [0,1]$ y $\delta > 0$. Por la Proposición 9, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$T^n(B(x,\delta)) = [0,1].$$

Por lo que en el intervalo $(x-\delta, x+\delta) \cap [0,1] = B(x,\delta)$ existen dos puntos x_0 y x_1 tales que $T^n(x_0) = 0$ y $T^n(x_1) = 1$. De aquí se sigue que

$$|T^n(x) - T^n(x_0)| \geq \frac{1}{2} \quad \text{ó} \quad |T^n(x) - T^n(x_1)| \geq \frac{1}{2}.$$

□

Definición 15. Sean X un espacio métrico que no tiene puntos aislados y $f\colon X \to X$ una función continua. Decimos que f es una función *caótica* o que *genera un sistema dinámico caótico* en X si se cumplen:

1. El conjunto $Per(f)$ es denso en X.
2. f es transitiva en X.
3. f es sensible a las condiciones iniciales en X.

Proposición 16. *La función tienda $T\colon [0,1] \to [0,1]$ es caótica en $[0,1]$.*

En [1], los autores prueban que una función continua definida en un espacio métrico que tiene densidad de puntos periódicos y además que es transitiva tiene sensibilidad a las condiciones iniciales. Enunciamos aquí el teorema sin demostración.

Teorema 17. *Sea X un espacio métrico y $f\colon X \to X$ una función continua. Si f es transitiva y tiene densidad de puntos periódicos, entonces f es sensible a las condiciones iniciales.*

5. Sombreado

Una propiedad interesante es la propiedad de *sombreado*. Para decir cuándo una función tiene la propiedad de sombreado necesitamos el siguiente concepto.

Definición 18. Sean X un espacio métrico compacto, $f\colon X \to X$ una función continua y $\delta > 0$. Una sucesión $\Gamma = \langle x_0, x_1, x_2, \dots \rangle$, de puntos de X, es una *δ-pseudo órbita* si para toda $i \geq 0$, $d(f(x_i), x_{i+1}) < \delta$. Cuando la sucesión Γ es finita decimos que Γ es una *δ-pseudo órbita finita* o *una δ-cadena.*

Definición 19. Sean X un espacio métrico compacto, $f\colon X \to X$ una función continua, $\Gamma = \langle x_0, x_1, x_2, \dots \rangle$ una sucesión de puntos de X y $\varepsilon > 0$. Decimos que un punto $y \in X$ *ε-sombrea* a Γ si para toda $i \geq 0$, $d(f^i(y), x_i) < \varepsilon$.

Definición 20. Sean X un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ una función continua. Decimos que f tiene la *propiedad de sombreado (finito)* si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cualquier δ-pseudo órbita (finita) $\Gamma = \langle x_0, x_1, x_2, \dots \rangle$, existe un punto $y \in X$ que ε-sombrea a Γ.

Ejemplo 21. Sea $X = [0, 1]$ y $f\colon X \to X$ la función identidad. Es fácil verificar que f no tiene la propiedad de sombreado.

Ejemplo 22. Sean $X = \left\{\frac{1}{2^n} \colon n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\} \cup \{0\}$ y $f\colon X \to X$ dada por: $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $f\left(\frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2^{n-1}}$. Para ver que f tiene la propiedad de sombreado, sea $\varepsilon > 0$. Ahora, elegimos k_0 tal que $\frac{1}{2^{k_0+1}} < \epsilon \leq \frac{1}{2^{k_0}}$ y sea $\delta < \frac{1}{2^{k_0}} - \frac{1}{2^{k_0+1}}$. Sea $\Gamma = \langle x_0, x_1, x_2, \dots \rangle$ una δ-pseudo órbita en X. Notamos que si $x_m = \frac{1}{2^{k_0}}$ para alguna $m \geq 0$, entonces $\langle x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots \rangle$ es una órbita (por la elección de δ). Consideramos dos casos. (1) $\Gamma \subseteq [0, \varepsilon)$; (2) $\Gamma \cap [\varepsilon, 1] \neq \emptyset$. En el caso (1), $y = 0$ ε-sombrea a Γ. En el caso (2), sea m el menor entero positivo tal que $x_m > \varepsilon$. Si $m = 0$, entonces Γ es una órbita (que se sombrea a sí misma), o $x_m = \frac{1}{2^{k_0}}$ y, así, $y = \frac{1}{2^{k_0+m}}$ ε-sombrea a Γ.

