Agujeros en el hiperespacio de subcontinuos de ciertos continuos

Dendroides suaves

Mat. Rosa Isela Carranza Cruz

Dr. José Guadalupe Anaya Ortega
Dr. David Maya Escudero

Universidad Autónoma del Estado de México
Facultad de Ciencias

octubre 2016

Preliminares

Definición

Decimos que un espacio topológico conexo Z es **unicoherente**, si siempre que $Z = A \cup B$, donde A y B son subconjuntos conexos y cerrados en Z, se tiene que $A \cap B$ es conexo.

Preliminares

Definición

Decimos que un espacio topológico conexo Z es **unicoherente**, si siempre que $Z = A \cup B$, donde A y B son subconjuntos conexos y cerrados en Z, se tiene que $A \cap B$ es conexo.

Preliminares

Definición

Decimos que un espacio topológico conexo Z es **unicoherente**, si siempre que $Z = A \cup B$, donde A y B son subconjuntos conexos y cerrados en Z, se tiene que $A \cap B$ es conexo.

Preliminares

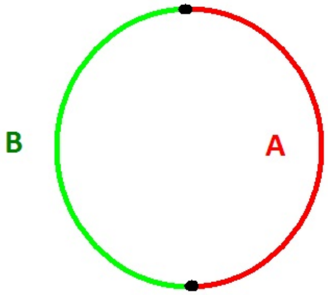
Definición

Decimos que un espacio topológico conexo Z es **unicoherente**, si siempre que $Z = A \cup B$, donde A y B son subconjuntos conexos y cerrados en Z, se tiene que $A \cap B$ es conexo.

Preliminares

Definición

Decimos que un espacio topológico conexo Z es **unicoherente**, si siempre que $Z = A \cup B$, donde A y B son subconjuntos conexos y cerrados en Z, se tiene que $A \cap B$ es conexo.



Definición

Un continuo X es un espacio métrico, conexo, compacto y no degenerado.

Definición

Un continuo X es un espacio métrico, conexo, compacto y no degenerado.

Dado un continuo X, el hiperespacio de todos los subcontinuos no vacíos de X es denotado por $C(X)$ y es considerado con la métrica de Hausdorff.

Definición

Un continuo X es un espacio métrico, conexo, compacto y no degenerado.

Dado un continuo X, el hiperespacio de todos los subcontinuos no vacíos de X es denotado por $C(X)$ y es considerado con la métrica de Hausdorff.

Teorema

$C(X)$ es unicoherente para cualquier continuo X.

Definición

Si Z es un espacio topológico conexo unicoherente y $z \in Z$, decimos que z **agujera** a Z, si $Z - \{z\}$ no es unicoherente, en caso contrario, decimos que z no agujera a Z.

Definición

Si Z es un espacio topológico conexo unicoherente y $z \in Z$, decimos que z **agujera** a Z, si $Z - \{z\}$ no es unicoherente, en caso contrario, decimos que z no agujera a Z.

Problema

Dado un continuo X,

Definición

Si Z es un espacio topológico conexo unicoherente y $z \in Z$, decimos que z **agujera** a Z, si $Z - \{z\}$ no es unicoherente, en caso contrario, decimos que z no agujera a Z.

Problema

Dado un continuo X, ¿Para cuáles elementos $A \in C(X)$, A agujera a $C(X)$?

Dendroides suaves

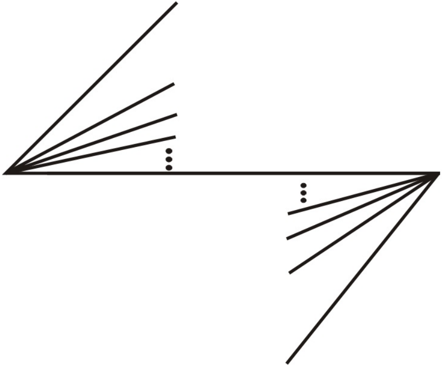
Definición

Un continuo X es un *dendroide* si X es arco conexo y para todo $A, B \in C(X)$ tenemos que $A \cap B$ es conexo.

Dendroides suaves

Definición

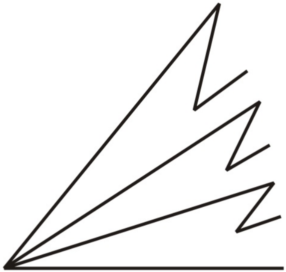
Un continuo X es un *dendroide* si X es arco conexo y para todo $A, B \in C(X)$ tenemos que $A \cap B$ es conexo.



Dendroides suaves

Definición

Un continuo X es un *dendroide* si X es arco conexo y para todo $A, B \in C(X)$ tenemos que $A \cap B$ es conexo.



Dendroides suaves

Definición

Un dendroide X es **suave** si existe $v \in X$ tal que para cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X tal que

$$\lim x_n = x,$$

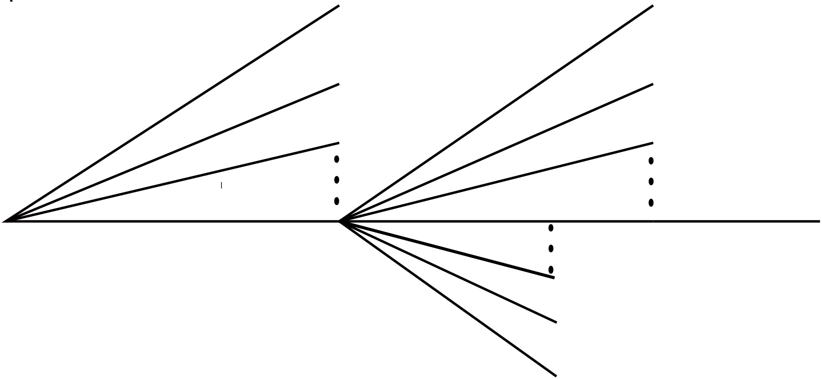
se tiene que la sucesión de arcos

$$\lim vx_n = vx.$$

El punto v es llamado **punto de suavidad de** X.

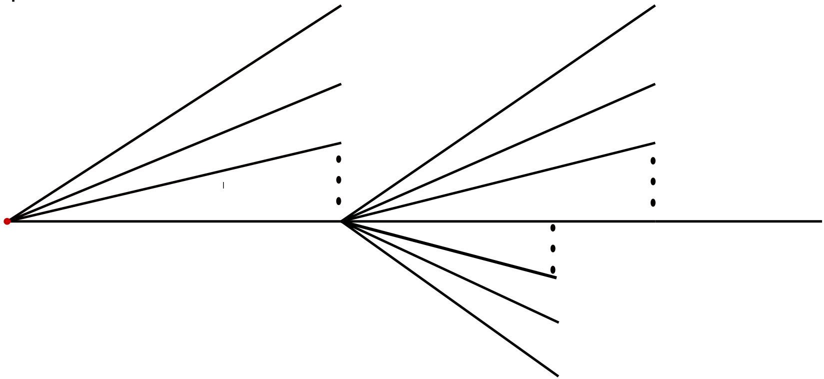
Dendroide suave

Ejemplos:



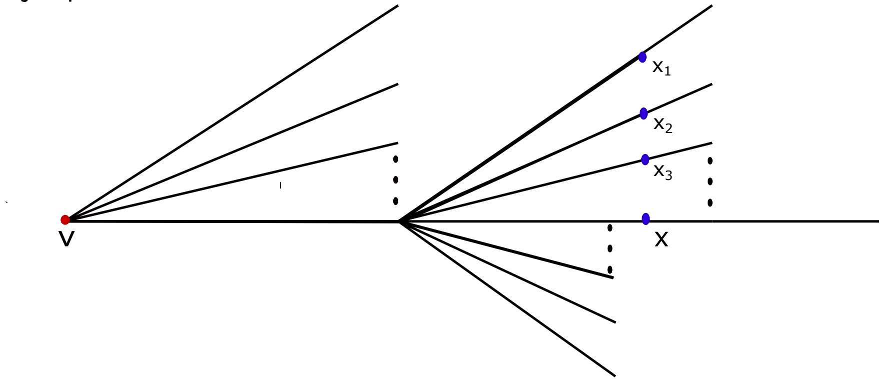
Dendroide suave

Ejemplos:



