Dinámicas en Hiperespacios de Continuos

Melany Dayana Mejía Caviedes

Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
Bucaramanga

Octubre 2016

Sistema dinámico discreto

Sean X un espacio métrico, compacto sin puntos aislados y $f : X \to X$ una función continua. Llamaremos *sistema dinámico discreto* a la pareja (X, f).

Sistema dinámico discreto

Sean X un espacio métrico, compacto sin puntos aislados y $f : X \to X$ una función continua. Llamaremos *sistema dinámico discreto* a la pareja (X, f).

Definamos para cada entero positivo n, a $f^n : X \to X$ como la n-ésima iteración de f, es decir

$$
\begin{aligned}
f^1 &= f, \\
f^2 &= f \circ f, \\
f^3 &= f^2 \circ f, \\
&\vdots \\
f^n &= f^{n-1} \circ f
\end{aligned}
$$

con $f^0 = I_d$, donde I_d es la función identidad de X.

La órbita de x bajo f

Definición

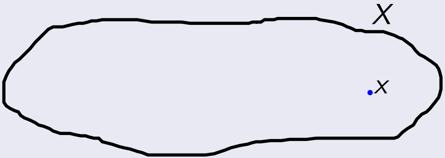
Dado un sistema dinámico discreto (X, f) y un punto $x \in X$ la siguiente sucesión será la órbita de x bajo f

La órbita de x bajo f

Definición

Dado un sistema dinámico discreto (X, f) *y un punto* $x \in X$ *la siguiente sucesión será la órbita de* x *bajo* f

$$o(x, f) := \left\{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \ldots\right\}.$$

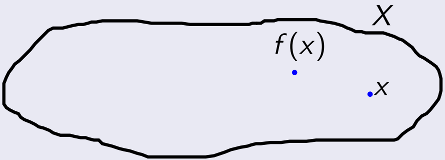


La órbita de x bajo f

Definición

Dado un sistema dinámico discreto (X, f) *y un punto* $x \in X$ *la siguiente sucesión será la órbita de* x *bajo* f

$$o(x, f) := \left\{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \ldots\right\}.$$

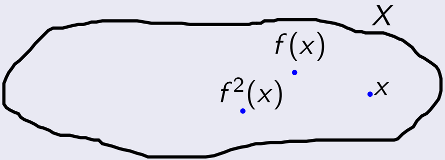


La órbita de x bajo f

Definición

Dado un sistema dinámico discreto (X, f) y un punto $x \in X$ la siguiente sucesión será la órbita de x bajo f

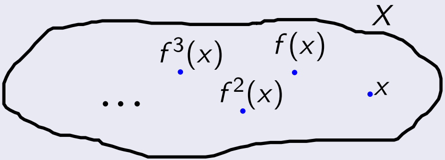
$$o(x, f) := \left\{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \ldots\right\}.$$



Definición

Dado un sistema dinámico discreto (X, f) y un punto $x \in X$ la siguiente sucesión será la órbita de x bajo f

$$o(x, f) := \left\{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \ldots\right\}.$$



Punto periódico

Definición

Dado un sistema dinámico discreto (X, f). Decimos que x es un punto periódico de f; o tiene una órbita periódica bajo f; si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = x$.

Punto periódico

Definición

Dado un sistema dinámico discreto (X, f). *Decimos que* x *es un punto periódico de* f; *o tiene una órbita periódica bajo* f; *si existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $f^n(x) = x$.

Punto periódico

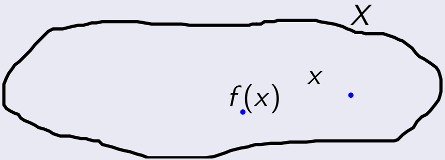
Definición

Dado un sistema dinámico discreto (X, f)*. Decimos que* x *es un punto periódico de* f*; o tiene una órbita periódica bajo* f*; si existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $f^n(x) = x$*.*

Punto periódico

Definición

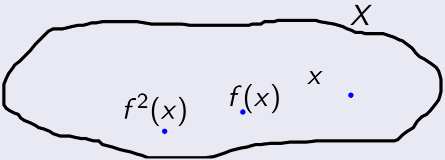
Dado un sistema dinámico discreto (X, f). *Decimos que* x *es un punto periódico de* f; *o tiene una órbita periódica bajo* f; *si existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $f^n(x) = x$.



Punto periódico

Definición

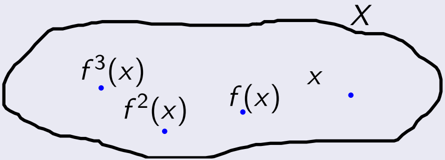
Dado un sistema dinámico discreto (X, f). *Decimos que* x *es un punto periódico de* f; *o tiene una órbita periódica bajo* f; *si existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $f^n(x) = x$.



Punto periódico

Definición

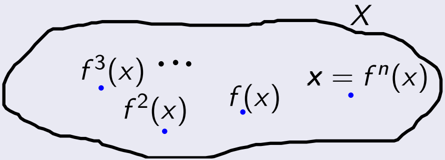
Dado un sistema dinámico discreto (X, f). *Decimos que* x *es un punto periódico de* f; *o tiene una órbita periódica bajo* f; *si existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $f^n(x) = x$.



Punto periódico

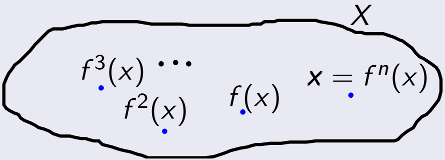
Definición

Dado un sistema dinámico discreto (X, f)*. Decimos que* x *es un punto periódico de* f*; o tiene una órbita periódica bajo* f*; si existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $f^n(x) = x$*.*



Definición

Dado un sistema dinámico discreto (X, f). Decimos que x es un punto periódico de f; o tiene una órbita periódica bajo f; si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = x$.



Al conjunto de todos los puntos periódicos de f lo denotaremos por $Per(f)$.