Teorema 23. *Sean X un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ una función continua. Entonces f tiene la propiedad de sombreado si y sólo si f tiene la propiedad de sombreado finito.*

Demostración. Supongamos que f tiene la propiedad de sombreado y sean $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ tales que para toda δ-pseudo órbita existe un punto en X que la ε-sombrea. Sea $\Gamma = \langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle$ una δ-pseudo órbita finita. Consideremos la δ-pseudo órbita (infinita) $\Upsilon = \langle x_0, x_1, \dots, x_n, f(x_n), f^2(x_n), f^3(x_n), \dots \rangle$ Como f tiene la propiedad de sombreado, existe un punto $z \in X$ tal que su órbita $o(z, f)$ ε-sombrea a Υ. De aquí se sigue que para cada $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, $d(f^i(z), x_i) < \varepsilon$. Por lo tanto, f tiene la propiedad de sombreado finito.

Ahora supongamos que f tiene la propiedad de sombreado finito y sea $\varepsilon > 0$. Consideremos el número $\eta = \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces existe una $\delta > 0$ tal que para toda δ-cadena hay un punto que la η-sombrea. Sea $\Gamma = \langle x_0, x_1, x_2 \dots \rangle$ una δ-pseudo órbita. Para cada $k \geq 0$ definimos

$$A_k = \left\{y \in X \colon d(f^i(y), x_i) \leq \eta \text{ para toda } i \in \{0, 1, \dots, k\}\right\}.$$

Los conjuntos A_k tienen las siguientes propiedades para toda $k \geq 0$:

1. $A_k \neq \emptyset$.

2. A_k es cerrado ya que

$$A_k = cl(B(x_0, \eta)) \cap f^{-1}(cl(B(x_1, \eta))) \cap \cdots \cap f^{-k}(cl(B(x_k, \eta))).$$

3. $A_{k+1} \subseteq A_k$.

De aquí se sigue que $A = \cap_{k=0}^{\infty} A_k \neq \emptyset$. Sea $z \in A$. Entonces $z \in A_k$ para toda k y, así,

$$d(f^k(z), x_k) \leq \eta < \varepsilon, \qquad \text{para toda } k \geq 0.$$

Por lo tanto el punto z ε-sombrea a la pseudo órbita Γ. $\square$

Lema 24. *Sean X un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ una función continua. Si para toda $\varepsilon > 0$, existe una $\delta > 0$ tal que para todo punto $x \in X$,*

$$cl\left(B(f(x), \varepsilon + \delta)\right) \subseteq f\left(cl(B(x, \varepsilon))\right),$$

entonces f tiene la propiedad de sombreado.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Tomemos un valor $\delta > 0$ que cumpla la hipótesis.

Sea $\Gamma = \langle x_0, x_1, x_2 \ldots, x_n \rangle$ una δ-pseudo órbita finita. Hay que probar que existe un punto $z \in X$ que ε-sombrea a Γ.

Sea $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Como $cl\left(B(f(x_i), \varepsilon + \delta)\right) \subseteq f\left(cl(B(x_i, \varepsilon))\right)$ y $d(f(x_i), x_{i+1}) < \delta$, entonces $cl(B(x_{i+1}, \varepsilon)) \subseteq f(cl(B(x_i, \varepsilon)))$.

Ahora, como $cl(B(x_n, \varepsilon)) \subseteq f(cl(B(x_{n-1}, \varepsilon)))$, entonces existe $A_1 \subseteq cl(B(x_{n-1}, \varepsilon))$, tal que $f(A_1) = cl(B(x_n, \varepsilon))$.

De manera análoga, de la contención $A_1 \subseteq cl(B(x_{n-1}, \varepsilon)) \subseteq f(cl(B(x_{n-2}, \varepsilon)))$ se sigue que existe $A_2 \subseteq cl(B(x_{n-2}, \varepsilon))$, tal que $f(A_2) = A_1$.

Aplicando varias veces este argumento obtenemos, en el paso k, con $1 \leq k \leq n$, un conjunto $A_k \subseteq cl(B(x_{n-k}, \varepsilon))$, tal que $f(A_k) = A_{k-1}$.

Estos conjuntos los podemos representar en una sucesión,

$$A_n \to A_{n-1} \to \cdots \to A_2 \to A_1,$$

donde $A_k \to A_{k-1}$ denota que $f(A_k) = A_{k-1}$.

Sea $z \in A_n$. Entonces $z \in cl(B(x_0, \varepsilon))$ y, para cada i, $1 \leq i \leq n-1$, se tiene que $f^i(z) \in A_{n-i}$, con $A_{n-i} \subseteq cl(B(x_i, \varepsilon))$.

Además $f^n(z) \in f(A_1) = cl(B(x_n, \varepsilon))$.

