La Esctructura del Espacio $F_nC_K(X)$

Roberto Carlos Mondragón Álvarez

Facultad de Ciencias, UAEMéx.

XI Taller Estudiantil de la Teoría de los Continuos y sus Hiperespacios
Octubre de 2016

Conceptos Básicos

Un *continuo* X, es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío.

Conceptos Básicos

Dado un continuo X, los *hiperespacios* de X, son ciertas familias de subconjuntos de X con algúna característica particular.

Ejemplos de Hiperespacios

1. $2^X = \{A \subset X : A \text{ es no vacío y cerrado}\}$;

Ejemplos de Hiperespacios

1. $2^X = \{A \subset X : A \text{ es no vacío y cerrado}\}$;
2. $C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}$;

Ejemplos de Hiperespacios

1. $2^X = \{A \subset X : A \text{ es no vacío y cerrado}\}$;
2. $C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}$;

   Para cada $n \in \mathbb{N}$,

3. $F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}$;

Ejemplos de Hiperespacios

1. $2^X = \{A \subset X : A$ es no vacío y cerrado$\}$;
2. $C(X) = \{A \in 2^X : A$ es conexo$\}$;

   Para cada $n \in \mathbb{N}$,

3. $F_n(X) = \{A \in 2^X : A$ tiene a lo más n puntos$\}$;
4. $C_n(X) = \{A \in 2^X : A$ tiene a lo más n componentes$\}$.

Conceptos Básicos

El hiperespacio $F_n(X)$, conocido como el $n-$ésimo producto simétrico de X, fué introducido por K. Borsuk y S. Ulam en 1931.

Conceptos Básicos

Sean X un continuo, $n > 1$, y $K \subset X$ compacto no vacío.

Conceptos Básicos

Sean X un continuo, $n > 1$, y $K \subset X$ compacto no vacío.

$$F_n(K,X) = \{A \in F_n(X) : K \subset A\}$$

Conceptos Básicos

Sean X un continuo, $n > 1$, y $K \subset X$ compacto no vacío.

$$F_n(K, X) = \{A \in F_n(X) : K \subset A\}$$

Observaciónes:

Conceptos Básicos

Sean X un continuo, $n > 1$, y $K \subset X$ compacto no vacío.

$$F_n(K, X) = \{A \in F_n(X) : K \subset A\}$$

Observaciónes:

1.- K tiene a lo más n puntos.

Conceptos Básicos

Sean X un continuo, $n > 1$, y $K \subset X$ compacto no vacío.

$$F_n(K, X) = \{A \in F_n(X) : K \subset A\}$$

Observaciónes:
1.- K tiene a lo más n puntos.
2.- Si K consta de exactamente n puntos, entonces $F_n(K, X) = \{K\}$.

Conceptos Básicos

Sean X un continuo, $K \subset X$ un compacto no vacío y $n > 1$, definimos el espacio cociente:

Conceptos Básicos

Sean X un continuo, $K \subset X$ un compacto no vacío y $n > 1$, definimos el espacio cociente:

$$F_nC_K(X) = F_n(X)/F_n(K, X),$$

Conceptos Básicos

Sean X un continuo, $K \subset X$ un compacto no vacío y $n > 1$, definimos el espacio cociente:

$$F_nC_K(X) = F_n(X)/F_n(K, X),$$

Consideremos a $F_nC_K(X)$ con la topología cociente.

Conceptos Básicos

Sean X un continuo, $K \subset X$ un compacto no vacío y $n > 1$, definimos el espacio cociente:

$$F_nC_K(X) = F_n(X)/F_n(K,X),$$

Consideremos a $F_nC_K(X)$ con la topología cociente.

Teorema

Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ con $n > 1$ y $K \subset X$ con a lo más n puntos, entonces $F_nC_K(X)$ es un continuo.

- Si K tiene exactamente n puntos

$$F_nC_K(X) \text{ es homeomorfo a } F_n(X).$$

Conceptos Básicos

Sea $\pi^X_{n,K} : F_n(X) \to F_nC_K(X)$ la función cociente.

Conceptos Básicos

Sea $\pi^X_{n,K} : F_n(X) \to F_nC_K(X)$ la función cociente.

Denotemos por $F^X_{n,K} = \pi^X_{n,K}(F_n(K, X))$.

- ○ $F_n(X) - F_n(K, X)$ es homeomorfo a $F_nC_K(X) - \{F^X_{n,K}\}$;

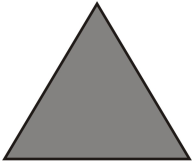
∘ $F_n(X) - F_n(K, X)$ es homeomorfo a $F_nC_K(X) - \{F^X_{n,K}\}$;

∘ $F_n(X - \{p\})$ es homeomorfo a $F_nC_{\{p\}}(X) - \{F^X_{n,\{p\}}\}$, para cada $p \in X$.