La función tienda T

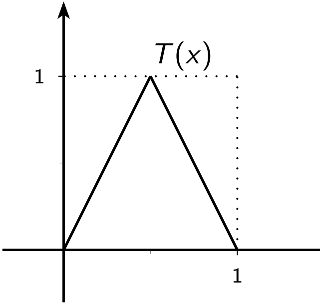
Sea $T : [0,1] \to [0,1]$ dada por

$$T(x) := \begin{cases} 2x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]; \\ 2 - 2x & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

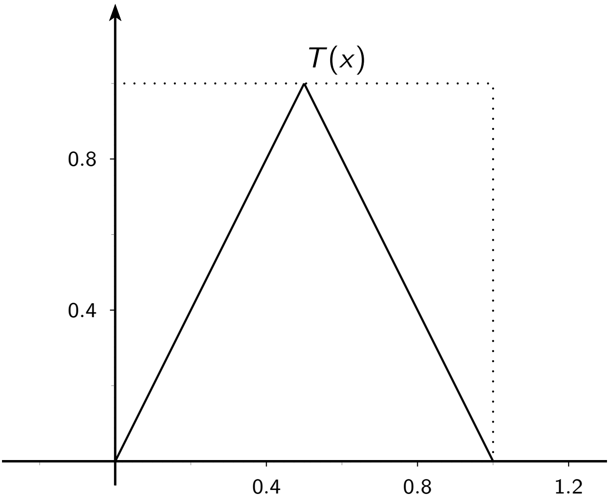
La función tienda T

Sea $T : [0,1] \to [0,1]$ dada por

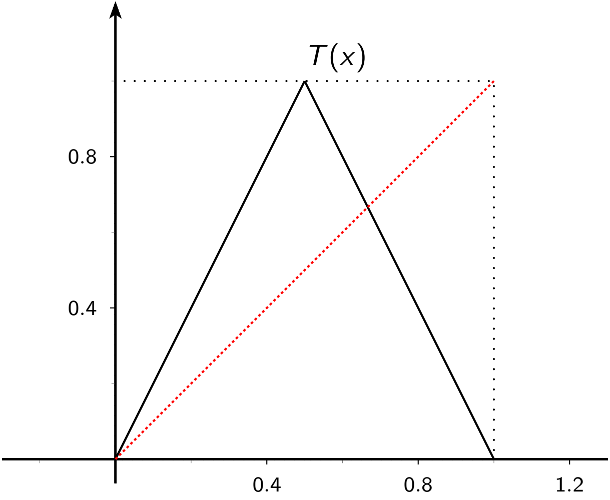
$$T(x) := \begin{cases} 2x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]; \\ 2 - 2x & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$