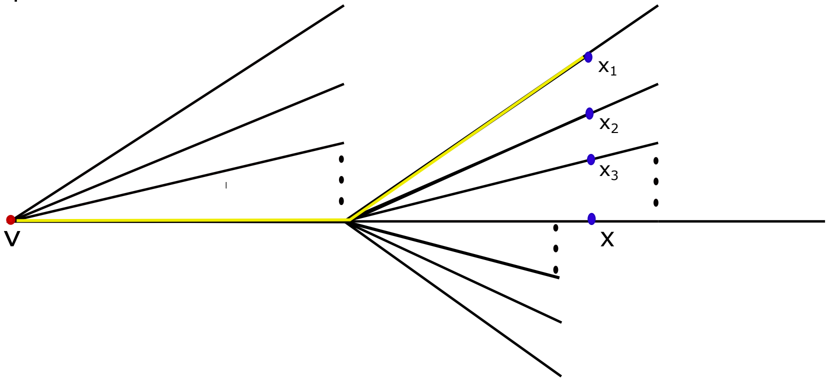
Dendroide suave

Ejemplos:



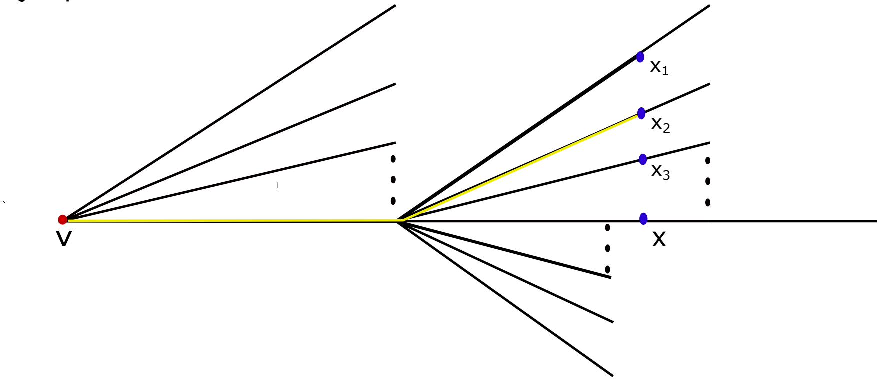
Dendroide suave

Ejemplos:



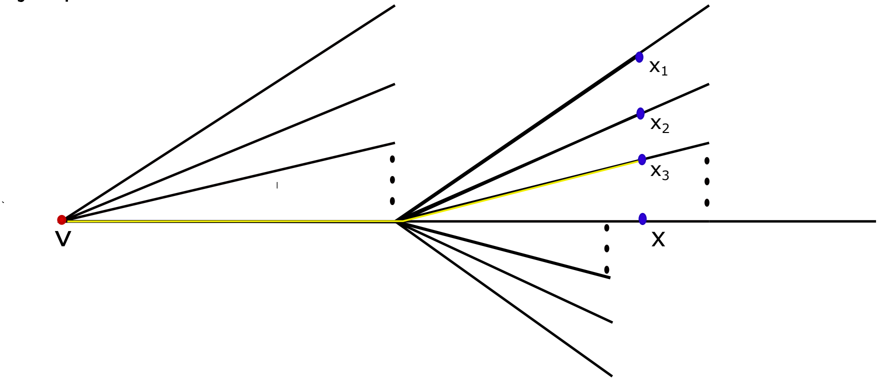
Dendroide suave

Ejemplos:



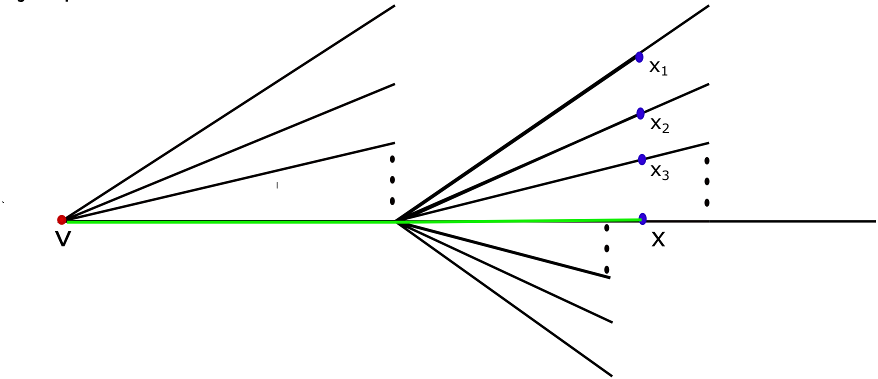
Dendroide suave

Ejemplos:



Dendroide suave

Ejemplos:



Problema de investigación

Sea X un dendroide suave,

Problema de investigación

Sea X un dendroide suave, ¿Para cuáles elementos $A \in C(X)$, A agujera a $C(X)$?

Resultados Auxiliares

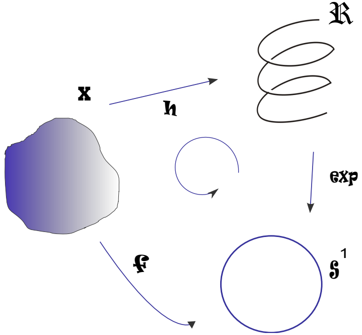
Definición

Un espacio topológico conexo X **tiene la propiedad b)** si para cada función continua $f : Z \to S^1$, existe una función continua $h : Z \to \mathbb{R}$, tal que $f = exp \circ h$.

Resultados Auxiliares

Definición

Un espacio topológico conexo X **tiene la propiedad b)** si para cada función continua $f : Z \to S^1$, existe una función continua $h : Z \to \mathbb{R}$, tal que $f = exp \circ h$.



Propiedad b) y unicoherencia

Teorema

Sea Z un espacio topológico métrico y conexo. Si Z tiene la propiedad b), entonces Z es unicoherente.

Propiedad b) y unicoherencia

Teorema

Sea Z un espacio topológico métrico y conexo. Si Z tiene la propiedad b), entonces Z es unicoherente.

Teorema

Sean Z un espacio topológico conexo y A, B subconjunto conexos y cerrados de Z tales que $Z = A \cup B$. Si A y B tienen la propiedad b) y $A \cap B$ es conexo, entonces Z tiene la propiedad b).

Propiedad b)

Sea Z un espacio topológico y $Y \subset Z$.

Propiedad b)

Sea Z un espacio topológico y $Y \subset Z$.

Definición

Una retracción de Z en Y es una función continua $r : Z \to Y$ tal que $r(y) = y$ para todo $y \in Y$.

Propiedad b)

Sea Z un espacio topológico y $Y \subset Z$.

Definición

Una retracción de Z en Y es una función continua $r : Z \to Y$ tal que $r(y) = y$ para todo $y \in Y$.

Definición

Decimos que Y es un retracto por deformación de Z, si existe una retracción $r : Z \to Y$ y una función continua $F : Z \times [0, 1] \to Z$ tal que, para cada $z \in Z$, $F(z, 0) = z$ y $F(z, 1) = r(z)$.

Definición

Un espacio topológico Z es contráctil, si existe $p \in Z$ tal que $\{p\}$ es un retracto por deformación de Z.

Propiedad b)

Teorema

Sean Z un espacio topológico conexo y Y un retracto por deformación de Z. Entonces, Z tiene la propiedad b) si y sólo si Y tiene la propiedad b).

Corolario

Si Z es contráctil, entonces Z tiene la propiedad b)

Corolario

Si X es un dendroide suave, entonces X es contráctil.

Propiedad b) en $C(X)$

Lema

Sea $\mathcal{K}$ un subconjunto no vacío de $C(X)$. Si $\mathcal{K}_A \subset \mathcal{K}$, para cada $A \in \mathcal{K}$, donde $\mathcal{K}_A = \{B \in C(X) : A \subset B\}$. Entonces, $\mathcal{K}$ tiene la propiedad b).

Avances

Teorema 1

Sean X un continuo y $x \in X$, entonces $\{x\}$ no agujera a $C(X)$

Avances

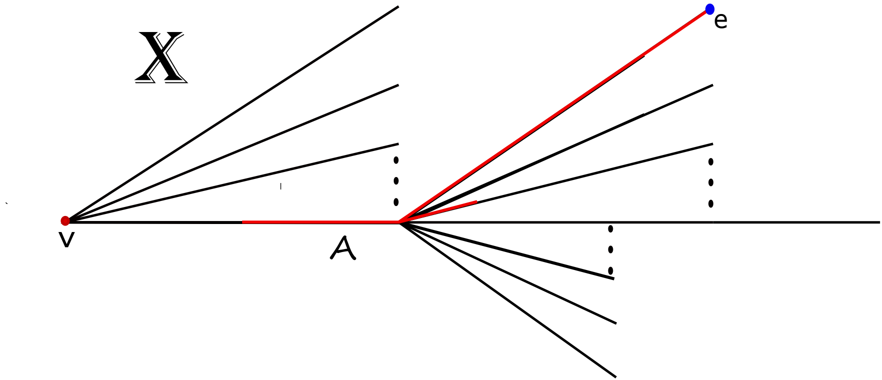
Teorema 2

Sean X un dendroide suave en v y $A \in C(X) - F_1(X)$ tal que $(A \cup E(X)) - \{v\} \neq \emptyset$. Entonces, A no agujera a C(X).

