Dinámica de funciones inducidas entre productos simétricos.

Victor Manuel Grijalva Altamirano

Universidad Tecnólogica de la Mixteca
Huajuapan, Oax., Octubre 2016

CONTENIDO

CONTENIDO

Definición

Sean X un espacio métrico y $f : X \to X$ una función continua que cumple con las siguientes propiedades:

1. $f^0(x) = x$, para todo $x \in X$, esto es $f^0(x) = I_X$,
2. $f^n(f^m(x)) = f^{n+m}(x)$, para todo $m, n \in \mathbb{Z}$ y para todo $x \in X$.

Al par (X, f), constituido por el espacio métrico X y la función continua $f : X \to X$, se denomina *sistema dinámico discreto*.

Definición

Sean X un espacio métrico y $f : X \to X$ una función continua. Si $x \in X$, entonces *la orbita de x bajo f* es el conjunto:

$$\mathcal{O}(x,f) = \{f^k(x) : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

Definición

Sea x un punto en X. Decimos que x es *un punto fijo* de f si $f(x) = x$; decimos que x es un *punto periódico* de f si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = x$. Al conjunto de todos los puntos periódicos de f lo denotaremos con $Per(f)$. Si $x \in Per(f)$, entonces

$$n_0 = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : f^n(x) = x\}$$

es el periodo de x.

Definición

Sean X un espacio métrico y $f : X \to X$ una función continua. Si $x \in X$, entonces *la orbita de x bajo f* es el conjunto:

$$\mathcal{O}(x,f) = \{f^k(x) : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

Definición

Sea x un punto en X. Decimos que x es *un punto fijo* de f si $f(x) = x$; decimos que x es un *punto periódico* de f si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = x$. Al conjunto de todos los puntos periódicos de f lo denotaremos con $Per(f)$. Si $x \in Per(f)$, entonces

$$n_0 = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : f^n(x) = x\}$$

es el periodo de x.

Observemos que si x_0 es un punto fijo de f, se tiene que $\mathcal{O}(x_0,f) = \{x_0\}$.

Definición

Sean (X, f) un sistema dinámico y x_0 un punto fijo de f. Se dice que x_0 es un *punto fijo atractor* si existe $\delta > 0$ tal que si $x \in X$ y $d(x, x_0) < \delta$, entonces $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_0$.

Definición

Sean (X, f) un sistema dinámico y x_0 un punto fijo de f. Se dice que x_0 es un *punto fijo repulsor* si existe $\delta > 0$ tal que si $x \in B(\delta, x_0) \setminus \{x_0\}$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \notin B(\delta, x_0)$.

Sea $T : [0, 1] \to [0, 1]$ dada por

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \leq \frac{1}{2}; \\ 2 - 2x, & \text{si } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

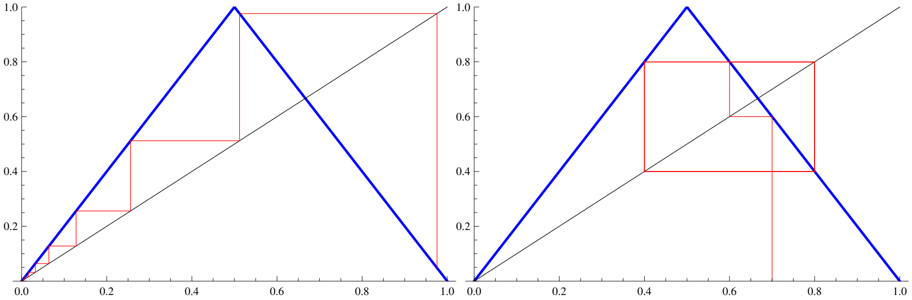


Figura: Diagrama Cobweb de la función Tienda. En el primer diagrama, se ha elegido como punto inicial a $x_0 = 0.001$ y en el segundo diagrama, el punto inicial es $x_0 = 0.7$. En ambos diagramas se observa que los puntos fijos de T son repulsores.

Notemos que $T^2 : [0,1] \to [0,1]$ viene dada por:

$$T^2(x) = \begin{cases} 4x, & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{4}\right]; \\ -4(x - \frac{1}{2}), & \text{si } x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{4}\right]; \\ 4(x - \frac{1}{2}), & \text{si } x \in \left[\frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right]; \\ -4(x - 1), & \text{si } x \in \left[\frac{3}{4}, 1\right]. \end{cases}$$

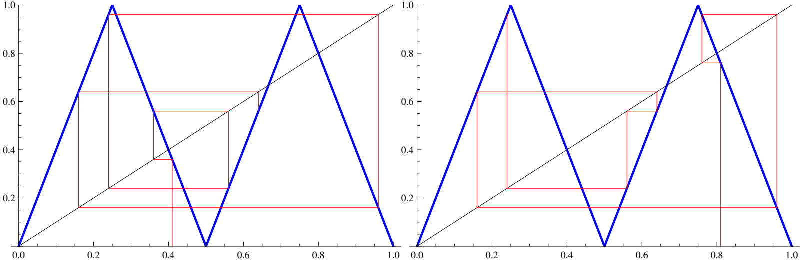


Figura: Diagrama Cobweb de la función T^2. En el primer diagrama, se ha elegido como punto inicial a $x_0 = 0.41$ y en el segundo diagrama, el punto inicial es $x_0 = 0.81$. En ambos diagramas se observa que los puntos fijos de T^2 son repulsores.