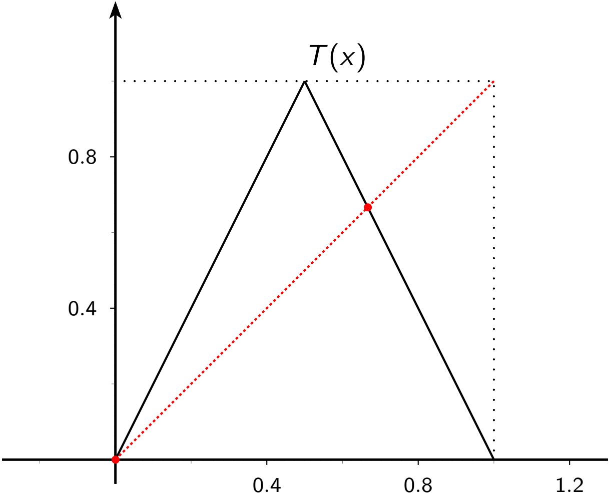
Puntos fijos y de período dos en T



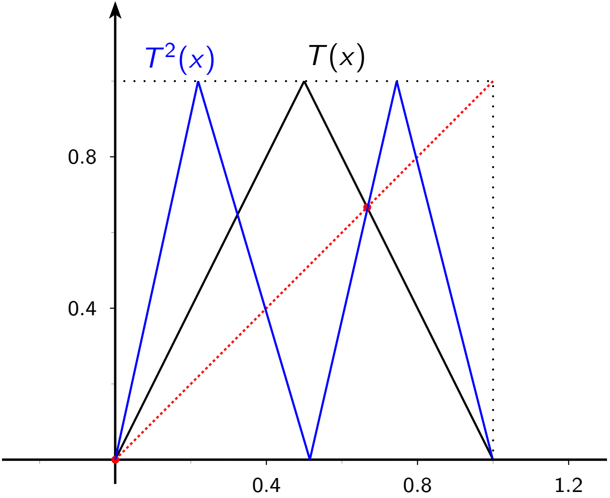
Puntos fijos y de período dos en T



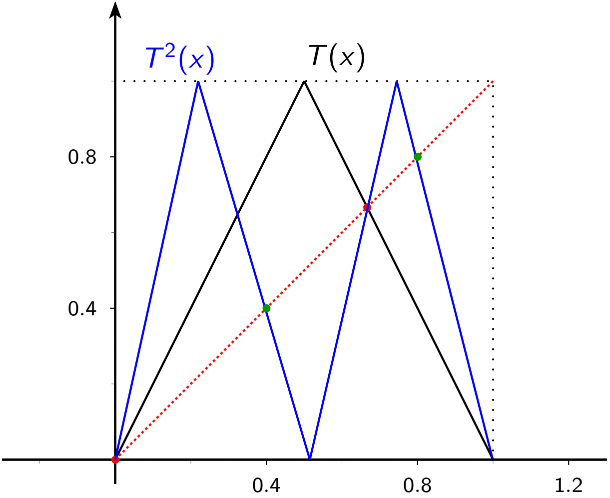
Puntos fijos y de período dos en T



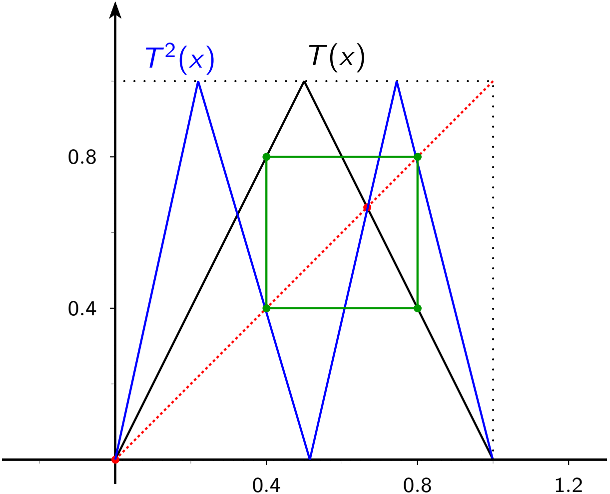
Puntos fijos y de período dos en T



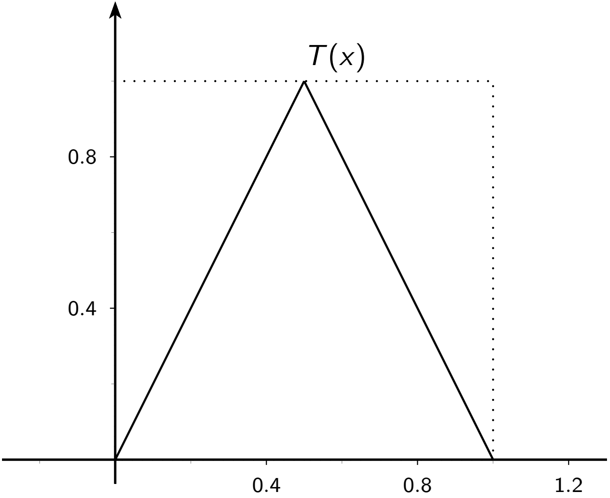
Puntos fijos y de período dos en T



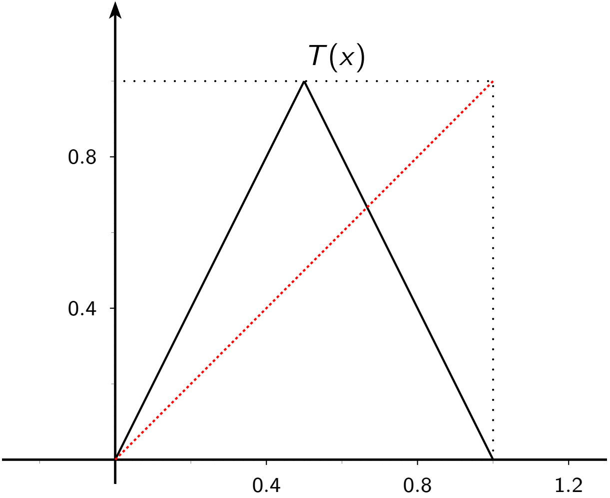
Puntos fijos y de período dos en T



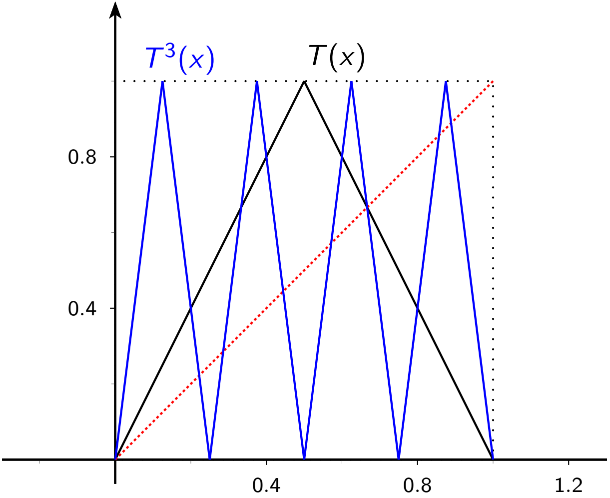
Puntos de período tres en T



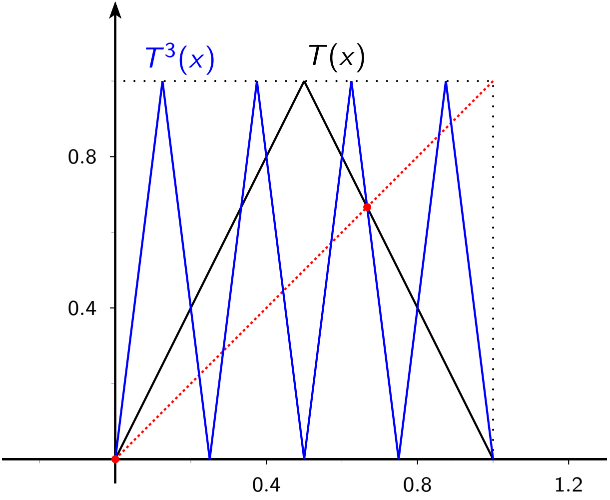
Puntos de período tres en T



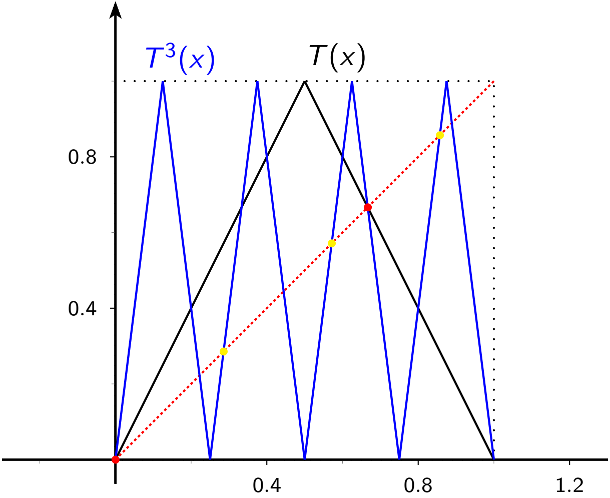
Puntos de período tres en T



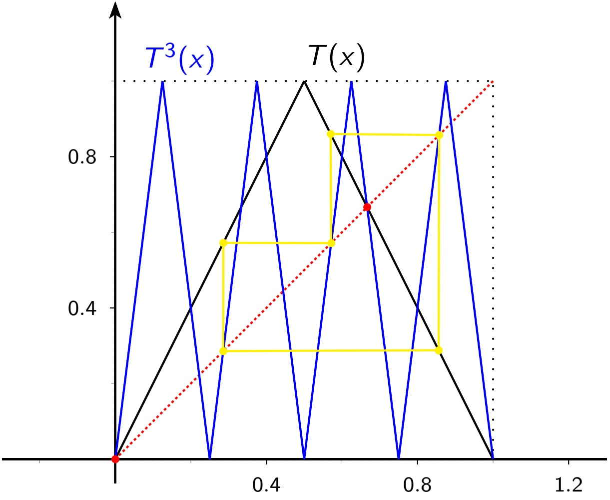
Puntos de período tres en T



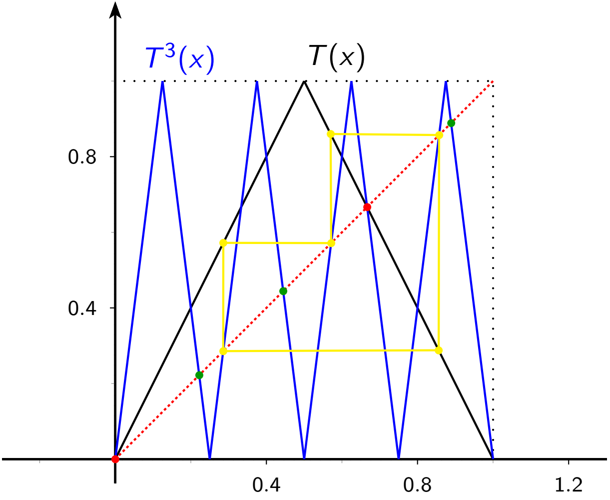
Puntos de período tres en T



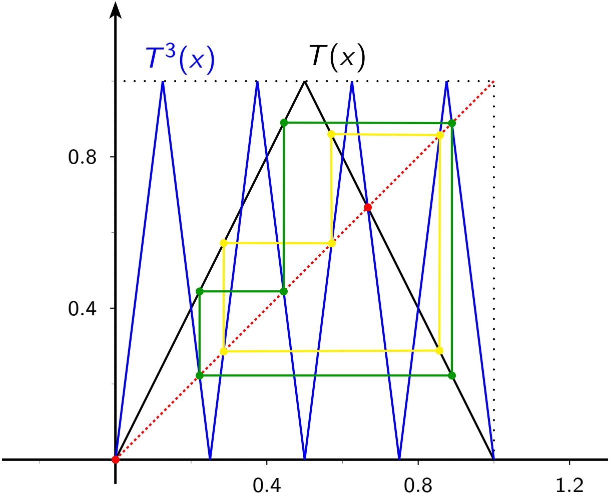
Puntos de período tres en T

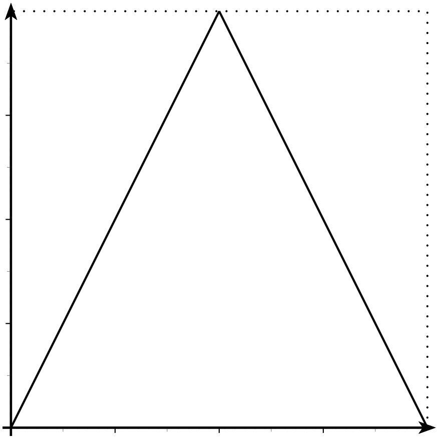


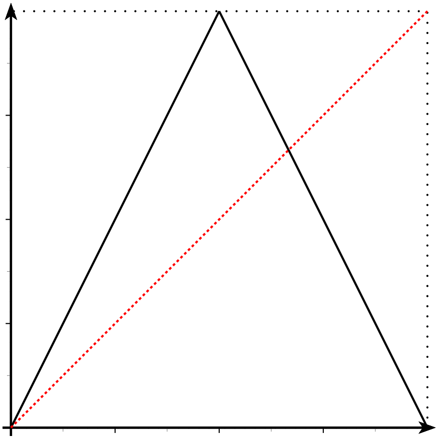