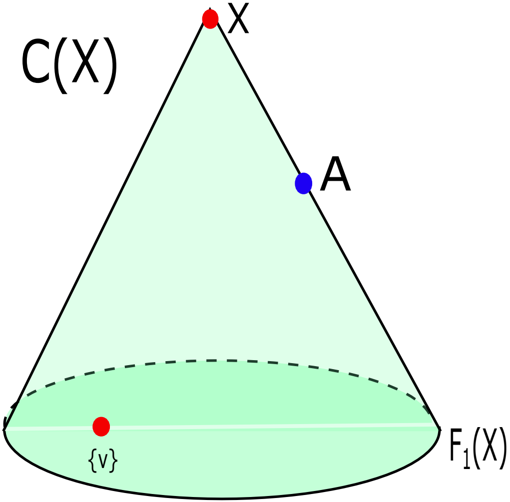
Avances

Teorema 2

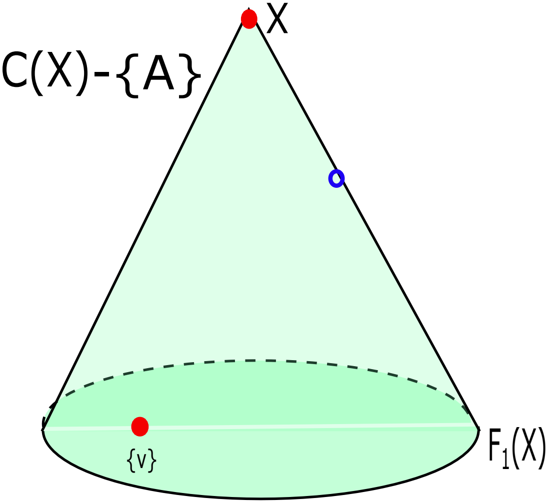
Sean X un dendroide suave en v y $A \in C(X) - F_1(X)$ tal que $(A \cup E(X)) - \{v\} \neq \emptyset$. Entonces, A no agujera a C(X).



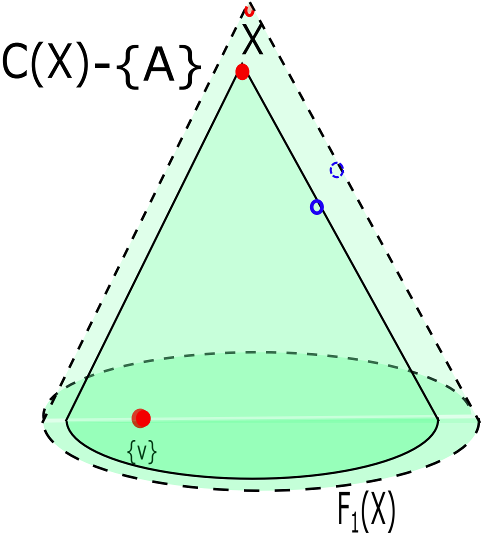
$C(X) - \{A\}$ es contráctil



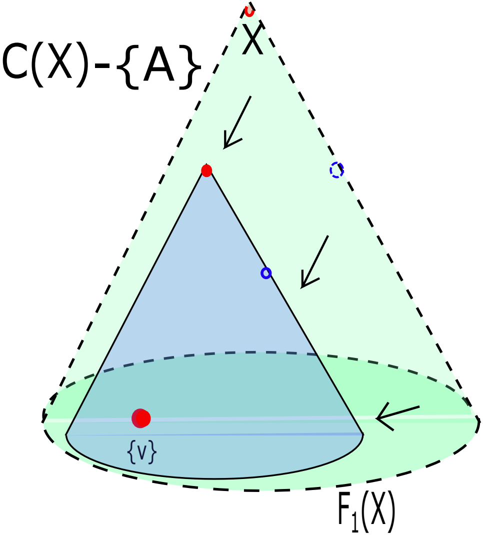
$C(X) - \{A\}$ es contráctil



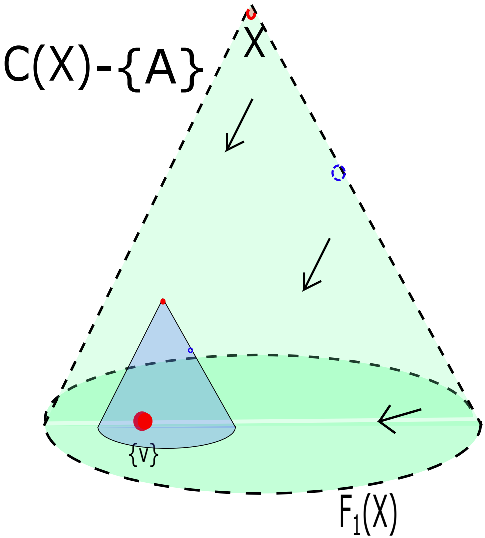
$C(X) - \{A\}$ es contráctil



$C(X) - \{A\}$ es contráctil



$C(X) - \{A\}$ es contráctil



Avances

Teorema 2

Sean X un dendroide suave en v y $A \in C(X) - F_1(X)$ tal que $(A \cup E(X)) - \{v\} \neq \emptyset$. Entonces, A no agujera a C(X).

Corolario 3

Si X es un dendroide suave, $\{X\}$ no agujera a $C(X)$.

Avances

Definición

Una función de **Whitney** es una función continua $\mu : C(X) \to [0, \infty)$ que satisface las siguiente condiciones:

Avances

Definición

Una función de **Whitney** es una función continua $\mu : C(X) \to [0, \infty)$ que satisface las siguiente condiciones:

1. $\mu(\{x\} = 0)$ para cada $x \in X$,

Avances

Definición

Una función de **Whitney** es una función continua $\mu : C(X) \to [0, \infty)$ que satisface las siguiente condiciones:

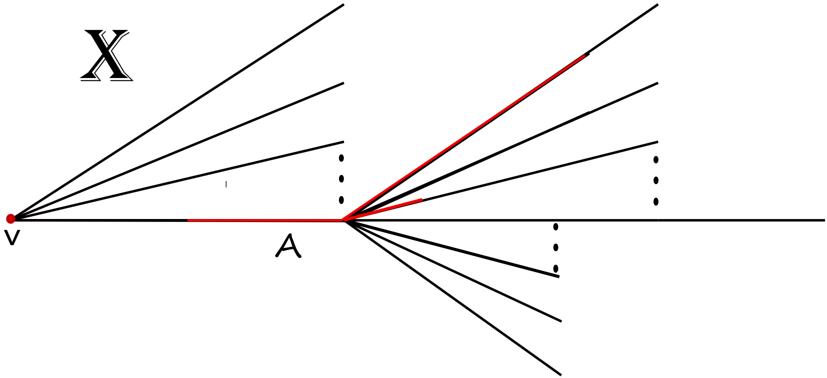
1. $\mu(\{x\} = 0)$ para cada $x \in X$,
2. $\mu(A) < \mu(B)$ pada vez que $A \subsetneq B$.

Avances

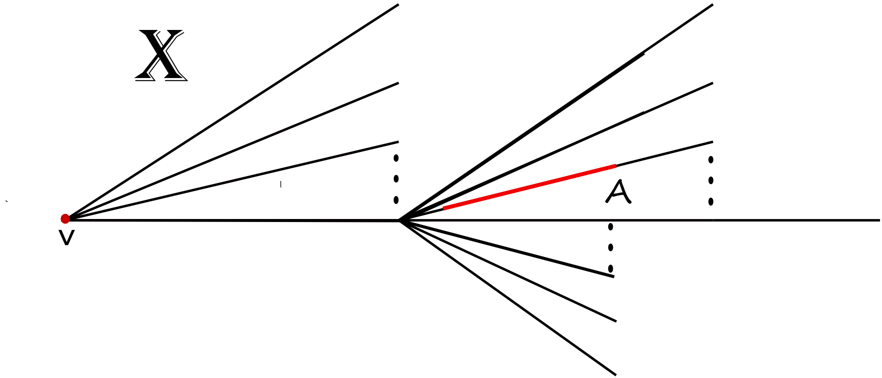
Lema 4

Sean X un dendroide suave en v y $A \in C(X) - (\{X\} \cup F_1(X)$. Entonces, $F_1(X)$ es un retracto por deformación de $\mu^{-1}([0,t]) - \{A\}$, donde μ es una función de Whitney para $C(X)$ y $t = \mu(A)$.