Por lo tanto, para toda i, $0 \leq i \leq n$, $d(f^i(z), x_i) \leq \varepsilon$. $\square$

Proposición 25. *La función tienda, $T\colon [0,1] \to [0,1]$, tiene la propiedad de sombreado.*

Definición 26. Sean X un espacio métrico y $f\colon X \to X$ una función continua. Decimos que un subconjunto A de X es *invariante bajo f* si $f(A) \subseteq A$. Decimos que A es *fuertemente invariante bajo f* si $F(A) = A$.

Proposición 27. *Sean X un espacio métrico compacto, $f\colon X \to X$ una función continua y Y un subconjunto denso e invariante de X. Entonces f tiene sombreado si y sólo si $f|_Y$ tiene sombreado finito.*

Demostración. Supongamos primero que f tiene sombreado. Sea $\varepsilon > 0$ y elegimos $\delta > 0$ tal que cada δ-pseudo órbita en X es $\varepsilon/2$-sombreada. Sea $\Gamma = \langle y_0, y_1, \ldots, y_r \rangle$ una δ-pseudo órbita en Y. Entonces Γ es una δ-pseudo órbita en X. Como f tiene sombreado, hay un punto $x \in X$ que $\varepsilon/2$-sombrea a Γ, i.e., $d(f^i(x), y_i) < \frac{\varepsilon}{2}$, para cada $i \in \{0, 1, 2, \ldots, r\}$. Como f es continua, existe $\eta_{r-1} > 0$, con $\eta_{r-1} < \frac{\varepsilon}{2}$ y $f\left(N_X\left(f^{r-1}(x), \eta_{r-1}\right)\right) \subseteq N_X\left(f^r(x), \frac{\varepsilon}{2}\right)$. También existe $\eta_{r-2} > 0$, con $\eta_{r-2} < \eta_{r-1}$ y $f\left(N_X\left(f^{r-2}(x), \eta_{r-2}\right)\right) \subseteq N_X\left(f^{r-1}(x), \eta_{r-1}\right)$. Continuando con este proceso, existe $\eta_1 > 0$, con $\eta_1 < \eta_2$ y $f\left(N_X\left(f(x), \eta_1\right)\right) \subseteq N_X\left(f^2(x), \eta_2\right)$. Finalmente, existe $\eta_0 > 0$, con $\eta_0 < \eta_1$ y $f\left(N_X\left(x, \eta_0\right)\right) \subseteq N_X\left(f(x), \eta_1\right)$. Por construcción, cada $y \in N_X(x, \eta_0) \cap Y$ ε-sombrea a Γ.

Ahora supongamos que $f|_Y$ tiene sombreado finito. Sean $\varepsilon > 0$ y $\Gamma = \langle x_0, x_1, \ldots, x_r \rangle$ una $\delta/3$-pseudo órbita en X, donde δ está dada por el sombreado en $f|_Y$ para $\varepsilon/2$. Como f es continua y X es compacto, f es uniformemente continuoua y existe $\eta > 0$, con $\eta < \frac{\delta}{3}$ y $\eta < \frac{\varepsilon}{2}$, tal que si $d(x,y) < \eta$, entonces $d\left(f(x), f(y)\right) < \frac{\delta}{3}$. Para cada $i \in \{0, 1, \ldots, r\}$, sea $y_i \in B_X(x_i, \eta) \cap Y$. Entonces $d\left(f(x_i), f(y_i)\right) < \frac{\delta}{3}$. Así, $\Gamma^* = \langle y_0, y_1, \ldots, y_r \rangle$ es una δ-pseudo órbita en Y ya que:

$$
\begin{aligned}
d\left(f(y_i), y_{i+1}\right) &\leq d\left(f(y_i), f(x_i)\right) + d\left(f(x_i), x_{i+1}\right) + d\left(x_{i+1}, y_{i+1}\right) \\
&< \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \delta.
\end{aligned}
$$

Como $f|_Y$ tiene sombreado finito, hay un punto $y \in Y$ que $\frac{\varepsilon}{2}$-sombrea a Γ^*. Pero entonces $d\left(f^i(y), x_i\right) < d\left(f^i(y), y_i\right) + d\left(y_i, x_i\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Por lo tanto, y ε-sombrea a Γ and, así, f tiene sombreado finito. Como X es compacto, por el Teorema 23 f tiene sombreado. $\square$

6. Funciones inducidas a los hiperespacios

Primero definiremos algunos de los hiperespacios en los que vamos a trabajar.