Puntos de período tres en T

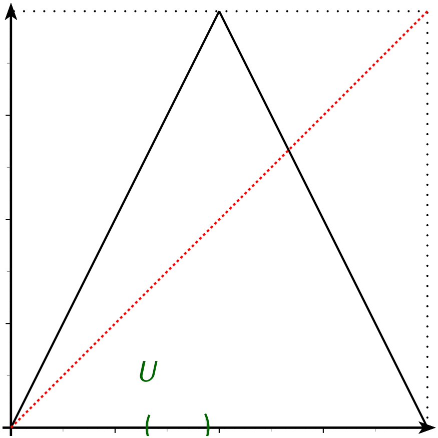


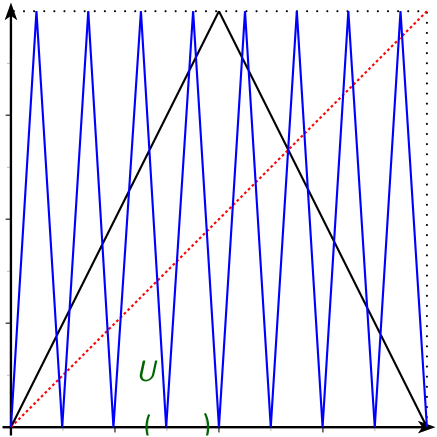
Puntos de período tres en T

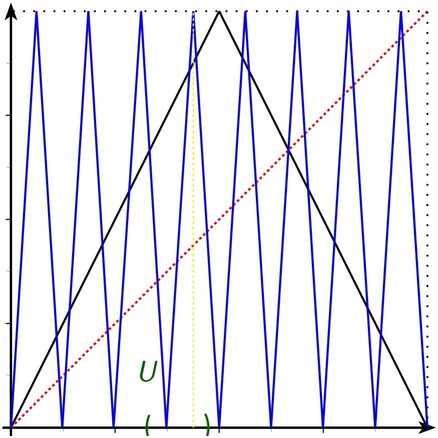


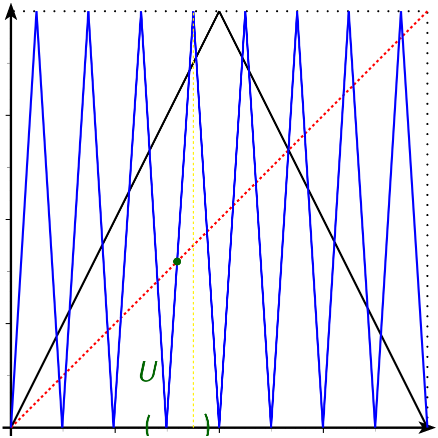


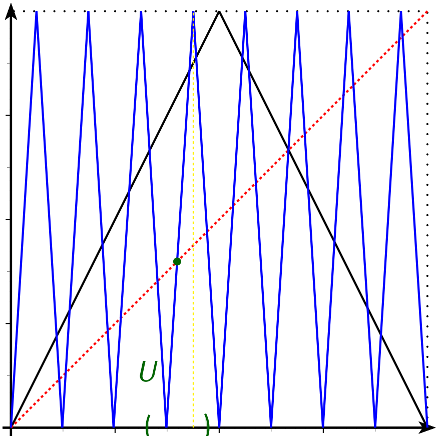



U


U


U
(   )


U
( )



Teorema

El conjunto $Per(T)$ *es denso en* $[0,1]$.

El Hiperespacio 2^X y la función inducida 2^f

Sean X un espacio métrico, compacto no vacío y 2^X el Hiperespacio dado por:

$$2^X := \{A \subseteq X : A \text{ es cerrado y no vació}\}.$$

El Hiperespacio 2^X y la función inducida 2^f

Sean X un espacio métrico, compacto no vacío y 2^X el Hiperespacio dado por:

$$2^X := \{A \subseteq X : A \text{ es cerrado y no vació}\}.$$

Dado X un espacio métrico, compacto y $f : X \to X$ una función continua y sobreyectiva. Se define la función $2^f : 2^X \to 2^X$ como $2^f(A) = f(A)$ para cada $A \in 2^X$. La función 2^f la llamamos función inducida.