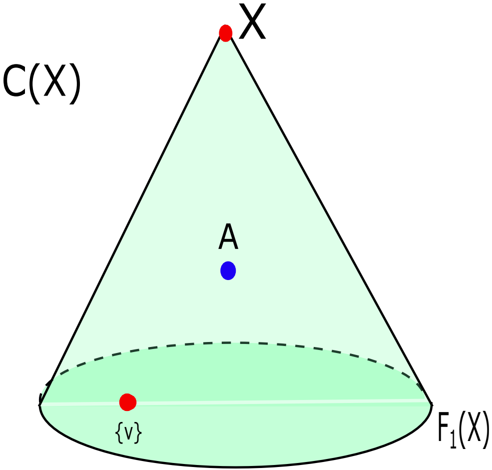
Bosquejo de prueba



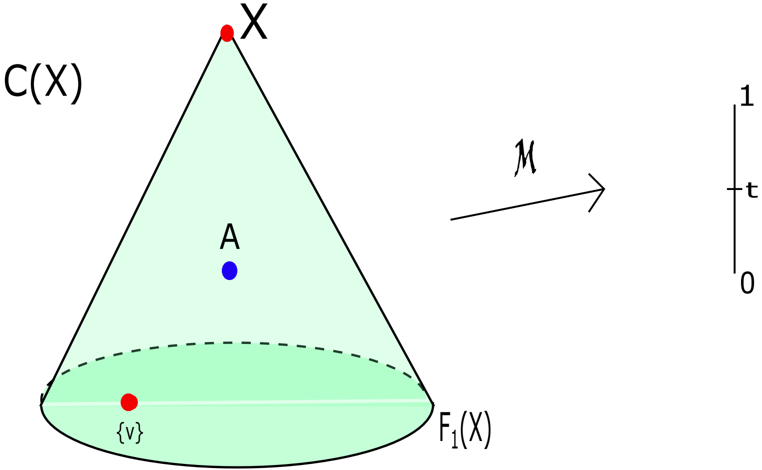
Bosquejo de prueba



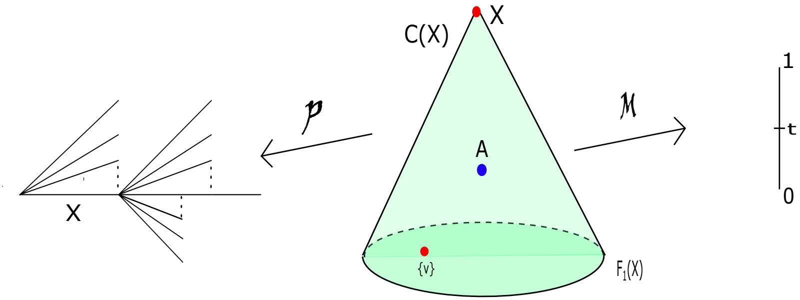
Bosquejo de prueba



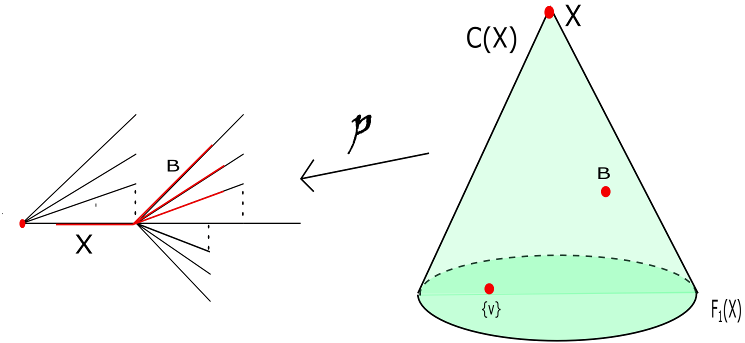
Bosquejo de prueba



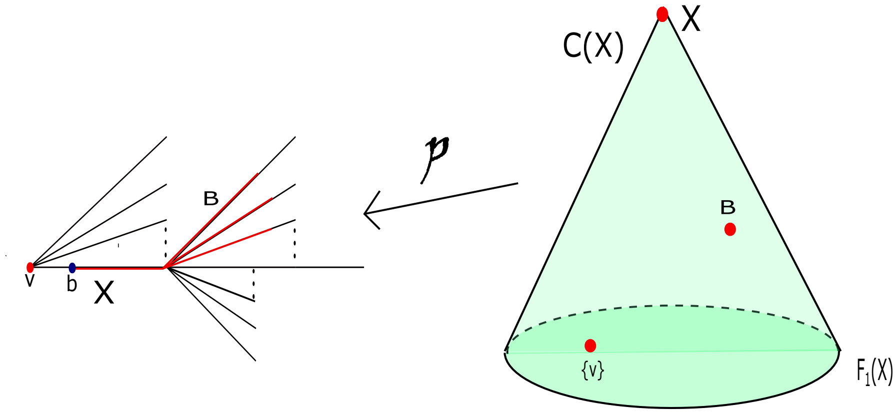
Bosquejo de prueba



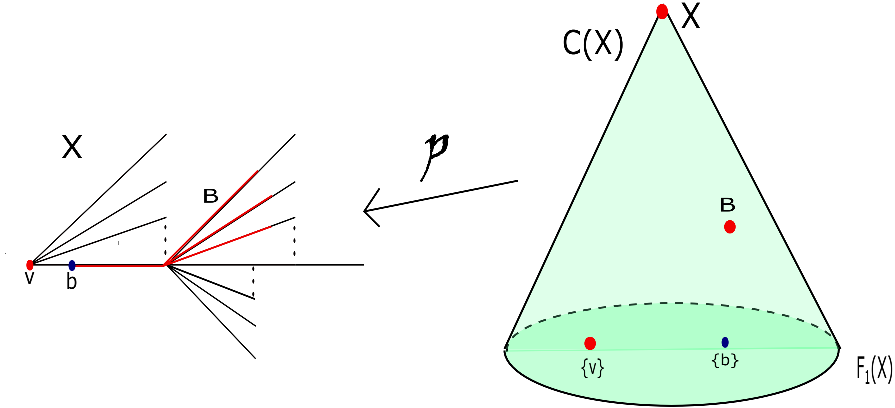
Bosquejo de prueba



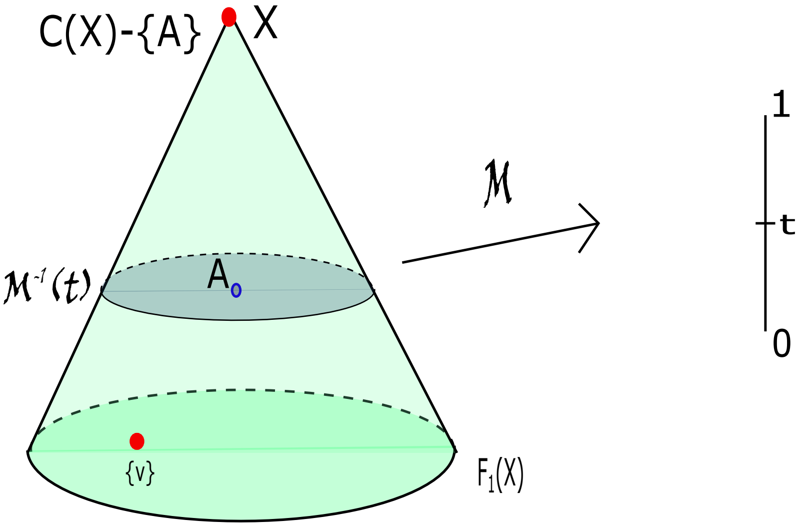
Bosquejo de prueba



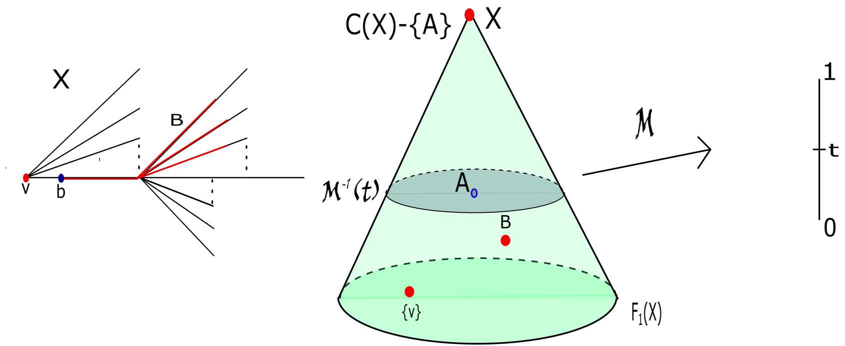
Bosquejo de prueba



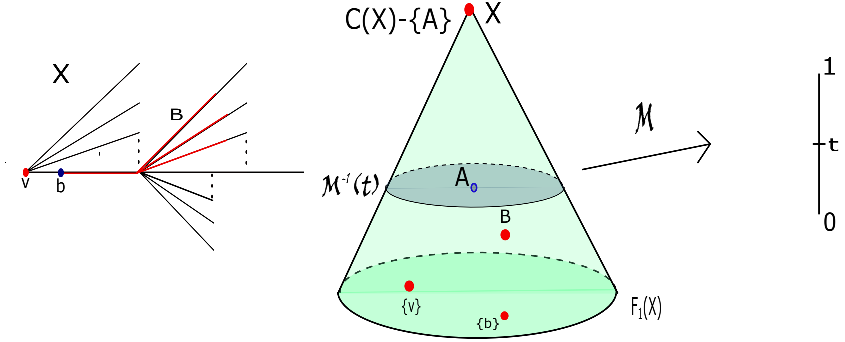
Bosquejo de prueba



Bosquejo de prueba



Bosquejo de prueba



Puntos de corte en $C(X)$

Teorema

Sea $A \in C(X)$ con $\mu(A) = t$. Entonces, $\mu^{-1}(t) - \{A\}$ no es conexo si y sólo si existen U, V subconjuntos