Universidad Autónoma del Estado de México
Facultad de Ciencias

Agujeros en el producto de dos dendroides suaves

Verónica Flores Huerta
Dr. José Guadalupe Anaya Ortega y Dr. David Maya Escudero

29 de septiembre de 2016

Definición

Un ***continuo*** es un espacio métrico, compacto, conexo y no degenerado (es decir, con más de un punto).

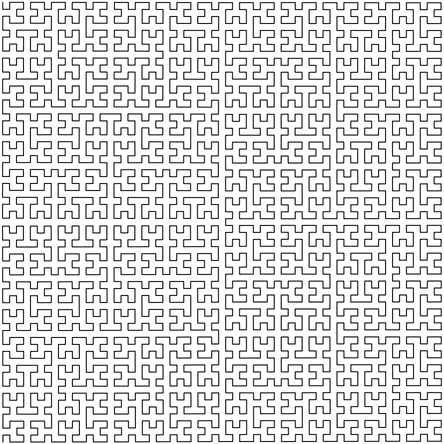


Figura: Imagen continua de $[0, 1]$

Definición

*Un continuo X es **unicoherente** si cada par de subcontinuos propios A y B de X tales que $X = A \cup B$ se tiene que $A \cap B$ es conexo.*

Definición

*Un continuo X es **unicoherente** si cada par de subcontinuos propios A y B de X tales que $X = A \cup B$ se tiene que $A \cap B$ es conexo.*
*Un continuo es **hereditariamente unicoherente** si todos sus subcontinuos son unicoherententes.*

Definición

Un continuo X es ***unicoherente*** *si cada par de subcontinuos propios A y B de X tales que $X = A \cup B$ se tiene que $A \cap B$ es conexo.*
Un continuo es ***hereditariamente unicoherente*** *si todos sus subcontinuos son unicoherententes.*

Definición

Un punto x de un continuo unicoherente X ***agujera*** *a X si $X \setminus \{x\}$ no es unicoherente.*

Definición

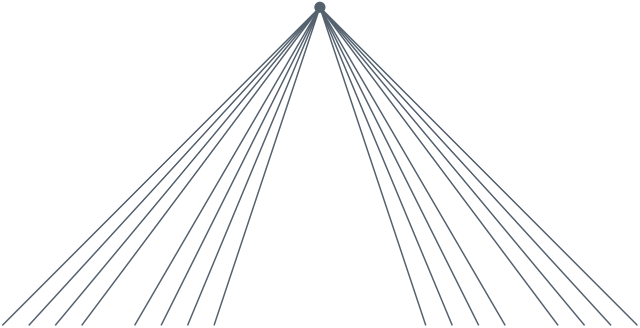
Un continuo es un **dendroide** si es arco conexo y hereditariamente unicoherente.

Definición

Un continuo es un **dendroide** si es arco conexo y hereditariamente unicoherente.

Definición

Un dendroide Y se llama ***suave*** si existe $p \in Y$ tal que para toda sucesión $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ que converge a x se tiene que la sucesión de arcos $\{px_n : n \in \mathbb{N}\}$ converge al arco px.