Sea $\mathcal{C} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ el conjunto de Cantor

Sea $\mathcal{C} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ el conjunto de Cantor

Dado $\omega \in \{0,1\}^n$, para algun $n \in \mathbb{N}$. Definimos

$$[\omega] = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{C} \mid x_i = \omega_i, \forall i = \{1, 2, \ldots, n\}\}$$

El siguiente conjunto

$$\mathcal{B} = \{[\omega] \mid \omega \in \{0,1\}^n \text{ para algun } n \in \mathbb{N}\}$$

es una base para la topología de $\mathcal{C}$.

Cantor

$\mathcal{C}$

Cantor

$\mathcal{C}$

$\mathcal{C}$

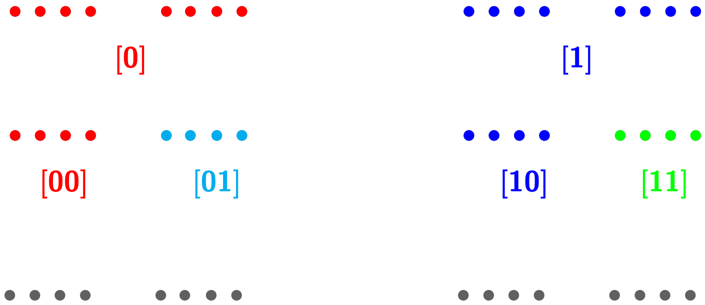
Cantor

$\mathcal{C}$

$\mathcal{C}$

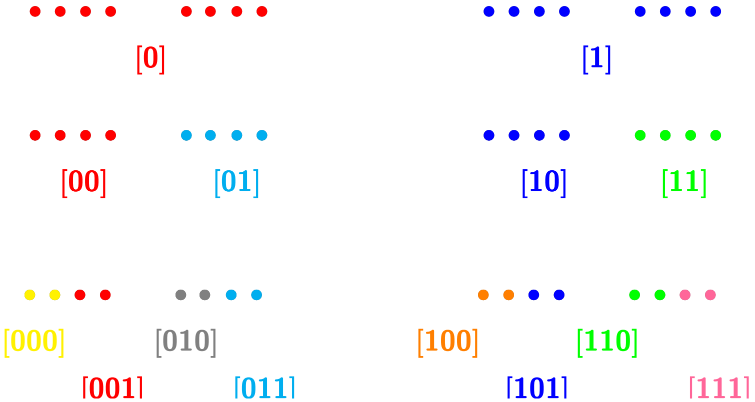
Cantor

$\mathcal{C}$



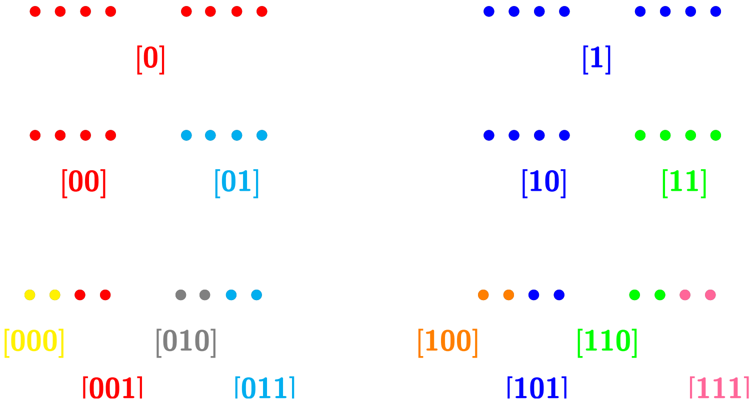
Cantor

$\mathcal{C}$



Cantor

$\mathcal{C}$



Si $\omega_i \in \{0,1\}^k, \forall i \in \{1,\ldots 2^k\}$ entonces $\mathcal{C} = \bigcup_{i=1}^{2^k}[\omega_i]$ y $[\omega_i] \cap [\omega_j] = \emptyset,\ \forall i \neq j$.