1. Consideremos la función $f_\alpha : [0,1] \to [0,1]$ definida por $f_\alpha(x) = \alpha x(1-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^+$. La función f_α se le conoce como *función logística*.
2. Fijemos $\alpha \in \mathbb{I}$. Consideremos $\mathbb{S}^1$ como un subconjunto de $\mathbb{C}$, esto es, $\mathbb{S}^1 = \{e^{2\pi i\theta} : \theta \in [0,1]\}$. Tomamos la función $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ definida por $f(z) = e^{2\pi i\alpha} z$, para todo $z \in \mathbb{S}^1$. La función f se le conoce como *función rotación irracional*.
3. Sea $\Sigma_2 = \{s = \{s_0 s_1 s_2, \ldots\} : s_i = 0 \text{ o } 1\}$, el conjunto de todas las sucesiones infinitas de 0's y 1's. Se define la función *Shift* $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ por

$$\sigma\{s_0 s_1 s_2 \ldots\} = \{s_1 s_2 \ldots\}.$$

CONTENIDO

Definición

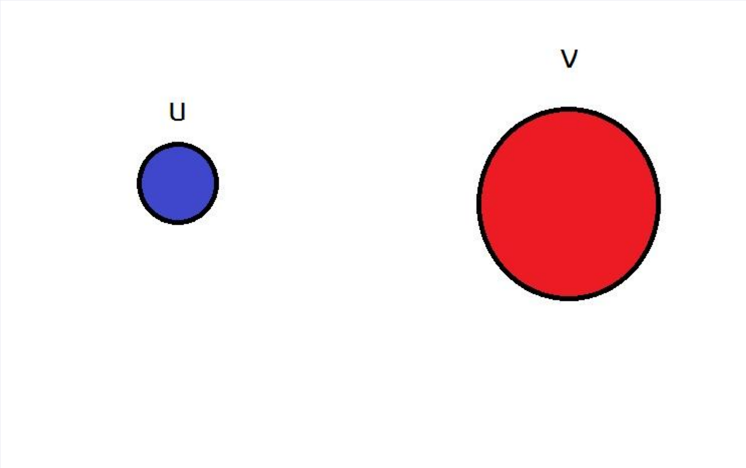
Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Un *subcontinuo* es un *continuo* el cual está contenido como subespacio en otro continuo.

1. El intervalo $[a,b]$, para $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$, es un continuo.
2. Las n-celdas $[0, 1]^n$ son continuos. En particular, la 2-celda es un continuo.
3. Un arco es un continuo.
4. En un espacio métrico Y, la imagen continua de un continuo es un continuo.

Definición

Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Se dice que f es:

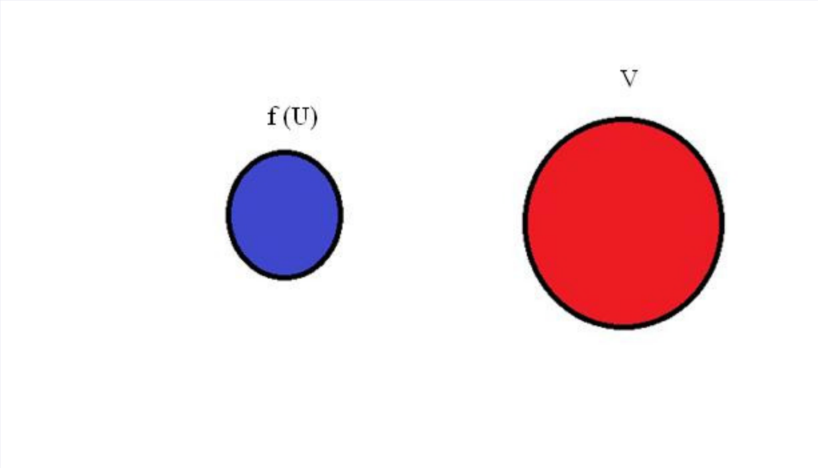
1. *transitiva* si para cada par de subconjuntos abiertos no vacios U y V de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.