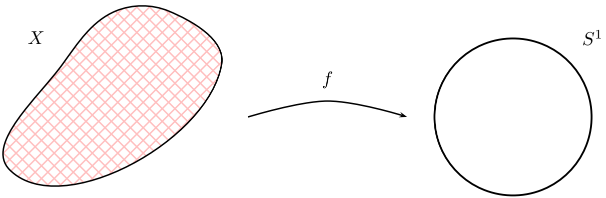


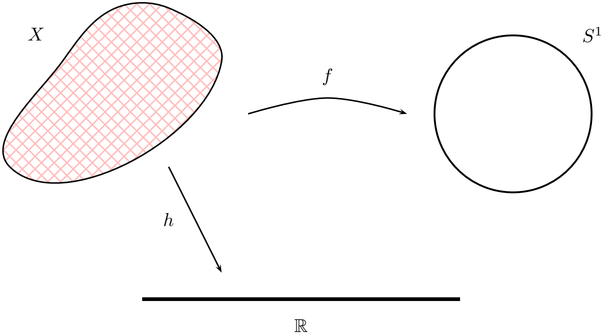
Problema

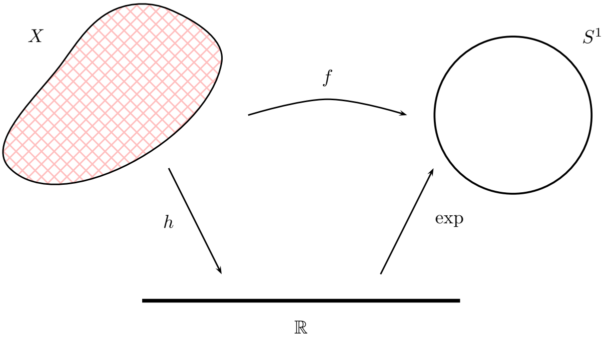
Si X y Y son continuos tales que $X \times Y$ es unicoherente, caracterizar los puntos $(x, y) \in X \times Y$ tal que (x, y) agujera a $X \times Y$.

En está platica presentaremos los avances hacia la solución del problema para el caso en que X y Y son dendroides suaves.

Una herramienta que se utiliza para probar la unicoherencia de un espacio es la **propiedad b)**.


X
f
S^1


X
f
S^1
h
$\mathbb{R}$



La función h es llamada levantamiento de f.

Lema

Sean Z un espacio topológico conexo con la propiedad b), $f : Z \to S^1$una función continua, $z_0 \in Z$ y $t_0 \in \mathbb{R}$, tales que $exp(t_0) = f(z_0)$. Entonces existe un levantamiento de f tal que $h(z_0) = t_0$.

Teorema (G. T. Whyburn, 1942)

Sean X y Y continuos que tienen la propiedad b), entonces el producto cartesiano $X \times Y$ también tiene la propiedad b).

Teorema (G. T. Whyburn, 1942)

Sean X y Y continuos que tienen la propiedad b), entonces el producto cartesiano $X \times Y$ también tiene la propiedad b).

Proposición

Sean W un espacio topológico y Z_1 , Z_2 subconjuntos cerrados y conexos de W. Si Z_1 y Z_2 tienen la propiedad b) y $Z_1 \cap Z_2$ es conexo, entonces $Z_1 \cup Z_2$ tiene la propiedad b).

Definición

Un espacio topólogico X es **contráctil** si existe una función continua $h : X \times I \to X$ tal que para cada $x \in X$, $h((x, 0)) = x$ y $h((x, 1)) = p$, para algún $p \in X$.

Teorema (J.G. Anaya, 2007)

Sea X un espacio topológico. Si X es contraible, entonces X tiene la propiedad b)

Teorema (J.G. Anaya, 2007)

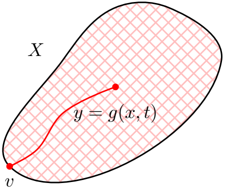
Sea X un espacio topológico. Si X es contraible, entonces X tiene la propiedad b)

Teorema (S. Eilenberg, 1936)

Sea X un espacio métrico. Si X tiene la propiedad b), entonces X es unicoherente.

Sea X un dendroide suave en v y μ una función de Whitney para $C(X)$. Definimos $g : X \times [0,1] \to X$ como $g(x,t) = y$ donde y es el único punto de vx tal que $\mu(vy) = t \cdot \mu(vx)$.

Sea X un dendroide suave en v y μ una función de Whitney para $C(X)$. Definimos $g : X \times [0,1] \to X$ como $g(x,t) = y$ donde y es el único punto de vx tal que $\mu(vy) = t \cdot \mu(vx)$.