El Odómetro

$$f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

$$f((x_i)_{i=1}^{\infty}) = \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

El Odómetro

$$f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

$$f((x_i)_{i=1}^{\infty}) = \begin{cases} (0,0,0,0,\ldots) & \text{si } x_i = 1, \ \forall i \in \mathbb{N} \\ \\ \end{cases}$$

El Odómetro

$$f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

$$f((x_i)_{i=1}^{\infty}) = \begin{cases} (0,0,0,0,\ldots) & si\ \ x_i = 1,\ \forall i \in \mathbb{N} \\ (0,\ldots,\underbrace{1}_{x_i},x_{i+1},x_{i+2},\ldots) & si\ \ i = \text{mín}\{i \in \mathbb{N} : x_i = 0\}. \end{cases}$$

Odómetro

$\mathcal{C}$

$\color{red}{[\mathbf{0}]}$ $\color{blue}{[\mathbf{1}]}$

$\color{red}{\bullet\bullet\bullet\bullet \quad \bullet\bullet\bullet\bullet}$ $\color{blue}{\bullet\bullet\bullet\bullet \quad \bullet\bullet\bullet\bullet}$

Odómetro

$\mathcal{C}$

$$\textcolor{red}{\mathbf{[0]}} \xrightarrow{f(\textcolor{red}{[0]})=\textcolor{blue}{[1]}} \textcolor{blue}{\mathbf{[1]}}$$