Dado un espacio métrico compacto y no vacío X, definimos:

- $2^X = \{A \subseteq X : A \text{ es cerrado y no vacío}\}$ es el *hiperespacio de subconjuntos cerrados no vacíos de X.*
- $C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}$ es el *hiperespacio de subcontinuos de X.*
- $C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}$.
- $F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}$ es el *n-ésimo producto simétrico de X.*
- $F(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(X)$ es la colección de todos los subconjuntos finitos de X.

Dada una función continua $f : X \to Y$ entre espacios métricos compactos, las funciones inducidas a los hiperespacios se definen de la siguiente forma:

- La *función inducida* $2^f : 2^X \to 2^Y$ está dada por $2^f(A) = f(A)$.

- La *función inducida* $C(f)\colon C(X) \to C(Y)$ está dada por $C(f) = 2^f \mid_{C(X)}$.
- La *función inducida* $C_n(f)\colon C_n(X) \to C_n(Y)$ está dada por $C_n(f) = 2^f \mid_{C_n(X)}$.
- La *función inducida* $f_n\colon F_n(X) \to F_n(Y)$ está dada por $f_n = 2^f \mid_{F_n(X)}$.
- La *función inducida* $f^{<\omega}\colon F(X) \to F(X)$ está dada por $f^{<\omega} = 2^f \mid_{F(X)}$.

Proposición 28. *Sean X un espacio métrico compacto con métrica d y A y B dos subconjuntos cerrados no vacíos de X. Entonces*

$$\mathbf{h}(A,B) = \inf\{\varepsilon > 0\colon A \subseteq N(B,\varepsilon) \text{ y } B \subseteq N(A,\varepsilon)\}, \text{ donde}$$

$$N(A,\varepsilon) = \bigcup_{a\in A} B(a,\varepsilon) = \{x \in X\colon \text{existe } a \in A,\ d(a,x) < \varepsilon\}$$

es una métrica para 2^X.

Proposición 29. *Si $f\colon X \to X$ es continua, entonces la función inducida $2^f\colon 2^X \to 2^X$ es continua.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como f es continua y X es compacto, entonces f es uniformemente continua en X. Así, existe $\delta > 0$ tal que si $x_1, x_2 \in X$, con $d(x_1,x_2) < \delta$, entonces $d(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$. Sean $A, B \in 2^X$ tales que

$$\mathbf{h}(A,B) < \delta.$$

Para cada $z \in f(A)$, existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que

$$f(a) = z \quad \text{y} \quad d(a,b) < \delta.$$

Entonces $d(f(a), f(b)) < \varepsilon$, y por lo tanto,

$$f(a) \in N(f(B),\varepsilon) \quad \text{y} \quad f(A) \subseteq N(f(B),\varepsilon).$$

Análogamente,

$$f(B) \subseteq N(f(A),\varepsilon).$$

Lo que implica que $\mathbf{h}(f(A), f(B)) < \varepsilon$. □

Proposición 30. *El hiperespacio $F(X)$ es denso en 2^X.*

Demostración. Sean $A \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$. Como A es compacto y $\{B_\varepsilon(a)\colon a \in A\}$ es una cubierta abierta de A, entonces existen n puntos $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ tales que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(a_i) = N\left(\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, \varepsilon\right).$$

Por otro lado, como $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subseteq A \subseteq N(A,\varepsilon)$, entonces

$$\mathbf{h}(A, \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}) < \varepsilon.$$

Así, $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \in N(A,\varepsilon) \cap F(X)$, es decir, $F(X)$ es denso en 2^X. □

Proposición 31. *Si $Per(f)$ es denso en X, entonces $Per(2^f)$ es denso en 2^X.*

Demostración. Sean $A \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$. Como A es compacto, entonces existen n puntos $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ tales que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a_i).$$

Como el conjunto de puntos periódicos de f es denso en X, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, existe $b_i \in Per(f)$ tal que $d(a_i, b_i) < \frac{\varepsilon}{2}$. Observamos que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_{\varepsilon}(b_i) = N\left(\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}, \varepsilon\right) \text{ y } \{b_1, b_2, \ldots, b_n\} \subseteq N(A, \varepsilon).$$

Por lo que $\mathbf{h}(A, \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}) < \varepsilon$ Ahora, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sea m_i el periodo de b_i y sea $M = [m_1, m_2, \ldots, m_n]$ el mínimo común múltiplo. Entonces $f^M(b_i) = b_i$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Sea $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, entonces $\mathbf{h}(A, B) \leq \varepsilon$, $B \in 2^X$ y $2^f(B) = f(B) = B$. Por lo tanto $Per(2^f)$ es denso en 2^X. □

Proposición 32. *Si $2^f\colon 2^X \to 2^X$ es transitiva en 2^X, entonces $f\colon X \to X$ es transitiva en X.*

