Relaciones entre un espacio X y su n-eśimo producto simétrico $F_n(X)$.

Nataly Mondragón Chigora
Dr. Fernando Orozco Zitli
Dr. Félix Capulín Pérez

UAEMéx

2016

El n-ésimo producto simétrico de X

El hiperespacio $F_n(X)$

Sea X un espacio topológico y de Hausdorff. Para $n \in \mathbb{N}$, definimos el n-ésimo producto simétrico de X, como el conjunto:

$$F_n(X) = \{A \subset X : A \textit{ tiene a lo más } n \textit{ puntos}\}.$$

El conjunto $F_n(X)$ es dotado con la topología de Vietoris.

Sea X un espacio topológico de Hausdorff. Estamos interesados en las relaciones que hay entre las condiciones $a)$ y $b)$, donde P es una propiedad topológica.

a) X tiene P,

b) $F_n(X)$ tiene P.

Para un continuo se tiene lo siguiente:
X es un continuo si y sólo si $F_n(X)$ es un continuo.

Regularidad

Teorema

X es un espacio regular si y sólo si $F_n(X)$ es un espacio regular.

Espacios primero numerables

Teorema

X es un espacio primero numerable si y sólo si $F_n(X)$ es un espacio primero numerable.

Espacios de Lãsnev

Definición

Un espacio X es un espacio de Lãsnev si es la imagen cerrada de un espacio métrico.

Teorema

Si $F_n(X)$ es un espacio de Lãsnev, entonces X es un espacio de Lãsnev.

Si X es un espacio de Lãsnev, entonces es $F_n(X)$ un espacio de Lãsnev para algún entero positivo mayor o igual a dos?

Base por parejas

Definición

Sea X un espacio de Hausdorff. Decimos que $\mathbb{P} \subset P(X)\text{x}P(X)$ es una base por parejas para X si cumple lo siguiente:

1. para cada $(A, B) \in \mathbb{P}$, A es abierto de X,
2. para cada punto $x \in X$ y cada vecindad U de x en X, existe $(A, B) \in \mathbb{P}$ tal que $x \in A \subset B \subset U$.

Ejemplo

Sea X un espacio topológico de Hausdorff. Si β es una base para la topología de X, entonces $\mathbb{P} = \beta$ x β es base por parejas.

Base por parejas

Teorema

X tiene una base por parejas si y sólo si $F_n(X)$ tiene una base por parejas.

Separabilidad

Teorema

X es separable si y sólo si $F_n(X)$ es separable.

Redes

Definición

Un espacio X tiene $\mathcal{N}$ como una red siempre que $\mathcal{N}$ es una familia de subconjuntos de X tal que para cada $x \in X$ y cada subconjunto abierto U de X con $x \in U$,existe $N \in \mathcal{N}$tal que $x \in N \subset U$.

Ejemplo

Sea X un espacio topológico de Hausdorff, β base para la topología de X, entonces β es una red para X.

Espacios Cósmicos

Definición

Un espacio X es cósmico, si X tiene una red numerable.

Ejemplo

Todo espacio X segundo numerable es un espacio cósmico.

Espacios Cósmicos

Teorema

X es cósmico si y sólo si $F_n(X)$ es cósmico.

Espacios localmente compactos

Teorema

X es localmente compacto si y sólo si $F_n(X)$ es localmente compacto.