Definición

Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Se dice que f es:

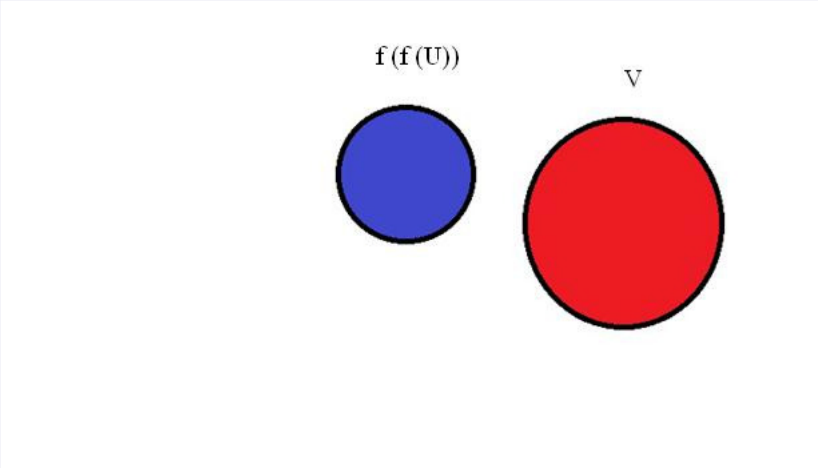
1. *transitiva* si para cada par de subconjuntos abiertos no vacios U y V de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.



Definición

Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Se dice que f es:

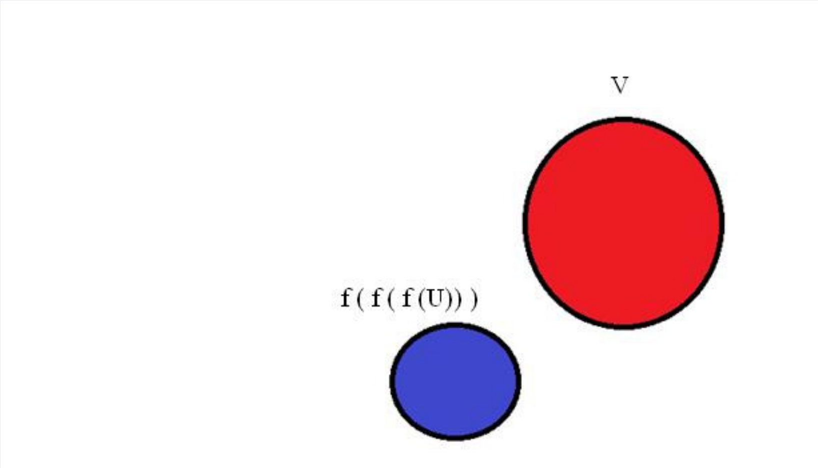
1. *transitiva* si para cada par de subconjuntos abiertos no vacios U y V de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.



Definición

Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Se dice que f es:

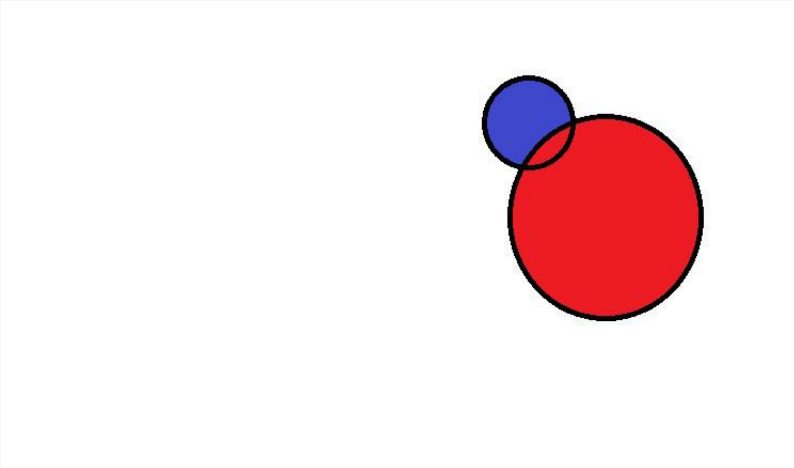
1. *transitiva* si para cada par de subconjuntos abiertos no vacios U y V de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.



Definición

Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Se dice que f es:

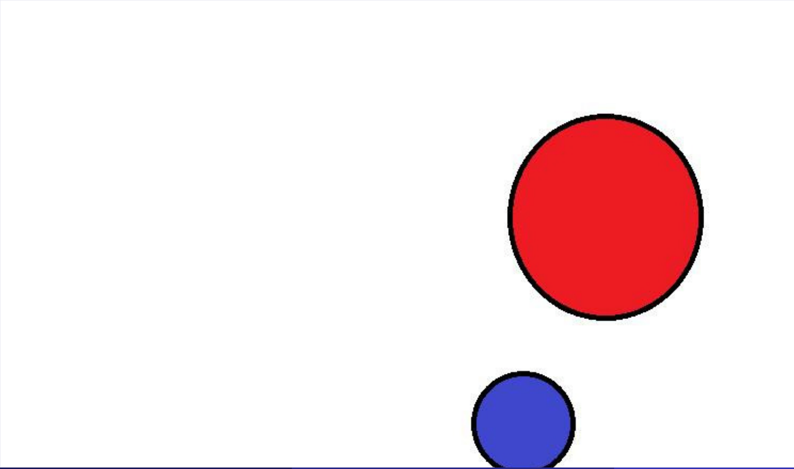
1. *transitiva* si para cada par de subconjuntos abiertos no vacios U y V de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.