abiertos, disjuntos y no vacíos de X, $X - A = U \cup B$, y para cualquier $B = \mu^{-1}(t)$ se tiene que $B \subset A \cup U$ ó $B \subset A \cup V$.

Avances

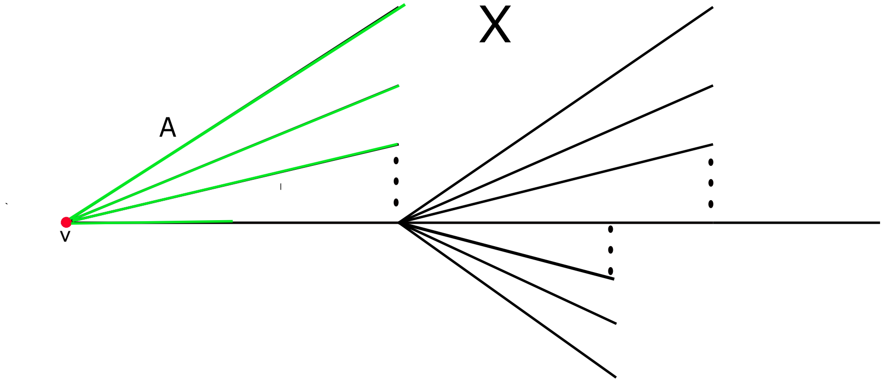
Teorema 5

Sean X un dendroide suave en v y $A \in C(X) - (\{X\} \cup F_1(X))$ tal que $X - A$ es conexo. Entonces, A no agujera a $C(X)$.

Avances

Teorema 5

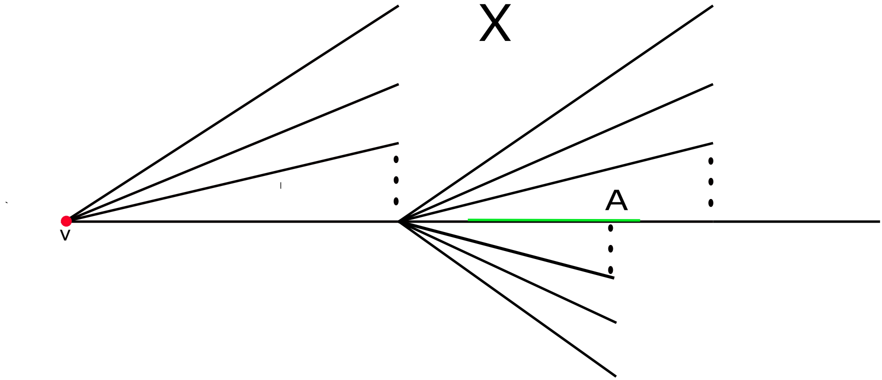
Sean X un dendroide suave en v y $A \in C(X) - (\{X\} \cup F_1(X))$ tal que $X - A$ es conexo. Entonces, A no agujera a $C(X)$.



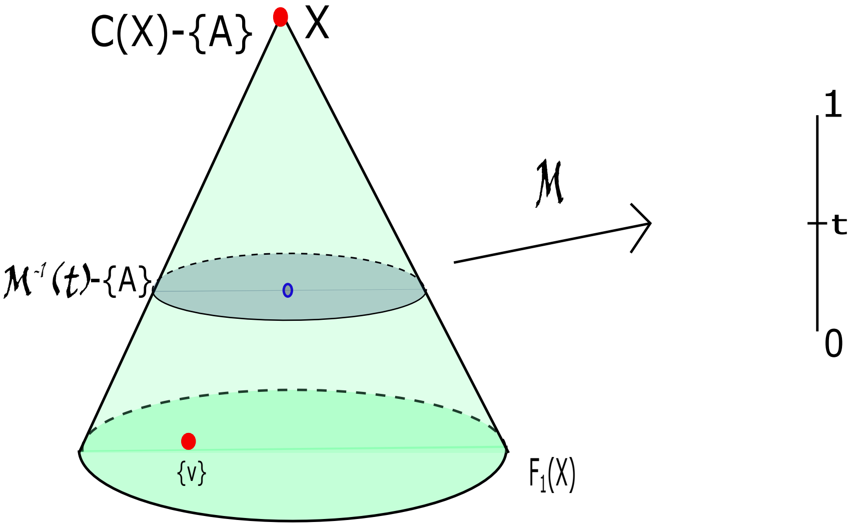
Avances

Teorema 5

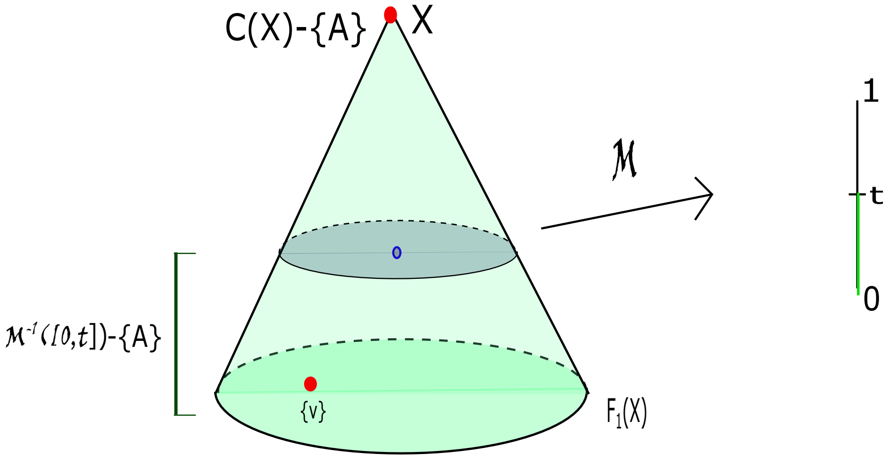
Sean X un dendroide suave en v y $A \in C(X) - (\{X\} \cup F_1(X))$ tal que $X - A$ es conexo. Entonces, A no agujera a $C(X)$.