Demostración. Sean a y b dos puntos en X y sea $\varepsilon > 0$. Como 2^f es transitiva en 2^X, entonces existen $A \in 2^X$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que

$$\mathbf{h}(\{a\}, A) < \varepsilon \quad \text{y} \quad \mathbf{h}\left(\{b\}, \left(2^f\right)^N (A)\right) < \varepsilon.$$

Tomemos un punto $x \in A$, entonces $d(a, x) < \varepsilon$ y $d(b, f^N(x)) < \varepsilon$. Por lo tanto f es transitiva en X. □

Se puede verificar que si en la Proposición 32 en vez de considerar el hiperespacio 2^X consideramos el hiperespacio $C(X)$ se obtiene el mismo resultado.

Ejemplo 33. Sea $T\colon [0,1] \to [0,1]$ la función tienda. Consideremos los conjuntos abiertos

$$N_{C(X)}\left([0,1], \frac{1}{10}\right) \quad \text{y} \quad N_{C(X)}\left(\{0\}, \frac{1}{10}\right).$$

Si $K \in N_{C(X)}\left([0,1], \frac{1}{10}\right)$, entonces $\frac{2}{3} \in K$, lo que implica que $\frac{2}{3} \in (C(f))^n(K)$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, si $F \in N_{C(X)}\left(\{0\}, \frac{1}{10}\right)$, entonces $F \subseteq \left[0, \frac{1}{10}\right]$, lo que implica que $\mathbf{h}\left((C(f))^n(K), F\right) \geq \frac{17}{30}$ para toda $K \in N_{C(X)}\left([0,1], \frac{1}{10}\right)$ y toda $F \in N_{C(X)}\left(\{0\}, \frac{1}{10}\right)$. Así,

$$(C(f))^n \left(N_{C(X)}\left([0,1], \frac{1}{10}\right)\right) \cap N_{C(X)}\left(\{0\}, \frac{1}{10}\right) = \emptyset, \text{ para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, $C(f)$ no es transitiva en $C(X)$.

Proposición 34. *Si $2^f\colon 2^X \to 2^X$ es sensible a las condiciones iniciales en 2^X, entonces $f\colon X \to X$ es sensible a las condiciones inciales en X.*

Demostración. Supongamos que 2^f es sensible a las condiciones iniciales en 2^X y sea $\varepsilon_0 > 0$ una constante de sensibilidad para 2^f. Entonces para todo $A \in 2^X$ y para toda $\delta > 0$, existen $B \in 2^X$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $\mathbf{h}(A, B) < \delta$ y

$$\mathbf{h}\left(\left(2^f\right)^N(A), \left(2^f\right)^N(B)\right) \geq \varepsilon_0.$$

Sean $a \in X$ y $\delta > 0$ y sean $B \in 2^X$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que

$$\mathbf{h}(\{a\}, B) < \delta \quad \text{y} \quad \mathbf{h}\left(\left(2^f\right)^N(\{a\}), \left(2^f\right)^N(B)\right) \geq \varepsilon_0.$$

Entonces existe $x_0 \in B$ tal que

$$d(a, x_0) < \delta \quad \text{y} \quad d(f^N(a), f^N(x_0)) \geq \varepsilon_0.$$

Por lo tanto f tiene sensibilidad a las condiciones iniciales en X. □

Con respecto a la propiedad de sombreado en las funciones inducidas tenemos los siguientes resultados.

Teorema 35. *Sean X un espacio métrico compacto, $f\colon X \to X$ una función continua y $n \geq 1$. Si alguna de f_n, $C(f)$, 2^f or $f^{<\omega}$ tiene la propiedad de sombreado, entonces f tiene la propiedad de sombreado.*

Demostración. La prueba es idéntica en cada caso por lo que sólo probaremos para 2^f. Supongamos que 2^f tiene la propiedad de sombreado y sean $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ dada por el sombreado para 2^f. Sea $\Gamma = \langle x_0, x_1, \ldots, x_r\rangle$ una δ-pseudo órbita en X. Entonces $\Gamma^* = \langle \{x_0\}, \{x_1\}, \ldots, \{x_r\}\rangle$ es una δ-pseudo órbita en 2^X. Como 2^f tiene la propiedad de sombreado, hay un punto $A \in 2^X$ que ε-sombrea a Γ^*. Entonces cada punto x de A ε-sombrea a Γ. □

Teorema 36. *Sean X un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ una función continua. Si f tiene la propiedad de sombreado, entonces $f_2\colon F_2(X) \to F_2(X)$ también tiene la propiedad de sombreado.*