Definición

Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Se dice que f es:

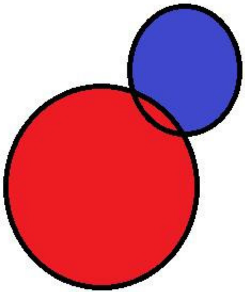
1. *transitiva* si para cada par de subconjuntos abiertos no vacios U y V de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.



Definición

Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Se dice que f es:

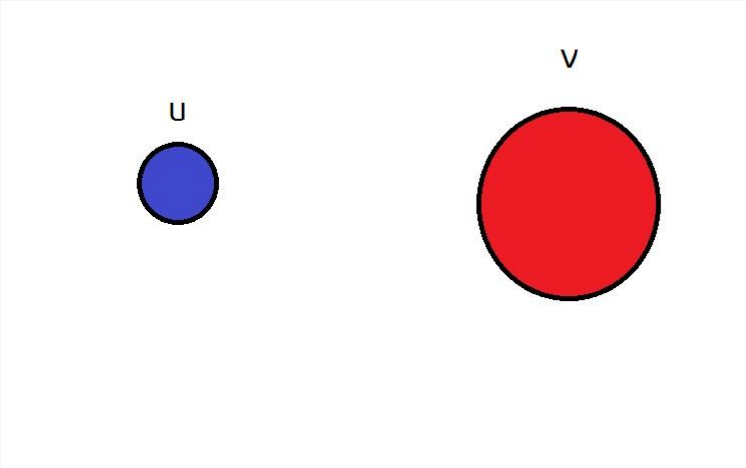
1. *transitiva* si para cada par de subconjuntos abiertos no vacios U y V de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.



Definición

Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Se dice que f es:

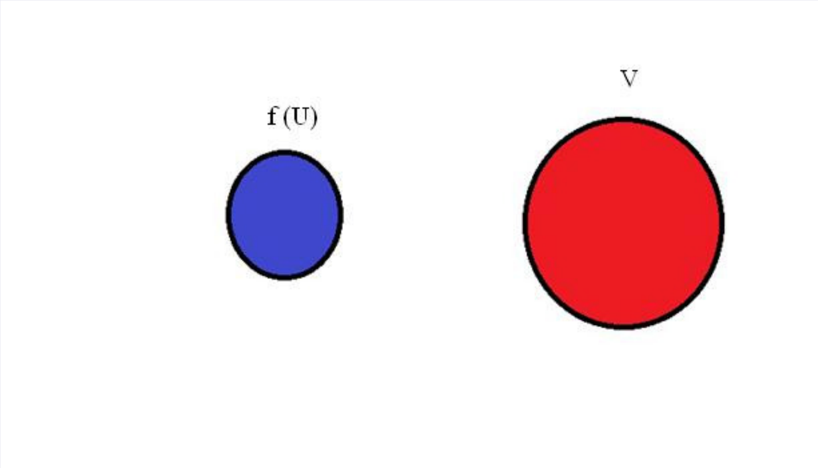
1. *mezcladora* si para cada par de subconjuntos abiertos no vacios U y V de X, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ para cada $k \geq N$;



Definición

Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Se dice que f es:

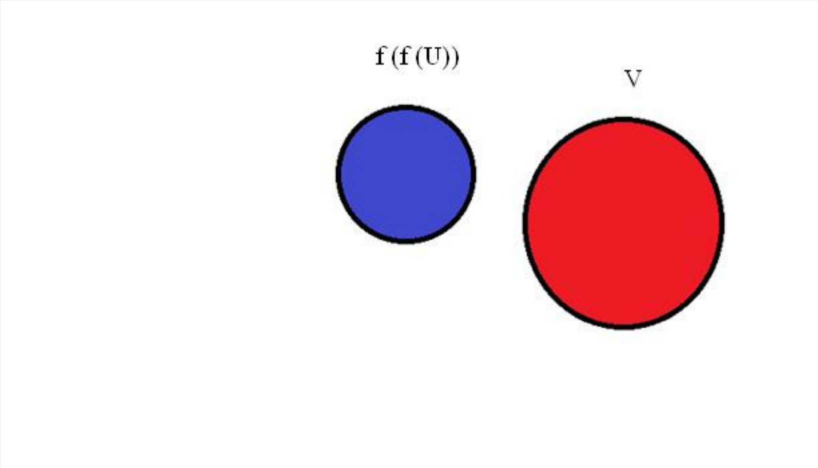
1. *mezcladora* si para cada par de subconjuntos abiertos no vacios U y V de X, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ para cada $k \geq N$;



Definición

Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Se dice que f es:

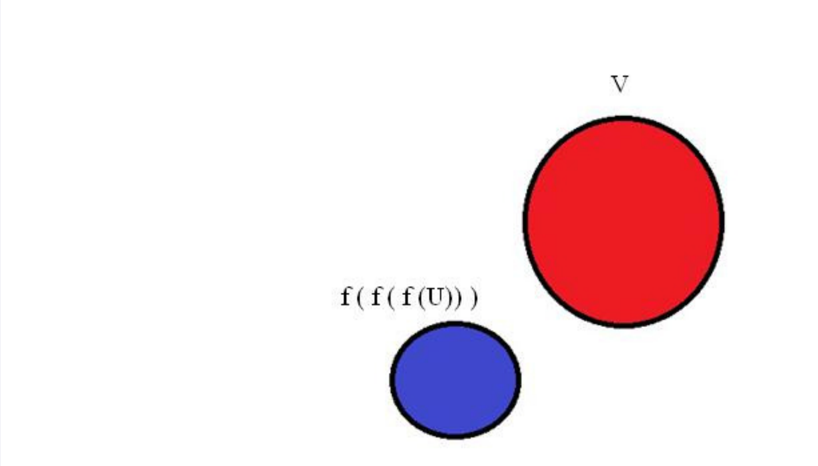
1. *mezcladora* si para cada par de subconjuntos abiertos no vacios U y V de X, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ para cada $k \geq N$;



Definición

Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Se dice que f es:

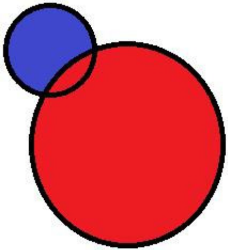
1. *mezcladora* si para cada par de subconjuntos abiertos no vacios U y V de X, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ para cada $k \geq N$;



Definición

Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Se dice que f es:

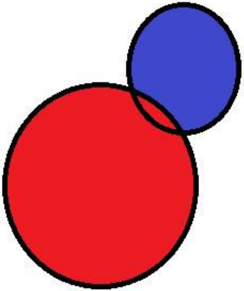
1. *mezcladora* si para cada par de subconjuntos abiertos no vacios U y V de X, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ para cada $k \geq N$;



Definición

Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Se dice que f es:

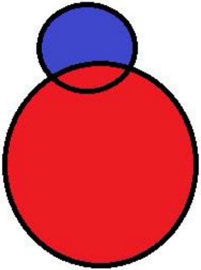
1. *mezcladora* si para cada par de subconjuntos abiertos no vacios U y V de X, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ para cada $k \geq N$;



Definición

Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Se dice que f es:

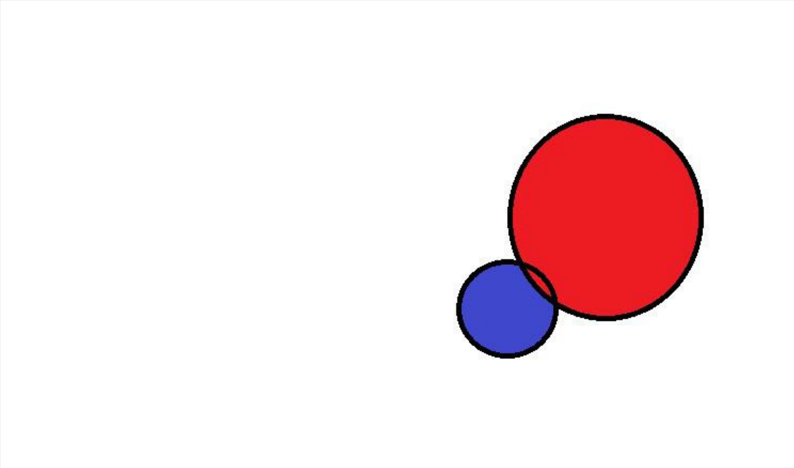
1. *mezcladora* si para cada par de subconjuntos abiertos no vacios U y V de X, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ para cada $k \geq N$;



Definición

Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Se dice que f es:

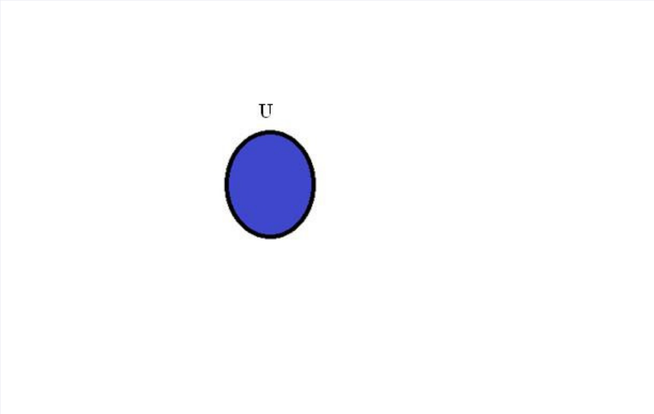
1. *mezcladora* si para cada par de subconjuntos abiertos no vacios U y V de X, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ para cada $k \geq N$;



Definición

Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Se dice que f es:

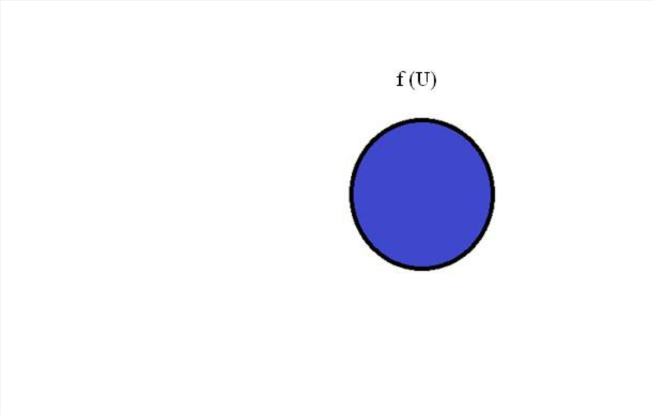
1. *exacta*, si para cada subconjunto abierto no vacio U de X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) = X$.