Odómetro

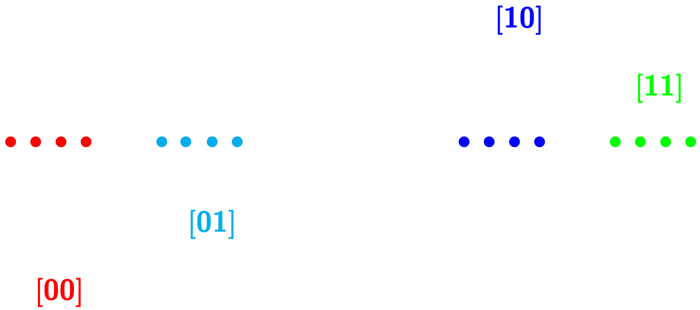
$\mathcal{C}$

$$[\mathbf{0}] \xrightarrow{f([0])=[1]} [\mathbf{1}]$$

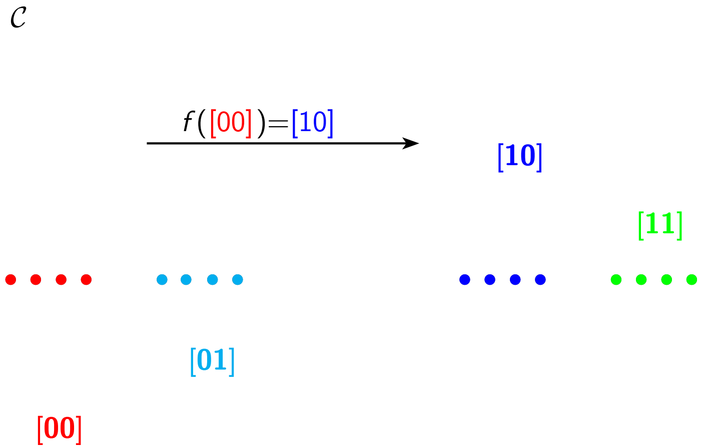
$$\xleftarrow[f([1])=[0]]{}$$

Odómetro

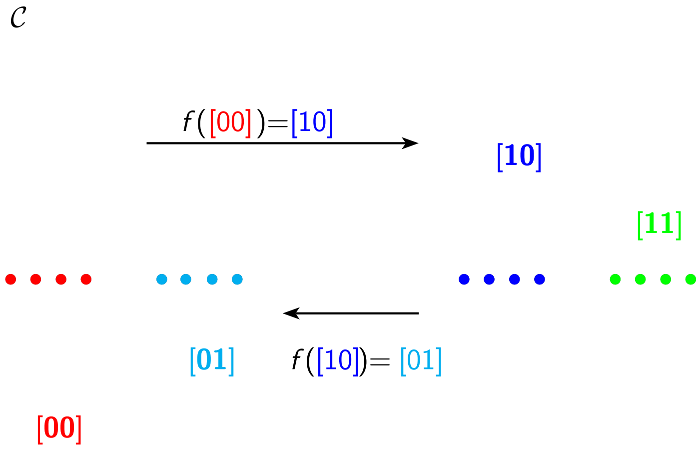
$\mathcal{C}$



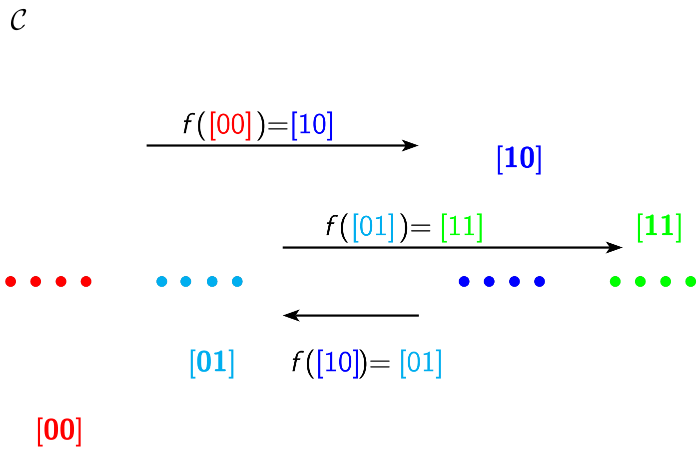
Odómetro



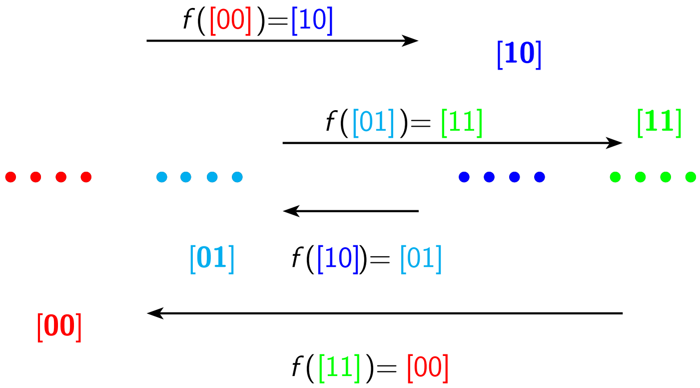
Odómetro



Odómetro

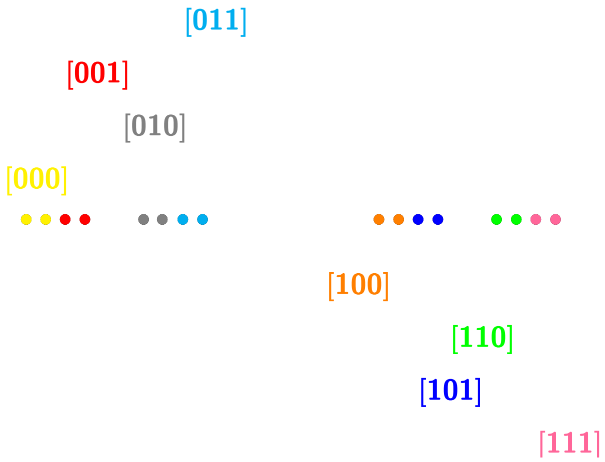


$\mathcal{C}$



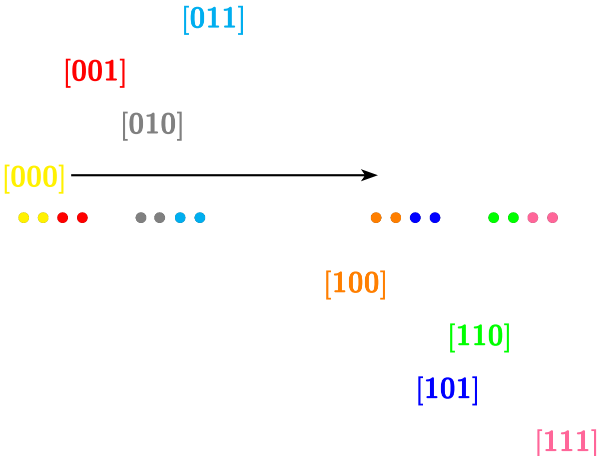
Odómetro ó Máquina sumadora

$\mathcal{C}$



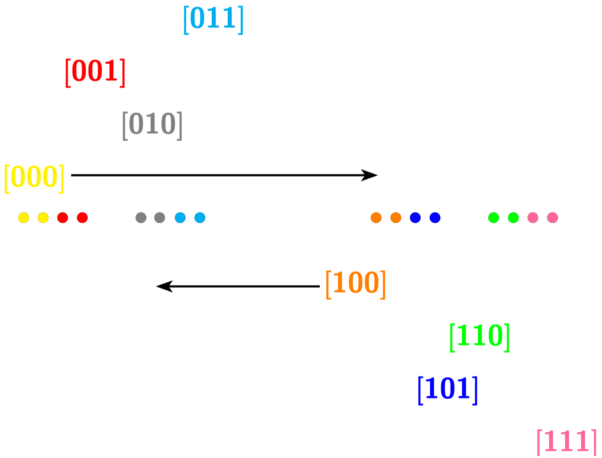
Odómetro ó Máquina sumadora

$\mathcal{C}$

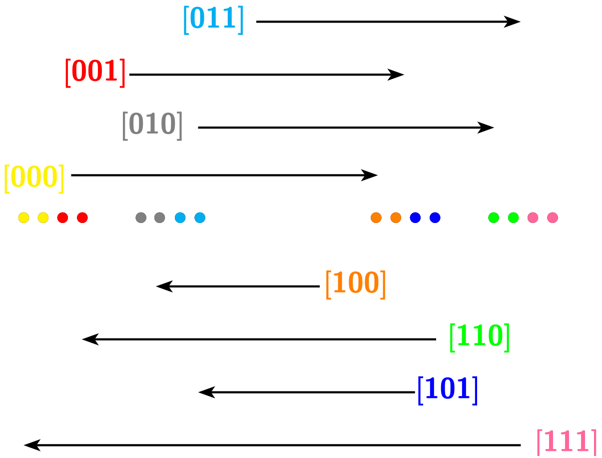


Odómetro ó Máquina sumadora

$\mathcal{C}$



$\mathcal{C}$



Proposición (J. Banks)

Si $\mathcal{C}$ el conjunto de Cantor y $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ la función definida anteriormente entonces $Per(2^f)$, es denso $2^{\mathcal{C}}$.

Resultados del Odómetro

Proposición (J. Banks)

Si $\mathcal{C}$ el conjunto de Cantor y $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ la función definida anteriormente entonces $Per(2^f)$, es denso $2^{\mathcal{C}}$.

Proposición (J. Banks)

Si $\mathcal{C}$ el conjunto de Cantor y $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ la función definida anteriormente entonces el conjunto el conjunto de los puntos periódicos de f, $Per(f)$, es vacio.

Proposición (J. Banks)

Dado (X, f) *sistema dinámino discreto. Si* $\overline{Per(f)} = X$ *entonces* $\overline{Per(2^f)} = 2^X$

Proposición (J. Banks)

Dado (X, f) sistema dinámino discreto. Si $\overline{Per(f)} = X$ entonces $\overline{Per(2^f)} = 2^X$

Pregunta

Dado un sistema dinámino discreto (X, f). ¿Qué condiciones debe tener el espacio X o la función f para que $\overline{Per(2^f)} = 2^X$ implique $\overline{Per(f)} = X$?

Resultados

Proposición (J. Banks)

Sea (X, f) *un sistema dinámico discreto. Si* X *es un arco o una gráfica y* $\overline{Per(2^f)} = 2^X$ *entonces* $\overline{Per(f)} = X$.

Resultados

Proposición (J. Banks)

Sea (X, f) un sistema dinámico discreto. Si X es un arco o una gráfica y $\overline{Per(2^f)} = 2^X$ entonces $\overline{Per(f)} = X$.

Proposición (Acosta, Hernández, Naghmouchi y Oprocha)

Sea (X, f) un sistema dinámico discreto. Si X es un continuo casienrejado y $\overline{Per(2^f)} = 2^X$ entonces $\overline{Per(f)} = X$.