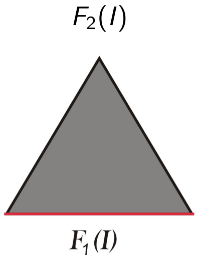
Modelos Geométricos para $F_2C_{\{p\}}(X)$, para cuando X es un arco, la circunferencia y triodo simple

$F_2C_{\{p\}}(I)$

$F_2(I)$



$F_2C_{\{p\}}(I)$



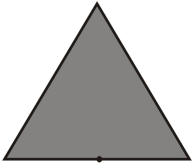
$F_2C_{\{p\}}(I)$

Sea $p \in I - \{0,1\}$,

$F_2C_{\{p\}}(I)$

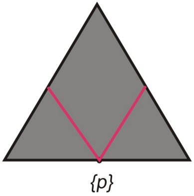
Sea $p \in I - \{0, 1\}$,

$F_2(I)$



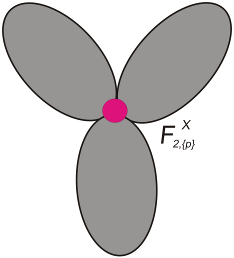
$F_2C_{\{p\}}(I)$

$F_2(I)$

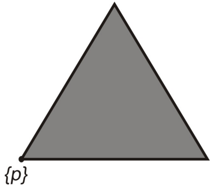


$F_2(\{p\}, I)$.

$F_2C_{\{p\}}(I)$

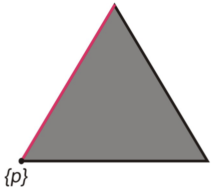


$F_2C_{\{p\}}(I)$



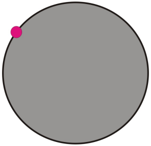
$F_2C_{\{p\}}(I)$

$F_2(\{p\}, I)$

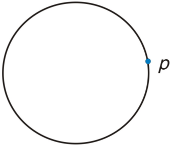


$F_2C_{\{p\}}(I)$

$F^X_{2,\{p\}}$

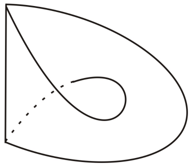


S^1



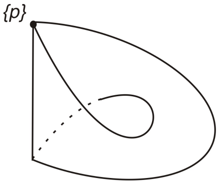
$F_2C_{\{p\}}(S^1)$

$F_2(S^1)$



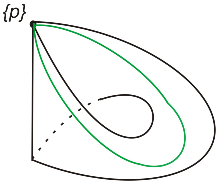
$F_2C_{\{p\}}(S^1)$

$F_2(S^1)$

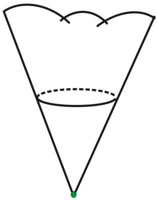


$F_2C_{\{p\}}(S^1)$

$F_2(\{p\}, S^1)$

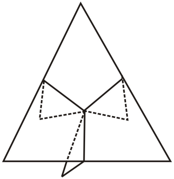


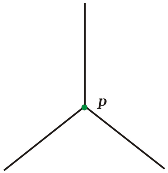
$F_2C_{\{p\}}(S^1)$



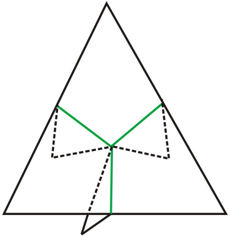
$F_2C_{\{p\}}(T)$

$F_2(T)$

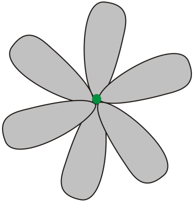


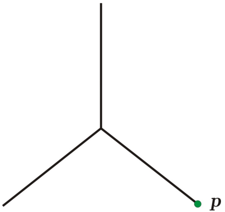

p

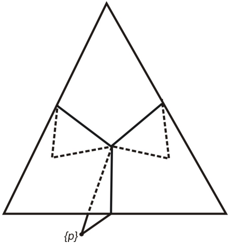
$F_2(\{p\}, T)$

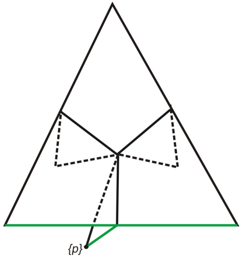


$F_2C_{\{p\}}(T)$



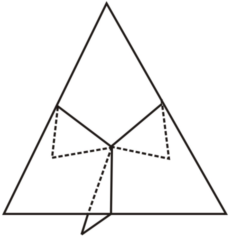

p

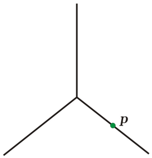

{p}

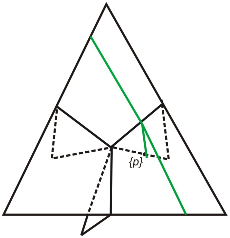


$F_2(\{p\}, T)$

$F_2C_{\{p\}}(T)$




p



$F_2(\{p\}, T)$

Resultados para $F_nC_K(X)$

Definición

Un punto $p \in X$ es de corte, si $X - \{p\}$ es no conexo.

Resultados para $F_nC_K(X)$

Teorema 1.

Sean X un continuo, $p \in X$ y $n \in \mathbb{N}$, con $n > 1$, entonces p es punto de corte en X si y sólo si $F^X_{n,\{p\}}$ es de corte en $F_nC_{\{p\}}(X)$.