Definición

Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Se dice que f es:

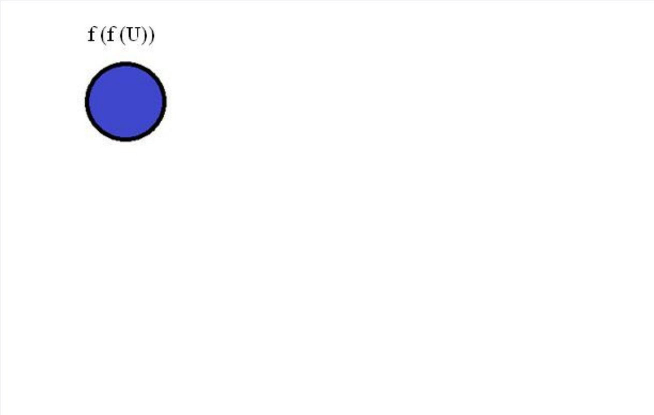
1. *exacta*, si para cada subconjunto abierto no vacio U de X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) = X$.



Definición

Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Se dice que f es:

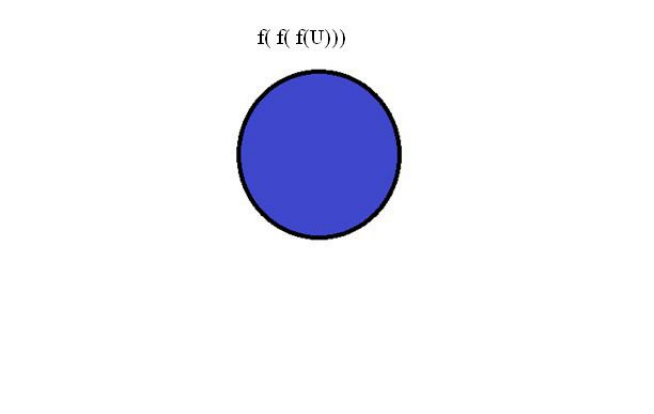
1. *exacta*, si para cada subconjunto abierto no vacio U de X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) = X$.



Definición

Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Se dice que f es:

1. *exacta*, si para cada subconjunto abierto no vacio U de X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) = X$.



Definición

Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Se dice que f es:

1. *exacta*, si para cada subconjunto abierto no vacio U de X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) = X$.

Definición

Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Se dice que f es:

1. *minimal*, si para cada $x \in X$ se tiene que $\overline{\mathcal{O}(x,f)} = X$;
2. *irreducible* si el único subconjunto cerrado $A \subset X$ tal que $f(A) = X$ es $A = X$.

Definición

Sean X un continuo y $f : X \to X$ una función continua. Se dice que f es:

1. *caótica* si es transitiva y $Per(f)$ es denso en X.
2. *sensitiva* si existe $c \in \mathbb{R}^+$ tal que para todo $x \in X$ y para todo abierto U en X con $x \in U$, existen $y \in U$ y $k \in \mathbb{N}$ tales que $d_Y(f^k(x), f^k(y)) \geq c$. En tal caso, decimos que c es una constante de sensitividad para f.

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{Exacta} \arrow[d] & & \\
 & \text{Mezcladora} \arrow[d] & & \\
 & \text{Débilmente mezcladora} \arrow[d] & \text{Minimal} \arrow[d] \arrow[dr] & \\
 & \text{Totalmente transitiva} \arrow[d] & \text{Fuertemente transitiva} \arrow[dl] & \text{Irreducible} \arrow[d] \arrow[ddll] \\
\text{Caótica} \arrow[r] \arrow[d] & \text{Transitiva} \arrow[d] & & \text{Semi-abierta} \\
\text{Sensitiva} & \text{Sobreyectiva} & &
\end{tikzcd}
$$

CONTENIDO

Definición

Sea X un continuo. Un *hiperespacio* de un continuo X es una colección de subconjuntos de X que satisface ciertas condiciones. Estos espacios son considerados con la métrica de Hausdorff.

Definición

Sean (X, d) un espacio métrico y $n \in \mathbb{N}$. Definimos las siguientes familias de conjuntos de X:

1. $\mathcal{CB}(X) = \{A \subseteq X : A \neq \emptyset, A \text{ es acotado y cerrado en } X\}$;
2. $2^X = \{A \subseteq X : A \neq \emptyset \text{ y } A \text{ es compacto}\}$;
3. $C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo }\}$;
4. $\mathcal{F}_n(X) = \{A \subset X : A \neq \emptyset \text{ y tiene a lo más } n \text{ puntos}\}$;
5. $\mathcal{C}_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes }\}$.