Resultados

Proposición (J. Banks)

Sea (X, f) un sistema dinámico discreto. Si X es un arco o una gráfica y $\overline{Per(2^f)} = 2^X$ entonces $\overline{Per(f)} = X$.

Proposición (Acosta, Hernández, Naghmouchi y Oprocha)

Sea (X, f) un sistema dinámico discreto. Si X es un continuo casienrejado y $\overline{Per(2^f)} = 2^X$ entonces $\overline{Per(f)} = X$.

Proposición (I. Naghmouchi y H. Abouda)

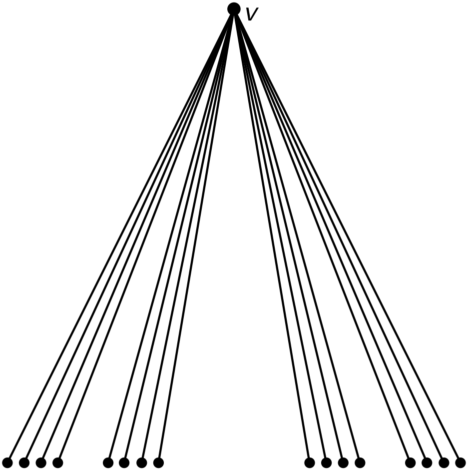
Sea (X, f) un sistema dinámico discreto. Si X es una dendrita, f es una función monótona y $\overline{Per(2^f)} = 2^X$ entonces $\overline{Per(f)} = X$.

Teorema

Existe un dendroide X *y un homeomorfismo* $h : X \to X$ *tal que* $\overline{Per(2^h)} = 2^X$ *y* $|Per(h)| = 1$.

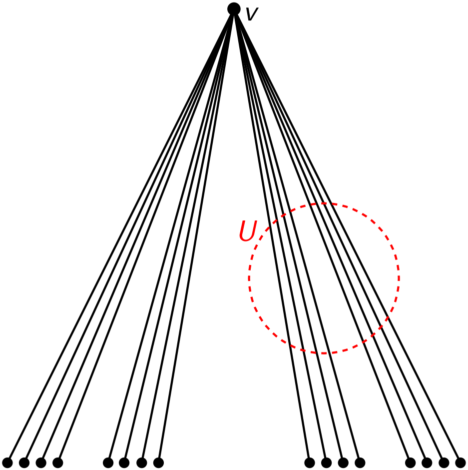
Teorema

Existe un dendroide X y un homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $\overline{Per(2^h)} = 2^X$ *y* $|Per(h)| = 1$.



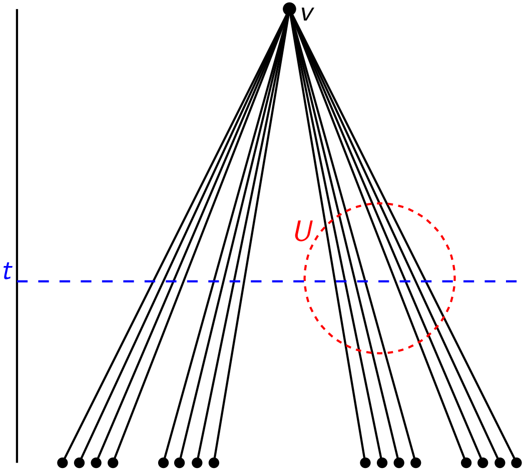
Teorema

Existe un dendroide X y un homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $\overline{Per(2^h)} = 2^X$ y $|Per(h)| = 1$.



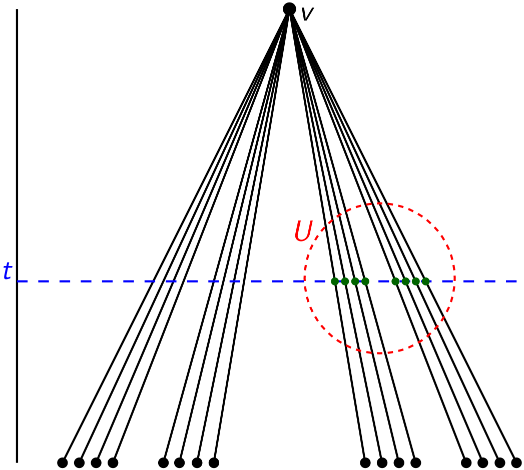
Teorema

Existe un dendroide X y un homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $\overline{Per(2^h)} = 2^X$ y $|Per(h)| = 1$.



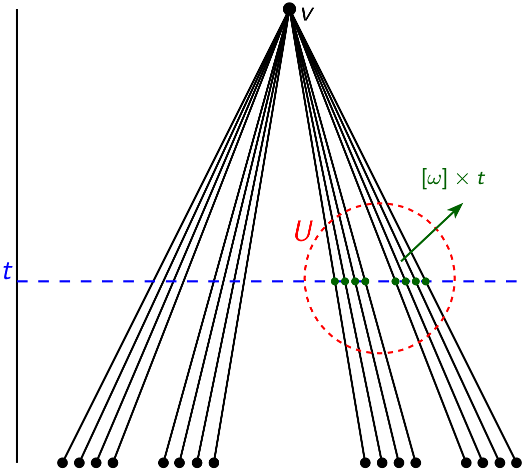
Teorema

Existe un dendroide X y un homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $\overline{Per(2^h)} = 2^X$ *y* $|Per(h)| = 1$.



Teorema

Existe un dendroide X y un homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $\overline{Per(2^h)} = 2^X$ *y* $|Per(h)| = 1$.



Referencias

- Abouda H. and Naghmouchi I.,“Monotone maps on dendrites and their induced maps”, Topology and its Applications 204 (2016), pág. 121–134.
- Acosta G., Hernández R. Naghmouchi I. and Oprocha P., “Periodic points and transitivity on dendrites”, Ergod. Theory Dyn. Syst. (2016), pág. 1–17.
- Banks J., “Chaos for induced hyperspace maps”, Chaos Solitons Fractals 25 (2005), no. 3, pág. 1581–1583.
- Méndez-Lango H., “On density of periodic points for induced hyperspace maps”, Topology Proc. 35 (2010), pág. 281–290.