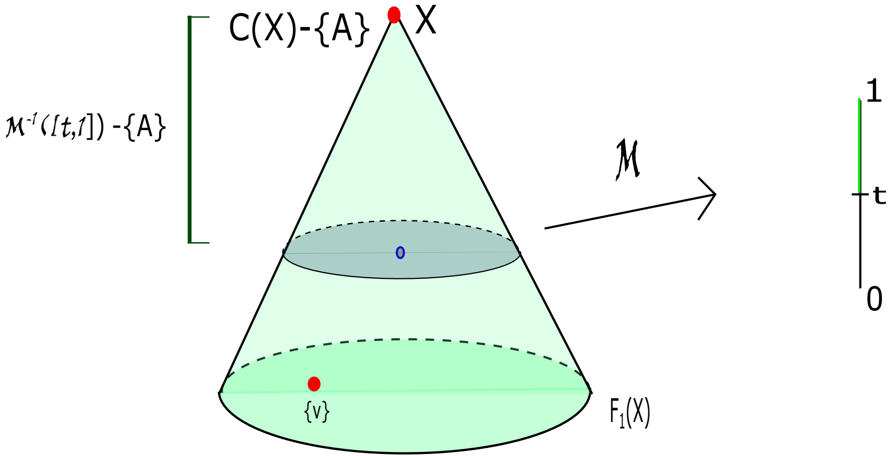
Bosquejo de la prueba



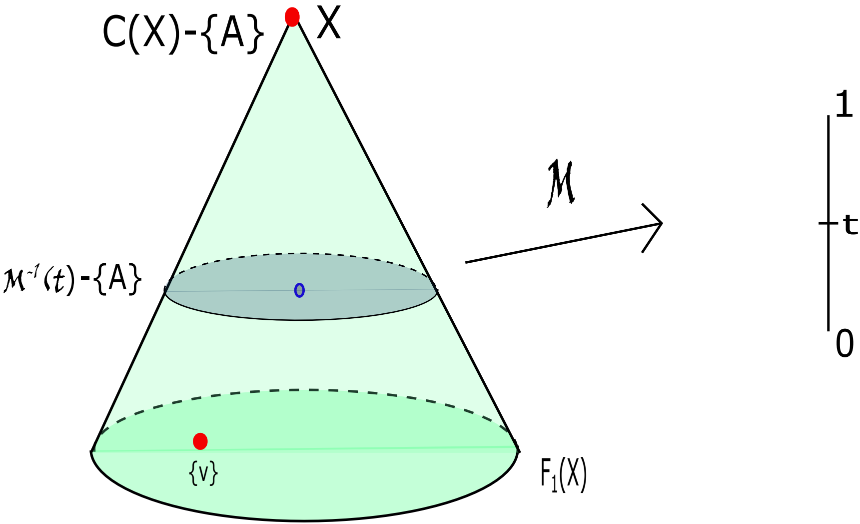
Bosquejo de la prueba



Bosquejo de la prueba



Bosquejo de la prueba



Avances

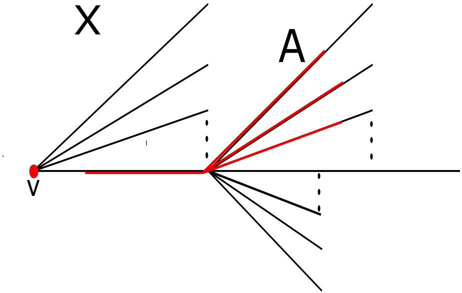
Teorema 6

Sea X un dendroide suave en v, y $A \in C(X) - (\{X\} \cup F_1(X))$ tal que A no es un arco. Entonces, A no agujera a $C(X)$.

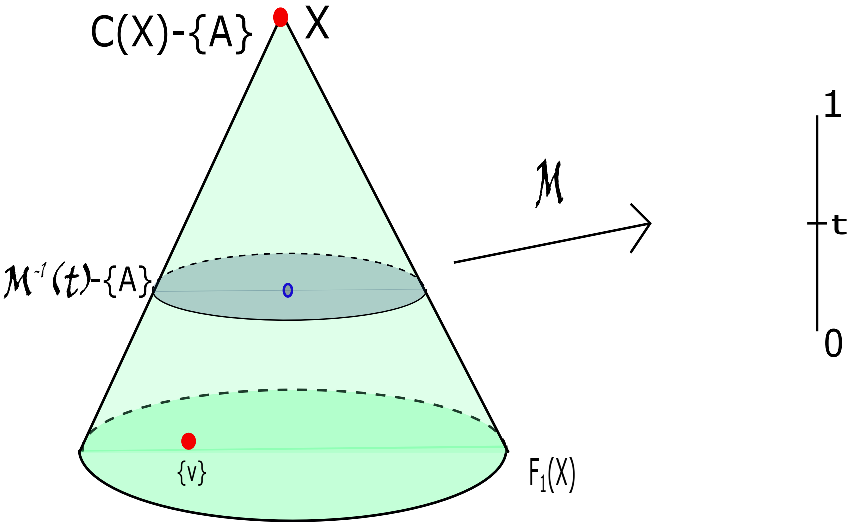
Avances

Teorema 6

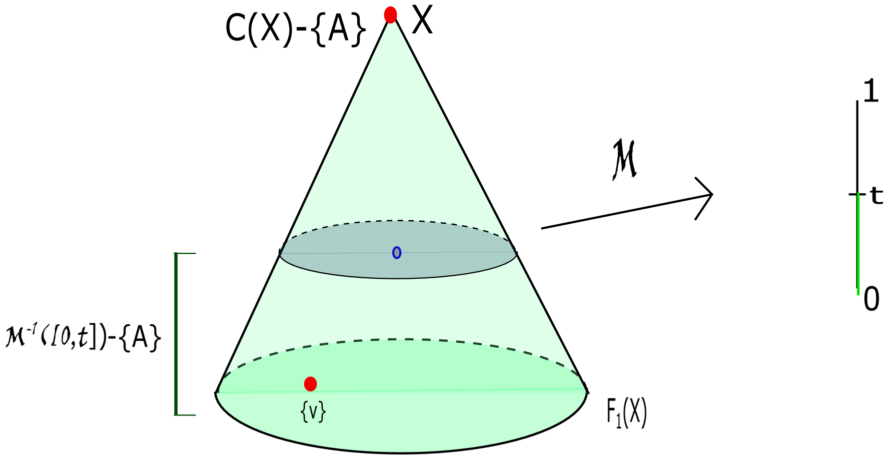
Sea X un dendroide suave en v, y $A \in C(X) - (\{X\} \cup F_1(X))$ tal que A no es un arco. Entonces, A no agujera a $C(X)$.