Observemos que $\mathcal{F}_n(X) \subset \mathcal{C}_n(X) \subset 2^X \subset \mathcal{CB}(X)$.

Una función continua entre continuos $f : X \to Y$ puede inducir funciones entre hiperespacios. Estas funciones se conocen como *funciones inducidas* por f. Algunas de ellas se denotan y definen como sigue:

$$2^f : 2^X \to 2^Y \text{ dada por } 2^f(A) = f(A), \text{ para cada } A \in 2^X;$$

$$F_n(f) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(Y) \text{ dada por } F_n(f)(A) = f(A), \text{ para cada } A \in \mathcal{F}_n(X).$$

Una función continua entre continuos $f : X \to Y$ puede inducir funciones entre hiperespacios. Estas funciones se conocen como *funciones inducidas* por f. Algunas de ellas se denotan y definen como sigue:

$$2^f : 2^X \to 2^Y \text{ dada por } 2^f(A) = f(A), \text{ para cada } A \in 2^X;$$

$$F_n(f) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(Y) \text{ dada por } F_n(f)(A) = f(A), \text{ para cada } A \in \mathcal{F}_n(X).$$

De esta forma el sistema dinámico discreto (X, f) induce el sistema dinámico discreto $(\mathcal{F}_n(X), F_n(f))$.

Una función continua entre continuos $f : X \to Y$ puede inducir funciones entre hiperespacios. Estas funciones se conocen como *funciones inducidas* por f. Algunas de ellas se denotan y definen como sigue:

$$2^f : 2^X \to 2^Y \text{ dada por } 2^f(A) = f(A), \text{ para cada } A \in 2^X;$$

$$F_n(f) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(Y) \text{ dada por } F_n(f)(A) = f(A), \text{ para cada } A \in \mathcal{F}_n(X).$$

De esta forma el sistema dinámico discreto (X, f) induce el sistema dinámico discreto $(\mathcal{F}_n(X), F_n(f))$. En consecuencia, dado $A \in \mathcal{F}_n(X)$, analizar la órbita $\mathcal{O}(A, F_n(f))$ es estudiar la dinámica colectiva.

La siguiente tabla, muestra la relación que existe entre las dos proposiciones siguientes:

1. $f \in \mathcal{M}$,
2. $\mathcal{F}_n(f) \in \mathcal{M}$.

$\mathcal{M}$	1) $\Rightarrow$ 2)	2) $\Rightarrow$ 1)
Exacta	Sí	Sí
Mezcladora	Sí	Sí
Débilmente mezcladora	Sí	Sí
Caótica	No	Sí
Transitiva	No	Sí
Totalmente transitiva	No	Sí
Fuertemente transitiva	No	Sí
Minimal	No	Sí
Sensitiva	$\mathcal{F}_2(f) \in \mathcal{M}$	Sí

Cuadro: Tabla de las relaciones entre f y $\mathcal{F}_n(f)$.

Teorema

Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $f : X \to X$ una función continua. Considere las siguientes propiedades:

(1) $f : X \to X$ es minimal.

(2) $F_n(f) : \mathcal{F}_n(X) \to \mathcal{F}_n(X)$ es minimal.

Se sigue que (2) implica (1) y (1) no implica (2).

Prueba

CONTENIDO

G. Acosta, A. Illanes, H. Méndez-Lango, *The transitivity of induced maps*, Topology Appl. 156 (2009), no. 5, 1013-1033.

J. Auslander , Y. Katznelson, (1979), *Continuos maps of the circle without periodic points*, Israel J. Math., 32, 375-381.

J. Banks, *Topological mapping properties defined by digraphs*, Discrete Contin. Dynam. Systems 5 No. 1 (1999), 83-92.

W. Bauer, K. Sigmund, *Topological dynamics of transformations induced on the space of probability measures*, Monatsh. Math. 79 (1975), 81-92.

J. L. García, D. Kwietniak, M. Lampart, P. Oprocha, A. Peris, *Chaos on hyperspaces*, Nonlinear Anal. 71 (2009), no. 1, 1-8.

G. Higuera, A. Illanes, *Induced mappings on symmetric products*, Topology Proc., 37 (2011),

(2)⇒(1) Supongamos que $F_n(f)$ es minimal.

(2)$\Rightarrow$(1) Supongamos que $F_n(f)$ es minimal. Veamos que f es minimal, es decir, veamos que para todo $x \in X$ se tiene que $\overline{\mathcal{O}(x,f)} = X$.

(2)$\Rightarrow$(1) Supongamos que $F_n(f)$ es minimal. Veamos que f es minimal, es decir, veamos que para todo $x \in X$ se tiene que $\overline{\mathcal{O}(x,f)} = X$. Sean $x \in X$ y U un abierto en X. Basta mostrar que $U \cap \mathcal{O}(x,f) \neq \emptyset$.