- g esta bien definida y es continua
- Para cada $x \in X \setminus \{v\}$, $g(x,t) = v$ si y sólo si $t = 0$
- Para cada $x \in X \setminus \{v\}$, $g(x,t) = x$ si y sólo si $t = 1$.

Corolario

Si X es un dendroide suave, entonces X es contráctil y por tanto X tiene la propiedad b).

Puntos que agujeran al producto de dos dendroides suaves

Román Aguirre-Perez, José G. Anaya-Ortega, Enrique Castañeda Alvarado y Pablo Méndez-Alvarado, mostraron:

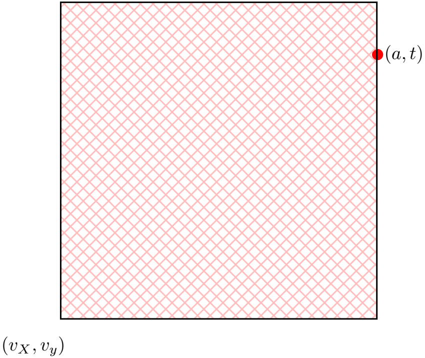
Teorema

Sean X y Y continuos unicoherentes tal que $X \times Y$ es unicoherente y sea $(x_0, y_0) \in X \times Y$. Si x_0 y y_0 son puntos de corte de X y Y respectivamente, entonces el punto (x_0, y_0) hace un agujero en $X \times Y$.

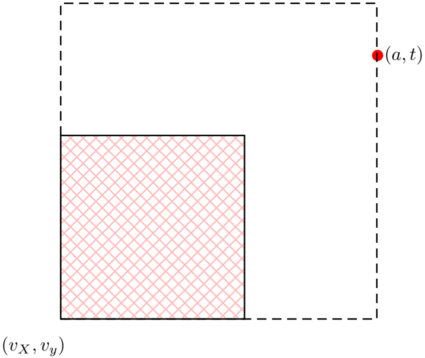
Teorema

Sean X y Y dendroides suave en v_X y v_Y respectivamente. Si $(a, t) \in X \times Y$ tal que $a \in E(X) \setminus \{v_X\}$ ó $t \in E(Y) \setminus \{v_Y\}$, entonces (a, t) no agujera a $X \times Y$.

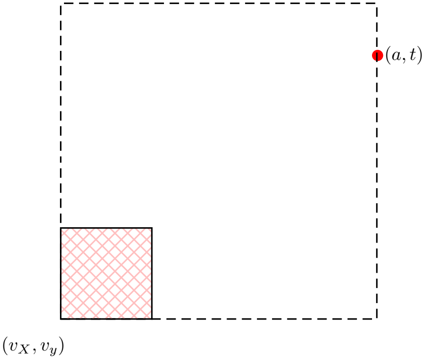
Supongamos que $a \in E(X) \setminus \{v_X\}$.



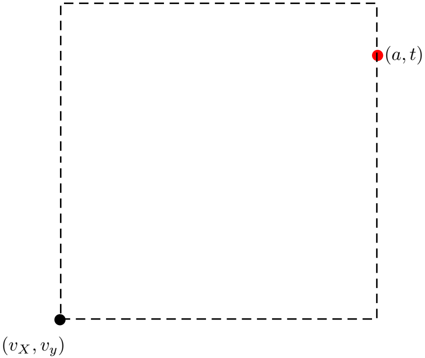
Sea $G : (X \times Y \setminus \{(a, t)\}) \times [0, 1] \to X \times Y \setminus \{(a, t)\}$, como $G((x, y), s) = (g_X(x, s), g_Y(y, s))$.



Sea $G : (X \times Y \setminus \{(a,t)\}) \times [0,1] \to X \times Y \setminus \{(a,t)\}$, como $G((x,y),s) = (g_X(x,s), g_Y(y,s))$.



Sea $G : (X \times Y \setminus \{(a, t)\}) \times [0, 1] \to X \times Y \setminus \{(a, t)\}$, como $G((x, y), s) = (g_X(x, s), g_Y(y, s))$.