Bosquejo de la Prueba

$\Rightarrow$) Sea $p \in X$ punto de corte,

Bosquejo de la Prueba

$\Rightarrow$) Sea $p \in X$ punto de corte, entonces existen U y V abiertos no vacíos y ajenos de X tales que $X - \{p\} = U \cup V$.

Bosquejo de la Prueba

$\Rightarrow$) Sea $p \in X$ punto de corte, entonces existen U y V abiertos no vacíos y ajenos de X tales que $X - \{p\} = U \cup V$.
Definimos

$$\mathcal{U} = \langle U \rangle_n;$$
$$\mathcal{V} = \langle X - \{p\}, V \rangle_n.$$

Bosquejo de la Prueba

$$\mathcal{U} \neq \emptyset \neq \mathcal{V},$$

Bosquejo de la Prueba

$$\mathcal{U} \neq \emptyset \neq \mathcal{V},$$

$\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son abiertos en X,

Bosquejo de la Prueba

$$\mathcal{U} \neq \emptyset \neq \mathcal{V},$$

$\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son abiertos en X,

$$F_n(X) - F_n(\{p\}, X) = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}.$$

Bosquejo de la Prueba

$$\mathcal{U} \neq \emptyset \neq \mathcal{V},$$

$$\mathcal{U} \text{ y } \mathcal{V} \text{ son abiertos en } X,$$

$$F_n(X) - F_n(\{p\}, X) = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}.$$

Finalmente, $F_nC_{\{p\}}(X) - \{F^X_{n,\{p\}}\} = \pi^X_{n,\{p\}}(\mathcal{U}) \cup \pi^X_{n,\{p\}}(\mathcal{V})$.

Bosquejo de la Prueba

$\Leftarrow$) Sea $p \in X$.

Bosquejo de la Prueba

$\Leftarrow$) Sea $p \in X$.
Supongamos que $F^X_{n,\{p\}}$ es punto de corte en $F_n C_{\{p\}}(X)$.

Bosquejo de la Prueba

$\Leftarrow$) Sea $p \in X$.
Supongamos que $F^X_{n,\{p\}}$ es punto de corte en $F_nC_{\{p\}}(X)$.

Si $X - \{p\}$ es conexo.

Bosquejo de la Prueba

$\Leftarrow$) Sea $p \in X$.
Supongamos que $F^X_{n,\{p\}}$ es punto de corte en $F_nC_{\{p\}}(X)$.

Si $X - \{p\}$ es conexo.

Entonces $F_n(X - \{p\})$ es conexo, pero

Bosquejo de la Prueba

$\Leftarrow$) Sea $p \in X$.
Supongamos que $F^X_{n,\{p\}}$ es punto de corte en $F_nC_{\{p\}}(X)$.

Si $X - \{p\}$ es conexo.

Entonces $F_n(X - \{p\})$ es conexo, pero

$$F_n(X - \{p\}) \simeq F_nC_{\{p\}}(X) - \{F^X_{n,\{p\}}\}$$

Bosquejo de la Prueba

$\Leftarrow$) Sea $p \in X$.
Supongamos que $F^X_{n,\{p\}}$ es punto de corte en $F_nC_{\{p\}}(X)$.

Si $X - \{p\}$ es conexo.

Entonces $F_n(X - \{p\})$ es conexo, pero

$$F_n(X - \{p\}) \simeq F_nC_{\{p\}}(X) - \{F^X_{n,\{p\}}\}$$

de manera que $F_nC_{\{p\}}(X) - \{F^X_{n,\{p\}}\}$ es conexo, lo cual es imposible.

Bosquejo de la Prueba

$\Leftarrow$) Sea $p \in X$.
Supongamos que $F^X_{n,\{p\}}$ es punto de corte en $F_nC_{\{p\}}(X)$.

Si $X - \{p\}$ es conexo.

Entonces $F_n(X - \{p\})$ es conexo, pero

$$F_n(X - \{p\}) \simeq F_nC_{\{p\}}(X) - \{F^X_{n,\{p\}}\}$$

de manera que $F_nC_{\{p\}}(X) - \{F^X_{n,\{p\}}\}$ es conexo, lo cual es imposible.
Por lo tanto $X - \{p\}$ es no conexo.

Teorema 2.

Sea X un continuo homogeneo, entonces para cada par de puntos $p, q \in X$, $F_nC_{\{p\}}(X)$ es homeomorfo a $F_nC_{\{q\}}(X)$.

Teorema 2.

Sea X un continuo homogeneo, entonces para cada par de puntos $p, q \in X$, $F_nC_{\{p\}}(X)$ es homeomorfo a $F_nC_{\{q\}}(X)$.

Teorema 3.

Sean X un continuo, $p \in X$ y $m \in \mathbb{N}$, si $X - \{p\}$ tiene m componentes, entonces $F_2C_{\{p\}}(X) - \{F^X_{2,\{p\}}\}$ tiene $\frac{m+m^2}{2}$ componentes.

Teorema 4.

Sean X una gráfica finita y $p \in X$ un punto final, entonces $F_2C_{\{p\}}(X)$ es homeomorfo a $F_2(X)$ si y sólo si X es un $n-$odo simple o un arco.

Gracias