(2)$\Rightarrow$(1) Supongamos que $F_n(f)$ es minimal. Veamos que f es minimal, es decir, veamos que para todo $x \in X$ se tiene que $\overline{\mathcal{O}(x,f)} = X$. Sean $x \in X$ y U un abierto en X. Basta mostrar que $U \cap \mathcal{O}(x,f) \neq \emptyset$. Note que $\{x\} \in \mathcal{F}_n(X)$ y $\langle U \rangle_n$ es un abierto en $\mathcal{F}_n(X)$.

(2)$\Rightarrow$(1) Supongamos que $F_n(f)$ es minimal. Veamos que f es minimal, es decir, veamos que para todo $x \in X$ se tiene que $\overline{\mathcal{O}(x,f)} = X$. Sean $x \in X$ y U un abierto en X. Basta mostrar que $U \cap \mathcal{O}(x,f) \neq \emptyset$. Note que $\{x\} \in \mathcal{F}_n(X)$ y $\langle U \rangle_n$ es un abierto en $\mathcal{F}_n(X)$. Dado que $F_n(f)$ es minimal, se sigue que $\langle U \rangle_n \cap \mathcal{O}(\{x\}, F_n(f)) \neq \emptyset$.

(2)$\Rightarrow$(1) Supongamos que $F_n(f)$ es minimal. Veamos que f es minimal, es decir, veamos que para todo $x \in X$ se tiene que $\overline{\mathcal{O}(x,f)} = X$. Sean $x \in X$ y U un abierto en X. Basta mostrar que $U \cap \mathcal{O}(x,f) \neq \emptyset$. Note que $\{x\} \in \mathcal{F}_n(X)$ y $\langle U \rangle_n$ es un abierto en $\mathcal{F}_n(X)$. Dado que $F_n(f)$ es minimal, se sigue que $\langle U \rangle_n \cap \mathcal{O}(\{x\}, F_n(f)) \neq \emptyset$. Sea $A \in \langle U \rangle_n \cap \mathcal{O}(\{x\}, F_n(f))$.

(2)$\Rightarrow$(1) Supongamos que $F_n(f)$ es minimal. Veamos que f es minimal, es decir, veamos que para todo $x \in X$ se tiene que $\overline{\mathcal{O}(x,f)} = X$. Sean $x \in X$ y U un abierto en X. Basta mostrar que $U \cap \mathcal{O}(x,f) \neq \emptyset$. Note que $\{x\} \in \mathcal{F}_n(X)$ y $\langle U \rangle_n$ es un abierto en $\mathcal{F}_n(X)$. Dado que $F_n(f)$ es minimal, se sigue que $\langle U \rangle_n \cap \mathcal{O}(\{x\}, F_n(f)) \neq \emptyset$. Sea $A \in \langle U \rangle_n \cap \mathcal{O}(\{x\}, F_n(f))$. Así, $A \in \langle U \rangle_n$, de donde se sigue que $A \subset U$.

Por otro lado, $A \in \mathcal{O}(\{x\}, F_n(f))$.

Por otro lado, $A \in \mathcal{O}(\{x\}, F_n(f))$. Luego $A = F_n(f)^m(\{x\}) = \{f^m(x)\}$, para algún $m \in \mathbb{N}$.

Por otro lado, $A \in \mathcal{O}(\{x\}, F_n(f))$. Luego $A = F_n(f)^m(\{x\}) = \{f^m(x)\}$, para algún $m \in \mathbb{N}$. En consecuencia, $A = \{f^m(x)\}$. De esta manera, $f^m(x) \in A \subset U$.

Por otro lado, $A \in \mathcal{O}(\{x\}, F_n(f))$. Luego $A = F_n(f)^m(\{x\}) = \{f^m(x)\}$, para algún $m \in \mathbb{N}$. En consecuencia, $A = \{f^m(x)\}$. De esta manera, $f^m(x) \in A \subset U$. Así, $f^m(x) \in U \cap \mathcal{O}(x, f)$.

Por otro lado, $A \in \mathcal{O}(\{x\}, F_n(f))$. Luego $A = F_n(f)^m(\{x\}) = \{f^m(x)\}$, para algún $m \in \mathbb{N}$. En consecuencia, $A = \{f^m(x)\}$. De esta manera, $f^m(x) \in A \subset U$. Así, $f^m(x) \in U \cap \mathcal{O}(x, f)$. Por lo tanto, $U \cap \mathcal{O}(x, f) \neq \emptyset$.

Por otro lado, $A \in \mathcal{O}(\{x\}, F_n(f))$. Luego $A = F_n(f)^m(\{x\}) = \{f^m(x)\}$, para algún $m \in \mathbb{N}$. En consecuencia, $A = \{f^m(x)\}$. De esta manera, $f^m(x) \in A \subset U$. Así, $f^m(x) \in U \cap \mathcal{O}(x,f)$. Por lo tanto, $U \cap \mathcal{O}(x,f) \neq \emptyset$.

(1)$\Rightarrow$(2) No se cumple!, consideremos la función rotación irracional.

Regresar