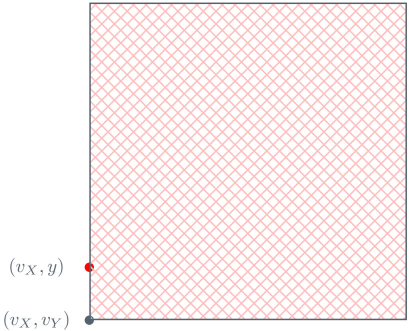


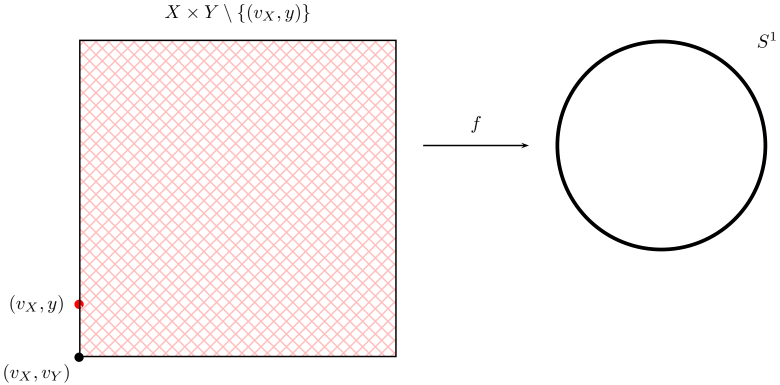
Sea $G : (X \times Y \setminus \{(a,t)\}) \times [0,1] \to X \times Y \setminus \{(a,t)\}$, como $G((x,y),s) = (g_X(x,s), g_Y(y,s))$.

Teorema

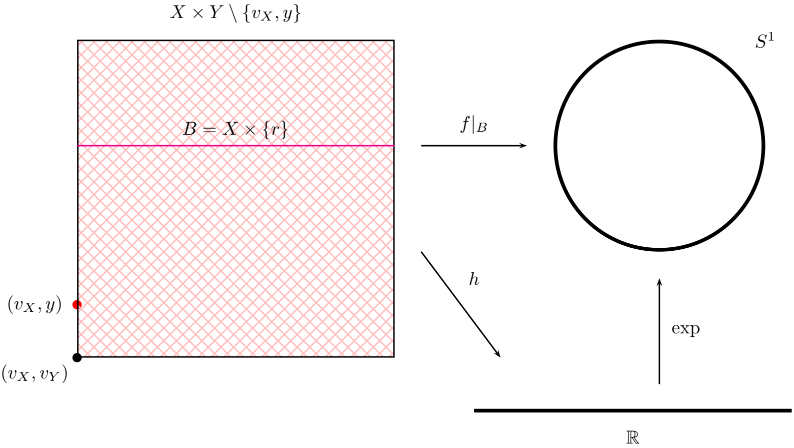
Sean X y Y dendroides suaves en v_X y v_Y respactivamente y $(v_X, y) \in X \times Y$. Si $v_X \in E(X)$, $y \in Y$, entonces (v_X, y) no agujera a $X \times Y$.