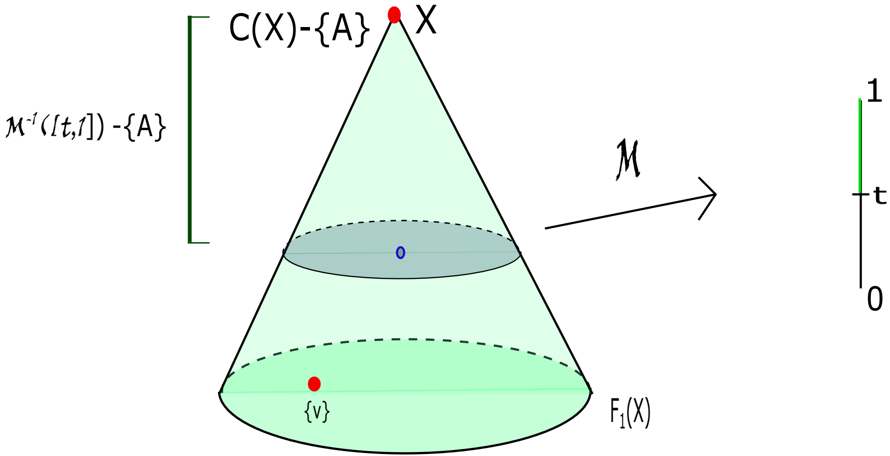
Bosquejo de la prueba



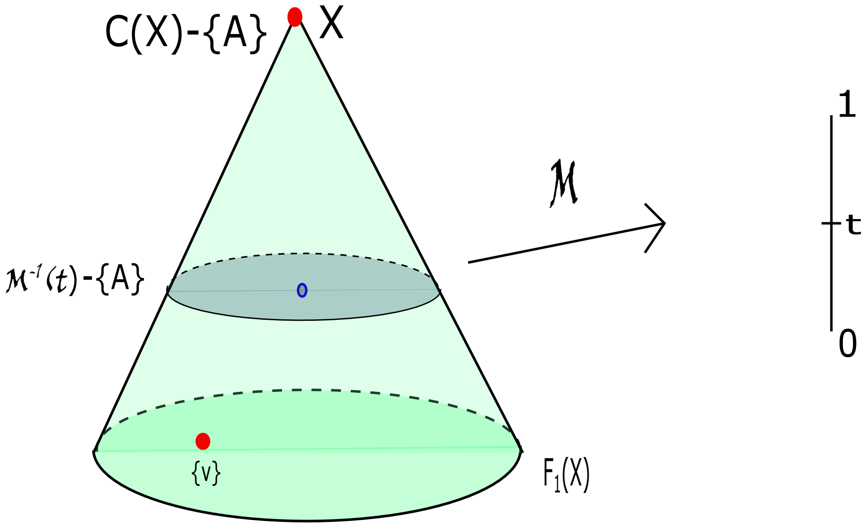
Bosquejo de la prueba



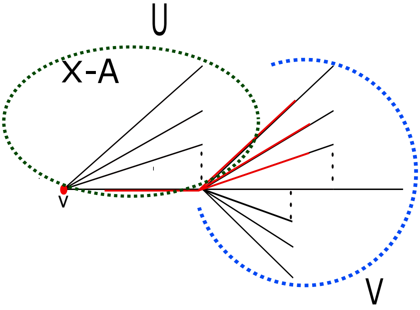
Bosquejo de la prueba

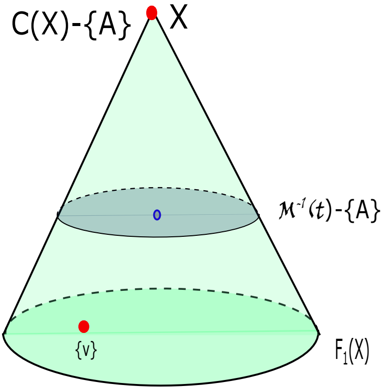


Bosquejo de la prueba

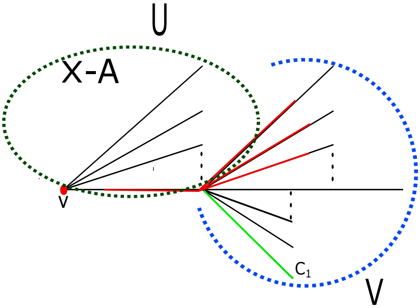


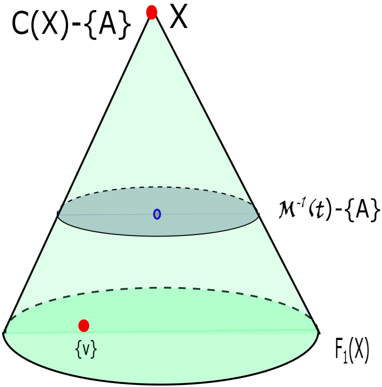
Bosquejo de la prueba



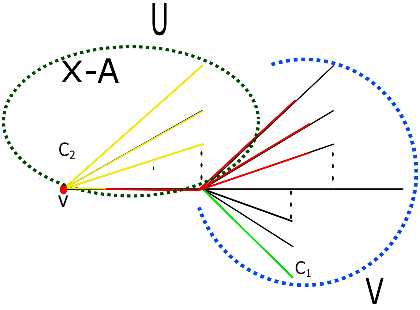


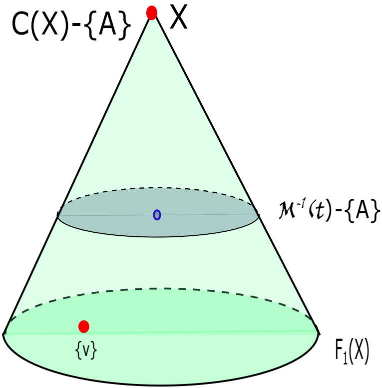
Bosquejo de la prueba



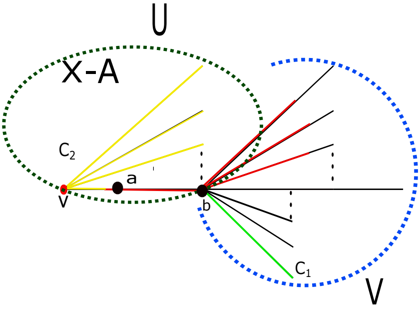


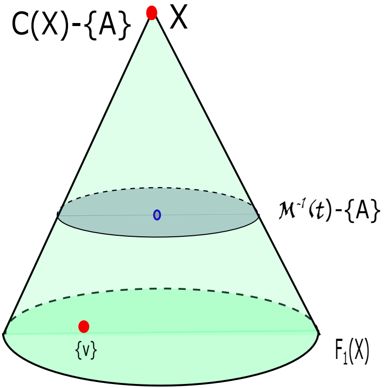
Bosquejo de la prueba



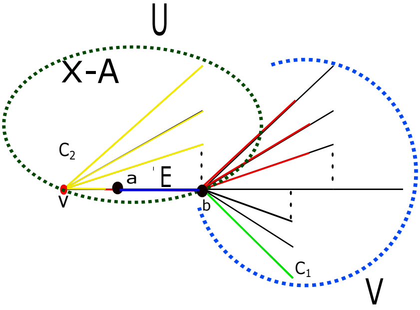


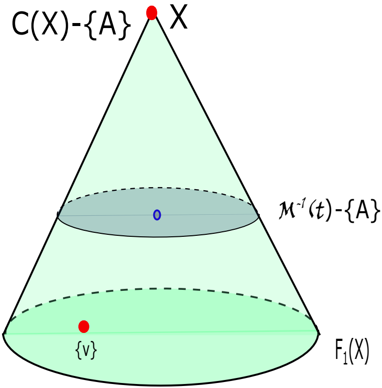
Bosquejo de la prueba



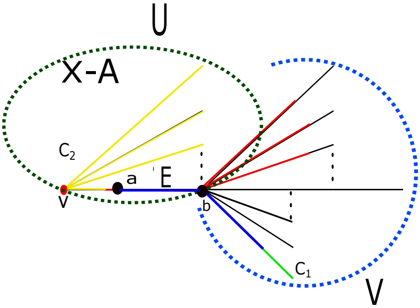


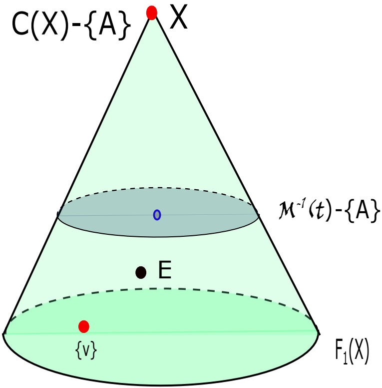
Bosquejo de la prueba



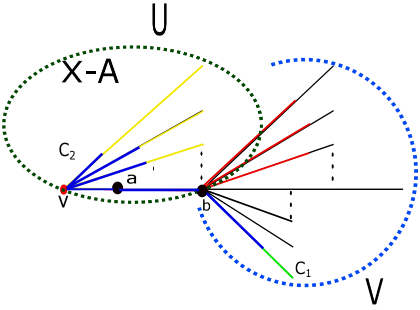


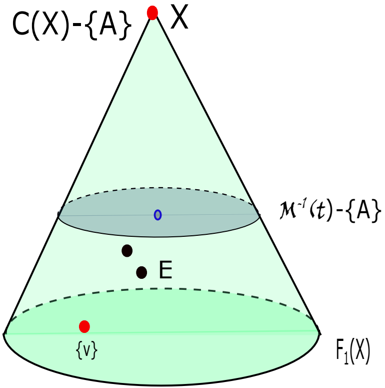
Bosquejo de la prueba



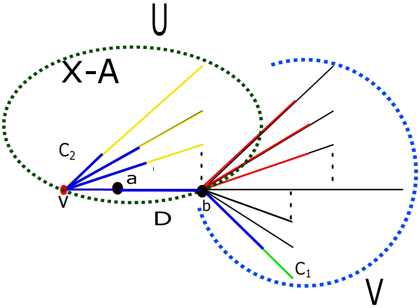


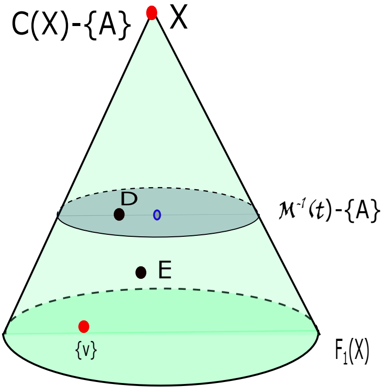
Bosquejo de la prueba





Bosquejo de la prueba





Avances

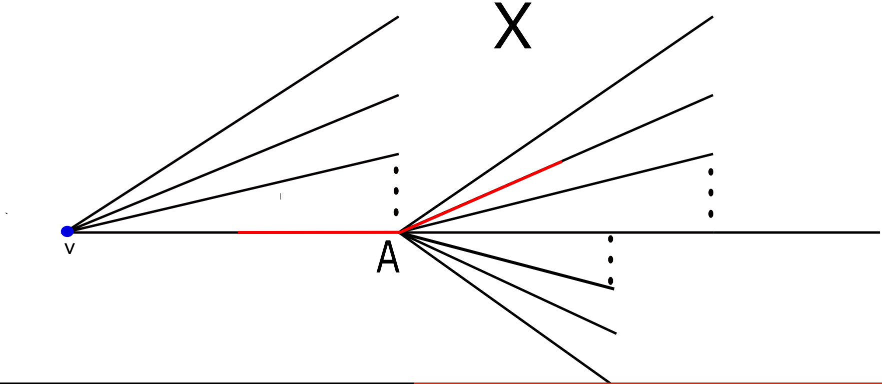
Teorema 7

Sea X un dendroide suave y $A \in C(X) - (\{X\} \cup F_1(X))$ tal que A es un arco y $R(X) \cap A - E(A) \neq \emptyset$. Entonces, A no agujera a $C(X)$.