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ dada por el sombreado en f. Sea $\Gamma = \langle A_0, A_1, \ldots, A_m\rangle$ una δ-pseudo órbita en $F_2(X)$. Para cada $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$, sea $A_i = \{x_i, y_i\}$ donde es posible que para alguna o algunas i se tenga que $x_i = y_i$. Como $\mathbf{h}(f_2(A_{m-1}), A_m) < \delta$, entonces tenemos que $\mathbf{h}(\{f(x_{m-1}), f(y_{m-1})\}, \{x_m, y_m\}) < \delta$. Esto implica que, sin pérdida de generalidad, $d(f(x_{m-1}), x_m) < \delta$ y $d(f(y_{m-1}), y_m) < \delta$. También $d(f(x_{m-2}), x_{m-1}) < \delta$ y $d(f(y_{m-2}), y_{m-1}) < \delta$. Continuando de esta forma podemos suponer que para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ se tiene que $d(f(x_{i-1}), x_i) < \delta$ y $d(f(y_{i-1}), y_i) < \delta$. Así, $\Gamma_x = \langle x_{0,x_1,\ldots x_m}\rangle$ y $\Gamma_y = \langle y_{0,y_1,\ldots y_m}\rangle$ son δ-pseudo órbitas en X. Como f tiene la propiedad de sombreado, existen p y q en X tales que p ε-sombrea a Γ_x y q ε-sombrea a Γ_y. De aquí se sigue que $A = \{p, q\}$ ε-sombrea a Γ. □

En general no se tiene que $f_n\colon F_n(X) \to F_n(X)$ tenga la propiedad de sombreado. El Ejemplo 22 sirve para mostrar esto.

Ejemplo 37. Sean $X = \left\{\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\} \cup \{0\}$ y $f\colon X \to X$ dada por: $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $f\left(\frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2^{n-1}}$.

Para ver que $f^{<\omega}$ no tiene la propiedad de sombreado sean $\varepsilon = \frac{1}{8}$ y $\delta > 0$. Como $\delta > 0$, hay un número entero positivo $N \geq 3$ tal que $\frac{1}{2^N} < \delta$. Sean $A_0 = \{0, 1\}$, $A_1 = \{0, \frac{1}{2^N}, 1\}$, $A_2 = f^{<\omega}(A_1) = \{0, \frac{1}{2^{N-1}}, 1\}$, $A_3 = (f^{<\omega})^2(A_1) = \{0, \frac{1}{2^{N-2}}, 1\}, \ldots, A_N = (f^{<\omega})^{N-1}(A_1) = \{0, \frac{1}{2^{N-(N-1)}}, 1\} = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, $A_{N+1} = (f^{<\omega})^N(A_1) = \{0, 1\} = A_0$. Por construcción:

$$\Gamma = \langle A_0, A_1, A_2, \ldots A_N, A_0, A_1, A_2, \ldots \rangle$$

es una δ-pseudo órbita en $F(X)$ (que, en realidad, es una δ-pseudo órbita in $F_3(X)$). No es difícil verificar que los conjuntos que ε-sombrean a Γ son conjuntos de la forma $B = \left\{0, \frac{1}{2^{kN}}, \frac{1}{2^{(k-1)N}}, \frac{1}{2^{(k-2)N}}, \ldots, \frac{1}{2^N}, 1\right\}$. El número de iteraciones que B va a ε-sombrear a Γ dependen del número k.

Teorema 38. *Sean X un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ una función continua. Si f tienen la propiedad de sombreado, entonces $f^{<\omega}\colon F(X) \to F(X)$ tiene la propiedad de sombreado finito.*

Demostración. Fijemos $\varepsilon > 0$ y sea $\delta > 0$ dada por el sombreado en f. Sea $\Gamma = \langle A_0, A_1, \ldots A_r \rangle$ una δ-pseudo órbita finita en $F(X)$ y supongamos que $|A_i| = n_i$ para cada $i \in \{0, 1, 2, \ldots, r\}$.

Construiremos una familia de δ-pseudo órbitas en X, que denotaremos $\{\Gamma_j : j \leq n\}$, para alguna $n \in \mathbb{N}$, tales que $\Gamma_j = \left\langle a_0^j, a_1^j, a_2^j, \ldots, a_{r-1}^j, a_r^j \right\rangle$, y se satisface $A_i = \{a_i^j : j \leq n\}$ para cada $i \leq r$.