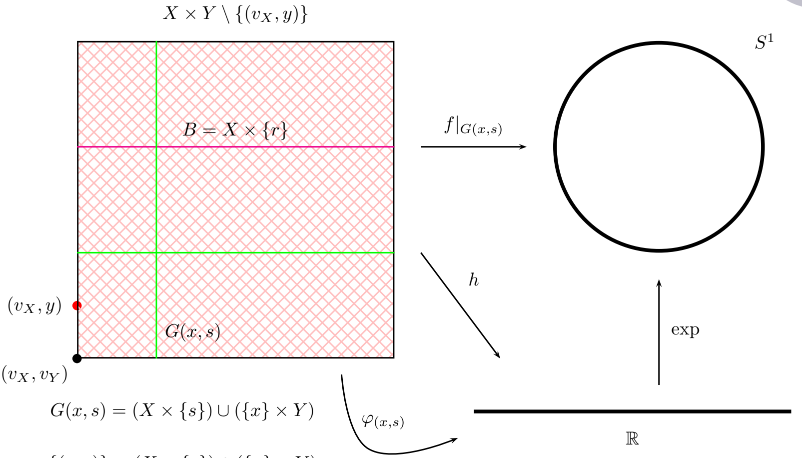
$$X \times Y \setminus \{(v_X, y)\}$$





$X \times Y \setminus \{(v_X, y)\}$
S^1
f
(v_X, y)
(v_X, v_Y)

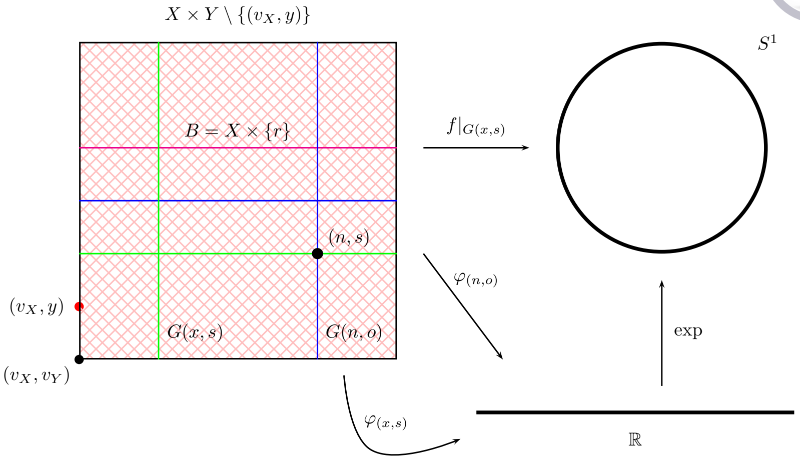

$X \times Y \setminus \{v_X, y\}$
$B = X \times \{r\}$
(v_X, y)
(v_X, v_Y)
$f|_B$
S^1
h
exp
$\mathbb{R}$



$$G(x,s) = (X \times \{s\}) \cup (\{x\} \times Y)$$

$$\{(x,s)\} = (X \times \{s\}) \cap (\{x\} \times Y)$$

Así $\varphi_{(x,s)}(x,r) = h(x,r)$.



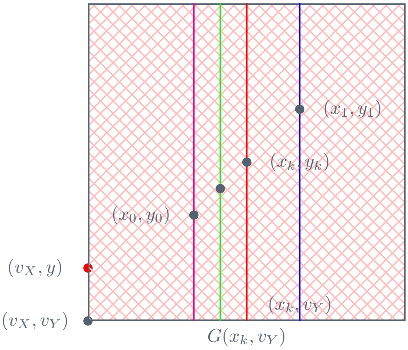
$X \times Y \setminus \{(v_X, y)\}$
$B = X \times \{r\}$
(n, s)
(v_X, y)
$G(x, s)$
$G(n, o)$
(v_X, v_Y)
$f|_{G(x,s)}$
S^1
$\varphi_{(n,o)}$
$\exp$
$\varphi_{(x,s)}$
$\mathbb{R}$

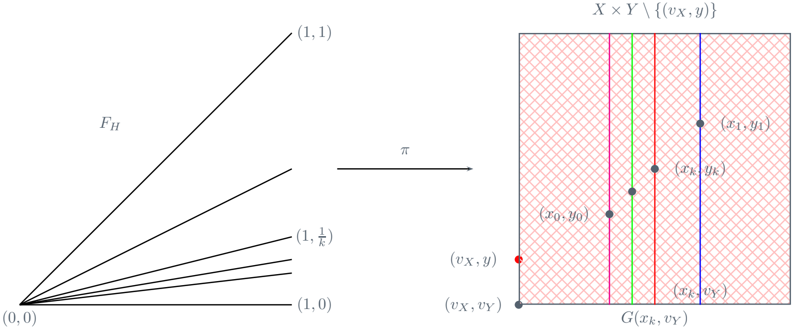
Se puede demostrar:
$\varphi_{(n,o)}(n,s) = \varphi_{(x,s)}(n,s)$, para todo n , $x \in X \setminus \{v_X\}$ y o , $s \in Y \setminus \{y\}$.