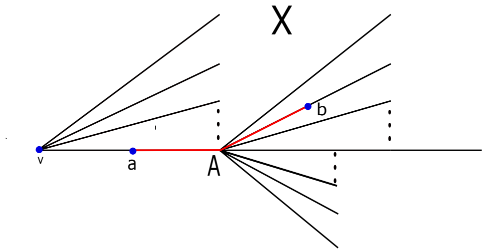
Avances

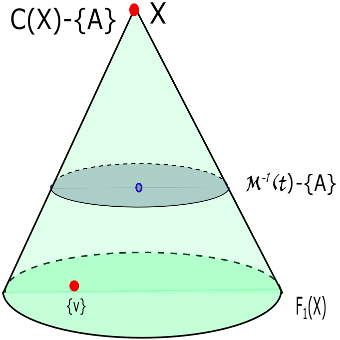
Teorema 7

Sea X un dendroide suave y $A \in C(X) - (\{X\} \cup F_1(X))$ tal que A es un arco y $R(X) \cap A - E(A) \neq \emptyset$. Entonces, A no agujera a $C(X)$.

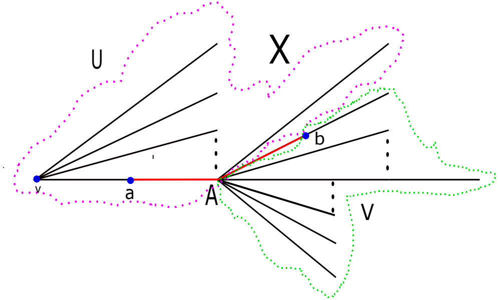


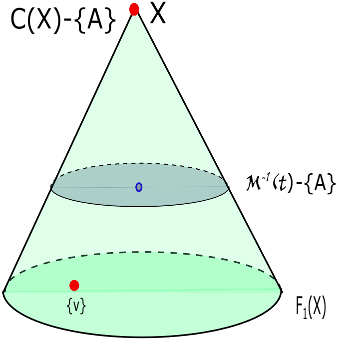
Bosquejo de prueba



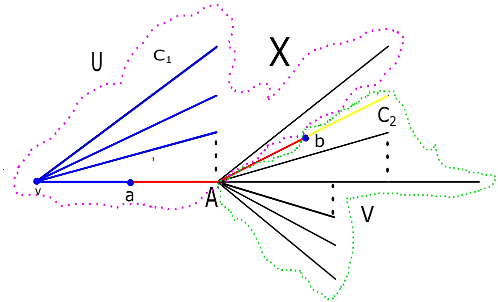


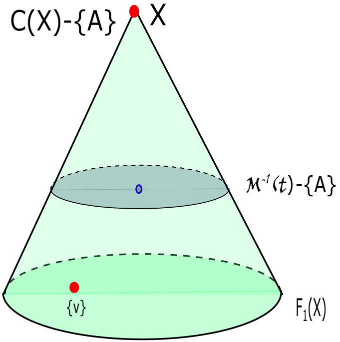
Bosquejo de prueba



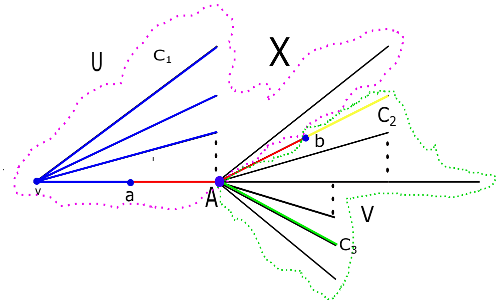


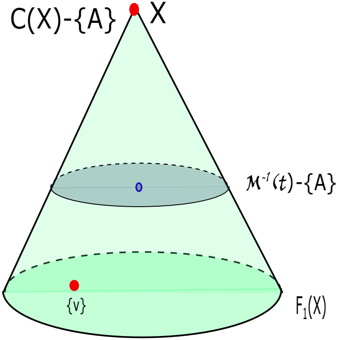
Bosquejo de prueba



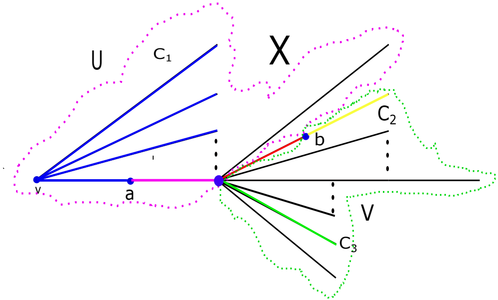


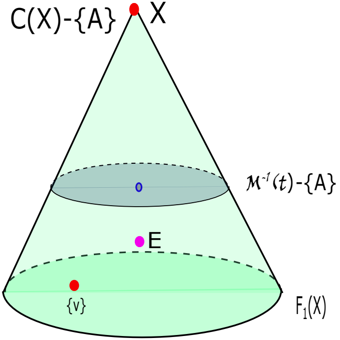
Bosquejo de prueba



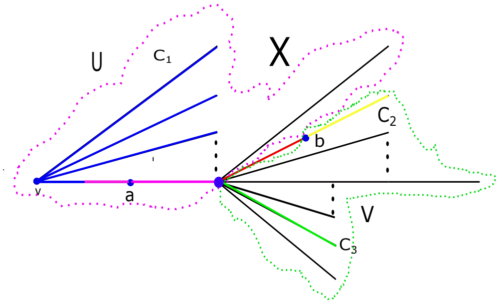


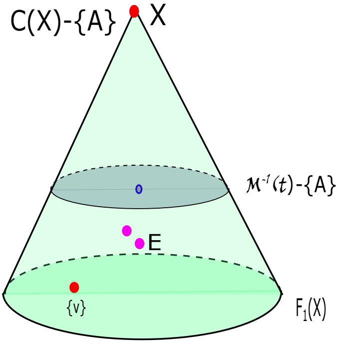
Bosquejo de prueba



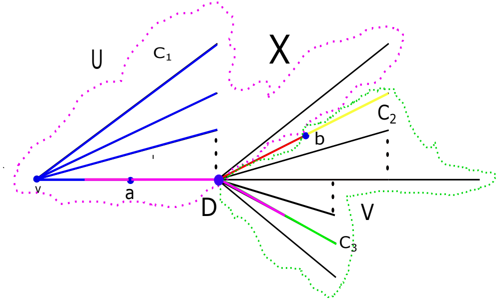


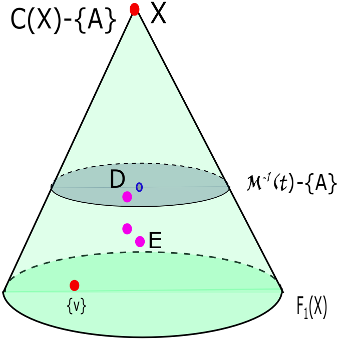
Bosquejo de prueba





Bosquejo de prueba





Avances

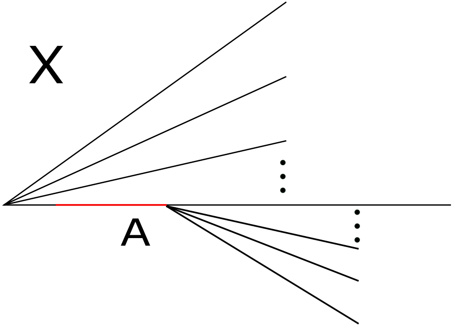
Conjetura

Sea X un dendroide suave y $A \in C(X) - (\{X\} \cup F_1(X))$ tal que A es un arco y $R(X) \cap A - \{E(A)\} = \emptyset$. Entonces, A agujera a $C(X)$.

Avances

Conjetura

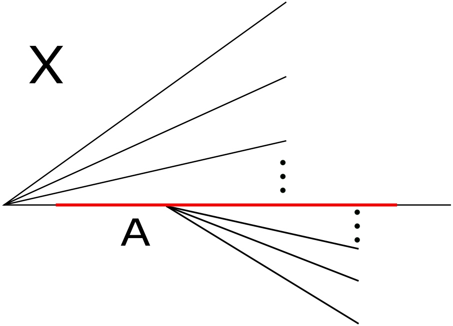
Sea X un dendroide suave y $A \in C(X) - (\{X\} \cup F_1(X))$ tal que A es un arco y $R(X) \cap A - \{E(A)\} = \emptyset$. Entonces, A agujera a $C(X)$.



Avances

Conjetura

Sea X un dendroide suave y $A \in C(X) - (\{X\} \cup F_1(X))$ tal que A es un arco y $R(X) \cap A - \{E(A)\} = \emptyset$. Entonces, A agujera a $C(X)$.




¡¡GRACIAS!!