Para hacer esto supongamos que $A_r = \{a_r^1, a_r^2, \ldots, a_r^{n_r}\}$. Para cada j, con $1 \leq j \leq n_r$, primero construimos una δ-pseudo órbita en X con i-ésimo elemento en A_i y cuyo elemento final es a_r^j. Como Γ es una δ-pseudo órbita, podemos elegir $a_{r-1}^j \in A_{r-1}$ tal que $d\left(f(a_{r-1}^j), a_r^j\right) < \delta$. Nuevamente, hay un $a_{r-2}^j \in A_{r-2}$ tal que $d\left(f(a_{r-2}^j), a_{r-1}^j\right) < \delta$. Continuando de esta forma tenemos δ-pseudo órbitas

$$\Gamma_j = \left\langle a_0^j, a_1^j, a_2^j, \ldots, a_{r-1}^j, a_r^j \right\rangle,$$

para cada $j \leq n_r$, tales que $A_r = \{a_r^j : j \leq n_r\}$ y $\{a_i^j : j \leq n_r\} \subseteq A_i$ para cada $i \leq r$.

Sea $k = \max\left\{i < r : A_i \neq \{a_i^j : j \leq n_r\}\right\}$ (si no existe tal k, entonces ya hemos terminado) y escribimos $A_k \setminus \{a_k^j : j \leq n_r\} = \{a_k^j : n_r < j \leq n_k'\}$.

De la misma manera en la que se hizo para A_r, para cada $n_r < j \leq n_k'$, podemos construir una δ-pseudo órbita $\Gamma_{j'} = \left\langle a_0^j, a_1^j, \ldots, a_k^j \right\rangle$ tal que $a_i^j \in A_i$, para $i \leq k$. Claramente $A_k = \{a_k^j : j \leq n_{k'}\}$. Ahora, como $f\left(a_k^j\right) \in f^{<\omega}\left(A_k\right)$ y $\mathbf{h}\left(f^{<\omega}\left(A_k\right), A_{k+1}\right) < \delta$, hay un $a_{k+1}^j \in A_{k+1}$ tal que $d\left(f\left(a_k^j\right), a_{k+1}^j\right) < \delta$. De forma similar, para cada $n_r < j \leq n_k'$ and $k < i < r$, existen $a_i^j \in A_i$ tales que $d\left(f\left(a_i^j\right), a_{i+1}^j\right) < \delta$, así que podemos extender $\Gamma_{j'}$ a una δ-pseudo órbita Γ_j que comience en A_0 y termine en A_r.

Repitiendo este proceso, es claro que podemos construir la colección $\{\Gamma_j : j \leq n\}$ de δ-pseudo órbitas en X. Como f tiene la propiedad de sombreado, entonces para cada Γ_j hay un punto $b_j \in X$ que ε-sombrea a Γ_j. Let $B = \{b_0, b_1, \ldots, b_m\}$. Por construcción, B ε-sombrea a Γ. $\square$

Teorema 39. *Sean X un espacio métrico compacto y $f\colon X \to X$ una función continua. Entonces f tiene la propiedad de sombreado si y sólo si 2^f tiene la propiedad de sombreado.*

Demostración. Por el Teorema 35, si 2^f tiene sombreado, entonces f tiene sombreado. Recíprocamente, si f tiene sombreado, entonces por el Teorema 38, $f^{<\omega}$ tiene sombreado finito. Ahora, $F(X)$ es un conjunto denso e invariante de 2^X. Así, por el Lema 27, 2^f tiene sombreado. □

7. Ejercicios

Ejercicio 1. Probar el Teorema 5.

Ejercicio 2. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función estrictamente decreciente. Probar que f tiene un punto fijo.

Ejercicio 3. Sea $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$. Demostrar que si f es suprayectiva, entonces f tiene al menos un punto fijo.

Ejercicio 4. Sean X un espacio métrico y $f\colon X \to X$ una función continua y sea $x \in Per(f)$ de periodo k. Demostrar que $f^n(x) = x$ si y sólo si n es un múltiplo de k.

Ejercicio 5. Sean X un espacio métrico y $f\colon X \to X$ una función continua. Si x y y son puntos de periódicos de f con periodos m y n, respectivamente, y si $m \neq n$, entonces las órbitas $o(x,f)$ y $o(y,f)$ son ajenas.

Ejercicio 6. Sean $T\colon [0,1] \to [0,1]$ la función tienda y $a,b \in [0,1]$ con $a < b$. Demostrar que si un conjunto $B \subseteq [a,b]$ es denso en $[a,b]$, entonces B tiene cardinalidad infinita.

Ejercicio 7. Sea $T\colon [0,1] \to [0,1]$ la función tienda. Demostrar que:

- $T(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = \mathbb{Q} \cap [0,1]$.
- $T([0,1] \setminus \mathbb{Q}) = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$.