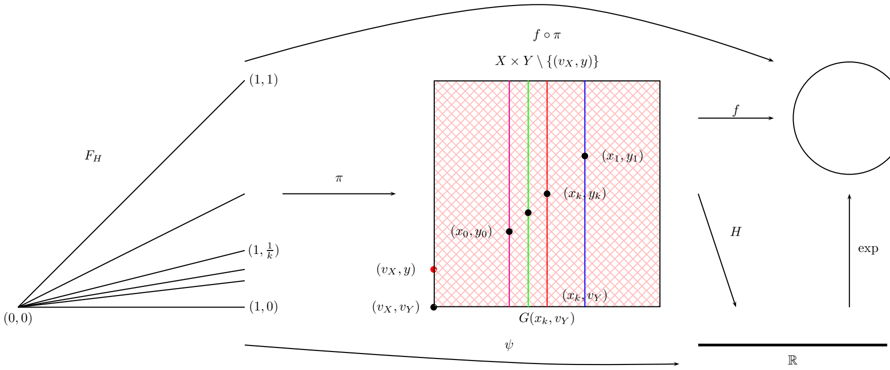
Sea $M = X \times Y \setminus \{(v_X, y)\}$.

Sea $M = X \times Y \setminus \{(v_X, y)\}$.
Definamos a $H : M \to \mathbb{R}$ como $H(a,b) = \varphi_{x,s}(a,b)$ si $(a,b) \in G(x,s)$.
PD. H es continua

$X \times Y \setminus \{(v_X, y)\}$




$X \times Y \setminus \{(v_X, y)\}$
$(1,1)$
F_H
π
(x_1, y_1)
(x_k, y_k)
(x_0, y_0)
$(1, \frac{1}{k})$
(v_X, y)
(x_k, v_Y)
$(1,0)$
(v_X, v_Y)
$(0,0)$
$G(x_k, v_Y)$


$f \circ \pi$
$X \times Y \setminus \{(v_X, y)\}$
$(1,1)$
F_H
π
$(1, \frac{1}{k})$
$(1,0)$
$(0,0)$
(v_X, y)
(v_X, v_Y)
(x_0, y_0)
(x_k, y_k)
(x_1, y_1)
(x_k, v_Y)
$G(x_k, v_Y)$
f
H
$\exp$
ψ
$\mathbb{R}$

Consideremos a $\{(1, \frac{1}{k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a $(1, 0)$.

- $\psi(1, \frac{1}{k}) = H(x_k, y_k)$
- $\psi(1, 0) = H(x_0, y_0)$

Como ψ es continua, entonces $\lim \psi(1, \frac{1}{k}) = \psi((1, 0))$.
Por tanto $\lim H(1, \frac{1}{k}) = H((1, 0))$.
H es continua. Y por tanto $f = exp \circ H$.

Teorema

Si X y Y son dendroides suaves en v_X y v_Y respectivamente si $(v_X, v_Y) \in E(X) \times E(Y)$, entonces (v_X, v_Y) no agujera a $X \times Y$.

Definición

$Ncut(X) = \{x \in X : X \setminus \{x\} esconexo\}$.

Conjetura

Sean X y Y dendroides suaves en v_X y v_Y respectivamente. Si $x \in Ncut(X)$ tal que $x \neq v_X$ y $y \in Y \setminus E(Y)$, entonces (x, y) no agujera a $X \times Y$.

GRACIAS!