Ejercicio 8. Sea $T\colon [0,1] \to [0,1]$ la función tienda. Mostrar un conjunto infinito de puntos contenido en $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ tal que ninguno de sus elementos es punto periódico bajo T.

Ejercicio 9. Sea $T\colon [0,1] \to [0,1]$ la función tienda. Sea $x \in [0,1]$ tal que x no es racional. Demostrar que la órbita $o(x,T)$, visita una cantidad infinita de puntos. *Sugerencia:* demostrar que para cada pareja n y m en $\mathbb{N}$, con $n \neq m$, se tiene que $T^n(x) \neq T^m(x)$.

Ejercicio 10. Sea $T\colon [0,1] \to [0,1]$ la función tienda y sean (a,b) y (c,d) dos intervalos abiertos contenidos en $[0,1]$ tales que $a < b < c < d$. Demostrar que existe $x_0 \in Per(T)$ tal que:

$$o(x_0,T) \cap (a,b) \neq \emptyset \quad \text{y} \quad o(x_0,T) \cap (c,d) \neq \emptyset.$$

Ejercicio 11. Sea $T\colon [0,1] \to [0,1]$ la función tienda. Demostrar que para cada punto $x_0 \in [0,1]$ se tiene que el conjunto

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-1}(x_0)$$

es denso en el intervalo $[0,1]$.

Ejercicio 12. En la Proposición 8 escribir μ en función de l y n.

Ejercicio 13. Demostrar la Proposición 28.

Ejercicio 14. Sean $X = [0,1]$ y $A = \{0\}$. Describir los siguientes conjuntos:

- $\mathbf{E} = \left\{B \in 2^X \colon \mathbf{h}(A,B) = 1\right\}$
- $\mathbf{F} = \left\{B \in 2^X \colon \mathbf{h}(A,B) = \frac{1}{2}\right\}$
- $\mathbf{G} = \left\{B \in 2^X \colon \mathbf{h}(A,B) < 1\right\}$
- $\mathbf{H} = \left\{B \in 2^X \colon \mathbf{h}(X,B) < 1\right\}$
- $\mathbf{I} = \left\{B \in 2^X \colon \mathbf{h}(X,B) = 1\right\}$

Ejercicio 15. Sean X un espacio métrico compacto, $f\colon X \to X$ una función continua y $A \in F_n(X)$ para alguna $n \in \mathbb{N}$ fija. Probar que A es un punto periódico de $f_n\colon F_n(X) \to F_n(X)$ si y sólo si para cada $p \in A$ se tiene que p es un punto periódico de f.

Ejercicio 16. ¿Por qué el Ejemplo 37 no contradice el Teorema 38?

Ejercicio 17. Sean X un espacio métrico compacto, $f\colon X \to X$ una función continua y $x \in Per(f)$ de periodo m . Demostrar que si p divide a m, entonces hay un punto de periodo p para $f_n\colon F_n(X) \to F_n(X)$ $(n \geq m)$.

Ejercicio 18. Sean X un espacio métrico compacto, $f\colon X \to X$ una función continua y $x, y \in Per(f)$ de periodos m y n, respectivamente, con $m \neq n$. ¿Qué periodo tiene $\{x, y\} \in F_2(X)$ para f_2?

Ejercicio 19. Sean X un espacio métrico compacto, $f\colon X \to X$ una función continua y $x \in Per(f)$ un punto de periodo $m \geq 3$. ¿Qué periodo tiene $\{x, f(x)\} \in F_2(X)$ para f_2?

Referencias

[1] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, P. Stacey *On Devaney's Definition of Chaos* Amer. Math. Monthly **99** (1992). 332–334.

[2] R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems* Addison-Wesley, 1989.

[3] J. L. Gómez Rueda, A. Illanes, H. Méndez, *Dynamics properties of the induced maps in the symmetric products*, Chaos, Solitons & Fractals, 45 (2012) 1180–1187.

[4] J. E. King, H. Méndez *Sistemas Dinámicos Discretos*, Publicaciones de la Facultad de Ciencias, UNAM (2014).

[5] S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of Sets*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 49, Marcel Dekker, New York, Basel, Hong Kong, (1978).

[6] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: An Introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 158, Marcel Dekker, New York, Basel, Hong Kong, 1992.

[7] H. Román-Flores, *A Note on Transitivity in Set-Valued Discrete Systems*, Chaos, Solitons and Fractals **17**, (2003). 99–104.

[8] G.T. Whyburn, *Analytic Topology*, Amer. Math. Soc. Colloq. Pub., Vol. 28, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1942.